

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS
ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

Control de elevación de un cuadricóptero por técnicas lineales

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL TITULO

LICENCIADO EN INGENIERÍA EN
SISTEMAS ELECTRÓNICOS
INDUSTRIALES

P R E S E N T A:

OSIEL MORALES CHÁVEZ

D I R E C T O R

DR. MARCOS ÁNGEL GONZÁLEZ OLVERA

Ciudad de México, junio de 2018

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Dedico este trabajo completamente al esfuerzo desinteresado de mi madre que confío y me apoyo a lo largo de mi carrera. A mis compañeros y amigos que compartieron una lucha día a día a lo largo de nuestra preparación.

Agradecimientos

Doy gracias a las personas que me apoyaron a lo largo de este trabajo de titulación tanto de forma directa, así como de forma indirecta durante el tiempo en el cual se llevo acabo el estudio, análisis y trámites legales para la aprobación de esta tesis.

Siendo este un logros más dentro de mi vida académica, existen personas a las cuales agradezco y dedico este trabajo, la mujer de la cual he tenido un apoyó de manera incondicional en todo momento de mi vida, mi madre, la señora Marcela Chávez Quintanar y en segunda instancia pero no menos importante, a mi esposa e hija, Sharity Guadalupe Gonzalez Narcizo y Helena Morales Gonzalez.

A mis compañeras de estudio las señoritas Aurora Mendoza Berber y Maribel Torres Hernández .

A mis profesores de carrera y en especial al Dr. Marcos Angel Gonzalez Olvera, por haberme aceptado como uno de sus tesistas y aconsejarme para poder desarrollar este trabajo y al Dr. Mauricio Angeles, por la orientación y guía con sus conocimientos dentro del área

Índice general

Agradecimientos	III
Lista de figuras	VII
Lista de tablas	IX
Introducción	XI
1. Antecedentes históricos	1
1.1. Aplicaciones militares	3
1.2. Aplicaciones Civiles de los VANT's	4
1.3. Uso lúdico	9
1.4. Clasificación de los VANT's	10
1.5. Controladores más usados	11
2. Conceptos básicos	13
2.1. Modelado mediante ecuaciones de Euler-Lagrange	14
2.1.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	17
2.1.2. Linealización	19
2.2. Técnicas de control	22
2.3. Control LQR	22
2.4. Control PID	26
2.5. Control PD	27
2.5.1. Acción proporcional	28
2.5.2. Acción proporcional y derivativa	29
3. Control fraccionario	31
3.1. Cálculo Fraccionario definición básica	33
3.2. Funciones especiales	34
3.3. Definición de derivada e integral fraccional	35
3.4. Grünwald-Letnikov integral y derivada fraccionaria	36
3.5. Integral y derivada fraccional de Riemann-Liouville	36

3.6.	Derivada fraccional de Caputo	38
3.7.	Modelos y representaciones	38
3.8.	Controladores fraccionarios	39
4.	Descripción del sistema	41
4.1.	Ángulos de navegación	41
4.2.	Modelo no lineal de un cuadricóptero	44
4.3.	Torque de un cuerpo	45
4.4.	Ecuación de movimiento para el eje x	49
4.5.	Ecuación de movimiento para el eje y	50
4.6.	Ecuación de movimiento para el eje z	50
4.7.	Ecuación de movimiento para el ángulo θ	51
4.8.	Ecuación de movimiento para el ángulo ϕ	53
4.9.	Ecuación de movimiento para el ángulo ψ	53
4.10.	Modelo de un cuadricóptero en espacio de estados	54
4.11.	Consideraciones	58
4.12.	Modelos simplificados	60
5.	Diseño de controladores	65
5.1.	Sistema regulador óptimo cuadrático	68
5.1.1.	Sistema desacoplado	68
5.1.2.	Sistema acoplado	76
5.2.	Control PD	79
5.3.	Control Fraccional	85

Índice de figuras

1.1. Globo cargado de bombas	1
1.2. Predator MQ-1	2
1.3. Configuraciones de la estructura de un cuadricóptero	6
1.4. Estructura de un motor sin escobillas.	6
1.5. Forma de la hélice	7
1.6. Variador de voltaje	7
1.7. Batería lipo	8
1.8. Tarjeta principal	8
1.9. Control remoto tipo joystick	8
1.10. Drones de uso lúdico.	9
1.11. Clasificación de los <i>VANT</i> s de acuerdo a su despegue.	10
2.1. Sistema regulador óptimo	23
2.2. Estructura general del controlador PID	27
2.3. Estructura general del controlador PD	28
2.4. Estructura general del controlador PD	30
3.1. Lazo ideal a partir del servo ideal.	32
4.1. Ángulos de Euler	42
4.2. Ángulos de Euler	42
4.3. Planos de rotación	43
4.4. Sistema propuesto	44
4.5. Diagrama del sistema	45
4.6. Fuerzas ejercidas sobre un cuerpo	46
4.7. Diagrama para análisis de torques	51
4.8. Diagrama para análisis de torques con $\psi = \pi/2$	52
4.9. Representación gráfica del punto de equilibrio	59
4.10. Comportamiento de $G(z)$	63
4.11. Traslación de un cuadricóptero en el eje x	63
4.12. Comportamiento del ángulo theta	64

5.1. Estructura de control general.	65
5.2. Diagrama a bloques en lazo abierto	66
5.3. Movimiento	67
5.4. Ángulos de rotación	67
5.5. Diagrama de bloques para el control en eje z.	69
5.6. Velocidad angular de la aeronave	70
5.7. Velocidad angular de los rotores.	71
5.8. Desplazamiento del eje y.	73
5.9. Movimiento del ángulo ϕ	74
5.10. Configuraciones y respuesta de motores	75
5.11. Diagrama de bloques control LQR acoplado.	76
5.12. Gráfico de movimiento lineal en 3D.	79
5.13. Comportamiento lineal en cada eje.	80
5.14. Respuesta a un escalón unitario y polos	81
5.15. Diagrama de bloques control PD.	81
5.16. Comparación del sistema ante una entrada escalón.	83
5.17. Modelo de dos grados de libertad	84
5.18. Polos de $G(Z)$ usando la estructura de dos grados de libertad.	84
5.19. Comparación del sistema ante una entrada escalón.	85
5.20. Modelo PD con variable fraccionaria	86
5.21. Comparación de controlador PD vs PD fraccionario.	87
5.22. Respuesta para diversos valores de q	88
5.23. Diagrama a bloques del control fraccionario en el eje z.	88
5.24. Respuesta del sistema no lineal.	89

Índice de cuadros

1.1. Aplicaciones civiles de los UAVs	5
1.2. Clasificación de VANT's por características	11
4.1. Valores para simulación del cuadricóptero	58
5.1. Raíces del cuasipoliomio.	87

Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados (VANT's), han sido de gran importancia en el ámbito militar. Son aeronaves que no requieren de un piloto a bordo para su funcionamiento. En los últimos conflictos bélicos del siglo XX, estas aeronaves tuvieron un gran éxito, por lo que los investigadores han desarrollado un gran interés en su construcción, la industria especializada dedica un gran esfuerzo al perfeccionamiento de los elementos que forman parte de un VANT, como lo es: la instrumentación, navegación, control, comunicaciones o sistemas de alimentación, entre otros.

Los VANT's tienen una amplia clasificación, para su análisis solo se tomara en consideración las aeronaves que despegan de forma vertical, estos tienen como característica principal un número específico de motores, mismos que le otorgan el nombre de cuadricóptero, es decir si posee cuatro motores.

Estas aeronaves posee una cantidad de elementos básicos, los cuales son indispensables para su funcionamiento sin importar la aplicación requerida, como lo son: chasis o fuselaje, motores, helices, tarjeta de adquisición de datos, sensores y sistema de comunicación. Debido a que es de suma importancia el fuselaje, su diseño se desarrollo para trabajar con una carga útil mínima o sin carga, dado que no se toma en cuenta el peso del piloto. La arquitectura juega un rol importante, ya que es la responsable de unificar cada uno de los elementos mecánicos y electrónicos. Mientras que la etapa de control se encarga de la estabilidad del sistema en vuelo. El sistema de comunicación se encuentra dividido en dos partes, la primera se localiza en la aeronave y la segunda en tierra el cual es operado manualmente a través de un mando de control o de forma autónoma con su correspondiente programa.

La construcción de un cuadricóptero requiere de múltiples disciplinas, para cada una de las etapas requeridas. Por lo que en el presente trabajo sólo se analizó lo referente a la etapa de control, que en una primera instancia se enfocó en el modelado matemático del sistema considerando algunas res-

tricciones y la segunda se tuvo un enfoque hacia el diseño de controladores que harán que estos sistemas se comporten de la manera deseada. Un controlador se define como el instrumento que compara el valor medido con el valor deseado, en base a esta comparación calcula un error (diferencia entre el valor medido y deseado).

Los controladores pueden ser de diversos tipos: manual, neumático y eléctrico.

Los eléctricos más usados son: computadoras con tarjetas de adquisición de datos, controladores lógicos programables *PLC*, microcontroladores *PIC*, entre otros. Existen tantos controladores como tipos de periféricos, por lo que es muy común encontrar más de un controlador para un solo dispositivo, cada uno ofreciendo un valor distinto de funcionalidad.

El controlador constituye el elemento fundamental en un sistema de control, puesto que determina el comportamiento del lazo, ya que condiciona la acción del elemento actuador en función del error obtenido. La forma en la cual el regulador genera la señal de control se denomina acción de control. Algunas de estas acciones se conocen como acciones básicas de control; mientras que otras se pueden presentar como combinaciones de las acciones básicas.

Planteamiento del problema

Una de las etapas de gran interés dentro del diseño de un cuadricóptero es el control, este presenta un gran reto tanto en modelado matemático, así como en diseño del control a utilizar. Debido a la gran cantidad de variables que éste posee dentro de su dinámica.

Un cuadricóptero tiene seis grados de libertad, por lo que se analiza el sistema en dos partes. En la primer etapa se tienen los primeros tres grados de libertad, los cuales se encargan de controlar la posición con referencia a un punto fijo, es decir, las coordenadas que tendrá el sistema dentro de un espacio específico con respecto a los tres ejes coordenados. Mientras que en la segunda etapa se tienen los tres grados restantes, estos se identifican por controlar los ángulos de referencia que actúan sobre las posiciones.

Objetivos generales

Controlar la elevación y desplazamiento de un cuadricóptero, a partir de su posición, así como de su ángulo de rotación en los ejes x , y , z . Tomando en cuenta que no se realizará ningún cambio en el giro sobre el eje z .

Objetivos particulares

Lograr la estabilidad de vuelo de un cuadricóptero, mediante técnicas de control de tipo LQR , PD y *fraccional*. Los cuales permiten una elevación y desplazamiento del sistema de manera estable, dentro de un espacio determinado.

Probar un espacio de validez de desempeño de las técnicas de control propuestas.

Justificación

Existen diversas técnicas de control mediante las cuales se tiene un completo dominio de un cuadricóptero en su elevación, vuelo, aterrizaje e incluso para realizar piruetas, las técnicas más usuales de controladores suelen ser de tipo PID y LQR, sin embargo, no se ha intentado controlar mediante técnicas fraccionarias, siendo esta una de las técnicas con mayor eficiencia tanto en robustez así como en velocidad de respuesta, además ofrece grandes bondades dentro del diseño de un controlador. Una de ellas y quizá la más importante es que permite ampliar el rango de estabilidad.

Mientras en que los controladores PID y LQR se trabajaran de forma acoplada y desacoplada, para demostrar que su comportamiento es similar.

Resumen

En los inicios del siglo *XX*, los investigadores desarrollaron construcciones industriales, especializando en VANT, tomando en cuenta ciertas características y logrando establecerse en campos militares. En la actualidad, para su construcción se realizan ciertos modelos matemáticos y diseños de control, esto para saber con precisión cual es su elevación, desplazamiento y estabilidad.

Las aplicaciones que tienen los VANT, son de gran importancia para el ámbito militar o civil, así mismo como su tecnología que se tienen en cada uno de sus componentes, como los motores, helices, ESC, batería, tarjeta principal, estación de control entre otros.

Un VANT se caracteriza por: autonomía y ser reutilizables, estos modelos tienden a alcanzar cierta altura y realizar diversas actividades sin un piloto a bordo.

Un modelo matemático es importante para la relación de simulaciones y su precisión, también como la velocidad, energía cinética, potencial, disipada de igual manera se considera muy sobresaliente el control fraccionario, lo cual permite entender un cierto rango de estabilidad constante, así como sus aplicaciones, tomando en cuenta las integrales y sus derivadas de orden fraccional.

Los sistemas de control retroalimentados, permite que estos tengan propiedades fijas y libres, para ello se analiza el comportamiento de del sistema en torno al punto de equilibrio.

Dentro de las técnicas de control para la estabilidad de un cuadricóptero, en específico para estabilidad de vuelo, es posible utilizar técnicas lineales como controladores de tipo LQR, PD, fraccionales, entre otros, es importante mencionar que los modelos matemáticos son precisos en el desarrollo de nuevos drones.

Capítulo 1

Antecedentes históricos

Su historia comienza a mediados del siglo XIX, con un primitivo vehículo no tripulado, el cual era un globo cargado de bombas, éste se utilizó el 22 de agosto de 1849 en un ataque del ejército austriaco a la ciudad de Venecia. A pesar de que un globo no cumple con la definición de un VANT en la actualidad, el concepto se ajusta al de una plataforma no tripulada que porta una carga útil, que eran los explosivos para el caso de los globos utilizados. La figura 1.1¹ muestra uno de los globos usados durante esta época.[1]

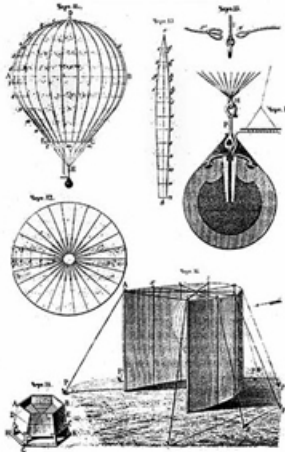


Figura 1.1: Globo cargado de bombas

En 1917 Charles Kettering, desarrolla un biplano no tripulado preprogramado, conocido como torpedo aéreo Kettering, un año más tarde Lawrence y Elmer Sperry, construyen una aeronave que utiliza un giroscopio, con la finalidad de estabilizar el vuelo.

En 1930 las fuerzas armadas de los EUA desarrollan el *N2C - 2 Target Drone*, un dron creado específicamente como avion blanco, éste se encontraba equipado con sensores de detección, que permitían al piloto un mejor control sobre la aeronave. Este podía ser controlado desde tierra o incluso de otra aeronave, a pesar de tener grandes limitantes la aeronave nunca fue

¹Imagen de <http://www.tiki-toki.com/timeline/entry/496448/Historia-de-los-drones/>

derribada durante las pruebas realizadas en el acorazado Utah, por lo que las fuerzas armadas de los EUA deciden renombrar a los drones como No Live Operator Onboard o NOLO. Posteriormente e inspirados en el *N2C - 2* se desarrollaron drones de asalto denominados *TDN - 1*.

Para 1933 la primera prueba exitosa de un VANT Queen Bee, fue realizado en el Reino Unido, desarrollando el biplano Fairey Queen. Esta aeronave se controlaba mediante un mando remoto. Éste modelo renombrado *DH82A Tiger Moth*, se usó en la Marina Británica como un avión blanco desde 1934 hasta 1943.

El primer drone construido en serie a gran escala, fue en el año de 1940 por EUA y recibió el nombre de Radioplane *OQ - 2*, sirvió como blanco volante para la formación de pilotos y entrenamiento de los tiradores británicos antiaéreos durante la Segunda Guerra Mundial. En esta década se tenía un mejor conocimiento de las tecnológicas áreas, tanto en cuestiones electrónicas, físicas de control y de comunicaciones, puesto que eran esenciales para el control de dichos sistemas.

El *QH - 50DASH*, es creado a inicio de la década de 1960 por la armada de los EUA, esta aeronave de tipo helicóptero es creado por la necesidad de ser transportado en barcos de combate, con la finalidad de localizar y atacar submarinos enemigos. Dicha aeronave, contaba con un sistema mediante el cual se localizan naves enemigas en un radio de hasta 20 *millas*, aunque la descarga de torpedos sólo se podía hacer a una distancia máxima de 5 *millas*. Este se controlaba desde un barco, que lo transportaba para su despegue y aterrizaje, posteriormente se activaba el piloto automático, que era controlado por un estabilizador giroscópico para la ubicación del objetivo y entonces, atacar. Finalmente, a mediados de 1970 fue dejado de utilizar por la armada de EUA, era fácil su detección para el armamento anti aéreo.



Figura 1.2: Predator MQ-1

En las guerras de Corea y Vietnam (1955-1975), el ejército de los EUA encontró en los vehículos no tripulados la manera de utilizarlos para desviar los ataques enemigos de sus bombarderos y de los aviones caza tripulados.

Así comenzó la era de los aviones no tripulados de reconocimiento para las fuerzas aéreas.

Durante la guerra fría (1980) y más recientemente en los conflictos del Golfo Pérsico (1990-1991) y de Bosnia, los vehículos no tripulados han demostrado claramente un gran potencial que tienen y podrán tener con fines militares. En EUA, la Agencia Central de Inteligencia (CIA), en conjunto con las fuerzas aéreas aliadas de los EUA en Europa, crean el *UAV – Gnat750*, evolucionando al Predator *MQ – 1²* y posteriormente en el *MQ – 9 Reaper* siendo este último el primer vehículo aéreo no tripulado capaz de realizar vigilancia de larga duración y de gran utilidad para las fuerzas aéreas.

Durante la primera década del siglo *XXI*, los VANT's logran obtener una mayor atención por parte de las fuerzas armadas de las principales naciones bélicas, en especial en el 2008, durante conflicto entre Georgia y Rusia.

En la década actual, se tiene por objetivo conseguir la creación de un VANT completamente autónomo, esto quiere decir que se reemplazará por completo la intervención del operador, lo que implica tener inteligencia artificial, para lograr este cometido. En la actualidad, se destaca el diseño y la construcción de un Black Hawk sin piloto en el año 2016, un VANT adaptado a una plataforma aérea veinte veces más pesada.

A pesar de que los VANTs han tenido un gran desarrollo en los conflictos bélicos, el avance en el campo de la electrónica en los últimos años, ha permitido que estos sean utilizados en otro tipo de aplicación como, civil, ya que estos tienen un gran potencial en otras áreas, por lo que se han utilizado en campos de vigilancia, telemetría, búsqueda de civiles en catástrofes y fotografía aérea, entre otras, sin olvidar el aéromodelismo como pasatiempo.

1.1. Aplicaciones militares

Los VANT's tienen un gran desarrollo en cuestiones militares, por ser vehículos idóneos para el espionaje militar, misiones de reconocimiento y de pura observación desde el aire. También se pueden armar con misiles y bombas, reduciendo la presencia de tropas en los conflictos armados. Por tal razón son los más sofisticados y con una gran alcance tecnológico.

²<http://www.military.com/equipment/mq-1b-predator>

Dentro de las aplicaciones militares la mayoría de los VANT's corresponden a la clasificación de tipo aeroplano y responden a la categoría mini en adelante.

Una de las aplicaciones más usuales de un VANT militar, es en misiones denominadas *Dull Dirty Dangerous* o D.D.D. por sus siglas en inglés, las cuales son misiones de reconocimiento, observación y vigilancia, mediante cámaras de Espectro Visible e Infrarrojas (FIR) y Radar de Apertura Sintética (SAR).

A continuación se explican algunas de las aplicaciones militares de los VANT:

Blanco sirven para simular aviones o ataques enemigos en los sistemas de defensa de tierra o aire.

Reconocimiento enviando información militar. Entre estos destacan los MUAV (Micro Unmanned Aerial Vehicle) tipo avión o helicóptero.

Bombarderos de precisión e iluminación de blancos en misiones de alto riesgo.

Comunicaciones en relevo o complemento de comunicaciones satélites.

Operaciones PYSOP de guerra psicológica.

1.2. Aplicaciones Civiles de los VANT's

Si bien los VANT's surgen en conflictos bélicos y esté sea el que ha impulsado su desarrollo, desde el año 2000 se han utilizado para aplicaciones civiles, lo que ha ampliado el campo de investigación y desarrollo de este tipo de sistemas, así mismo, se han generado nuevos requisitos de operación y control, esto a generado un rango más amplio de clasificación.

En aplicaciones civiles los VANT's deben tener una gran maniobrabilidad, así como un vuelo en estado estacionario, similar a un helicóptero. Este tipo de aeronave y sus derivados son las más utilizadas dentro de las aplicaciones civiles, aun estando limitado en la actualidad, ya que se encuentra dentro de la categoría micro. La tabla 1.1 contiene algunas de las aplicaciones civiles, en las cuales el uso de estas aeronaves es más frecuente. Para determinadas aplicaciones la distancia a la cual se controla la aeronave puede variar entre decenas de metros hasta algunos kilómetros. Normalmente, la altitud

a la cual se controlan este tipo de drones es baja al igual que su velocidad e incluso para varias tareas se requiere un vuelo en estado estacionario, lo que justifica el uso de helicópteros o un multirotor, siendo uno de los más empleados, la estructura de un cuadricóptero, ya que posee una estructura muy estable y es posible adaptar aditamentos extras para diversas misiones.

Aplicaciones	Ejemplo	Tipo de aeronave más frecuente
Inspección de infraestructuras	Líneas eléctricas Oleoductos y Gaseoductos	Helicóptero cuadricóptero
Inspección de obra civil	Puentes, viaductos y presas	
Vigilancia de Fronteras	Inmigración ilegal, Contrabando	helicóptero, Aeroplano
Supervisión de tráfico		
Patrulla marítima	Inmigración ilegal, Contrabando	Aeroplano, cuadricóptero
Filmografía	Cine, Reportaje fotográfico	helicóptero, Aeroplano
Reconocimiento y toma de datos en desastres naturales	Huracanes Volcanes	Helicóptero, cuadricóptero Aeroplano
Levantamiento de mapas	Tipografía	Aeroplano, cuadricóptero
climatología	Toma de muestras y automatización de partículas en aerosol, Atmosférica Monitoreo de contaminación	Helicóptero, cuadricóptero Aeroplano Dirigible
Agricultura	Aplicación de fumigantes Agricultura de precisión	Helicóptero
Intervención de desastres no naturales	Radioactivos, Vertidos contaminantes Incendios forestales	Helicóptero Aeroplano
Enlace de comunicaciones		Helicóptero, Aeroplano
Localización de recursos naturales	Pesca Minería	Helicóptero Aeroplano
Transporte de marquetaría		Aeroplano
Búsqueda y rescate	Naufragios, Accidentes en montañas o zonas de difícil acceso	Helicóptero, cuadricóptero

Cuadro 1.1: Aplicaciones civiles de los UAVs

Para las aplicaciones civiles los VANT son diseñados de acuerdo a la función requerida, tomando en consideración que estas aeronaves se componen de tres partes básicas, considerando que se describe un cuadricóptero.

La plataforma aérea o aeronave, dentro de este se encuentra el **chasis**; existen dos configuraciones básicas para la elaboración de un cuadricóptero, una de ellas la más simple de utilizar, llamada configuración de cruz o plus, figura 5.10a. En este tipo de configuración cada uno de los cuatro rotores se encuentra ubicado a los extremos de los ejes o brazos perpendiculares entre sí, permitiendo un manejo sencillo, puesto que a la hora de cambio de dirección de eje vertical u horizontal sólo se requiere el control de dos motores.

El segundo modelo, tiene una configuración en X , figura 5.10b, se trata de

motores que se encuentran separados 45° en dirección a uno de los brazos y orientados en dirección al vuelo. Por ello, es necesario que los cuatro motores sean dirigidos al mismo tiempo.

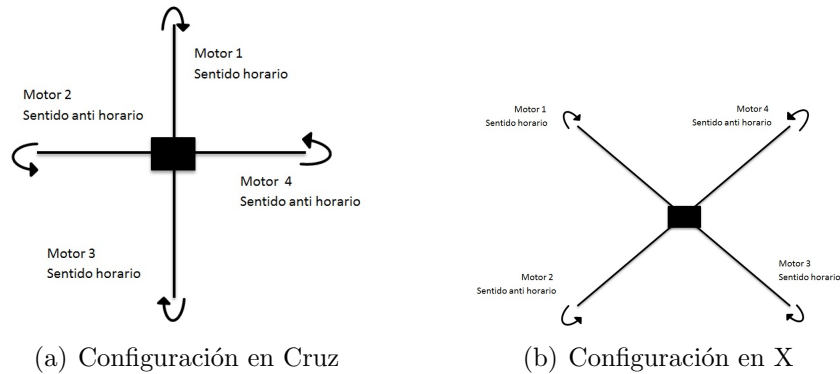


Figura 1.3: Configuraciones de la estructura de un cuadricóptero

Sin importar el tipo de configuración que la aeronave tenga, es importante respetar el sentido de giro de cada motor, en figura 5.10, donde se observa que dos motores tendrán que girar en sentido horario, mientras que los dos motores restantes tendrán que hacerlo en sentido antihorario, se realiza esta acción con la finalidad de cancelar los torques producido por los rotores, eliminando así cualquier momento angular.

Motores

Un cuadricóptero, como su nombre lo indica requiere de cuatro motores sin escobillas también conocidos como *brushless dc motor*. Este tipo de motores se caracterizan por ser pequeños, tener un gran rendimiento y una gran potencia.

Los motores *brushless* se encuentran conformados por: un rotor, lugar donde se localizan imanes permanentes; un estátor o carcasa, donde se ubica el embobinado del motor. La Figura 1.4 muestra los componentes que tiene un motor brushless.

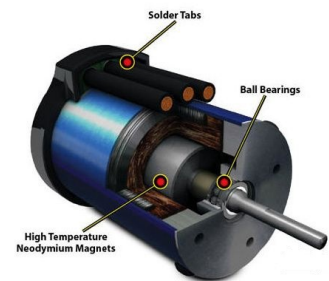


Figura 1.4: Estructura de un motor sin escobillas.

Hélices

Las hélices que poseen estas aeronaves se sitúan en la parte exterior de cada uno de los brazos de la estructura. Al tener cuatro helices, hace que el cuadricóptero sea más estable en el vuelo.



Figura 1.5: Forma de la hélice

Las hélices se pueden clasificar dependiendo el material, tamaño y forma. Los parámetros más importantes a considerar en una hélice es: el empuje requerido para elevar la aeronave; el gasto de energía, el cual depende del ángulo de inclinación de la hélice, a mayor ángulo de inclinación se tiene un mayor empuje, en consecuencia el gasto de energía es mayor, por el contrario, si el ángulo de inclinación es pequeño, el empuje será menor lo que ocasiona un gasto de energía mínimo.

Un cuadricóptero requiere dos pares de helices diferentes debido al giro de los motores.

Variador de velocidad

Un controlador de velocidad o ESC por sus siglas en inglés (*Electronic Speed Control*), el objetivo principal de este dispositivo es la reducción de velocidad de un motor de corriente alterna, de tal forma que le permite a las máquinas conducidas por motores eléctricos producir la misma salida que obtendrán utilizando otros métodos de regulación de flujo, pero consumiendo menos potencia de entrada. En consecuencia, el ahorro de energía que se obtiene es importante, la figura 1.6 muestra la electrónica interna de un *ESC*.

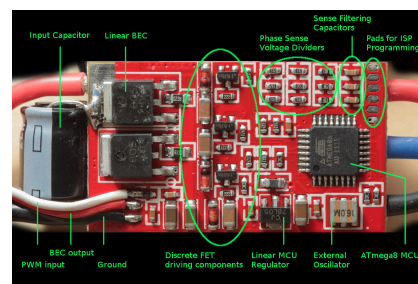


Figura 1.6: Variador de voltaje

Batería lipo



Figura 1.7: Batería lipo

Las baterías lipo (polimero de litio) poseen un gran rendimiento en cuanto a su capacidad y tensión, con relación al peso. Contiene en su interior varios módulos de carga. La tensión nominal de cada elemento es de $3,7v$, por lo que una batería se compone de 3 elementos conectados en serie, esta permite tener un valor equivalente a $11,1v$ Figura 1.7. Sin embargo, existen baterías de mayor capacidad.

Tarjeta principal

Enlace de datos (data-link), este dispositivo es el encargado de conectar al piloto con la aeronave, esto se realiza mediante tecnología inalámbrica.

La tarjeta controladora Ardupilot es un circuito eléctrico de alta gama encargado de interpretar cada comando que se le envía desde el centro de mando, además de controlar todos los parámetros de cuadricóptero, tales como la posición, altitud y equilibrio.



Figura 1.8: Tarjeta principal

Estación de control



Figura 1.9: Control remoto tipo joystick

La estación de control, es la responsable de enlazar los datos de comunicación con las redes de mando, que son los ordenadores principales para el control de la inteligencia y puede usarse mediante un dispositivo móvil o un control remoto, siendo este último el más utilizado.

El control remoto también llamado mando, Figura 1.9, es el encargado de realizar la comunicación entre el cuadricóptero y el piloto.

Este dispositivo electrónico se usa para realizar una

operación remota, básicamente, se compone de un transmisor y receptor que a través de controladores manuales se envían señales de radio al receptor que se encuentra en el cuadricóptero; los cuales se pueden traducir en comandos, al recibir estas señales, el receptor las decodifica transformándolas en impulsos eléctricos.

1.3. Uso lúdico

Hoy en día un cuadricóptero con características lúdicas, tienen una gran importancia en la industria juguetera, los compradores potenciales tienden a gastar grandes cantidades de dinero al obtener una de estas aeronaves. Los VANT's usados como juguetes, son de características muy simples, pero con un gran potencial para las personas que se dedican al aeromodelismo a continuación se muestran algunos de los modelos más usados con fines de entretenimiento.

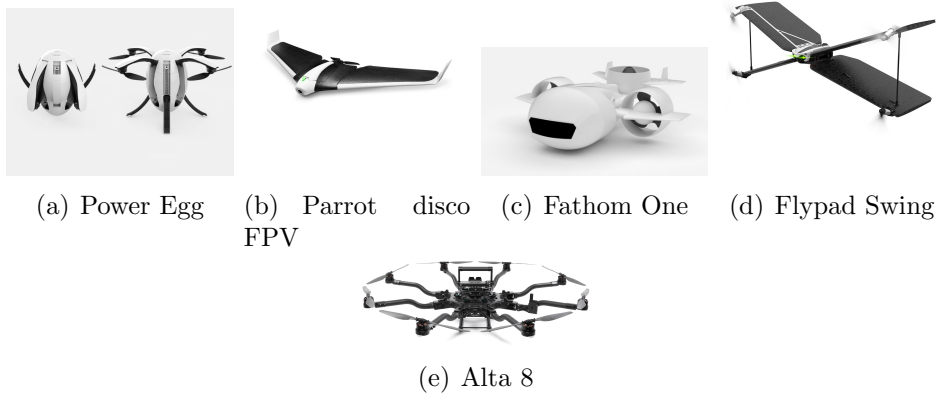


Figura 1.10: Drones de uso lúdico.

Los drones mencionados anteriormente, tienen como principal limitante el alcance al que pueden ser controlados, éste puede ser máximo de 100 m y una duración de vuelo máxima de 45 min. , mientras que la principal atracción para los aficionados es la manera en la cual se realiza la comunicación, esta puede ser mediante diversos software que pueden ser instalados en tabletas, computadoras personales o incluso en teléfonos inteligentes.

1.4. Clasificación de los VANT's

En la actualidad, existe una gran variedad de posibles VANT's que son capaces de realizar diversas misiones con cierto grado de autonomía. Para que una aeronave pueda ser considerada un VANT tiene que cumplir con las siguientes características:

- Ser autónomo: Estos pueden ser en ocasiones manipulados vía control remoto o mediante algoritmos para cumplir sólo una función en específico, por lo que debe contener sistemas de redundancia con la finalidad de asegurar que la tarea programada se cumpla.
- Ser reutilizable: Se pretende que un VANT's puedan ser reprogramable con la finalidad de realizar diversas misiones, o la misma, las veces que ésta se requiera, tomando en cuenta que la estructura física no sufre alteraciones en hardware.

La llegada de los VANT's a las aplicaciones civiles, ha dificultado su clasificación, existe una gran variedad de aeronaves que cumplen con estas características. Estos se clasifican dependiendo de su uso o configuración, de acuerdo al diagrama 1.11 se puede distinguir aquellos que cuentan con un despegue vertical de las que no lo son, estando dentro de ésta las de ala rotativa o hélice, como lo son helicópteros y cuadrotores entre otros.

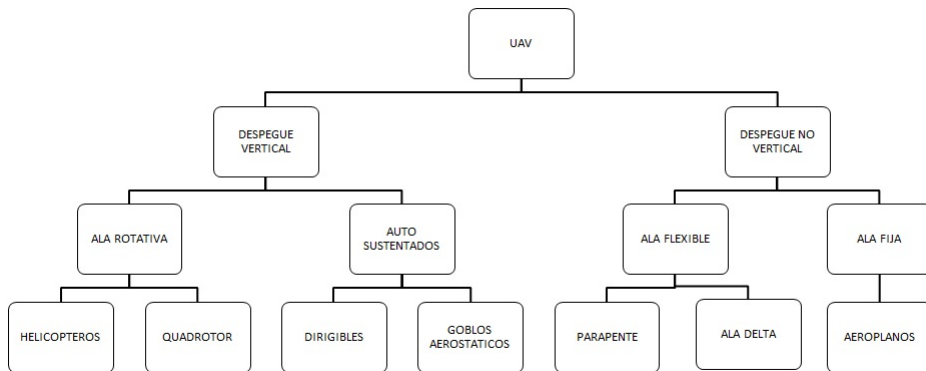


Figura 1.11: Clasificación de los VANT's de acuerdo a su despegue.

Los modelos y las características de cada uno de los VANT's varían de acuerdo con su aplicación requerida, ya sea de uso militar o civil. En el cuadro 1.2 se muestran algunas de las principales propiedades que estas aeronaves poseen, correspondientes a la clasificación de ala rotativa.

Características	Helicóptero	Aeroplano	Dirigible	Quadrotor
capacidad de vuelo estacionario	***		****	***
Velocidad de desplazamiento	***	****	*	**
Maniobrabilidad	***	*	*	****
Autonomía de vuelo (tiempo)	**	***	****	*
Resistencia a perturbaciones externas	**	****	*	**
Auto estabilidad	*	***	****	**
Capacidad de vuelo vertical	****	*	**	****
Capacidad de carga	***	****	*	**
Capacidad de vuelos interiores	**	*	***	****
Techo de vuelo	**	****	***	*

Cuadro 1.2: Clasificación de VANT's por características

La clasificación de los VANT's, no sólo depende de su tipo de vuelo sino también de su alcance y maniobrabilidad. Se considera alcance a la distancia máxima, la cual se puede controlar el VANT sin tener problemas de interferencia o ruido. Por su parte la maniobrabilidad es un parámetro de orden que depende de la altitud, es decir, la altura la cual alcanza la aeronave en pleno vuelo y la autonomía de la misma, lo cual hace referencia a la capacidad de realizar tareas sin un piloto a bordo. Entre la altitud y la autonomía hacen posible que exista la mayor libertad de realizar ciertas actividades sin la necesidad de una tripulación a bordo.

1.5. Controladores más usados

Al hablar de un cuadricóptero, es indispensable conocer el tipo de controlador requerido para su vuelo, éstos dependen de la aplicación requerida y los recursos de los cuales dispone la aeronave de forma lúdica.

Los cuadricóptero más simples utilizados normalmente, tienden a tener un control en lazo abierto, el cual se encarga de regular la velocidad de giro en los motores. Aquellos tienden a ser de muy bajo costo.

Posteriormente, se tiene los cuadricópteros utilizados en investigación y otros tantos como lúdicos. Éstos poseen una estructura de control más compleja, así como técnicas más avanzadas, como lo puede ser controladores de tipo Proporcional Integral Derivativo y usando un observador de estados denominado filtro de Kalman. Otro método muy común es mediante el control del sistema en su forma no lineal, lo que conlleva a realizar técnicas de control de una complejidad mayor, se describen algunos de estos procedimientos dentro del capítulo cinco con un mayor detalle. El costo de estas aeronaves suele ser elevado debido a las herramientas utilizadas.

Otro sistema muy utilizado es a partir de una retroalimentación en cascada, esto indica que el control se realiza por separado tanto de los ángulos como de las posiciones, lo que hace ser a la aeronave muy estable en vuelo.

Finalmente, se tienen los drones de tipo militar, estos son de orden restringido por lo que no es posible conocer las técnicas de control utilizados en ellos.

Capítulo 2

Conceptos básicos

Los sistemas físicos, pueden representarse mediante ecuaciones matemáticas, las cuales hacen referencia a las variables, entradas, salidas, perturbaciones, entre otras, que se tienen presentes en dicho sistema de cualquier tipo, para efectuar el análisis de éste, es necesario obtener un modelo matemático que lo represente.

El modelo matemático de un sistema dinámico equivale a una ecuación matemática o un conjunto de ellas, que representan la actividad del sistema con precisión o lo más cercano posible. Con base en las cuales se puede conocer el comportamiento del sistema mediante variables, las cuales representan los valores físicos del sistema y poder realizar una simulación, la cual ayuda a predecir el sistema al momento de realizar una experimentación a través de un modelo físico.

Considerando que un modelo matemático no es único para un sistema determinado, éste puede representarse de diversas maneras, por lo que permite tener diversos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva [2].

La dinámica de un sistema, se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un procedimiento determinado como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. Una parte importante, al momento de implementar un controlador para cualquier tipo de sistema, es a partir de la obtención de un buen modelo matemático. Sin embargo, esto es muy complicado de realizar y en algunas ocasiones imposible, por lo que se busca tener un equilibrio entre las compilaciones del modelo matemático y las ventajas que proporciona dicho modelo al momento de realizar su estudio.

2.1. Modelado mediante ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange, son la base de la energía de un sistema, incluyen la energía potencial almacenada, así como la energía cinética, este tipo de energías describen el movimiento y posición de éste. Una vez que la energía es descrita, el método de Lagrange puede ser usada para obtener las ecuaciones dinámicas del mismo. Este enfoque es usado extensamente en el campo de la robótica y control.

Se comienza por explicar algunos conceptos básicos de física, los cuales permiten tener un mayor entendimiento acerca de la dinámica de los sistemas físicos. Para las ecuaciones de Lagrange, la energía es el enfoque principal, por lo que se analizan algunas formas de energía para los sistemas.

Para objetos en movimiento, se considera la energía cinética, con una masa m y velocidad v , la energía cinética se expresa de la siguiente manera:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Debido a que la energía cinética es un escalar, es posible relacionar con los giros de un objeto, lo que se conoce como inercia rotacional, donde el momento de inercia se representa por j y la velocidad angular por ω , la ecuación de energía cinética rotacional se expresa:

$$E_{c_r} = \frac{1}{2}j\omega^2.$$

La energía potencial se asocia a la posición que tiene un cuerpo, y no a su movimiento, por lo cual se considera una masa m con una altura h dentro de un campo gravitacional constante, lo que es posible representar mediante la ecuación:

$$E_p = mgh.$$

En algunos casos, el origen o posición de potencial cero, son tomados con respecto a una posición relativa, en general, sólo las diferencias en la energía potencial son significativas.

La energía potencial para sistemas mecánicos con resortes, estiramiento o compresión a una distancia determinada. Esta puede estar representada por d y una constante de resorte k . Su energía potencial se encuentra dada por:

$$E_{pr} = \frac{1}{2}kd^2.$$

Finalmente, pero no menos importante, se encuentra la energía disipada dentro de un sistema, a la que se conoce como energía disipativa. Para sistemas mecánicos, este tipo de energía se encuentra en forma de fricción deslizante. Si se considera un objeto con amortiguamiento o fricción dinámica B , con una velocidad v , la cual es relativa entre las superficies que generan dicha fricción y considerando que \dot{x} es la primera derivada de x con respecto al tiempo, siendo esto, la fórmula que representa la energía disipativa se encuentra dada por

$$E_d = \frac{1}{2}B\dot{x}^2.$$

El principio de las ecuaciones de Lagrange, se encuentra basado en una cantidad denominada Lagrangiano, para un sistema dinámico en el cual el trabajo de todas las fuerzas es explicado a través de éste. Un movimiento admisible entre las configuraciones específicas de un sistema en un tiempo t_1 y t_2 es un movimiento natural si, y sólo si, la energía del sistema permanece en un estado constante.

El Lagrangiano (1) es una cantidad que describe el balance entre las energías no disipadas, en particular esta se escribe como:

$$L = E_c - E_p, \quad (1)$$

L : Lagrangiano (descripción del sistema físico).

E_c : Energía cinética del sistema.

E_p : Energía potencial del sistema.

Cuando el Lagrangiano es positivo, indica que existe una mayor cantidad de energía cinética que energía potencial y cuándo es negativo, es decir, el contrario es verdadero. Cuando $L = 0$, implica que el balance es cero o dicho de otra forma, el sistema se encuentra en equilibrio.

Para presentar la ecuación de Lagrange, es importante considerar primero los grados de libertad del sistema. Éstos representan el número de cantidades independientes que se encuentran especificados en los estados del sistema, para ser definido éstos en general son variables de estado del sistema. Cualquiera

conjunto único de tales cantidades son referidos como coordenadas generalizadas del sistema.

Finalmente, obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange la cual se encuentra asociada con cada coordenada generalizada q_i [3].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \tau; \quad \text{para } i = 1 \quad (2)$$

Donde:

P : Potencia total disipada por el sistema.

τ : Vector de par aplicado al sistema (fuerzas externas).

q_i : Vector de coordenadas generalizadas asociadas a las posiciones.

\dot{q}_i : Vector de coordenadas generalizadas asociadas a velocidades.

Una manera de representar las ecuaciones diferenciales en arreglos vectoriales es mediante la siguiente expresión:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(\dot{q}) + G(q) + K(q) = F_e(q), \quad (3)$$

Donde:

q : Vector de coordenadas generalizadas.

$M(q)$: Matriz de inerciales del sistema, $\in R^{n \times n}$ (n representa los grados de libertad del sistema).

$C(q, \dot{q})$: Matriz de coriolis de $\in R^{n \times n}$, esta contiene los efectos de coriolis y términos rotacionales a la misma.

$D(\dot{q})$: Vector de disipación del sistema de $\in R^{n \times 1}$.

$G(q)$: Vector de fuerzas gravitacionales de $\in R^{n \times 1}$.

$K(q)$: Vector de fuerzas de almacenamiento en resortes $\in R^{n \times 1}$.

$F_e(q)$: Vector de fuerzas externas por coordenadas q_i .

2.1.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La teoría de estabilidad juega un papel muy importante dentro de la teoría de control de sistemas, puesto que en sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas referidos a estabilidad, en el cual se buscan los puntos de equilibrio, éstos, generalmente se encuentran caracterizados en el sentido de Lyapunov. Esta es una herramienta muy importante, se aplica tanto en sistemas lineales como en sistemas no lineales.

La idea principal del análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov, tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales (4) y predecir su comportamiento en torno de los puntos de equilibrio.

Dentro de la estabilidad en el sentido de Lyapunov, se hace referencia al comportamiento de la señal de salida en torno a un punto de equilibrio.

$$x(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (4)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$ hace referencia al estado del sistema dinámico representado por (4), donde $x(0) \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial o estado inicial.

Si se hace alusión al espacio de estados de un sistema invariante en el tiempo, el concepto de punto de equilibrio es de suma importancia, de modo que se define como un punto $x = X_{eq}$, dentro de un espacio de estados de un sistema, permanecerá ahí para todo tiempo futuro, a menos que una fuerza externa sea aplicada. Un punto de equilibrio puede ser aislado, es decir, no existe otro punto de equilibrio dentro de su vecindad, o puede ser un conjunto de puntos de equilibrio contiguos.

Formalmente se tiene la siguiente definición [4]:

"Un punto $x = X_{eq}$ en el espacio de estados, se dice que es un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(t)$, si tiene la propiedad de que, el sistema comienza en X_{eq} , este permanecerá en X_{eq} para todo tiempo futuro"

Los puntos de equilibrio para cualquier conjunto de entradas constantes, $U = U_{eq}$ deben cumplir con las siguientes características:

- $\dot{x} = 0$
- $q = Q_{eq} \Rightarrow \dot{q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} = 0$

Lo anterior indica, que las derivadas en un punto de equilibrio son nulas.

Una definición formal de estabilidad en el sentido de Lyapunov se [4]:

"El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable de la ecuación (4) si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que:"

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Se tiene al considerar, el sistema modelado mediante ecuaciones de **Euler-Lagrange**(3), de una forma generalizada se puede expresar como:

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Existen diversas técnicas las cuales ayudan a analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema. Sin embargo, en este caso sólo se analiza mediante el método indirecto de Lyapunov mejor conocido como linealización y finalmente por funciones candidatas de Lyapunov.

El método indirecto de Lyapunov, puede determinarse mediante la linealización en torno al punto de equilibrio del sistema. Este método establece lo siguiente:[4]

★ El sistema deberá ser asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov, si la matriz.

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=X_{eq}} \quad (7)$$

Contiene valores característicos tales que $\Re_e\{\lambda_i(A)\} < 0$, con $i = 1, \dots, n$.

★ Inestable en el sentido de Lyapunov si por lo menos un valor característico cumple que $\Re_e\{\lambda_i(A)\} > 0$ para alguna i .

Este último sólo describe las condiciones para la estabilidad asintótica e inestabilidad. Sin embargo, si $\Re_e\{\lambda_i(A)\} = 0$ para alguna i , entonces el teorema no concluye la estabilidad del punto de equilibrio X_{eq} , por lo que es necesario analizar mediante el método directo de Lyapunov.

También es posible analizar la estabilidad mediante el método directo de Lyapunov, por ejemplo en la ecuaciones de energía de un sistema. Un concepto importante para comprender la estabilidad por medio de funciones

candidatas de Lyapunov, radica en la definición de las mismas, [4].

Función definida positiva: Una función $V(x)$ se dice que es positiva definida si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0 \forall x \neq 0$ y si $V(x) = 0$, la única solución es $x = 0$. Si las condiciones anteriores se satisfacen para $V(x) \geq 0$ con $x \neq 0$, entonces se dice que es *semidefinida positiva*.

Función definida negativa: Una función $V(x)$, se dice que es definida negativa si $-V(x)$ es definida positiva. Si la condición anterior se cumple con $-V(x)$ siendo semidefinida positiva, entonces $V(x)$ es *semidefinida negativa*.

Si se logra demostrar que la derivada $\dot{V}(x)$ de la función candidata de Lyapunov es cero, se determina que el sistema es asintóticamente estable [5].

Por funciones candidatas de Lyapunov se requiere que, por simplicidad los términos $D(\dot{q})$ y $K(\dot{q})$, de la ecuación (3), sean lineales, es decir, que sean expresables en matrices que tengan la forma:

$$D(\dot{q}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}, K(\dot{q}) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Así como el término de gravedad sea nulo, es decir, $G(q) = 0$ y Q_{eq} , sea un punto de equilibrio para el sistema con $U_{eq} = 0$.

2.1.2. Linealización

La linealización es un proceso el cual permite aproximar un modelo no lineal, por otro que sí lo sea y, además, que cumpla con las definiciones de linealidad.

Un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición, este establece.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (9)$$

Este principio permite desarrollar soluciones complicadas para la ecuación diferencial no lineales a partir de soluciones simples. Si en una investigación

experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal.

La mayoría de los sistemas mantienen una estructura no lineal, mientras que algunas técnicas de control plantean el análisis y diseño de controladores de tipo lineal. Una alternativa es linealizar los sistemas con la finalidad de facilitar el diseño de controladores, esto se logra aproximando el comportamiento del sistema no lineal con un modelo lineal. Esta aproximación se realiza en torno a un punto de equilibrio u operación.

Considerando un sistema dinámico no lineal, se puede representar por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma general en donde f y h son funciones que representan la dinámica del sistema y la salida de este, respectivamente dados en términos de la variable de estado x y la entrada u [6]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & x(t_0) &= x_0, \\ y(t) &= h(x(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Cuyos puntos de operación son constantes y se encuentran dados por (U_{eq}, X_{eq}, Y_{eq}) .

Usando series de Taylor, se expande al sistema en torno al punto de operación $x = X_{eq}$ y $u = U_{eq}$, resultando.

$$f(x, u) = f(X_{eq}, U_{eq}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X_{eq}, U_{eq}} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{X_{eq}, U_{eq}} + T.O.S.,$$

$$h(x, u) = h(X_{eq}, U_{eq}) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{X_{eq}, U_{eq}} + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{X_{eq}, U_{eq}} + T.O.S.,$$

con:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}$$

Las matrices del sistema linealizado se obtienen en torno al punto de equi-

2.1. MODELADO MEDIANTE ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE21

brio, el cual se obtiene con jacobianos:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \Bigg|_{(X_{eq}, U_{eq})}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{array} \right] \Bigg|_{(X_{eq}, U_{eq})}$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{array} \right] \Bigg|_{(X_{eq}, U_{eq})}$$

$$D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial u_m} \end{array} \right] \Bigg|_{(X_{eq}, U_{eq})}$$

Finalmente, se considera que $x = X_{eq}$, el cual representa un valor muy pequeño, con lo que es posible aproximar al sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}, \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}, \end{aligned} \tag{11}$$

Donde:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - X_{eq}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - U_{eq}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - Y_{eq}$$

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x}$$

Es importante mencionar que esta aproximación, únicamente es válida para una región muy cercana al punto de equilibrio respecto al cual se linealiza, por lo que su aplicación se encuentra limitada para aquellos sistemas cuyas señales sufren pequeñas variaciones alrededor de este punto.

Este método de linealización es válido en tanto que las perturbaciones que afectan al comportamiento del sistema sean pequeñas, operando en equilibrio y relativas a los valores de las variables del sistema.

2.2. Técnicas de control

En ingeniería, el control es una rama que se utiliza para realizar el diseño, planificar y desarrollar sistemas con comportamientos deseados. Para lograr esto en un entorno práctico se requiere de algunas técnicas específicas, así como entender el sistema que se requiere modelar, se tendrán que identificar las entradas, salidas y estados que afectan al sistema, con la finalidad de obtener su modelo matemático.

Un sistema de control es un conjunto de dispositivos encargados de administrar, ordenar, dirigir o regular el comportamiento de otro sistema, con el fin de reducir las probabilidades de fallo y obtener los resultados teóricamente verdaderos, esto produce una salida o repuesta ante una entrada o estímulo dado, la entrada representa la respuesta deseada del sistema, mientras que la salida es la respuesta real de este.

Un control en lazo abierto tiene como característica el no poder compensar ninguna perturbación la cual se pueda sumar a la señal de entrada del controlador, por esta razón tienen una gran sensibilidad a perturbaciones e incapacidad para corregirlas. Por el contrario un sistema en lazo cerrado es capaz de compensar perturbaciones al medir la respuesta de salida, alimentando esa medida a una trayectoria de realimentación y comparando esa respuesta con la entrada. Si existe alguna diferencia entre las dos señales, el sistema acciona la planta, por medio de una señal de actuación, para hacer la corrección, de no existir diferencia, el sistema no acciona la planta debido a que la respuesta es la deseada [7].

En esta sección se describen algunas técnicas de control, como lo es el control óptimo cuadrático o **LQR**, control proporcional integral derivativo o **PID** y finalmente, se tiene al control fraccional.

2.3. Control LQR

El control **LQR** cumple la función de encontrar de forma automática una adecuada realimentación de estado del controlador y así minimizar la función de coste. De esta manera el controlador **LQR** busca minimizar las energías presentes en el sistema, orientándose al control óptimo de señales de control para el sistema. Este tipo de control proporciona un procedimiento sistemático al momento de realizar los cálculos matemáticos, para la obtención de la matriz de ganancias K del control de realimentación de estado. El sistema

de control se define mediante (12)

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}. \quad (12)$$

Se determina la matriz de ganancias K del vector de control óptimo

$$u(t) = -K\bar{x}(t). \quad (13)$$

El criterio de desempeño o función de coste, denotado por J , es una medida de calidad del desempeño del sistema. Usualmente se intenta minimizar o maximizar el criterio de desempeño seleccionando la entrada de control. Para cada $u(t)$ posible. El criterio de desempeño a minimizar puede expresarse matemáticamente como el área bajo la curva (14), seleccionando aquellos controles que producen los transitorios más pequeños sobre toda la trayectoria generada entre x_0 y el estado final.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (14)$$

donde \mathbf{Q} es una matriz de $n \times m$ hermítica definida positiva, semidefinida positiva o simétrica real y \mathbf{R} es una matriz de $m \times m$ hermítica definida positiva o simétrica real. EL segundo miembro de (14) representa el coste de la energía de las señales de control. Las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} determinan la importancia relativa del error y el coste de esta energía.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q_n \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para minimizar la función de coste, se considera (13) para cualquier estado inicial $x(0)$. El diagrama 2.1 muestra la configuración de un sistema LQR. Para resolver el problema, se sustituye (13) en (12), se obtiene

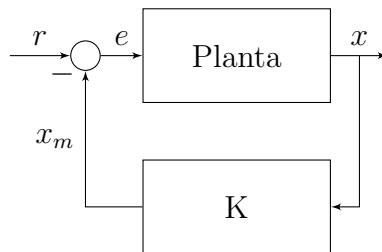


Figura 2.1: Sistema regulador óptimo

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A - BK)x.$$

Se considera que la matriz $A - BK$ es estable o que los valores propios de esta tienen partes reales negativas, por lo que al sustituir (13) en (14) se obtiene

$$J = \int_0^{\infty} x^T(Q + KRK)xdt,$$

si se iguala

$$x^T(Q + KRK)x = \frac{d}{dt}(xPx),$$

donde P es una matriz simétrica definida positiva o simétrica real, por lo que se obtiene

$$-\dot{x}Px - xP\dot{x} = -x[(A - BK)P + P(A - BK)]x.$$

Al comparar ambos lados de esta última ecuación y considerando que esta debe ser válida para cualquier x , se requiere que

$$(A - BK)P + P(A - BK) = -(Q + KRK). \quad (16)$$

Se puede demostrar que si $A - BK$ es una matriz estable, existe una matriz P definida positiva que satisface (16). Por lo que el procedimiento se reduce a encontrar los elementos de la matriz P , tal que minimice el gasto energético y que a su vez vuelva lo más rápidamente posible a su respuesta y converja a un punto de equilibrio o trayectoria deseada [2].

La función de coste se calcula como:

$$J = \int_0^{\infty} x^T(Q + K^T RK)xdt = -x^T Px \Big|_0^{\infty}.$$

Como todos los valores propios de $A - BK$ tienen partes reales negativas, se tiene que $x(\infty) \rightarrow 0$ por lo que la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera

$$J = x^T(0)Px(0), \quad (17)$$

de esta manera el comportamiento de J se obtiene en términos de $x(0)$ y P .

Al suponer que R es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real, se puede escribir:

$$R = T^T T,$$

donde T es una matriz no singular, por tanto 17 con respecto a K

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1}B^T P = R^{-1}B^T P \quad (18)$$

El diseño de la matriz de ganancia K mediante un criterio de optimización busca obtener el mejor equilibrio posible entre:

- Velocidad de convergencia de x a X .
- Gasto energético en la señal de control $u(t)$.
- Precision en la diferencia $x(t) - X$ si el motor solo se ejecuta en un tiempo finito de $t \in [0, t]$.

Si la acción de control sólo puede efectuarse en el intervalo de tiempo $t \in [0, t]$ el criterio de desempeño empleado es una cuadrática integral.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 - X_1 \\ x_2 - X_2 \\ \vdots \\ x_n - X_n \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 - U_1 \\ u_2 - U_2 \\ \vdots \\ u_n - U_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

La solución de este problema se puede demostrar, el cual se encuentra dada por la solución $P \in \Re^{n \times n}$ si $P > 0$, de la ecuación de Riccati.

De este modo la ley de control óptimo, para el problema de control óptimo cuadrático es lineal cuando el índice de comportamiento se encuentra dado por la ecuación de costo y se puede expresar como:

$$\bar{u}(t) = -K\bar{x}(t) = -R^{-1}B^T P\bar{x}(t) \quad (20)$$

La matriz P en la ecuación (20) debe satisfacer la ecuación reducida de Riccati (21)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (21)$$

La ecuación (21) se denomina ecuación matricial reducida de Riccati [8]. Los pasos del diseño se plantean del modo siguiente:

1. Resolver la ecuación (21), ecuación matricial reducida de Riccati, para la matriz P .

Si existe una matriz P definida positiva (ciertos sistemas pueden no tener una matriz P definida positiva), el sistema es estable o la matriz $A - BK$ es estable.

2. Sustituir esta matriz P en la ecuación $K = R^{-1}B * P$. La matriz K resultante es la matriz óptima.

2.4. Control PID

Los métodos de compensadores de tipo **PID** son de gran importancia en la estabilidad de sistemas reales que operan en la vecindad de puntos de equilibrio, prueba de ello es el uso frecuente de este tipo de controladores en aplicaciones industriales, diversos lazos de control utilizan este algoritmo, que puede ser implementado de diferentes maneras. Su estudio puede ser abordado desde diversos puntos de vista, como un dispositivo operado mediante unas cuantas reglas prácticas, pero también puede ser estudiado analíticamente [6].

El control **PID**, es un mecanismo de control que a través de un lazo de retroalimentación, permite regular las variables de un proceso en general, este calcula la diferencia entre la variable real contra la variable deseada.

El algoritmo de control incluye tres parámetros fundamentales: el parámetro Proporcional P , este mide la diferencia entre el valor actual y punto en que una señal se establece bajo ciertos parámetros deseados (set-point), el parámetro Integral I se refiere al tiempo que se toma para llevar a cabo acción correctiva; mientras el valor sea más pequeño, el ajuste es más rápido pero puede causar inestabilidad en el sistema, oscilaciones, vibración de motor, el parámetro Derivativo D emite una acción predictiva, es decir, inicia una acción oportuna, la cual responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. La correcta sintonización o programación de estos parámetros ayuda a controlar de manera efectiva la velocidad deseada, la ecuación general de un controlador **PID** esta representada por (22) [9]

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t)), \quad (22)$$

donde T_i se denomina tiempo integral y es el responsable de ajustar la acción integral. La función de transferencia se encuentra descrita por:

$$C_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (23)$$

La señal de control $u(t)$ tiene un valor diferente de cero cuando la señal de error $e(t)$ es cero. Por lo que se concluye que dada una referencia constante, o perturbaciones, el error en regimen permanente es cero.

En el diagrama a bloques 2.2 se muestra la estructura general de un controlador de **PID**

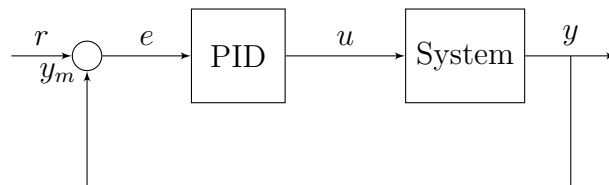


Figura 2.2: Estructura general del controlador PID

La respuesta transitoria de un sistema se puede seleccionar si se escoge una ubicación apropiada del polo en lazo cerrado en el plano complejo s , si este punto se encuentra sobre el lugar geométrico de las raíces, esto indica que sólo se requiere ajustar las ganancias.

2.5. Control PD

El algoritmo del control **PD** consiste en dos parámetros distintos: ganancia proporcional **P** y derivativo **D**. Existen diversas reglas de sintonización para este tipo de controladores, estas permiten llevar una sintonización delicada y fina de los controladores de este tipo.[10]

La implementación de un controlador **PD** requiere de un sistema de la forma

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{d_e(t)}{dt},$$

donde T_d es una constante denominada tiempo derivativo. Esta acción tiene carácter de previsión, lo que hace más rápida la acción de control, aunque tiene una desventaja importante que amplifica las señales de ruido

y puede provocar saturación en el actuador. La acción de control derivativa nunca se utiliza por sí sola, debido a que sólo es eficaz durante períodos transitorios. La función de transferencia de un controlador PD resulta:

$$C_{PD}(s) = K_p + sK_pT_d :$$

Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Aunque este no afecta en forma directa al error del estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite un valor más grande que la ganancia K , lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estable.

Las matrices de ganancia K_p y K_d , no basta con que sean positivas definidas, si no que además son valores característicos y deben cumplir con las magnitudes para garantizar la estabilidad asintótica q_d .

Para comprender las acciones, así como la estructura de un control PD se realiza un análisis desde el punto de vista continuo por ser más accesible su interpretación. En la figura 2.3 se muestra un esquema básico retroalimentado continuo.

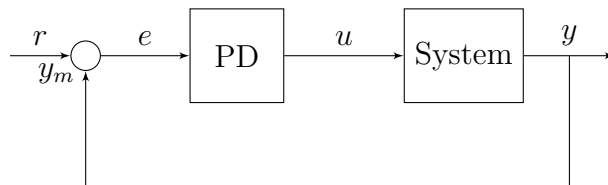


Figura 2.3: Estructura general del controlador PD

2.5.1. Acción proporcional

El control proporcional derivativo es una extensión inmediata del control proporcional con retroalimentación, como su nombre lo indica, la ley de control esta formada no sólo por un termino proporcional al error de posición \tilde{q} y un termino proporcional a su derivada, al error $\dot{\tilde{q}}$, la ley de control PD se encuentra dada por

$$\tau = k_p\tilde{q} + k_i\dot{\tilde{q}}$$

La acción proporcional se interpreta de forma aislada, de tal manera que la relación entre el error \tilde{q} y la señal de control $u(t)$ se encuentra representada por la ecuación (24).[11]

$$u(t) = k_p e(t) + u_0 \quad (24)$$

El parámetro k_p se conoce como ganancia proporcional, mientras que el término u_0 representa el valor en estado estacionario de la señal de control cuando el error es cero, llamado offset; si se toma la transformada de Laplace de esta expresión, se contempla la variable de desviación $u(t) - u_0$ de tal forma que la función de transferencia para el control es:

$$U(s) = K_p E(s)$$

Es de mencionar que el control proporcional genera un error en estado estacionario, el cual es proporcional al inverso de la ganancia proporcional, si el sistema no contiene un polo en el origen.

2.5.2. Acción proporcional y derivativa

La acción derivativa de un controlador **PD**, se considera la combinación de esta con la acción proporcional, de manera que el controlador tiene la siguiente expresión tanto en el tiempo como en la transformada de Laplace, y toma variables de desviación $u(t) - u_0$: [12]

$$\begin{aligned} u(t) &= K_c [e(t) + T_d \frac{d}{dt} e(t)] + u_0, \\ U(s) &= K_c (1 + T_d s) E(s). \end{aligned} \quad (25)$$

A partir de la función de transferencia de esta acción de control se puede observar que se introduce un cero ubicado en $\frac{-1}{T_d}$. teóricamente al diseñar un control **PD** se introduce un cero en el sistema, de tal forma que ayuda a este a ser más rápido, moviendo el lugar geométrico de las raíces hacia el interior del semiplano izquierdo.

El controlador derivativo se opone a desviaciones de la señal de entrada, con una respuesta que es proporcional a la rapidez con que se producen éstas.

Si se considera la figura 2.3, la salida que se obtiene del control **PD** se describe mediante la ecuación:

$$y(t) = t_d \cdot \frac{d}{dt} e(t), \quad (26)$$

al pasar la salida del control al dominio de Laplace y despejando se puede obtener su función de transferencia, la cual queda de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = T_d s. \quad (27)$$

Si la variable de entrada es constante, no da lugar a la respuesta diferencial; cuando el cambio instantáneo de la señal de entrada es muy grande, tiene una tasa de cambio muy alta, por lo que la respuesta del regulador diferencial será muy brusca, lo que no es adecuado para el sistemas.

El regulador diferencial tampoco actúa de manera aislada, si no que siempre lleva asociada la actuación de un regulador proporcional, la salida del bloque de control responde a la siguiente ecuación:

$$y(t) = K_p \cdot t_d \cdot \frac{d_e(t)}{dt} + K_p \cdot e(t), \quad (28)$$

donde K_p y T_d son parámetros ajustables del sistema. T_d es llamado tiempo derivativo y es una medida de la rapidez con que un controlador PD compensa un cambio en la variable regulada, comparado con un controlador **P** puro.

Expresando la ecuación (28) en el dominio de Laplace se puede obtener la función de transferencia del bloque de control **PD**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = K_p \cdot (T_d \cdot s + 1). \quad (29)$$

La función anterior se representa en diagrama de bloques como lo muestra la figura 2.4

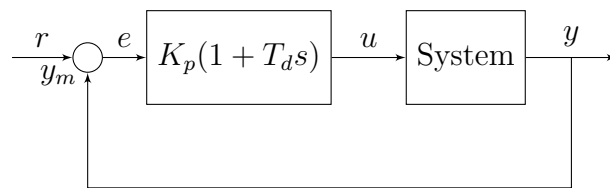


Figura 2.4: Estructura general del controlador PD

Capítulo 3

Control fraccionario

La teoría de control clásica tuvo un gran incremento a partir de los años 50's debido a la influencia de las técnicas en el dominio de la frecuencia desarrolladas en electrónica de comunicaciones y la teoría de servomecanismos. Los trabajos de Black, Harry Nyquist, Hendrik Wade Bode, entre otros, proporcionaron herramientas valiosas para el análisis de sistemas y diseño de controladores, a si mismo establecieron la terminología de márgenes y el sistema de referencia, los cuales siguen vigentes en la actualidad. Este sistema de referencia se encuentra descrito por la función de transferencia (1) [13]

$$G(s) = \frac{\omega_2^n}{s(s + 2\zeta\omega_n)}, \quad (1)$$

donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento y ω_n la frecuencia natural no amortiguada.

Si se considera una fricción nula ($\zeta = 0$), el sistema tiende a comportarse como un doble integrador

$$G_0(s) = \frac{\omega_2^n}{s^2}.$$

El científico Bode establece las relaciones de magnitud/fase en la respuesta en frecuencia, y con base a estas, presenta una elegante solución al problema de diseño robusto planteado: obtener un amplificador realimentado que en lazo cerrado fuera invariante a variaciones en la ganancia del amplificador. A esta solución la denominó característica de corte ideal, y era ideal en el sentido de que su diagrama de Nyquist es una línea recta desde el origen correspondiente a un margen de fase invariante a los cambios en la ganancia. Es decir, era de la forma

$$G_k(s) = \left(\frac{\omega_g}{s}\right)^k$$

donde ω_g es la frecuencia de cruce de ganancia y el margen de fase constante es

$$MF = \pi - k\frac{\pi}{2}$$

Aunque los fundamentos introducidos por Bode han llegado a ser claves en la teoría de control automático, la función ideal no ha sido tan discutida en la literatura especializada. No obstante, en 1958, Arnold Tustin publicó un artículo sobre “El diseño de sistemas para el control automático de la posición de objetos grandes y pesados”. Este trabajo, es una contribución al control de servomecanismos, donde se estudian los requerimientos en conflicto para el sistema de control de posición expresados como restricciones en el diagrama de magnitud de la respuesta en frecuencia para el lazo de control [14].

$$Y(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^k},$$

puesto que en forma polar corresponden a líneas rectas desde el origen igual que en Bode, con pendiente k y formando un ángulo de $\frac{k\pi}{2}$, coincidiendo con los ejes, si k es un número entero. Posteriormente explica como obtener aproximaciones a esta característica partiendo del servomecanismo ideal con función de frecuencia

$$Y(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^2}.$$

Una forma simple de obtener las características deseadas a partir de este servomecanismo ideal, es introducir un controlador con función de transferencia

$$D(s) = s^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

obteniendo así un sistema en lazo cerrado como el que se muestra en el diagrama 3.1.

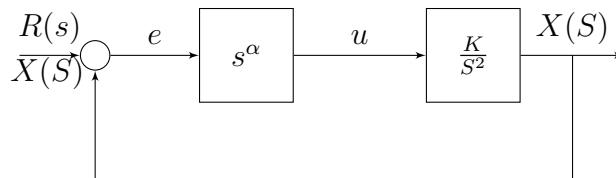


Figura 3.1: Lazo ideal a partir del servo ideal.

Las primeras aplicaciones del cálculo fraccionario en control, se dieron a principios de la década de los 60's. Estas primeras aplicaciones hacían uso del operador integral de orden no entero para el control de servos y de sistemas con saturación. Estos hacían uso de las propiedades de la que Bode denomina función de transferencia ideal en lazo abierto, cuya forma era $F(s) = \frac{k}{s^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Generalmente un buen diseño requiere que el margen de fase se mantenga aproximadamente constante para este rango de frecuencias. Como resultado, su función de transferencia en lazo abierto se aproximará a la de la integral no entera $\frac{1}{s^k}$, donde $1 < k < 2$, por lo que se repiten los requisitos y argumentos de Bode y Tustin, pero dando nombre a esa función de transferencia ideal en lazo abierto: es un integrador fraccionario de orden entre 1 y 2.

El control fraccionario propone el uso de operadores de sistemas fraccionales como controladores. En las siguientes secciones se describe un poco de la teoría básica y del controlador Proporcional Derivativo Fraccionario[15].

3.1. Cálculo Fraccionario definición básica

El cálculo fraccional es una herramienta matemática la cual permite la derivación e integración de funciones de orden no entero conocidos como cuasipolinomios. Esta teoría generaliza la notación de derivada D^α a aquellos casos en los cuales se presenta un orden de diferenciación, α , presenta un orden negativo, irracional o incluso imaginario, permite cálculos de tipo derivada de orden 0,5 de una fracción.

Una de las condiciones en esta técnica, dentro de los operadores derivada e integral fraccional deben de satisfacer las mismas condiciones que en el caso entero, lo que indica que si se deriva o integra con un orden entero usando las definiciones de los operadores fraccionales, se debe obtener el mismo resultado que con la metodología clásica.

En el dominio del tiempo, los operadores derivada e integral fraccionaria se encuentran definidos por la operación de convolución, por lo que son de gran utilidad al momento de describir fenómenos de memoria tales como la difusión, la viscoelasticidad, etc;[15].

3.2. Funciones especiales

Dentro del cálculo fraccionario, existen algunas funciones importantes tal como lo es la función gamma (Γ), la cual se considera una extensión de la operación factorial a una imagen continua de x

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

gamma se encuentra definida para todo número real positivo y es continua, excepto cuando $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

La función gamma satisface la siguiente regla:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

llamada ecuación funcional de gamma. Para obtener la función Γ se establece la siguiente definición

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt = k!, \quad k \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Por lo tanto es posible definir $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ para cualquier n , siempre que la integral tenga sentido.

Esta integral impropia se puede escribir como

$$\Gamma(n) = \int_0^1 t^{n-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt.$$

El segundo sumando del segundo termino converge todo x pues predomina e^{-t} , mientras que el primer sumando es discontinuo en $t = 0$ si $n < 1$, pero converge si $n > 0$, ya que la cantidad sub integral es constante, para t proximo a cero

$$\Gamma(n) = \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{t^n}{n} \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{n},$$

por lo que $\Gamma(n)$ es continuo si $n > 0$

Otra función de gran importancia dentro del cálculo fraccionario, es la función de Mittag-Leffler, la cual define una función entera mediante el uso de series M-L de dos parámetros:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

M-L introduce un parámetro, $\beta = 1$ por lo que la función queda de la siguiente manera

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0,$$

Relacionada a funciones hiperbólicas generalizadas de la forma $F_{\alpha,r}^\alpha(z)$ por:

$$F_{\alpha,0}^1(z) = E_\alpha(z^n)$$

Esta función de M-L se comporta como una solución natural de ecuaciones diferenciales fraccionarias, es el equivalente de la exponencial para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para $\frac{1}{2}$ la función puede escribirse explícitamente como:

$$E_{\frac{1}{2}} = e^{z^2} [1 + \operatorname{erf}(z)] = e^{z^2} [1 + \operatorname{erfc}(-z)],$$

donde erf es la función error y erfc es su complemento.

La función de M-L se puede tomar como una generalización de la función exponencial, por consiguiente:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

3.3. Definición de derivada e integral fraccional

El cálculo fraccional es la generalización de la integral y la derivada de orden no lineal donde el operador fundamental ${}_a D_t^\alpha$, donde a y t son operadores de $\alpha \in R$. en tiempo continuo el operador integrodiferencial se define como:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\Gamma)^\alpha, & \alpha < 0, \end{cases}$$

las tres definiciones más usuales dentro del cálculo fraccionario son: la definición de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo.

3.4. Grünwald-Letnikov integral y derivada fraccionaria

Se considera una función $f(t)$. Si la primera derivada

$$\frac{d}{dt}f(t) \equiv f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (2)$$

Considerando (2) y derivando dos veces se obtiene la función $f(t)$ en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}f(t) &\equiv f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

3.5. Integral y derivada fraccional de Riemann-Liouville

La integral fraccionaria de acuerdo con la concepción de Riemann-Liouville, la noción de integral fraccionaria de orden α , $\Re_e(\alpha) > 0$, es una consecuencia natural de la fórmula atribuida a Cauchy, que reduce el cálculo de la primitiva correspondiente a la integración de multiplicidad n de una función $f(t)$ a una integración simple de tipo convolución. La fórmula de Cauchy puede expresarse como:

$$I_c^n \equiv \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-\Gamma)^{n-1} f(\Gamma) d\Gamma, \quad \Gamma > c, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

donde \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los números enteros positivos. De una forma natural, se puede extender la validez de la fórmula anterior de valores del índice enteros positivos a valores reales positivos utilizando la función Gamma. Teniendo en cuenta que $\Gamma(n) = (n-1)!$, e introduciendo el número real positivo α , se define la integral fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ como:

$$I_c^\alpha \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-\Gamma)^{\alpha-1} f(\Gamma) d\Gamma, \quad \Gamma > c, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

3.5. INTEGRAL Y DERIVADA FRACCIONAL DE RIEMANN-LIOUVILLE 37

La Integral de R-L puede expresarse mediante una convolución:

$$I^\alpha f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t).$$

Con lo que aplicando la propiedad de la convolución se obtiene:

$$L\{I^\alpha f(t)\} = L\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\}L\{f(t)\}.$$

Teniendo en cuenta que: $L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$, se obtiene:

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha}F(s),$$

por definición la derivada fraccional de R-L es: $D^\alpha f(t) = D^m I^{m-\alpha} f(t)$, por lo tanto

$$L\{D^\alpha f(t)\} = L\{D^m I^{m-\alpha} f(t)\}$$

Haciendo $g(t) = I^{m-\alpha} f(t)$ y aplicando la transformada de Laplace de orden entero m se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} L\{D^m g(t)\} &= s^m G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{m-k-l}(0) = s^m G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{m-k-l}(0) \\ &= s^m G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^k(0) \end{aligned}$$

Siendo $g^{m-k-l}(t) = D^{m-k-l} I^{m-\alpha} f(t) = D^{\alpha-k-l} f(t)$ En virtud al resultado obtenido para la integral fraccional, se tiene que:

$$L\{I^{m-\alpha} f(t)\} = s^{-(m-\alpha)}F(s),$$

con lo que resulta:

$$\begin{aligned} L\{D^\alpha I^{m-\alpha} f(t)\} &= s^m s^{-(m-\alpha)}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-l} f(t)]_{t=0} \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-l} f(t)]_{t=0} \end{aligned}$$

Donde el rango que puede tomar α es $m - l \leq \alpha \leq m$

3.6. Derivada fraccional de Caputo

Esta derivada se expresa como:

$$D^\alpha f(t) = I^{(m-\alpha)} D^m f(t)$$

Teniendo en cuenta el resultado de la transformada de la integral fraccional y el de la derivada de orden entero, se obtiene:

$$\begin{aligned} L\{D^\alpha f(t)\} &= s^{-(m-\alpha)} [s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-l} f^{(k)}(0)] \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-l} s^{\alpha-k-l} f^{(k)}(0), \end{aligned}$$

donde el rango que puede tomar α es $m - l \leq \alpha \leq m$

Como se puede ver esta forma posee una interpretación física conocida de las condiciones iniciales.

3.7. Modelos y representaciones

Partiendo de lo establecido en la sección anterior, se pueden formular las ecuaciones constitutivas de un sistema dinámico de orden fraccionario, lineal, monovariable e invariante en el tiempo, de la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} u(t)$$

En la ecuación anterior pueden considerarse dos casos particulares que dan lugar a dos tipos de sistemas de gran interés: los sistemas de orden conmensurable y los sistemas de orden racional. se define como lo siguiente:

Definición 1: Un sistema es de orden conmensurable si queda descrito por una ecuación diferencial donde todos los órdenes de derivación son múltiplos enteros de un orden base, α , es decir, sistemas para los que se cumple que

$$\alpha_k \beta_k = k\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

Así, la ecuación diferencial se puede poner de la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha_k} u(t)$$

Definición 2: Un sistema es de orden racional si es de orden conmensurable y además se cumple que $\alpha = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{Z}^+$.

Utilizando la definición de Gröndwald-Letnikov para la derivada fraccionaria, se pueden obtener modelos discretos de los sistemas fraccionarios en forma de ecuaciones en diferencias generalizadas.

3.8. Controladores fraccionarios

Un controlador fraccionario general esta representado por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}, \quad (3)$$

el equivalente o la aproximación discreta en z es estableciendo una función $w(z^{-1})$ que reemplace a s , generalmente basada en métodos de integración grafica, como trapecio o Euler, Tustin etc.

La función de transferencia no es racional, y en el dominio de z el orden es infinito, o sea hay que aproximar.

Los métodos de aproximaciones se utilizan dependiendo del error producido por el truncado de la potencia, se suelen utilizar distintos modelos para las bandas de frecuencia, o al menos para frecuencia baja y para frecuencia alta.

Uno de los modelos más trabajados y que su convergencia es rápida y error es relativamente bajo es el CFE o expansión en fracciones continuas, muy tedioso de realizar manualmente pero Matlab a través de Maple ofrece esta aproximación.

Se conviene hablar de dos métodos de discretización generales: la discretización indirecta, donde se requiere dos pasos, el primero obtener la función de transferencia en s , racional, continua, y luego pasar esta a z , mediante la integral de convolución o con Matlab, recordando incorporar el retenedor de orden cero (ROC).

Otro método denominado directo incluye la aplicación de la expansión en series de potencia (PSE) o mediante el operador de Euler donde $s \rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, o utilizando la transformación bilineal.

Capítulo 4

Descripción del sistema

Un cuadricóptero posee algunas ventajas sobre los VANT's de ala fija como lo puede ser el despegue de la aeronave, ya que ésta es capaz de descender y ascender de manera vertical, lo que le permite tener una suspensión sobre un punto fijo. En comparación de un VANT de ala fija que sólo puede despegar y aterrizar de forma horizontal, manteniendo un determinado ángulo de inclinación, haciendo indispensable una plataforma para su uso.

Un cuadricóptero como su nombre lo indica es una aeronave conformada por cuatro brazos, los cuales tienen en su extremo un rotor con una hélice, equidistantes entre sí, así como del centro mismo de la estructura, lo cual lo convierte en un vehículo simétrico. Hoy en día no existen restricciones en cuanto al diseño o funcionalidad, ya que éstos son correspondientes a la aplicación requerida.

Las hélices pueden tener dos, tres o cuatro aspas, dependiendo del diseño del cuadricóptero. Cabe mencionar que cada uno de los motores produce un empuje y un torque, de los cuales se hablará en secciones posteriores.

4.1. Ángulos de navegación

Una aeronave requiere controlar tres diferentes ángulos, para mantener una estabilidad de vuelo. Cada ángulo tiene una función específica, al momento de ejecutar el vuelo de la aeronave.

Los ángulos de rotación se definen como **roll**, **pitch** y **yaw**, los cuales denotan θ , ϕ y ψ , tal y como se muestra en la figura 4.1.

Para obtener una buena estabilidad de vuelo suspendido es necesario mantener un ángulo lo más cercano a cero, esto se logra si los ángulos correspondientes a los ejes x_0 y y_0 no tienen inclinación alguna.

Gracias a la simetría que posee un cuadricóptero permite un mejor control del desplazamiento y una buena estabilidad de vuelo del aeronave. Se explica la orientación de la base asociada al cuadricóptero respecto a la referencia inercial (centro de la estructura) dicho proceso se calcula mediante los ángulos de Euler, siguiendo la convención z, x y y .

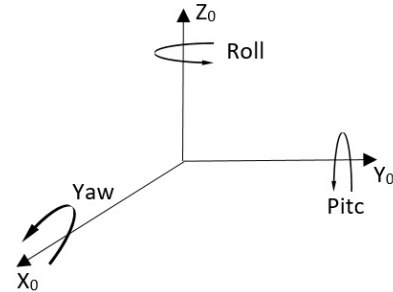


Figura 4.1: Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler es una manera de describir una rotación de forma general, dentro de un espacio Euclidiano tridimensional mediante tres rotaciones sucesivas en torno a los ejes del móvil, que son conocidos como ángulos de *cabeceo*, *alabeo* y *guiñada*.

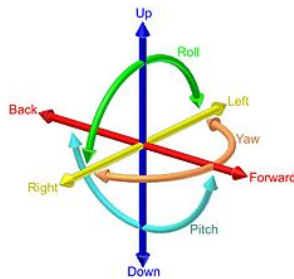


Figura 4.2: Ángulos de Euler

cuadricóptero alrededor del eje y ; cabeceo (*pitch* o ϕ), determina la rotación alrededor del eje x ; finalmente guiñada (*yaw* o ψ), determina la rotación alrededor del eje z . Estos tres ángulos representan la orientación del cuadricóptero [5].

Para entender mejor la manera la cual se desplaza el cuadricóptero se estudia el cambio ante una rotación de los ejes coordenados, los cuales se describen por matrices ortogonales.

Al tratarse de un cuerpo sólido tridimensional, puede representarse matemáticamente como una fuerza con tres momentos como se aprecia en la Figura 4.2.

Bajo este esquema, las coordenadas x , y y z representan la posición del centro de la estructura de la aeronave, mientras que θ , ϕ y ψ representan los ángulos de Euler:

Alabeo (*roll* o θ), determina la rotación de

cuadricóptero alrededor del eje y ; cabeceo (*pitch* o ϕ), determina la rotación

alrededor del eje x ; finalmente guiñada (*yaw* o ψ), determina la rotación

Si $\vec{r} = (x, y, z)$ son las coordenadas de un punto respecto al sistema que se encuentra fijo y $r' = (x', y', z')$ las coordenadas respecto al sistema rotado.

Se puede probar que todo sistema de coordenadas puede ser descrito con los tres ángulos de Euler. Si llamamos \mathbf{R} a la matriz de rotación tridimensional que representa la transformación de coordenadas desde el sistema fijo al sistema móvil, el teorema de Euler sobre rotaciones tridimensionales, afirma que existe una descomposición única en términos de los tres ángulos de Euler[16].

La rotación correspondiente al ángulo de guiñada, a partir del nuevo eje z' , para llevar al cuadricóptero a su posición final.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El siguiente giro que se realiza es correspondiente al ángulo de alabeo, a partir del nuevo eje x' .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

Finalmente, se tiene al ángulo correspondiente al giro de cabeceo, éste se encuentra a partir del nuevo eje y' , dejando al eje z en su posición final.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Los ángulos de ϕ y θ permiten tener un giro de 360° , Figura 4.3, en esta figura se observan las tres rotaciones que se asocian a las matrices de los ángulos θ , ϕ y ψ .

La matriz de rotación completa del cuadricóptero, con respecto a su base de referencia se le conoce como matriz coseno directa [17].

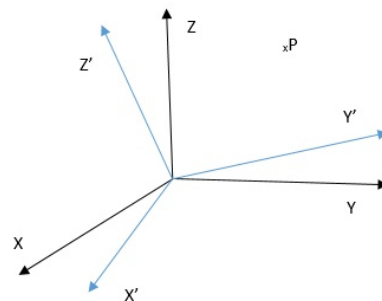


Figura 4.3: Planos de rotación

$$R_{z,y,x} = R_{z,\psi} R_{y,\theta} R_{x,\phi},$$

$$R_{z,y,x} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Para obtener la matriz de rotación es necesario respetar el orden en el cual se traslada el cuadricóptero, para este caso sólo se realiza una rotación sobre el eje z por lo que será la primer matriz a multiplicar posteriormente y y, finalmente, x , dando como resultado.

$$R_{z,y,x} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix}.$$

4.2. Modelo no lineal de un cuadricóptero

Al controlar un cuadricóptero mediante alguna de la multiples técnicas de control existentes, es indispensable obtener el modelo matemático que describe al sistema, con éste se podrán realizar simulaciones, y así probar los controladores propuestos y encontrar el mejor controlador. De este modo se podrá realizar una comparación de los resultados obtenidos de manera simulada.

Para poder obtener el modelo matemático del cuadricóptero se debe tener en cuenta las entradas y salidas del sistema; para estudio de esta tesis, se consideran la velocidad angular de los cuatro motores y las salidas a controlar sera la posición en los ejes x , y y z y los ángulos de cada eje, θ , ϕ y ψ . La velocidad lineal y velocidad angular serán las derivadas de la posición y de los ángulo, ver Figura 4.5.

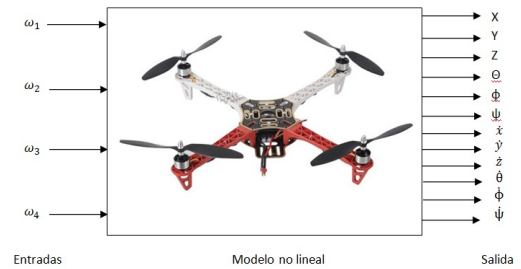


Figura 4.4: Sistema propuesto

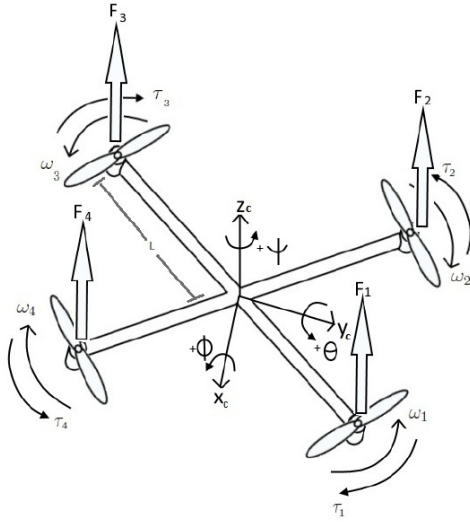


Figura 4.5: Diagrama del sistema

puede considerarse que tiene coordenadas $CM = (0, 0, 0)$.

La Figura 4.5 muestra el sentido de giro de los motores representada por ω , torques requerido para la fuerza de sustentación τ , ejes de referencia x, y y z . Finalmente, se encuentran los ángulos correspondientes a cada uno de los ejes coordenados θ, ϕ y ψ .

Como ya se explicó, el cuadricóptero es una estructura simétrica, lo cual coloca el centro de masa justo en el centro de aquél, indicando que los ejes referenciales se desplazan junto con la aeronave. Esto quiere decir que el centro de masa se puede considerar que tiene coordenadas $CM = (0, 0, 0)$.

4.3. Torque de un cuerpo

Para obtener la ecuación de la energía cinética que describe a un cuadricóptero, es necesario considerar cada uno de los torques generados por los rotores como cantidades vectoriales, como se muestra en la figura 4.5.

Si se considera una fuerza que actúa en los tres ejes $F(f(x), f(y), f(z))$, la cual se encuentra actuando sobre el cuadricóptero, en un punto específico $P(x, y, z)$ y que la fuerza pasa por el origen, por lo que se define a la variable σ , la cual tiene el siguiente valor.

$$\sigma = F'h,$$

donde h es la distancia normal al punto P , el cual se encuentra en el centro del nuevo eje coordenado y F' se considera la componente de la fuerza normal al plano O_{ap} .

Considerando que el valor de F' actúa sobre cada uno de los ejes coordenados se considera de la siguiente manera

$$F' = f_x\alpha_1 + f_y\alpha_2 + f_z\alpha_3. \quad (1)$$

Si se consideran los valores correspondientes de cada una de las α 's las cuales se encuentran descritas por (2)

$$\alpha_1 = \frac{(mz - ny)}{h}, \quad \alpha_2 = \frac{(nx - lz)}{h}, \quad \alpha_3 = \frac{(ly - mx)}{h}. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) y sumando todas las fuerzas internas del cuerpo, obteniendo para el total de torques sobre el cuerpo (0_a), se obtiene (3).

$$\sigma_{0a} = l \sum (f_z y - f_y z) + m \sum (f_x z - f_z x) + n \sum (f_y x - f_x y). \quad (3)$$

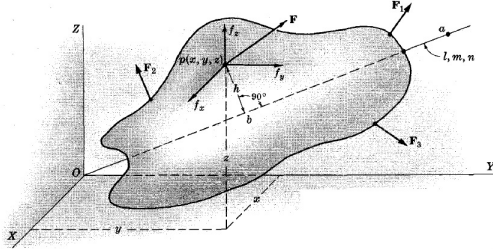


Figura 4.6: Fuerzas ejercidas sobre un cuerpo

Considerando la definición original de torque, como se muestra en la figura 4.6, se puede analizar que $\sum (f_z y - f_y z)$ es el torque ejercido por todas las fuerzas sobre el eje x .

Esto quiere decir que los torques se pueden expresar de la siguiente manera.

$$\tau_x = \sum (f_z y - f_y z), \quad \tau_y = \sum (f_x z - f_z x), \quad \tau_z = \sum (f_y x - f_x y) \quad (4)$$

Por lo tanto es posible reescribir al torque en el punto 0_a como.

$$T_{0a} = \tau_x l + \tau_y m + \tau_z n$$

A partir de T_{0a} se puede observar que es la componente del vector τ tiene componentes en τ_x , τ_y y τ_z . La magnitud de τ se encuentra especificada de la siguiente manera.

$$\tau = (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Mientras que la dirección se encuentra especificada por (5).

$$\frac{\tau_x}{\tau}, \frac{\tau_y}{\tau}, \frac{\tau_z}{\tau}. \quad (5)$$

Siendo x, y y z , las coordenadas vectoriales de los puntos de aplicación de las fuerzas. El torque anterior es el vector de notación equivalente a:

$$\tau = \sum rxF = i \sum ((f_{zy} - f_yz) + j \sum (f_{xz} - f_zx) + k \sum (f_{yx} - f_xy).$$

Por lo tanto la expresión general para la energía cinética de un cuadricóptero se encuentra dada por cada uno de los ejes coordenados como lo muestra (6).

$$V_x = V_0x + W_yz - W_zy, \quad V_y = V_0y + W_zx - W_xz, \quad V_z = V_0z + W_xy - W_yx. \quad (6)$$

La cantidad de movimiento de cualquier partícula en un cuerpo rígido con las coordenadas x, y y z . Por lo que una expresión general para τ se obtiene al sustituir las relaciones anteriores en:

$$\tau = \frac{1}{2} \sum m'(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2). \quad (7)$$

Finalmente la ecuación obtenida de la sustitución en consideración con cada uno de los ejes coordenados.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}M(V_{0x}^2 + V_{0y}^2 + V_{0z}^2) + \frac{1}{2}\omega_x^2 \sum m'(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}\omega_y^2 \sum m'(x^2 + y^2) + \\ & \frac{1}{2}\omega_z^2 \sum m'(x^2 + y^2) - \omega_x\omega_y \sum m'xy - \omega_x\omega_z \sum m'xz - \omega_y\omega_z \sum m'yz + \\ & V_{0x}(\omega_y \sum m'z - \omega_z \sum m'y) + V_{0y}(\omega_z \sum m'x - \omega_x \sum m'z) + \\ & V_{0z}(\omega_x \sum m'y - \omega_y \sum m'x). \end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación (9) describe la energía cinemática de un cuadricóptero.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}[I_xw_x^2 + I_yw_y^2 + I_zw_z^2 - 2I_{xy}w_xw_y - 2I_{xz}w_xw_z] + \\ & M[V_{0x}(w_y\bar{z} - w_z\bar{y}) + V_{0y}(w_z\bar{x} - w_x\bar{z}) + V_{0z}(w_z\bar{y} - w_y\bar{x})], \end{aligned} \quad (9)$$

donde:

M : Masa del cuadricóptero.

V_0 : Velocidad lineal del origen del marco inercial.

V_{0x}, V_{0y}, V_{0z} : Velocidades angulares de un cuerpo libre.

w_x, w_y, w_z : Velocidades angulares de un cuerpo libre.

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$: Distancia del origen del cuerpo libre en cada eje coordenado, al centro de masa del cuerpo libre.

Se hacen las siguientes consideraciones:

1. Dado que el centro de masa se localiza en el origen, entonces $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, es decir las distancias son cero, la ecuación (9) queda (10)

$$T = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}[I_x w_x^2 + I_y w_y^2 + I_z w_z^2]. \quad (10)$$

2. Por simetría del cuerpo con respecto a los ejes x, y se considera que $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ por lo que la ecuación (10) se reduce como lo muestra la ecuación (11)

$$T = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}[I_x w_x^2 + I_y w_y^2 + I_z w_z^2]. \quad (11)$$

3. Ya que la velocidad lineal del origen del marco no inercial, es la misma velocidad lineal que la del centro de masa del cuerpo libre, se considera que $V_0 = V_{cm}$ [18]

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}[\bar{I}_l(w_x^2 + w_y^2) + \bar{I}_z w_z^2]. \quad (12)$$

Como se sabe que $V_{MC} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ y $\omega_x = \dot{\phi}$, $\omega_y = \dot{\theta}$ y $\omega_z = \dot{\psi}$, substituyendo estas variables en (12) se obtiene la energía cinética del cuadricóptero quedando la siguiente expresión.

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}[\bar{I}_l(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \bar{I}_z \dot{\psi}^2] \quad (13)$$

Una vez que se obtiene el modelo matemático el cual describe a un cuadricóptero se prosigue a modelar mediante la ecuación parcial de lagrange las ecuaciones que describen el movimiento del cuadricóptero para cada uno de los estados no diferenciados.

4.4. Ecuación de movimiento para el eje x

El método más eficiente para realizar el modelo matemático de un sistema físico es mediante el método de Lagrange (14), el cual se basa en la energía cinética T y la fuerza generada F_r que provoca los cambios en dicha energía. A ésta fuerza se le puede ver como la suma de las fuerzas totales que afectan al sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{qr}, \quad (14)$$

donde:

- q_r : Coordenada generalizada.
- T : Energía cinética del cuerpo.
- F_r : Fuerza generalizada.

Aplicando a (13) la definición del lagrangiano, se obtiene la ecuación que describe el movimiento para el eje x . por lo que la expresión que da de la siguiente manera.

$$M\ddot{x} = F_x. \quad (15)$$

Sin embargo, la ecuación de movimiento para el eje x , aun contiene una fuerza la cual se tendrá que expresar de modo que $dW_x = F_x dx$. éste trabajo incluye fuerzas conservativas y no conservativas. en el caso del eje x , las fuerzas conservativas se encuentran dadas por la propulsión de las hélices y las no conservativas se encuentran representadas por la fricción del aire. Por lo que el trabajo para el eje x se encuentra dado por:

$$dW_x = (K \sum_{n=1}^4 \omega_n^2 - B_x \dot{x}) \cos \phi \sin \theta dx, \quad (16)$$

donde.

- K : Constante de sustentación de las hélices.
- ω_n : Velocidad angular de cada una de las hélices.
- B_x : Constante de arrastre del aire para x .

Una vez que se tiene el trabajo virtual para el eje x , se procede a completar la ecuación de movimiento. Finalmente (17) muestra todos los términos para el desplazamiento en el eje x .

$$M\ddot{x} = \left(K \sum_{n=1}^4 \omega_n^2 - B_x \dot{x} \right) \cos \phi \sin \theta. \quad (17)$$

En las ecuaciones de movimiento, las cuales representan a cada uno de los estados se considera la rotación R_{YZ} .

4.5. Ecuación de movimiento para el eje y

La ecuación que describe el movimiento sobre eje y es muy similar a la ecuación de movimiento del eje x . La única diferencia es la rotación del marco no inercial al marco inercial. Por lo que, la ecuación de movimiento en el eje y , se encuentra definida por (18)

$$M\ddot{y} = - \left(K \sum_{n=1}^4 \omega_n^2 - B_y \dot{y} \right) \sin \phi, \quad (18)$$

donde B_y representa la constante de arrastre generada por el aire sobre el eje y .

4.6. Ecuación de movimiento para el eje z

En el caso particular del eje z , la ecuación de movimiento reducida se encuentra representada por, $M\ddot{z} = F_z$. La fuerza de Z y F_z , se obtiene a partir de la segunda ley de Newton aplicada al eje z , como se muestra en (19)

$$dW_z = \left(K \sum_{n=1}^4 \omega_n^2 - Mg - B_z \dot{z} \right) \cos \phi \cos \theta dz, \quad (19)$$

donde

g : Constante de gravedad.

B_z : Constante de arrastre del aire en el eje z .

Por lo tanto, con esto se obtiene la ecuación de movimiento completa para el eje z , se muestra en (20)

$$M\ddot{z} = \left(K \sum_{n=1}^4 \omega_n^2 - Mg - B_z \dot{z} \right) \cos\theta \cos\phi. \quad (20)$$

4.7. Ecuación de movimiento para el ángulo θ

Al obtener la ecuación de movimiento que describe al ángulo θ , se requiere resolver (14), la ecuación de movimiento reducida de θ , queda como se indica a continuación.

$$\bar{I}_L \ddot{\theta} = F_\theta. \quad (21)$$

La ecuación (21) contiene una fuerza igualada a un momento de inercia por aceleración angular. Para obtener el torque de esta ecuación de movimiento, se analiza al sistema desde el marco inercial; tal como se ha hecho en las anteriores ecuaciones de movimiento. Para ello se toma en cuenta el diagrama que se muestra en la figura 4.7, con ejes x y y en el marco inercial.

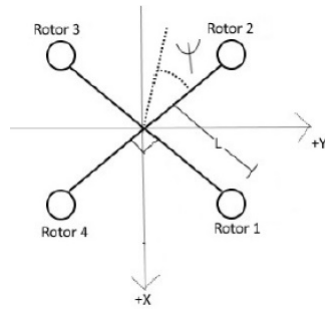


Figura 4.7: Diagrama para análisis de torques

Como se observa en la Figura 4.7, si $y = 0$, los rotores 2 y 3 impulsan al cuadricóptero hacia $+\theta$, mientras que los rotores 1 y 4 lo impulsan hacia $-\theta$. Así mismo, es posible observar que cada rotor no sólo tiene influencia sobre θ , sino que también sobre ϕ . Mediante trigonometría es posible determinar el torque que genera cada rotor a partir de su fuerza de sustentación, sobre los ejes x y y ; lo cual refleja cambios en θ y ϕ .

Con lo mencionado anteriormente y mediante el uso de trigonometría se obtienen las siguientes ecuaciones, las cuales describen los torques generados por cada uno de los rotores a partir de las fuerzas de sustentación.

$$\tau_{1,\theta} = -\ell F_1 \cos(\pi/4 + \psi), \quad \tau_{1,\phi} = \ell F_1 \cos(\pi/4 - \psi),$$

$$\tau_{2,\theta} = \ell F_2 \cos(\pi/4 - \psi), \quad \tau_{2,\phi} = \ell F_2 \cos(\pi/4 + \psi),$$

$$\tau_{3,\theta} = \ell F_3 \cos(\pi/4 + \psi), \quad \tau_{3,\phi} = -\ell F_3 \cos(\pi/4 - \psi),$$

$$\tau_{4,\theta} = -\ell F_4 \cos(\pi/4 - \psi), \quad \tau_{4,\phi} = -\ell F_4 \cos(\pi/4 + \psi),$$

donde:

- $\tau < \triangleleft$: Torque con respecto al ángulo \triangleleft , generado por la fuerza de sustentación del motor $\#$
- ℓ : Longitud del brazo del cuadricóptero.
- F_i : Fuerza de sustentación del rotor i .
- $\tau_{i,\theta}$: Torque con respecto a θ generado por la fuerza de sustentación F_i .
- $\tau_{i,\phi}$: Torque con respecto a ϕ generado por la fuerza de sustentación F_i .

Analizando las ecuaciones de torques y la Figura 4.8, en la cual $\psi = \pi/4$, se puede deducir matemáticamente que los rotores 1 y 3 tendrán $\tau_\theta = 0$. Sin embargo, el rotor 2 aportará la totalidad de su torque hacia $+\theta$ y el rotor 4 lo aportará hacia $-\theta$.

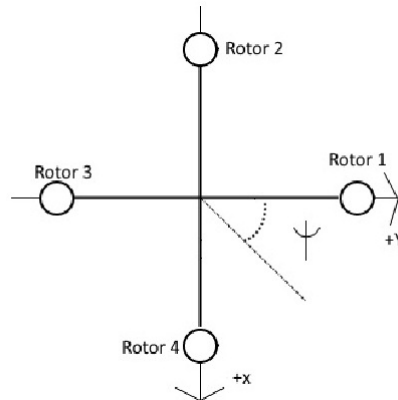


Figura 4.8: Diagrama para análisis de torques con $\psi = \pi/4$.

De igual manera, con la intención de dejar las ecuaciones de torques en términos de las entradas del sistema, se considera la igualdad $F_i = k\omega_i^2$.

Existen torques externos que genera la fricción del aire por razones de arrastre. Estos torques de arrastre van en sentido opuesto a los torques que generan las fuerzas de sustentación. Asimismo, tal como sucede en la traslación, el arrastre es proporcional a la velocidad del cuerpo. En este caso, proporcional a la velocidad angular. Por ende, la ecuación de movimiento completa para θ , queda expresada de la siguiente manera.

$$\ddot{\theta} = \frac{-B_\theta \dot{\theta}}{\bar{I}_L} + \frac{k\ell}{\bar{I}_L} [-(\omega_1^2 - \omega_3^2) \cos(\pi/4 + \phi) + (\omega_2^2 - \omega_4^2) \cos(\pi/4 - \phi)], \quad (22)$$

donde:

- $B_\theta =$ constante de arrastre del aire para θ

4.8. Ecuación de movimiento para el ángulo ϕ

Del mismo modo que se obtuvo la ecuación de movimiento para el ángulo θ y haciendo uso de las mismas ecuaciones de torque usadas en (22), es posible obtener la ecuación de movimiento completa para el ángulo ϕ .

$$\bar{I}_L \ddot{\phi} = -B_\phi \dot{\phi} + k\ell [(\omega_1^2 - \omega_3^2) \cos(\pi/4 - \phi) + (\omega_2^2 - \omega_4^2) \cos(\pi/4 + \phi)], \quad (23)$$

donde:

- $B_\phi =$ constante de arrastre del aire para ϕ

4.9. Ecuación de movimiento para el ángulo ψ

De manera similar a la obtención de los dos ángulos anteriores θ y ϕ , es posible obtener el ángulo ψ . Sin embargo, para este caso, el torque se encuentra dado a partir de variables diferentes que en las ecuaciones de movimiento de ϕ y θ no existen. El torque que afecta al ángulo ψ se describe en (24). Para este ángulo el torque proporciona la reacción que genera la velocidad y la aceleración de cada uno de los rotores, ya que el giro de un rotor genera un torque en el sentido opuesto a su sentido de giro.

$$\tau_\psi = -B_\psi \dot{\psi} + b[-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2] + I_M[-\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4], \quad (24)$$

donde:

- B_ψ : Constante de arrastre del aire para ψ .
- b : Constante de arrastre para torque.
- I_M : Momento de inercia de los rotores.
- ω_i : Aceleración angular del rotor i .

En (24), los signos positivos y negativos de cada término indican el sentido de cada torque. Dichos torques se pueden observar en la Figura 4.5. Tal como se maneja en todos los sentidos de giro, las rotaciones en sentido opuesto a las manecillas del reloj se consideran positivas.

El término $I_M \dot{\omega}_i$ es en promedio el 10 % de $b\omega_i^2$ aproximadamente. Dado que un 10 % es un valor de gran consideración, no se desprecia el término que involucra a las aceleraciones angulares de los rotores. Por consiguiente, si no se toma en cuenta dicho término, el modelo matemático no sera eficiente y el controlador podría no funcionar adecuadamente, al momento de implementarlo en el sistema físico.

A partir de la ecuación de movimiento reducida para ψ y su torque generalizado, se obtuvo su ecuación de movimiento completa (25).

$$\ddot{\psi} = -B_\psi \dot{\psi} + \frac{b}{\bar{I}_z} [-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2] + \frac{I_M}{\bar{I}_z} [-\omega_5 + \omega_6 - \omega_7 + \omega_8]. \quad (25)$$

4.10. Modelo de un cuadricóptero en espacio de estados

En ingeniería de control, una representación en espacio de estados, es un modelo matemático que describe un sistema físico, descrito por un sistema de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación matricial de primer orden. Para prescindir del número de entradas, salidas y estados, las variables son presentadas como vectores, mientras que las ecuaciones algebraicas se escriben en forma matricial.

Al probar el modelo matemático que se obtuvo, se usa una representación de espacio de estados. Al usar este método, se realiza un cambio de variable

4.10. MODELO DE UN CUADRICÓPTERO EN ESPACIO DE ESTADOS 55

con la finalidad de establecer los estados a utilizar en el sistema.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_7 \\ \dot{x}_2 = x_8 \\ \dot{x}_3 = x_9 \\ \dot{x}_4 = x_{10} \\ \dot{x}_5 = x_{11} \\ \dot{x}_6 = x_{12} \\ \dot{x}_7 = \ddot{x} \\ \dot{x}_8 = \ddot{y} \\ \dot{x}_9 = \dot{z} \\ \dot{x}_{10} = \ddot{\theta} \\ \dot{x}_{11} = \ddot{\phi} \\ \dot{x}_{12} = \ddot{\psi} \end{array}
 \end{array} \quad (26)$$

Una vez que se han definido los estados del sistema, así como las ecuaciones de movimiento para cada uno de los grados de libertad, es posible crear el modelo en espacio de estados, tal y como se muestra en las Ecs. (27) y (28).

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (27)$$

$$y = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \right] \quad (28)$$

donde:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ -\frac{B_x}{M} x_7 \sin x_4 \cos x_5 \\ -\frac{B_y}{M} x_8 \sin x_5 \\ -\frac{B_x}{M} x_9 \cos x_4 \cos x_5 \\ -\frac{B_\theta}{I_l} x_{10} \\ -\frac{B_\phi}{I_l} x_{11} \\ -\frac{B_\psi}{I_l} x_{12} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) & \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) & \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) & \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} \sin(x_5) & -\frac{k}{M} \sin(x_5) & -\frac{k}{M} \sin(x_5) & -\frac{k}{M} \sin(x_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) & \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) & \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) & \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) + x_6) & \frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) - x_6) & \frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) + x_6) & -\frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) - x_6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) - x_6) & \frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) - x_6) & -\frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) - x_6) & -\frac{k\ell}{I_L} \cos((\frac{\pi}{4}) - x_6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{I_z} & \frac{b}{I_z} & -\frac{b}{I_z} & \frac{b}{I_z} & -\frac{I_M}{I_z} & \frac{I_M}{I_z} & -\frac{I_M}{I_z} & -\frac{I_M}{I_z} & \frac{I_M}{I_z} & -\frac{I_M}{I_z} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Solo se toman en consideran las cuatro primeras entradas, las cuales repre-

4.10. MODELO DE UN CUADRICÓPTERO EN ESPACIO DE ESTADOS 57

sentan a las velocidades angulares de los motores.

$$U = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ya que los últimos estados tienen un valor tan pequeño y otros tantos son cero es posible despreciarlos y de este modo simplificar el modelo matemático para facilitar el manejo de este, tal como se muestra en la matriz 32.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_1^2 + \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_2^2 + \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_3^2 + \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_4^2 - \frac{B_x}{M} x_7 \cos(x_5) \sin(x_4) \\ \frac{B_y}{M} x_8 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_2^2 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_3^2 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_4^2 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_1^2 \sin(x_5) \\ \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_1^2 + \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_2^2 + \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_3^2 + \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_4^2 - g - \frac{B_z}{M} x_9 \cos(x_4) \cos(x_5) \\ \frac{kL}{I_L} \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) w_2^2 + \frac{kL}{I_L} \cos(\pi/4 + x_6) w_3^2 - \frac{B_\theta}{I_L} x_{10} - \frac{kL}{I_L} w_1^2 \cos(\frac{\pi}{4} + x_6) - \frac{kL}{I_L} w_4^2 \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) \\ \frac{kL}{I_L} \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) w_1^2 + \frac{kL}{I_L} \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) w_2^2 - \frac{B_\phi}{I_L} x_{11} - \frac{kL}{I_L} w_3^2 \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) - \frac{kL}{I_L} w_4^2 \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) \\ \frac{b}{I_z} w_2^2 + \frac{b}{I_z} w_4^2 - \frac{b}{I_z} w_1^2 - \frac{b}{I_z} w_3^2 - \frac{B_\psi}{I_z} x_{12} - \frac{I_M}{I_z} w_5 + \frac{I_M}{I_z} w_6 - \frac{I_M}{I_z} w_7 + \frac{I_M}{I_z} w_8 \end{bmatrix} \quad (32)$$

En la siguiente tabla se muestran los valores ocupados para la simulación del sistema, tomando en cuenta que estos valores son tomados de la estructura física del cuadricóptero que se ocupa y otros tantos son obtenidos de [19].

Estas diferencias incluyen a la constante de sustentación, la cual dentro de esta tesis tiene las unidades de $\frac{Kg \cdot m}{rev^2}$, dado que la velocidad angular de las hélices está dada en revoluciones por segundo.

Parámetro	Abreviación	Valor	Unidades
Gravedad	g	9.81	$\frac{m}{s^2}$
Masa	M	0.5	Kg
Longitud de brazo	ℓ	0.225	m
Momento de inercia en los ejes X e Y	I_L	$4,856 \times 10^{-3}$	$Kg \cdot m^2$
Momento de inercia en el eje Z	I_L	$8,801 \times 10^{-3}$	$Kg \cdot m^2$
Constante de sustentación	K	$2,1 \times 10^{-4}$	$\frac{kg \cdot m}{rev^2}$
Constante de arrastre del torque	b	$1,14 \times 10^{-7}$	$\frac{kg \cdot m^2}{rev^2}$
Constante de arrastre del aire para el eje X	B_x	.25	$\frac{Kg}{s}$
Constante de arrastre del aire para el eje Y	B_y	.25	$\frac{Kg}{s}$
Constante de arrastre del aire para el eje Z	B_z	.25	$\frac{Kg}{s}$
Constante de arrastre del aire para ϕ	B_ϕ	0.01	$\frac{Kg \cdot m^2}{s}$
Constante de arrastre del aire para θ	B_θ	0.01	$\frac{Kg \cdot m^2}{s}$
Constante de arrastre del aire para ψ	B_ψ	5×10^{-3}	$\frac{Kg \cdot m^2}{s}$
Momento de inercia de cada rotor	I_M	$3,357 \times 10^{-5}$	$Kg \cdot m^2$

Cuadro 4.1: Valores para simulación del cuadricóptero

De igual forma, es importante destacar que se determinaron las revoluciones máximas de los rotores en 155 rev/s. Muchos motores para este tipo de sistemas se encuentran alrededor de las 15,000 o 20,000 rpm sin carga. Generalmente, no se usan motores de mayor velocidad, dado que van perdiendo torque con respecto a la carga de la batería y pueden pesar más.

4.11. Consideraciones

El modelo no lineal de un cuadricóptero suele ser muy complejo y presenta un gran reto modelar el sistema físico, debido a la gran cantidad de variables que se presentan dentro del mismo, por ello se realizan algunas consideraciones con la finalidad de facilitar el diseño de los controladores a utilizar.

Una de las acciones más importantes es linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio, esto asegura que el sistema trabajará de una manera adecuada dentro de un espacio determinado, sin embargo, si el sistema sale de este intervalo, dicho sistema tendera a regresar a su dinámica original, tal y como lo muestra la Figura 4.9.

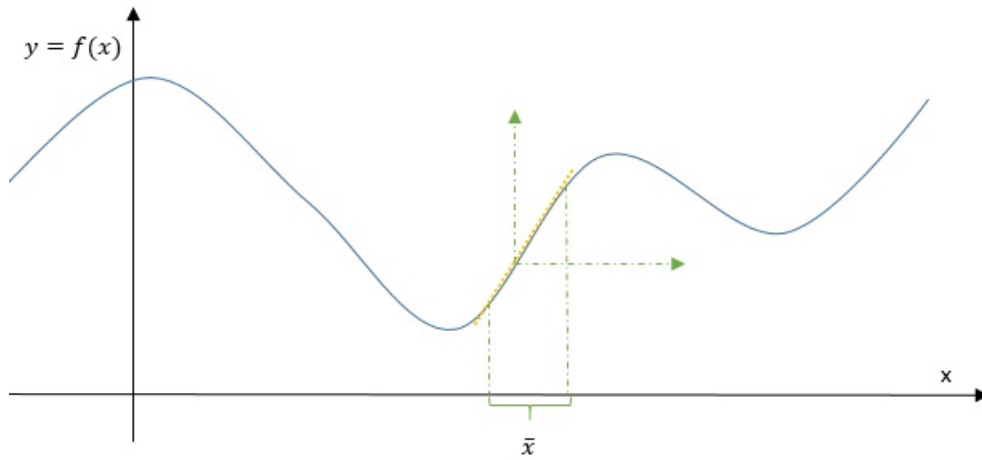


Figura 4.9: Representación gráfica del punto de equilibrio

En la matriz 33 se muestra el modelo lineal del cuadricóptero

$$\begin{bmatrix}
 \dot{x} \\
 \dot{y} \\
 \dot{z} \\
 \dot{\phi} \\
 \dot{\theta} \\
 \dot{\psi} \\
 -\cos(\psi) \sin(\theta) * (-k * w^2 + B_x \dot{x}) \\
 -\cos(\psi) (-k w^2 + B_x \dot{y}) \\
 -\cos(\psi) \sin(\theta) * (-k * w^2 + B_x \dot{x}) \\
 \dot{\phi} \\
 \dot{\theta} \\
 \dot{\psi}
 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Para lograr esto se utiliza un vector de equilibrio representado por (x_{eq}, u_{eq}) , con la finalidad de obtener un punto de equilibrio, tal y como se muestra a continuación.

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{eq} = \begin{bmatrix} \omega_1 eq \\ \omega_2 eq \\ \omega_3 eq \\ \omega_4 eq \end{bmatrix} \quad (34)$$

El vector de equilibrio, se multiplica con el sistema no lineal, representado por la matriz (32), obteniendo el punto de equilibrio para el sistema sobre el eje z , el cual representa la elevación del cuadricóptero, esta se representa mediante(35)

$$\omega_{eq} = \sqrt{\frac{Mg}{4k}}. \quad (35)$$

Por lo tanto el punto de equilibrio del sistema se encuentra en $\omega_{eq} = 76,4152 \frac{rev}{s}$. Considerando que la elevación es una de las acciones más simples, se comienza por analizar el estado x_9 que representa al eje z .

4.12. Modelos simplificados

Al simplificar el modelo de un sistema, este permite analizar solo un estado dentro del modelo matemático, por lo que es indispensable conocer el punto de equilibrio.

Se comienza por obtener la función de transferencia propia del eje z , lo que requiere de las siguientes consideraciones:

- Las cuatro hélices se mueven siempre a la misma velocidad.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = u = \omega_{eq}$$

- Las cuatro hélices tienen la misma constante de sustentación k .
- Los tres ángulos de postura permanecen a 0 radianes.

- No hay perturbaciones.
- No hay ruido en las señales.

Para lograr la elevación es necesario que el sistema se encuentre linealizado en su punto de equilibrio, el cual se encuentra representado por ω_{eq} , así mismo, se asume, que:

$$\begin{aligned} x_{eq} &= 0, & y_{eq} &= 0, & z &= z_{eq}, \\ \theta_{eq} &= 0, & \phi_{eq} &= 0, & \psi_{eq} &= 0, \\ \dot{x}_{eq} &= 0, & \dot{y}_{eq} &= 0, & \dot{z}_{eq} &= 0, \\ \dot{\theta}_{eq} &= 0, & \dot{\phi}_{eq} &= 0, & \dot{\psi}_{eq} &= 0, \end{aligned}$$

Haciendo las consideraciones de las ecuaciones anteriores y aplicándolas al modelo no lineal, se obtiene un nuevo modelo en variables de estado, a este nuevo modelo se renombra como f_z , el cual muestra la matriz del sistema no lineal y sólo con los valores dependientes del eje z .

$$f_z = \left[\begin{array}{c} x_g \\ \frac{4kdw - B_z x_g}{M} - g \end{array} \right] \quad (36)$$

De la matriz de estados (36) se puede analizar \ddot{z} .

$$\ddot{z} = -g - \frac{B_z}{M} \dot{z} + \frac{4K}{M} \omega \quad (37)$$

Al final (37) se tiene el término $\frac{4K}{M}$, indica que los cuatro rotores dividen la fuerza necesaria para elevar el cuadricóptero, mientras que el término $-g$, se reconoce como la fuerza de gravedad, la cual tendrán que vencer los rotores para elevar el cuadricóptero.

Al linealizar la matriz f_z se obtienen las siguientes matrices A_z , B_z , C_z , éstas describen al sistema y son indispensables al obtener la función de transferencia.

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B_z}{M} \end{bmatrix}, \quad B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{8k}{M} \omega_{eq} \end{bmatrix}, \quad C_z = [1 \quad 0]$$

$$(sI - A_z) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{B_z}{M} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj}(sI - A_z) = \begin{bmatrix} s + \frac{B_z}{M} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_z) = s\left(s + \frac{B_z}{M}\right)$$

$$C_z \text{adj}(sI - A_z) = [s + \frac{B_z}{M} 1], \quad C_z \text{adj}(sI - A_z) B_z = [\frac{B_z}{M} \omega_{eq}]$$

Una vez que se linealiza el sistema (36) se tiene la función de transferencia del eje z representada por (38)

$$G(s) = \frac{\frac{8k}{M} \omega_{eq}}{s(s + \frac{B_z}{M})} \quad (38)$$

Debido a que la función de transferencia es de segundo orden, se aprecia que ésta contiene un polo en cero. Al evaluar la función de transferencia $G(s)$ con los valores correspondientes, se obtiene la función G_z con valores numéricos representada por (39).

$$G_z = \frac{0,2568}{s^2 + 0,5s} \quad (39)$$

En la fig 4.11 se muestra el comportamiento de la planta ante una entrada escalón unitario, así como la localización de los polos, lo que demuestra que la planta tiene un comportamiento críticamente estable.

La función de transferencia tiene dos polos, uno de ellos se localiza en 0 y el otro en $-0,5$

Para obtener la función de transferencia que describe el desplazamiento dentro del eje x , es necesario descartar las variables no correspondientes a dicho movimiento, debido a que el cuadricóptero sufre un desplazamiento dentro de los ejes z y x , lo cual asemeja a un plano inclinado tal como lo muestra la figura ??.

Por tanto el modelo reducido para controlar el desplazamiento en el eje x se realiza mediante la rotación de θ , para lo que se usa la matriz (40)

$$f_\theta = \left[-\frac{B_\theta}{I_L} x_{10} + \frac{Kl}{I_L} [-(\omega_1^2 - \omega_3^2) \cos(\frac{\pi}{4}) + (\omega_2^2 - \omega_4^2) \cos(\frac{\pi}{4})] \right] \quad (40)$$

De forma análoga a lo realizado en el eje z , se procede dentro del ángulo θ quedando una función de transferencia como se describe en la ecuación 42

$$G_\theta = \frac{Kl8 \cos(\frac{\pi}{4}) \omega_{eq}}{s(\beta_\theta + sI_L)} \quad (41)$$

En la figura 4.12 se muestra el comportamiento de la función de transferencia que representa al ángulo theta, así como la localización de los polos,

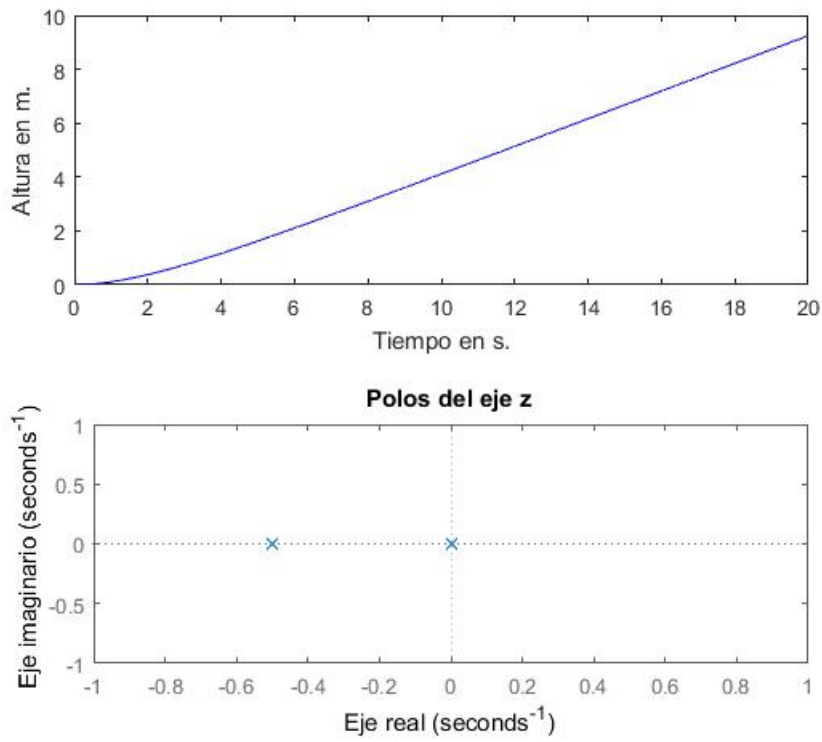


Figura 4.10: Comportamiento de $G(z)$

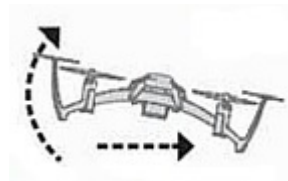


Figura 4.11: Traslación de un cuadricóptero en el eje x

los cuales se encuentran en $P_1 = 0$ y $P_2 = -2,0590$.

La función de transferencia que representa al ángulo ϕ es similar a la obtenida para θ solo que la dirección cambia.

$$G_\phi = \frac{Kl8 \cos(-\frac{\pi}{4})\omega_{eq}}{s(\beta_\theta + sI_L)} \quad (42)$$

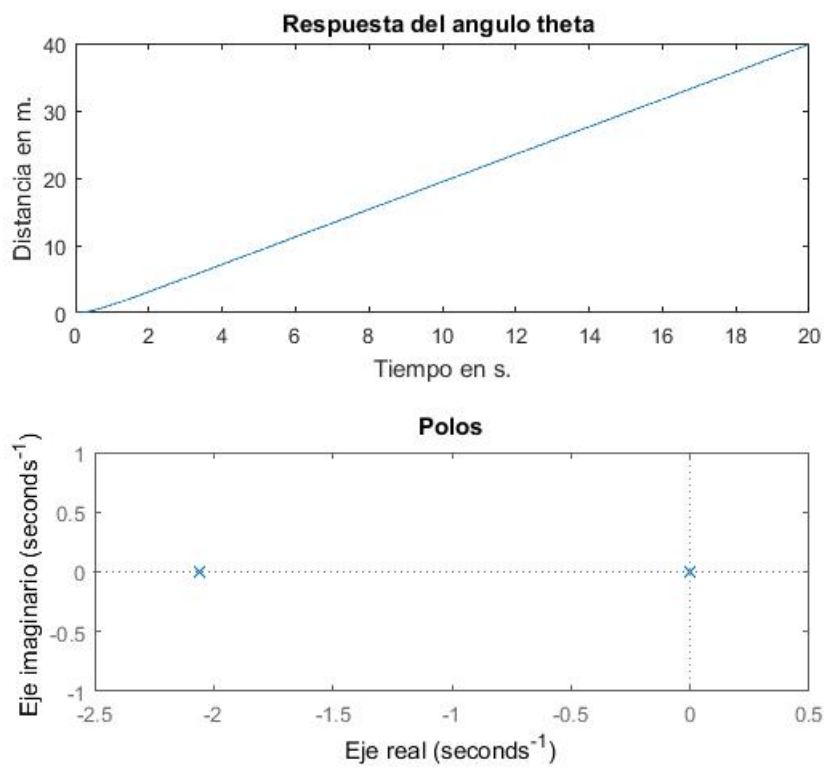


Figura 4.12: Comportamiento del ángulo theta

Capítulo 5

Diseño de controladores

Dentro de la estructura de control, la planta y el controlador forman un lazo cerrado en el que cada componente influye directamente sobre el otro. La entrada a la planta u depende directamente a través del controlador de la variable controlada y , la cual a su vez depende de la entrada por la dinámica de la planta. Esta acción se llama realimentación[8].

La figura 5.1 muestra la estructura general de control retroalimentado, donde $K(s)$ se identifica como el control y $G(s)$ corresponde a la planta

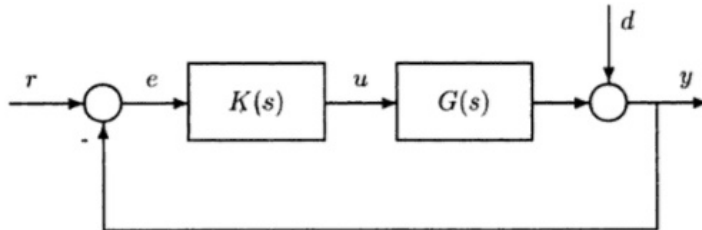


Figura 5.1: Estructura de control general.

La retroalimentación se considera como un concepto general para controlar un sistema, estos pueden, tener solo una entrada y una sola salida a controlar, estos son conocidos como sistemas *SISO*, también se tiene modelos que tienen más de una variable de entrada y múltiples salidas, a estos sistemas son llamados sistemas *MIMO*.

Es posible ver los sistemas retroalimentados desde el punto de vista del control ingenieril, el cual tiene por misión encontrar un controlador para conseguir o mantener una estabilidad, mejorar la robustez, atenuar las pertur-

baciones, asegurar la regulación asintótica, etc. Un sistema retroalimentado consta de un proceso dado con unas propiedades fijas y de un controlador que puede elegirse libremente.

Existen dos principales motivos por los cuales la salida de la planta y , para una entrada u , produce una trayectoria, que no se encuentra totalmente determinada previamente.

- La dinámica de la planta no se conoce por completo, por lo que el modelo de la planta sólo se considera como una aproximación.
- Perturbaciones desconocidas pueden influir en el comportamiento del sistema, por lo que la salida y , no es solo la respuesta a la señal de control u sino a la perturbación d , la cual es generalmente indeterminada, esta puede ser cualquier cosa dentro del conjunto de señales de perturbación.

Antes de comenzar el diseño de cualquier tipo de controlador para la planta del sistema, se realiza una simulación de este en lazo abierto, con la finalidad de observar el comportamiento de dicho sistema ante una entrada ω_{eq} , y así de este modo realizar un análisis del comportamiento de la planta referente a las entradas, tal como lo muestra Figura 5.2.

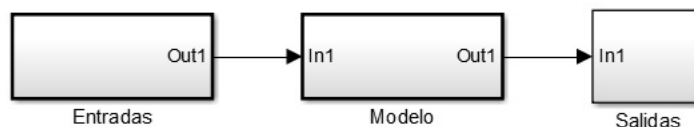


Figura 5.2: Diagrama a bloques en lazo abierto

Entradas: Este bloque representa la velocidad angular de los cuatro rotores $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$,

Modelo: Representa el modelo no lineal del cuadricóptero.

Salidas: Se encuentran las doce variables del sistemas $(x, y, z, \theta, \phi, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ y $\dot{\psi})$

Se analizan los estados de posición lineal, posición angular, velocidad lineal y velocidad angular en los tres ejes coordenados x, y, z . Las condiciones para

todas las gráficas dependen de un tiempo de simulación mínimo de 20 [s] y un punto de referencia con coordenadas $(0, 0, 0)$.

Como primera acción se analiza el comportamiento del sistema en su punto de equilibrio representado por ω_{eq} , este valor representa la velocidad angular de cada uno de los rotores, si los cuatro rotores tienen la misma velocidad angular no deberá existir cambio alguno dentro de sus estados, por lo que el cuadricóptero debe permanecer en su punto de equilibrio.

Usando un valor de $\omega_{eq} = 76,41$ se observa que el cuadricóptero no tiene movimiento alguno sobre los ejes x, y, z ; Lo cual indica que el punto de equilibrio calculado es correcto, Figura 5.3.

Mientras que los ángulos de rotación θ, ϕ y ψ , no presentan movimiento alguno, lo cual indica que la aeronave se encuentra dentro de su punto de equilibrio, tal como se muestra en la Figura 5.4.

La velocidad a la cual se desplaza el cuadricóptero es nula para los ejes coordenados x, y, z por lo que se concluye que el cuadricóptero se encuentra en un punto de equilibrio.

En la velocidad angular se observan las tres componentes x, y, z con un comportamiento estable, esto concuerda con los ángulos de rotación los cuales no tienen ninguna inclinación, por lo tanto la velocidad angular es nula.

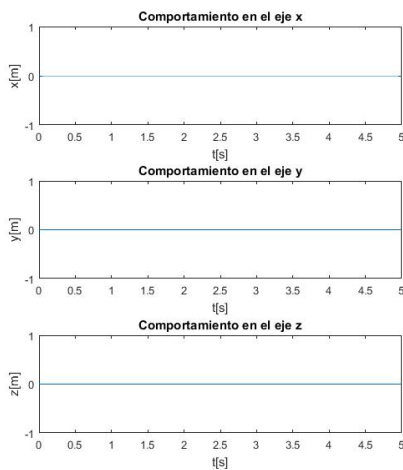


Figura 5.3: Movimiento

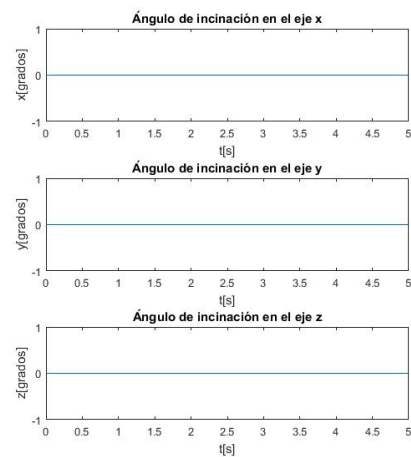


Figura 5.4: Ángulos de rotación

El comportamiento del sistema analizado en el punto de equilibrio es consistente con lo esperado, por lo que es posible comenzar con el diseño de los controladores para la planta del cuadricóptero, así mismo realizar una comparación de estos.

5.1. Sistema regulador óptimo cuadrático

El primer controlador a diseñar para el cuadricóptero es un controlador de tipo regulador óptimo cuadrático o por sus siglas en inglés **LQR**, dicho controlador se estudia de dos maneras distintas.

Sistema desacoplado: Se analiza el sistema por partes, lo cual indica que sólo se estudian las variables de interés.

Sistema acoplado: Se analiza el comportamiento del sistema en conjunto, ya que se considera que todas las variables son dependientes.

5.1.1. Sistema desacoplado

La técnica que se prueba para el sistema, es mediante la evaluación individual de cada uno de los estados, ya que se considera una forma más simple de analizar el comportamiento del mismo.

Se estudia el comportamiento del cuadricóptero por su posición dentro de los ejes coordenados x, y, z y sus ángulos de inclinación θ, ϕ, ψ , lo que posteriormente se transforman en velocidad lineal y velocidad angular.

Analizando el comportamiento de la elevación del cuadricóptero, corresponde a un desplazamiento dentro del eje z . El desplazamiento dentro de este eje mantendrá a los cuatro rotores con la misma velocidad angular, por lo que no existe desplazamiento alguno en los ejes x y y , por lo que la velocidad angular de los cuatro rotores tendrán un crecimiento constante. Esta acción indica que el cuadricóptero se encuentra elevándose de manera vertical.

Tomando como la entrada del sistema la matriz

$$C_{rz} = [1 \quad 0]$$

El siguiente paso es elegir las matrices de ganancia Q y R , siendo ambas matrices definidas positivas. Una forma es hacer la diagonal de la matriz Q

con solo escalares y cero todas las demás entradas. Luego, cada estado y entrada se pueden ponderar para hacer su contribución a la función de costo.

$$Q_{rz} = \begin{bmatrix} 40000 & 0 \\ 0 & 40000 \end{bmatrix}, R_{rz} = [1] \quad (1)$$

La matriz de ponderación R es un valor escalar con sólo una entrada de control para el sistema.

Con la ecuación (36) se obtiene la matriz A_{rz} y B_{rz} , las cuales identifican a las matrices reducidas del sistema, esto indica que dichas matrices se encuentran evaluadas y linealizadas en el punto de equilibrio,(2).

$$A_{rz} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad B_{rz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2568 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Usando MATLAB, la ecuación algebraica de Riccati es resuelta, para obtener una la matriz P que sea definida positiva, de este modo el sistema sera estable; al sustituir la matriz P en $K = R^{-1}B^T P$, se obtiene la matriz de ganancia de control K_z . Es evaluada para diferentes valores de coeficientes de las matrices Q y R . La respuesta del sistema es simulada como la matriz Q , que se asume de la matriz (1),por lo que la matriz de ganancias se muestra en la matriz (3).

$$K_z = [200 \quad 201,9195] \quad (3)$$

Una vez obtenida la matriz de ganancias (3), se procede a realizar la simulación en el sistema no lineal. En la figura 5.5 se observa la estructura del control LQR en diagrama de bloques, el cual se utiliza para realizar la simulación, con un tiempo de simulación de 20 segundos y una referencia $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Así mismo los rotores tendrán la misma velocidad angular, ya que se encuentran en el punto de equilibrio del sistema.

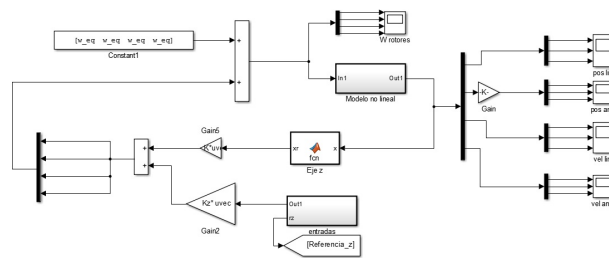


Figura 5.5: Diagrama de bloques para el control en eje z.

En la Figura 5.6, se observa el comportamiento de la posición del sistema, ante una entrada escalón, la cual representa una elevación deseada de la aeronave a un metro de distancia de su punto de referencia además se puede apreciar que solo existe movimiento dentro del eje z , sin alterar los ejes x y y . por lo que la respuesta es congruente con la técnica utilizada.

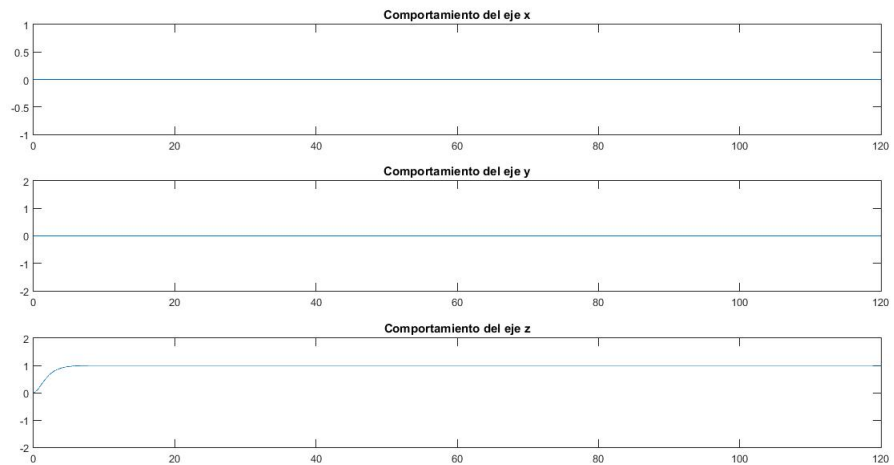


Figura 5.6: Velocidad angular de la aeronave

Debido a que sólo existe un desplazamiento, ninguno de los ángulos θ , ϕ y ψ correspondientes a los ejes coordenados, tendrá cambio alguno.

De igual manera es posible analizar el comportamiento de los rotores, los cuales no deben rebasar las $2200 \frac{rev}{seg}$. La Figura 5.7 muestra el comportamiento de cada uno de los rotores.

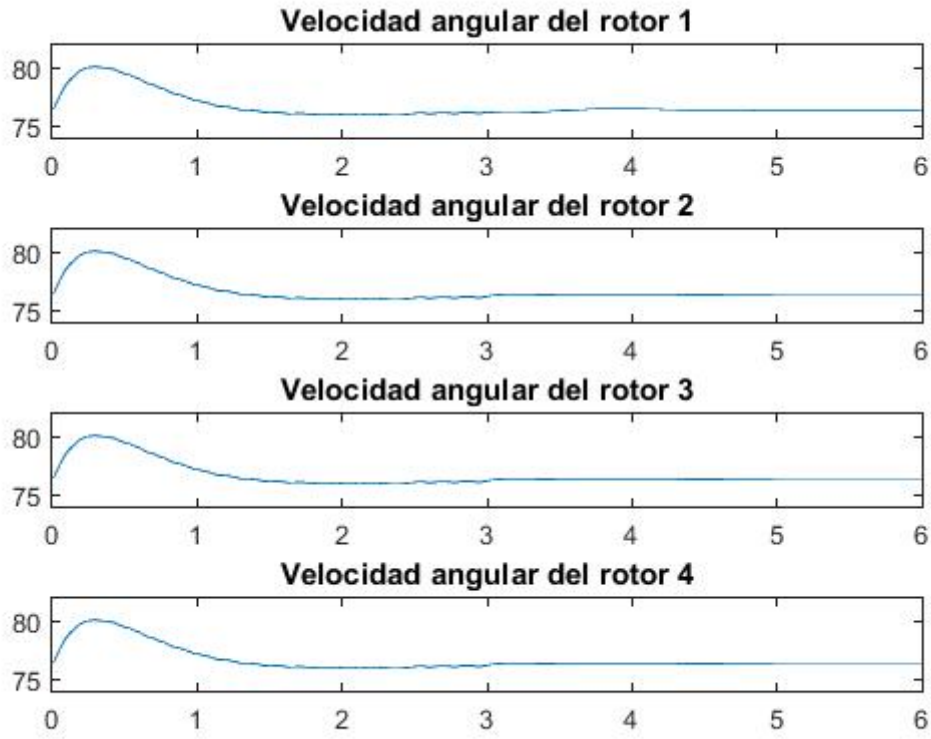


Figura 5.7: Velocidad angular de los rotores.

Los rotores parten del reposo, hasta alcanzar su punto de equilibrio y posteriormente tienen un aumento en su velocidad angular hasta llegar a $80 \frac{rev}{s}$.

En el caso de los ejes x y y la función de transferencia contendrá más estados que el sistema (36), ya que éstas tendrán un cambio de velocidad angular en de los rotores, lo que quiere decir que dos de los cuatro rotores aumentaran su velocidad angular, mientras que los dos restantes disminuirán su velocidad angular en proporción que los otros aumenten.

Para asegurar el desplazamiento dentro del eje y , se realiza la siguiente consideración.

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \omega_4 \Rightarrow \omega_a, \\ \omega_1 &= \omega_2 \Rightarrow \omega_b.\end{aligned}$$

Por lo que la substitución quedara de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\omega_a &= \omega_{eq} + d\omega_1 \\ \omega_b &= \omega_{eq} - d\omega_2\end{aligned}$$

Con la consideración anterior y linealizado el sistema en el punto de equilibrio, se obtiene el modelo en variables de estado del desplazamiento en el eje y , el sistema 4 muestra los estados dependientes para dicho desplazamiento. ya que se requiere una ligera inclinación, así como la elevación del cuadricóptero, aparecen las variables que representan la elevación del cuadricóptero.

$$f_y = \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \\ x_{11} \\ \frac{B_y x_8 \sin(x_5) - 2K \sin(x_5) \left(\frac{d\omega_2 + 534,9065}{7}\right)^2 - 2K \sin(x_5) \left(\frac{d\omega_1 + 534,9065}{7}\right)^2}{M} \\ \frac{2k \cos(x_5) \left(\frac{d\omega_1 + 534,9065}{7}\right)^2 - g + 2k \cos(x_5) \left(\frac{d\omega_2 + 534,9065}{7}\right)^2}{M} \\ \frac{1,4142Kl \left(\frac{d\omega_1 + 534,9065}{7}\right)^2 - B_\phi x_{11} - 1,4142Kl \left(\frac{d\omega_2 + 534,9065}{7}\right)^2}{IL} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Se proponen las matrices Q y R las cuales se describen en (5), estas definen la importancia relativa del error y del costo.

$$Q_{ry} = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 \end{bmatrix}, \quad R_{ry} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

De igual manera que se realizó para el eje z , se realiza el mismo procedimiento para calcular las matrices reducidas de (6).

$$A_{ry} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9,81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2,0593 \end{bmatrix}, \quad B_{ry} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,1284 & 0,1284 \\ 2,1030 & -2,1030 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Y, finalmente, la matriz de ganancias del sistema (7).

$$K_y = \begin{bmatrix} -50 & 50 & 274,8508 & -72,8131 & 51,8411 & 50,8030 \\ 50 & 50 & -274,8508 & 72,8131 & 51,8411 & -50,8030 \end{bmatrix} \quad (7)$$

En la Figura 5.8 se observa que existe una elevación y posteriormente un desplazamiento en el eje y .

En un tiempo de dos segundos el cuadricóptero se eleva a una altura de un metro, siete segundos después se desplaza un metro sobre el eje y . Se observa que dentro del eje x no existe desplazamiento alguno, Figura ??.

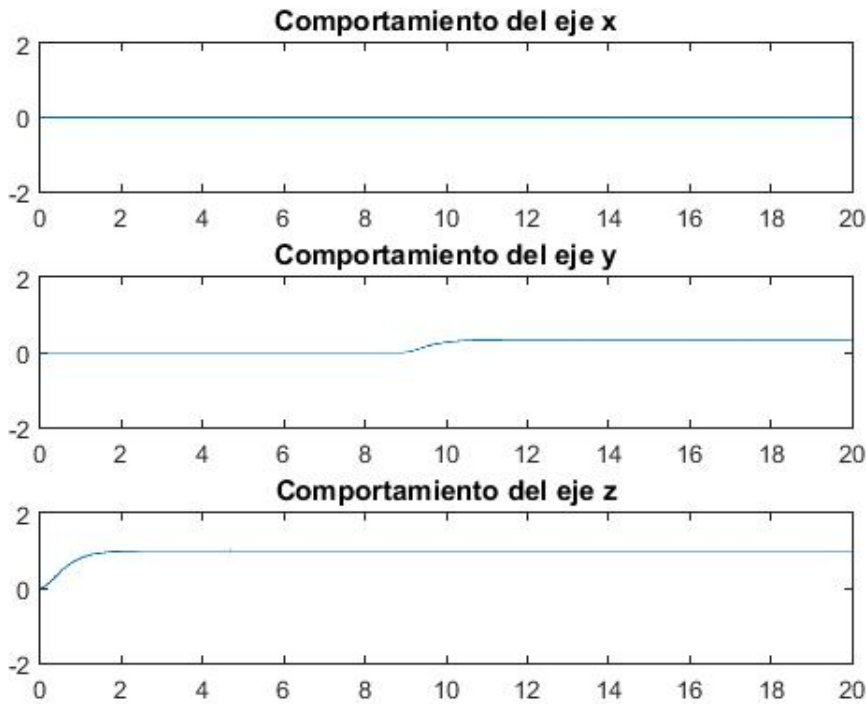


Figura 5.8: Desplazamiento del eje y .

Dentro de los ángulos de rotación, al tener un movimiento en uno de los ejes, el ángulo contrario a éste tendrá una rotación. En este caso el ángulo opuesto al eje y es ϕ , por lo que en la Figura 5.9 se observa este comportamiento.

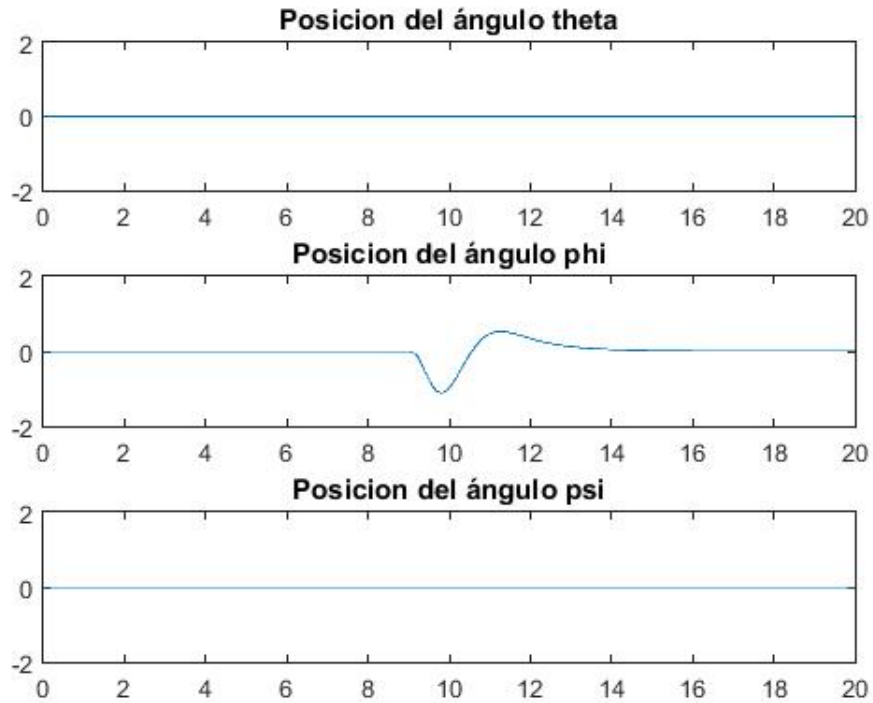


Figura 5.9: Movimiento del ángulo ϕ .

En los rotores el comportamiento se da en pares, lo que indica, que los rotores 1 y 2 tendrán el mismo comportamiento, mientras que los rotores 3 y 4 tienen un comportamiento opuesto, esto quiere decir que existe un desplazamiento en el eje y^+ . Los motores alternaran la velocidad angular más/menos la velocidad de su punto de equilibrio, esto dependiendo del desplazamiento, la Figura ?? muestra un desplazamiento positivo sobre el eje y .

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_{eq} &= \omega_2 + \omega_{eq}, \\ \omega_3 - \omega_{eq} &= \omega_4 - \omega_{eq}\end{aligned}$$

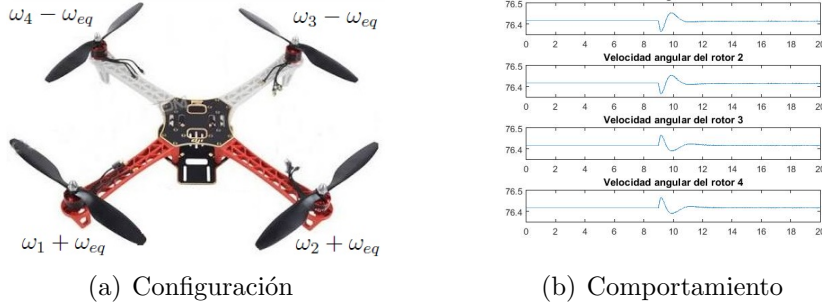


Figura 5.10: Configuraciones y respuesta de motores

$$f_x = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_9 \\ x_{10} \\ \frac{-B_x x_7 \sin(x_4) + 2K \sin(x_4) * (d\omega_1 + 76,4152)^2 + 2K \sin(x_4) * (d\omega_2 + 76,4152)^2}{M} \\ \frac{-B_x x_7 \cos(x_4) - g + 2K \cos(x_4) * (d\omega_1 + 76,4152)^2 + 2K \cos(x_4) * (d\omega_2 + 76,4152)^2}{M} \\ \frac{-B_\theta x_{10} + 1,4142Kl * (d\omega_2 + 76,4152)^2 - 1,4142Kl * (d\omega_1 + 76,4152)^2}{IL} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$Q_{rx} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8000 \end{bmatrix}, \quad R_{rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A_{rx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9,81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,0593 \end{bmatrix}, \quad B_{rx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,1284 & 0,1284 \\ -2,1030 & 2,1030 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$K_x = \begin{bmatrix} -63,2456 & 63,2456 & -346,7684 & -92,0395 & 65,1082 & -64,0482 \\ 63,2456 & 63,2456 & 346,7684 & 92,0395 & 65,1082 & 64,0482 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

5.1.2. Sistema acoplado

En esta sección se suman los controles diseñados para el sistemas, Figura 5.11. Lo cual debe tener una respuesta idéntica a los controles que se probaron de manera independiente.

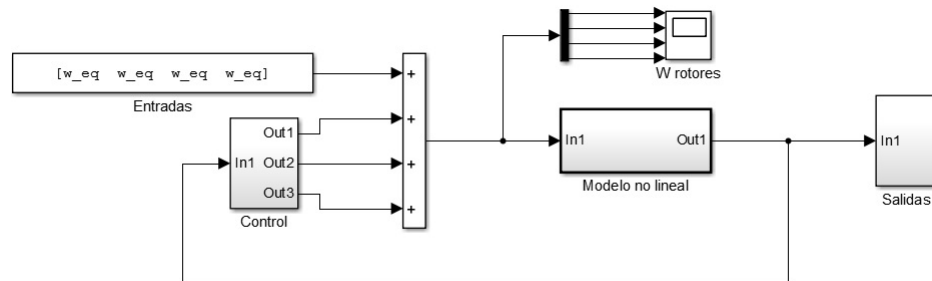


Figura 5.11: Diagrama de bloques control LQR acoplado.

Dentro de la simulación, es importante considerar la posición del eje z como referencia para los ejes x y y , ya que ésta indica la altura a la cual se encuentra el sistema, por lo que le indica a los dos ejes restantes la inclinación que se puede lograr. Esto mediante el cambio de la velocidad angular de cada uno de los rotores.

El desplazamiento dentro del eje z depende directamente de la velocidad angular que toman los rotores, a mayor velocidad angular la elevación es mayor.

El modelo en variables de estado el cual se usa en la simulación del sistema acoplado, se muestra en la Ec.12, el cual contiene los 12 estados, que representan 3 posiciones lineales, 3 posiciones angulares, 3 velocidades lineales y 3 velocidades angulares.

$$f_c = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_1^2 + \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_2^2 + \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_3^2 + \frac{k}{M} \cos(x_5) \sin(x_4) w_4^2 - \frac{B\psi}{M} x_7 \cos(x_5) \sin(x_4) \\ \frac{B\psi}{M} x_8 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_2^2 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_3^2 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_4^2 \sin(x_5) - \frac{k}{M} w_1^2 \sin(x_5) \\ \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_1^2 + \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_2^2 + \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_3^2 + \frac{k}{M} \cos(x_4) \cos(x_5) w_4^2 - g - \frac{B\psi}{M} x_9 \cos(x_4) \cos(x_5) \\ \frac{kl}{I_L} \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) w_2^2 + \frac{kl}{I_L} \cos(\pi/4 + x_6) w_3^2 - \frac{B\theta}{I_L} x_{10} - \frac{kl}{I_L} w_1^2 \cos(\frac{\pi}{4} + x_6) - \frac{kl}{I_L} w_4^2 \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) \\ \frac{kl}{I_L} \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) w_1^2 + \frac{kl}{I_L} \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) w_2^2 - \frac{B\phi}{I_L} x_{11} - \frac{kl}{I_L} w_3^2 \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) - \frac{kl}{I_L} w_4^2 \cos(x_6 - \frac{\pi}{4}) \\ \frac{b}{I_z} w_2^2 + \frac{b}{I_z} w_4^2 - \frac{b}{I_z} w_1^2 - \frac{b}{I_z} w_3^2 - \frac{B\psi}{I_z} x_{12} - \frac{I_M}{I_z} w_5 + \frac{I_M}{I_z} w_6 - \frac{I_M}{I_z} w_7 + \frac{I_M}{I_z} w_8 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$Q_{rc} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$R_{rc} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$A_{rc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,0593 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,0593 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0297 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$B_{rc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0292 & 0,0292 & 0,0292 & 0,0292 \\ -0,0540 & -0,0540 & -0,0540 & -0,0540 \\ 0,0187 & 0,0187 & 0,0187 & 0,0187 \\ 0,3167 & 1,4530 & -0,3167 & -1,4530 \\ 1,4530 & 1,4530 & -1,4530 & -1,4530 \\ -0,0020 & 0,0020 & -0,0020 & 0,0020 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$K_{c1} = \begin{bmatrix} -1,7407 & -8,1933 & 2,2001 & -15,7604 & 36,5178 & -5,0000 \\ 7,3809 & -4,1048 & 1,9163 & 34,9980 & 11,8759 & 5,0000 \end{bmatrix},$$

$$K_{c2} = \begin{bmatrix} -2,7430 & -9,6924 & 2,9805 & -3,4507 & 6,4193 & -4,8149 \\ 8,9148 & -4,3090 & 2,5632 & 6,3421 & 1,5576 & 4,8149 \end{bmatrix},$$

$$K_{c3} = \begin{bmatrix} 3,8938 & 4,0016 & 6,6201 & 19,6741 & -28,2371 & -5,0000 \\ -5,2278 & -0,0868 & 6,9038 & -31,0843 & -3,5952 & 5,0000 \end{bmatrix},$$

$$K_{c4} = \begin{bmatrix} 4,8149 & 5,5994 & 9,5831 & 3,5239 & -6,1037 & -4,8149 \\ -6,8429 & 0,2160 & 10,0004 & -6,2688 & -1,2421 & 4,8149 \end{bmatrix},$$

$$K_{c4} = \begin{bmatrix} K_{c1} & K_{c2} \\ K_{c3} & K_{c4} \end{bmatrix}.$$

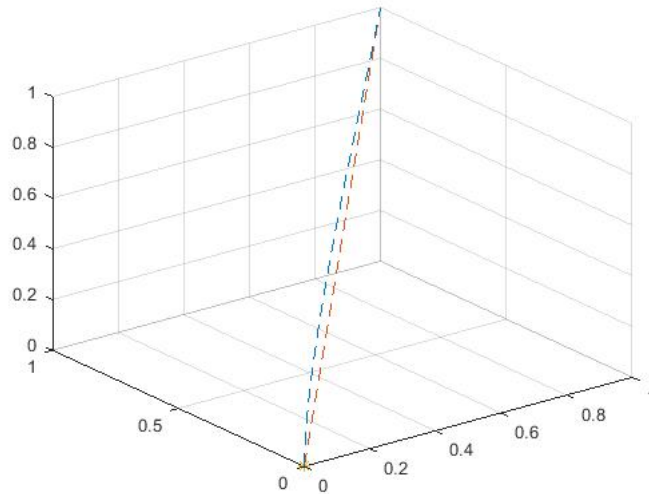


Figura 5.12: Gráfico de movimiento lineal en 3D.

5.2. Control PD

En el caso del controlador *PD* se analiza con dos modelos diferentes, el primero será con una estructura clásica mientras que el segundo modelo es de dos grados de libertad [20].

Debido que la estructura del controlador *PD* dentro de esta tesis responde a un sistema SISO, por sus siglas en inglés, sistemas de una sola entrada y una sola salida, se diseña un control para el eje z y posteriormente se controlan los ángulos θ y ϕ , con la finalidad de ser acoplado dentro del sistema no lineal.

Antes de iniciar el análisis matemático correspondiente se realiza un estudio de la planta en lazo cerrado con la finalidad de observar sus polos y respuesta a un escalón unitario, tal como se muestra en la figura 5.14

Los polos de la función de transferencia para z en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en: $p_1 = -0,2500 + 0,4408i$ $p_2 = -0,2500 - 0,4408i$.

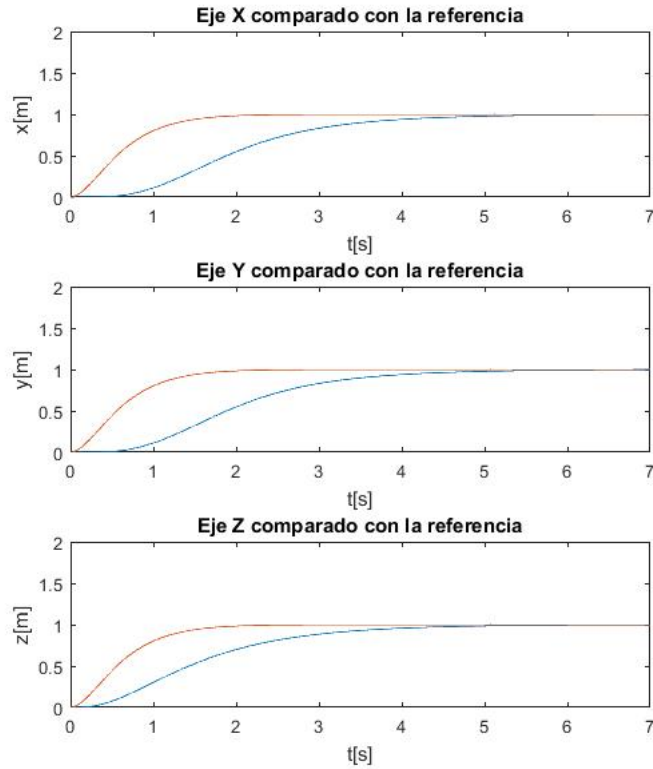


Figura 5.13: Comportamiento lineal en cada eje.

Se realizan los cálculos requeridos, en la elevación del cuadricóptero para obtener un error en estado estacionario igual a cero.

Con la finalidad de realizar los cálculos de manera más simple se reemplaza la función de transferencia de la EC. 17 por una forma generalizada como se muestra a continuación.

$$G_z = \frac{0,2568}{s(s + 0,5)} \Rightarrow \frac{g_0}{s(s + p_0)}. \quad (17)$$

Esto con la finalidad de analizar las ecuaciones de manera analítica y comprobar los resultados de una manera más eficiente, ya que al momento de realizar los cálculos el error numérico disminuirá.

Se considera al bloque de control como G_c el cual corresponde a la ecuación 18.

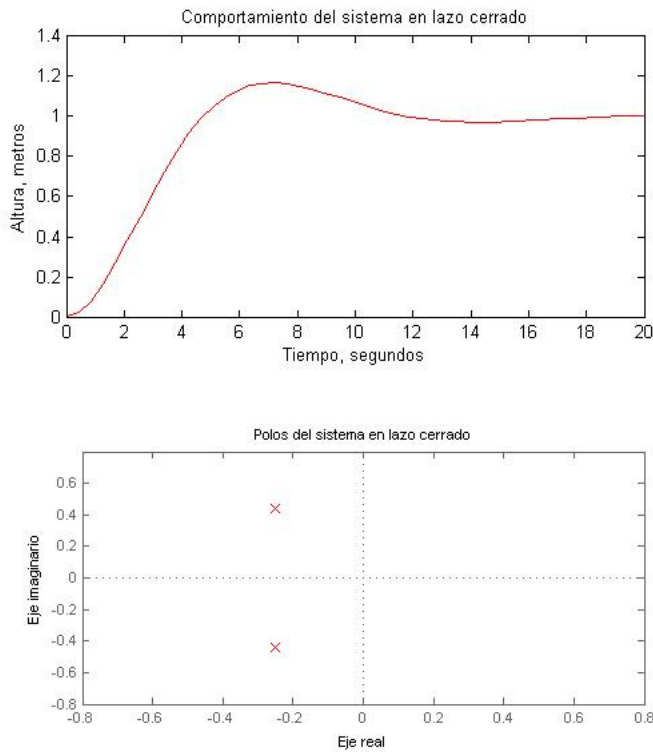


Figura 5.14: Respuesta a un escalón unitario y polos

$$G_c = K_p + \frac{K_s}{d} + K_d s \tag{18}$$

Mientras que el bloque G_z representa la función de transferencia de forma generalizada.

El diagrama de bloques de la figura 5.15 se toma como esquema base para establecer los parámetros requeridos dentro del análisis para calcular el error en estado estable.

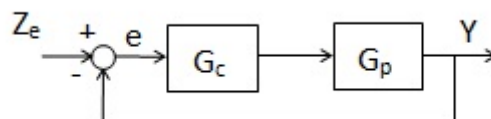


Figura 5.15: Diagrama de bloques control PD.

El error se obtiene al comparar la entrada contra la retroalimentación de la salida, lo que se puede expresar mediante la Ec. 19.

$$e = Z_e - Y. \quad (19)$$

La salida del sistema se puede representar en el plano s mediante el producto de la planta a controlar con el control diseñado, tal como se muestra en la ecuación 20.

$$Y = G(s)G_c e \quad (20)$$

substituyendo la ecuación 20 en 19 y despejando e se obtiene la ecuación 21, la cual representa el valor del error en estado estacionario.

$$e = \frac{Z_e}{1 + G_c G_z} \quad (21)$$

Usando el teorema del valor final

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s),$$

y haciendo el siguiente cambio de variable $Z_e = A \Rightarrow Z_e = \frac{A}{s}$. Es posible determinar el error en estado estacionario, el cual es cero tal y como se muestra en la ecuación 22

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + (K_p + K_d s) \left(\frac{g_0}{s(s+p_0)} \right)} = 0 \quad (22)$$

Una vez que se ha calculado el error en estado estacionario, se prosigue a calcular las ganancias K_p y K_d . Para ello se realiza el cálculo de la función de transferencia en lazo cerrado mostrado en la Ec. 23.

$$G_z = \frac{g_0 k_p + g_0 K_d s}{s^2 + s(p_0 + g_0 K_d) + g_0 K_p}. \quad (23)$$

Se propone un polinomio deseado para ser igualado con denominador de la Ec. 23.

$$\begin{aligned} P_d &= (s + \alpha_a)(s + \alpha_b), \\ P_d &= s^2 + (\alpha_a + \alpha_b)s + \alpha_a \alpha_b. \end{aligned} \quad (24)$$

Dentro del polinomio deseado se toma en cuenta que $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$, lo cual proporciona una respuesta críticamente amortiguada. Para este caso se elige un valor de $\alpha = 0,4$.

Al igualar el polinomio deseado con el denominador de la Ec. 24 y despejando se obtiene la ganancia K_p y K_d , Ecs. 25 y 26, respectivamente.

$$K_p = \alpha_a \alpha_b - g_0 \Rightarrow K_p = 0,6231 \quad (25)$$

$$K_d = \frac{\alpha_a + \alpha_b - p_0}{g_0} \Rightarrow K_d = 1,1682 \quad (26)$$

Con las ganancias calculadas anteriormente se realiza una simulación en la cual se compara la entrada, la planta en lazo cerrado y la planta con un control PD, al realizar este tipo de comparación se observan las respuestas del sistema, haciendo más visible su mejora.

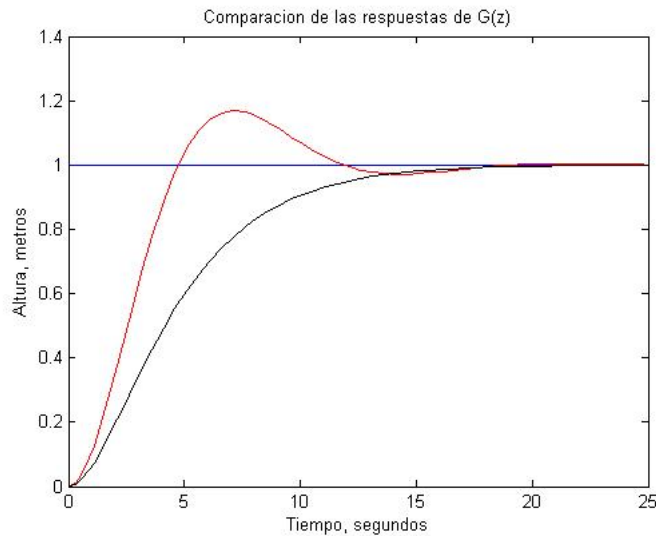


Figura 5.16: Comparación del sistema ante una entrada escalón.

Si se considera el modelo de dos grados de libertad, para el control *PD* se puede notar una gran diferencia ya que éste no agrega ceros. En la Figura 5.17 se observa que la ganancia derivativa se toma de manera directa de la retroalimentación, mientras que la ganancia proporcional es comparada con la entrada.

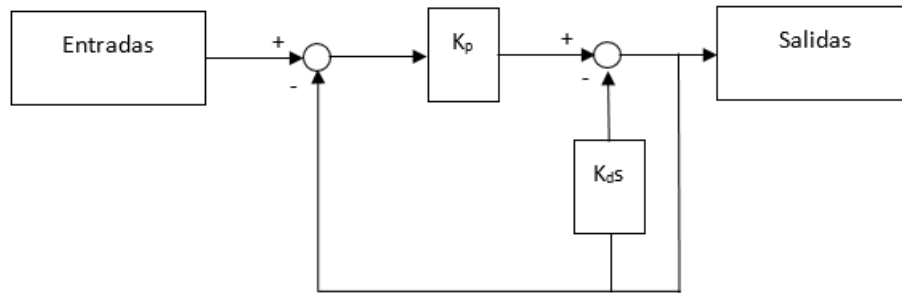


Figura 5.17: Modelo de dos grados de libertad

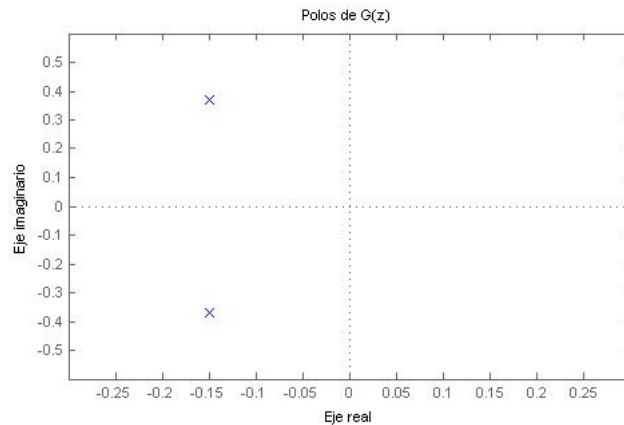
Para esta acción se cierran dos lazos el primero para K_d y el segundo para K_p , lo cual permite tener la siguiente función de transferencia

$$G_z = \frac{K_p g_0}{s^2 + s(K_d g_0) + K_p g_0}. \quad (27)$$

Para calcular las ganancias se realiza la misma acción del caso anterior, siendo el valor de $\alpha = 0,4$, por lo que las ganancias quedan de la siguiente manera.

$$K_p = 3,1153, K_d = 3,1153.$$

Por lo que sus polos se encuentran en: $P_1 = -0,1500 + 0,3708iy$ y $P_2 = -0,1500 - 0,3708iy$, tal como se muestra en la figura 5.18

Figura 5.18: Polos de $G(Z)$ usando la estructura de dos grados de libertad.

Usando una estructura modificada de un controlador PD se observa que la respuesta del sistema es mucho mejor tal como se muestra en la figura 5.19, en la cual se compara una entrada escalón, una retroalimentación unitaria, control PD y un control de dos grados de libertad

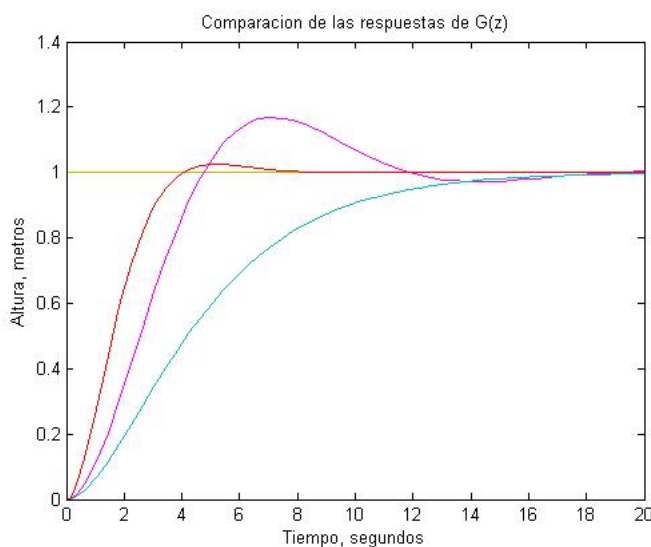


Figura 5.19: Comparación del sistema ante una entrada escalón.

5.3. Control Fraccional

Una vez establecidas las definiciones fundamentales del cálculo fraccional y los tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales de orden fraccional, la presente sección se dedica al análisis del sistema, dicho análisis, tal como es habitual para los sistemas de orden entero, partirá de los modelos o representaciones de estos en el dominio del tiempo para el estudio de su comportamiento, tanto en régimen transitorio como en régimen estacionario, discutiendo las condiciones y criterios de estabilidad.

De una manera general, el estudio de la estabilidad de los sistemas fraccionarios puede realizarse estudiando las soluciones de las ecuaciones diferenciales que los caracterizan, por lo que la función de Mittag-Leffler representa la solución fundamental, dependiendo la forma de las soluciones de los argumentos y parámetros de esta función.

Una manera alternativa es partir de la función de transferencia del sistema.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n b_k s^{\alpha_k}}$$

Para hacer este estudio, es preciso recordar que una función del tipo

$$f(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, es una función multivaluada de la variable compleja s cuyo dominio puede verse como una superficie de Riemann de un número de hojas que será finito sólo en el caso de que $\forall_i, \alpha_i \in \mathbb{Q}^+$, siendo la hoja principal la definida por $-\pi < \arg(s) < \pi$. Si, $\forall_i, \alpha_i \in \mathbb{Q}^+$, es decir, $\alpha = \frac{1}{q}$, q entero positivo.

Al realizar el diseño del controlador fraccional se utiliza una estructura PD, en ésta se modifica el valor de s , que se encuentra elevado a una potencia α , Figura 5.20.

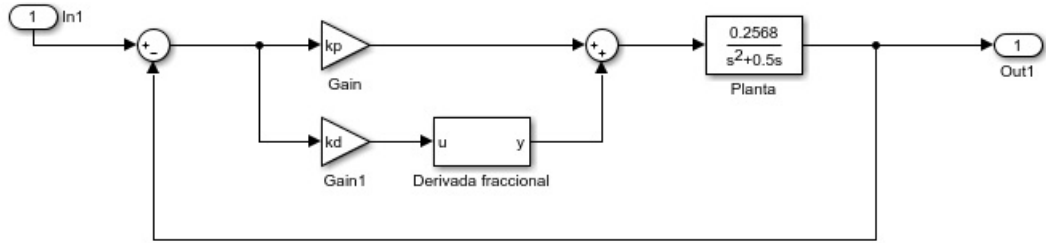


Figura 5.20: Modelo PD con variable fraccionaria

Una vez que se conoce la planta del sistema para eje z , mediante la técnica de Caputo se procede a realizar el cálculo requerido

$$\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{K_p g_0}{s^2 + s p_0 + g_0 (k_d s^\alpha + k_p)}$$

Debido a que es un control fraccionario α sólo puede tomar valores fraccionales y no enteros lo que se puede expresar de la siguiente manera

$$\alpha = \frac{1}{q}, \quad q \in \mathbb{Z}^+$$

El valor de q es propuesto, para caso de esta tesis se probarán algunos valores comenzando por $q = 2$ lo que hace que el denominador de la función de transferencia quede de la siguiente manera.

$$\Delta(s) = s^2 + s p_0 + g_0 (k_d s^\alpha + k_p) \implies q = 2.$$

Realizando un cambio de variable de $\lambda = s^{\frac{1}{q}} = s^\alpha$ se tiene la siguiente expresión

$$\Delta(s) = s^2 + s p_0 + g_0 (k_d s^{\frac{1}{2}} + k_p) \implies s^{\frac{1}{2}} = \lambda$$

Al realizar este cambio de variable se observa que se tiene un sistema conmensurado, por tanto el cuasipolinomio obtenido es de cuarto orden tal como se muestra en la siguiente expresión

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 p_0 + g_0(k_d \lambda + k_p). \quad (28)$$

De (28) se tendrán que obtener sus raíces y estas deberán cumplir $\lambda > \alpha \frac{\pi}{2}$ para saber si se encuentran dentro del cono de estabilidad, de este modo saber si las ganancias propuestas se ajustan a dicho cono.

Raíces del cuasipolinomio	ángulos correspondientes
$0.3253 + 0.7657i$	66.9813
$0.3253 - 0.7657i$	-66.9813
$-0.3253 + 0.3540i$	132.5838
$-0.3253 - 0.3540i$	-132.5838

Cuadro 5.1: Raíces del cuasipolinomio.

Las raíces encontradas en (28) son consistentes con los cálculos y la respuesta esperada, tal como lo muestra la figura 5.21, donde se hace una comparación de la respuesta de un controlador PD y un PD fraccional, así mismo se demuestra que el cono de estabilidad es más amplio para el control fraccional.

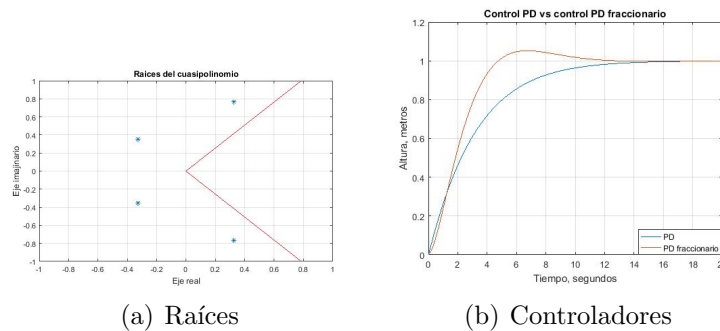


Figura 5.21: Comparación de controlador PD vs PD fraccional.

La figura 5.22 muestra el comportamiento de la planta para diversos valores de q , los cuales sirven como referencia al momento de diseñar el control fraccional.

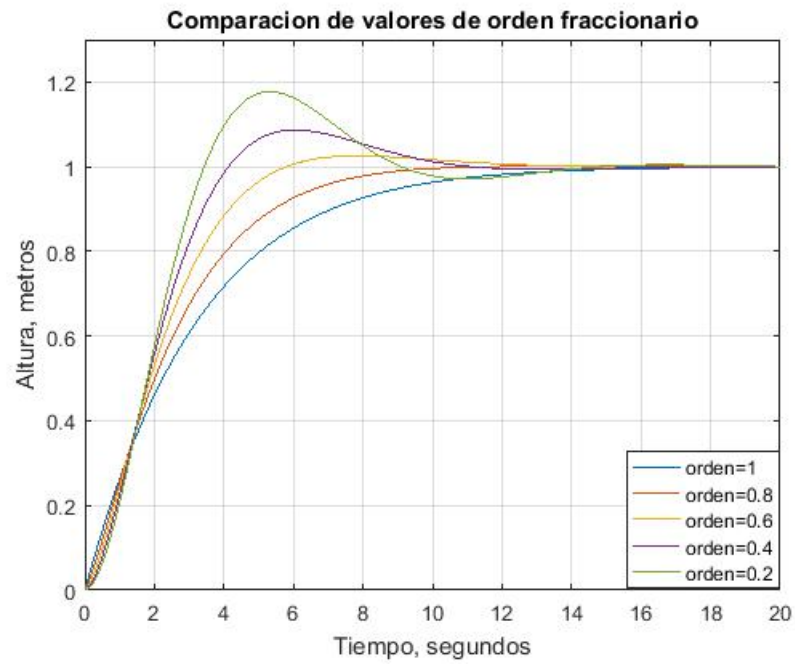


Figura 5.22: Respuesta para diversos valores de q

Una vez que se a probado el control en el sistema lineal, se procede a probarlo en el sistema no lineal, quedando en un diagrama a bloques como se muestra en la figura 5.23 y su respuesta en 5.24

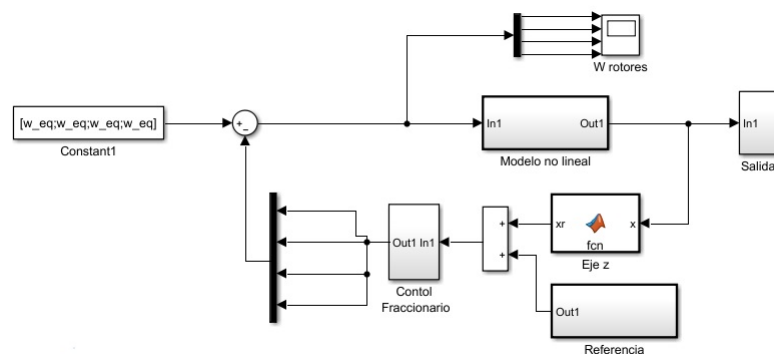


Figura 5.23: Diagrama a bloques del control fraccionario en el eje z.

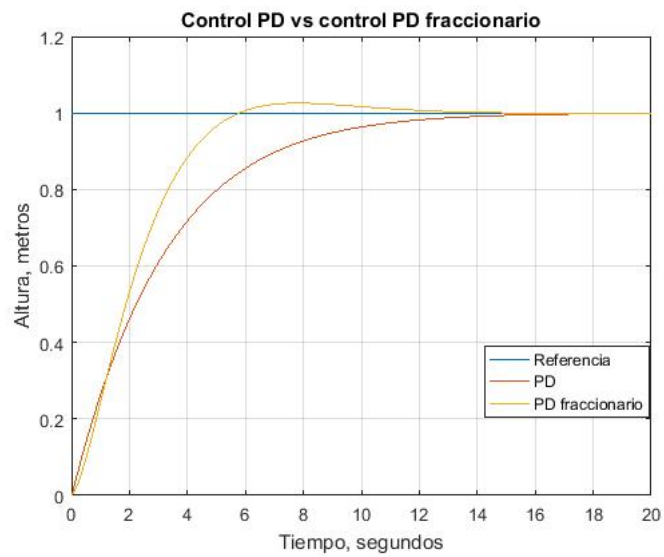


Figura 5.24: Respuesta del sistema no lineal.

Como se observa en la figura 5.24, el controlador de tipo fraccionario tiene una mejor respuesta en comparación a un controlador de tipo entero, debido a las bondades que este presenta en su cono de estabilidad.

Conclusiones

Dentro de los nuevos diseños de VANT, es importante las técnicas de control requeridas para un vuelo estable se necesita identificar la aplicación requerida así como la técnica de control adecuada.

Para la estabilidad de un VANT es indispensable un buen modelo matemático e identificar la localización de los polos y ceros de la función de transferencia que representa a dicho modelo, con la finalidad de entender el comportamiento del sistema y así poder elegir un controlador adecuado.

La linealidad dentro de un controlador de tipo LQR y de un PD se cumple perfectamente, por lo que es posible trabajar dichos controladores de una forma acoplada o desacoplada, por lo que esta comprobado mediante la linealidad.

Un control fraccionario es de gran utilidad por abrir el rango de estabilidad a un orden fraccional permitiendo que los polos de la función de transferencia que sea mayor a lo permitido.

Bibliografía

- [1] M. Haluani, “La tecnología aviónica militar en los conflictos asimétricos: historia, tipos y funciones de los drones letales,” *Cuestiones Políticas*, vol. 30, no. 52, 2015.
- [2] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [3] F. W. Sears, A. L. Ford, and R. A. Freedman, *Física universitaria: con física moderna*, vol. 2. Pearson educación, 2005.
- [4] H. K. Khalil and J. Grizzle, *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice hall New Jersey, 1996.
- [5] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Educación, 2003.
- [6] H. Sira, *Control de sistemas no lineales*. Pearson Educación, 1rd ed., 2005.
- [7] N. S. Nise and J. H. Romo, *Sistemas de control para ingeniería*. Compañía Editorial Continental, 2002.
- [8] F. R. Rubio and M. J. L. Sánchez, *Control adaptativo y robusto*, vol. 9. Universidad de Sevilla, 1996.
- [9] I. A. R. Ruge, “Método básico para implementar un controlador digital pid en un microcontrolador pic para desarrollo de aplicaciones a bajo costo,” *Aplicaciones en Control de Pontecia y la Industrial*, 2008.
- [10] R. C. Dorf, R. H. Bishop, S. D. Canto, R. D. Canto, and S. Dormido, *Sistemas de control moderno*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [11] R. F. del Busto y Ezeta, *Análisis y diseño de sistemas de control digital*. Mc Graw Hill, 2013.
- [12] M. A. Moreno, “Apuntes de control pid,” *LA PAZ ENERO*, 2001.

- [13] B. M. Vinagre, V. F. Batlle, and I. Tejado, “Control fraccionario: fundamentos y guía de uso,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 13, no. 3, pp. 265–280, 2016.
- [14] A. Tustin, J. Allanson, J. Layton, and R. Jakeways, “The design of systems for automatic control of the position of massive objects,” *Proceedings of the IEE-Part C: Monographs*, vol. 105, no. 1S, pp. 1–57, 1958.
- [15] B. M. Vinagre and C. A. Monje, “Introducción al control fraccionario,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 3, no. 3, pp. 5–23, 2009.
- [16] P. P. ORTÍ and F. X. B. FERRAGUD, “Desarrollo del modelo dinámico de un cuatrirrotor y diseño de los sistemas de control de estabilización y seguimiento autónomo de trayectorias.”
- [17] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot modeling and control*, vol. 3. Wiley New York, 2006.
- [18] Schaum’s, *Outline of Theory and Problems of Lagrangian Dynamics*. McGraw-Hill., 3rd ed., 1967.
- [19]
- [20] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive control*. Courier Corporation, 2013.