

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

Péndulo invertido de Furuta: control y diseño mecánico

TRABAJO RECEPCIONAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

PRESENTA

RICARDO ISRAEL PIMENTEL MEDINA

Director del trabajo recepcional

Dr. Juan Mauricio Ángeles Cervantes

México, D.F. septiembre de 2016.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS ©

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

UACMA TST1055

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo de mi tutor el Dr. Mauricio Ángeles Cervantes que bajo supervisión escogí este tema y comencé la tesis. También por su paciencia, dedicación, motivación y criterio que han hecho un poco más fácil lo difícil. Ha sido un privilegio poder contar con su guía y ayuda.

Agradecer a la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación del DF (antes Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal) y a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, por su apoyo a través de los proyectos UACM-SECITI PIUTE10-188, UACM/OAG/ADI/018/2011, UACM PI2013-25, UACM PI2014-65.

Gracias a mis lectores el M. en I. Christian Agustín Vásquez Villanueva, Ing. Manuel Alberto Soriano Ávila, M en C. Miguel Ángel Zárate Reyes y una mención muy grata al Dr. Marcos Ángel González Olvera que aparte de ser mi lector fue como mi director por el apoyo en la realización de mi tesis.

Dedicatoria

Esta tesis se la dedicó a mi familia y a Dios, quiénes supieron guiarme por el buen camino, darme fuerzas para seguir adelante y a no abandonar mis sueños por las adversidades que se encuentran en el camino. La licenciatura me ha costado demasiado no solo a mí, si no también le costó demasiado a mi Familia. Por todos los motivos antes mencionados el presente trabajo de tesis está dedicado primordialmente a dios y a mi familia.

A mi madre Rosaura Medina Oliva le digo que ha sido esa madre que no la cambiaría por nada en este mundo y que ojalá siempre estuviera a mi lado, porque como ella no habrá nadie para mí y Rafael Pimentel Martínez le digo que con su esfuerzo y sacrificio sacó adelante a su familia y no faltó comida en la mesa. A ellos les digo gracias por sus consejos, desvelos, ánimos, esfuerzo y cariño que otorgaron a sus hijos y que no tendré como pagarles por el resto de mi vida.

A mis hermanos por su apoyo y experiencias brindadas que a lo largo de mi vida he compartido con ellos, y a mis amigos, compañeros y conocidos con los que pude trabajar en mi camino universitario y en mi trabajo con los cuales conviví e intercambie ideas para poder prepararme como profesionistas a todos ellos gracias.

Dedicatoria Institucional

Agradezco a la *Universidad Autónoma de la Ciudad de México* por el *apoyo otorgado*, para la impresión y el empastado de este trabajo recepcional mediante el convenio **UACM-CSE-ITR/48/2016**.

Gracias a todas las personas de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM), por su atención y amabilidad en todo lo referente a mi vida como alumnado de la institución.

Resumen

El trabajo de tesis consta de diseñar y simular el comportamiento del péndulo de Furuta, un mecanismo de dos grados de libertad y solamente tendrá un actuador en unas de sus partes (eslabones). En el mecanismo se desarrollará tanto la parte mecánica y control por medio de una simulación: en la cual se utilizarán diferentes programas de simulación, uno de ellos para desarrollar las partes mecánicas y el otro para verificar y simular su comportamiento dinámico. También se hará la comparación y analogías necesarias con un robot manipulador, para entender mejor la morfología, dinámica y cinemática del péndulo de Furuta y la aportación que éste nos hace para la industria y como medio de aprendizaje para el alumnado.

Además, de acuerdo a sus ecuaciones dinámicas y variables que pueden ser cambiadas, nos proporciona información útil para escoger material ya sea tamaño, tipo y durabilidad para su mejor desempeño.

Índice general

| Capítulos | Página |
|--|-----------|
| Agradecimientos | 2 |
| Dedicatoria | 3 |
| Dedicatoria Institucional | 4 |
| Resumen | 5 |
| 1. Antecedentes | 12 |
| 1.1. Robótica | 13 |
| 1.1.1. Robots | 14 |
| 1.2. Tipos de péndulos | 15 |
| 1.2.1. Péndulo simple | 15 |
| 1.2.2. Péndulo invertido | 16 |
| 1.3. Objetivo general | 17 |
| 1.3.1. Objetivos específicos | 18 |
| 1.3.2. Objetivos particulares | 18 |
| 1.4. Justificación | 19 |
| 1.5. Estructura del trabajo recepcional | 19 |
| 2. Modelo matemático del péndulo de Furuta | 20 |
| 2.1. Representación de sistemas mediante modelos no lineales | 20 |
| 2.2. Cinemática | 22 |
| 2.3. Cinemática del sistema | 24 |
| 2.4. Análisis de las energías potencial y cinética | 25 |
| 2.5. Obtención de las ecuaciones dinámicas | 27 |
| 2.5.1. Método de ecuaciones de movimiento de <i>Euler-Lagrange</i> | 28 |
| 2.6. Modelo dinámico | 30 |
| 2.7. Ecuaciones dinámicas del péndulo de Furuta | 30 |
| 2.8. Modelado del motor de corriente continua | 33 |

| | |
|---|-----------|
| 3. Diseño mecánico | 35 |
| 3.1. Morfología | 35 |
| 3.2. Diseño mecánico | 37 |
| 3.3. Planos de diseño | 42 |
| 3.4. Análisis por elemento finito | 47 |
| 3.4.1. Estudio de movimiento | 51 |
| 4. Control del péndulo de Furuta | 55 |
| 4.1. Representación en espacio de estados | 55 |
| 4.2. Puntos de equilibrio | 56 |
| 4.3. Linealización del sistema dinámico no lineal | 58 |
| 4.3.1. Interpretación gráfica | 58 |
| 4.3.2. Linealización alrededor del punto de equilibrio | 59 |
| 5. Sistemas de control: controlador LQR y Swing Up | 61 |
| 5.1. Introducción | 61 |
| 5.1.1. Controlabilidad | 62 |
| 5.1.2. Matriz de controlabilidad | 62 |
| 5.2. Observabilidad | 63 |
| 5.2.1. Matriz de observabilidad | 63 |
| 5.3. Cálculo de la matriz de controlabilidad y observabilidad | 64 |
| 5.4. Análisis de estabilidad de Lyapunov | 66 |
| 5.5. Regulador cuadrático lineal | 68 |
| 5.6. "Swing Up" mediante regulación de energía | 70 |
| 5.7. Controlador no lineal en su forma normal Lagrangiano | 73 |
| 6. Simulación del control del péndulo de Furuta | 76 |
| 6.1. Simulación del control Lineal | 78 |
| 6.2. Simulación del controlador no lineal | 81 |
| 6.3. Comparación de resultados | 81 |
| 7. Conclusiones | 83 |
| A. Planos de cada pieza del péndulo de Furuta | 84 |
| Bibliografía | 94 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Péndulo de furuta 3D | 13 |
| 1.2. Robótica. área multidisciplinaria: Imagen de <i>Robotechnic's centro educativo</i> | 14 |
| 1.3. Robot industrial de la compañía ABB (imagen obtenida de la página GLOBAL ROBOTS FZE | 15 |
| 1.4. Péndulo simple | 16 |
| 1.5. Péndulo carro móvil | 17 |
| 2.1. Péndulo de Furuta. fuente: De la Torre, 2004 | 23 |
| 2.2. Motor de corriente continua. Fuente: motoelectrokris | 33 |
| 3.1. Morfología de un brazo robótico. Fuente: platea.pntic | 36 |
| 3.2. Base que sostiene al Péndulo de Furuta | 37 |
| 3.3. Brazo (barra horizontal) | 37 |
| 3.4. Péndulo con masa de balance | 38 |
| 3.5. Eje que une al péndulo y brazo | 38 |
| 3.6. Rodamiento AXIAL | 39 |
| 3.7. Rodamiento ó Balero | 40 |
| 3.8. Encoder absoluto | 40 |
| 3.9. Diseño en 3D del péndulo de Furuta | 41 |
| 3.10. Eje giro | 41 |
| 3.11. Contactor | 42 |
| 3.12. brazo del péndulo de Furuta | 44 |
| 3.13. Péndulo con masa de balance | 45 |
| 3.14. Péndulo de Furuta diseño completo | 46 |
| 3.15. Discretización de elementos finitos (malla). | 47 |
| 3.16. Simulación de elemento finito del brazo. | 48 |
| 3.17. Propiedades del material. | 49 |
| 3.18. Análisis estático. | 49 |
| 3.20. Propiedades del material. | 50 |

| | |
|---|----|
| 3.21. Análisis estático. | 50 |
| 3.19. Simulación por elemento finito péndulo. | 52 |
| 3.22. Imagen de simulación del péndulo de Furuta en Solidwords | 53 |
| 3.23. Gráfica de posición angular del péndulo | 54 |
| 3.24. Gráfica posición angular del brazo | 54 |
| 4.1. Interpretación gráfica de linealización. | 59 |
| 5.1. Diagrama de bloques de un observador. | 64 |
| 5.2. Conceptos de estabilidad. Fuente: CENIDET | 66 |
| 5.3. Una imagen. | 66 |
| 5.4. Lugar geométrico de las raíces para la salida $y = \theta$ | 67 |
| 5.5. Lugar geométrico de las raíces para la salida $y = \phi$ | 68 |
| 5.6. Modelo simplificado del péndulo de Furuta para "Swing Up". Fuente: Osorio, 2009. | 71 |
| 5.7. Péndulo de Furuta simplificado para el método de control por Lagrangiano. Fuente: APA. | 74 |
| 6.1. Diagrama de bloques del modelado del péndulo de Furuta. | 76 |
| 6.2. Gráfica de la respuesta con control del brazo. | 77 |
| 6.3. Diagrama de bloques del modelado del péndulo de Furuta. | 78 |
| 6.4. Respuestas del péndulo de furuta con control lineal. | 78 |
| 6.5. Diagrama de bloques con simmechanics y Solidworks. | 79 |
| 6.6. Figura 3D del péndulo de Furuta a través de Matlab y Solidworks. | 79 |
| 6.7. Respuesta de control del péndulo con modelo de planta diseñada en Solidworks. | 79 |
| 6.8. Respuesta de control del brazo con modelo de planta diseñada en Solidworks. | 80 |
| 6.9. Diagrama de bloques del control no-lineal. | 81 |
| 6.10. Gráficas de la respuesta de la posición del péndulo y brazo con un control no-lineal. | 81 |
| 6.11. Tabla de valores de la respuesta del péndulo de Furuta. | 82 |
| A.1. Pilar y base inferior | 85 |
| A.2. Base media | 86 |
| A.3. Base 3 | 87 |
| A.4. Base giro | 88 |
| A.5. Rodamiento | 89 |
| A.6. Rodamiento axial. | 90 |
| A.7. Pendf | 91 |

| | |
|---|----|
| A.8. Péndulo invertido con dos grados de libertad | 92 |
| A.9. Brazof | 93 |

Índice de cuadros

| | |
|--|----|
| 5.1. Tabla de valores físicos del péndulo de Furuta. | 64 |
| 5.2. Tabla de valores físicos del motor de corriente continua. | 65 |

Capítulo 1

Antecedentes

El sistema Péndulo de Furuta, fue creado por el Dr. K.Furuta del Instituto de Tecnología de Tokio, Japón, el cual es un sistema sub actuado de dos grados de libertad rotacionales llamados brazo y péndulo. El movimiento del brazo se realiza en un plano horizontal girando alrededor de un eje perpendicular al plano, el péndulo se encuentra ubicado en un extremo del brazo y su eje giro es colineal al eje axial del brazo y su movimiento se realiza en un plano perpendicular al de este último.

La Fig.1.1 muestra lo que es un péndulo de Furuta. El diseño de este trabajo se basará en la figura antes mencionada para su desarrollo físico (Umeki, 2002).

Una analogía del péndulo de Furuta es el juego que trataba de sostener una escoba en la palma de tu mano sin que este caiga al suelo, por tanto se debería estar al pendiente para actuar rápidamente ante cualquier inclinación de la escoba.

A pesar de que en la realidad el juego parece muy fácil de hacer, en la teoría de control no es así. Todo sistema de control, sea cual fuere la aplicación, está formado por 3 cosas; sensar, controlar y actuar, que se entrelazan en un ciclo para obtener la posición deseada del péndulo en nuestro caso. Por tanto, retomando el juego la persona sensa cuando observa que la escoba se está inclinando, después toma una decisión de control la cual indicará a su actuador la mano, hacia donde moverse para que no se caiga la escoba.

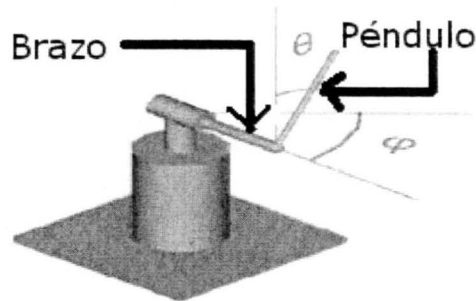


Figura 1.1: Péndulo de Furuta 3D

Durante los últimos 80 años el estudio de movimiento de diferentes péndulos ha ayudado a los estudiantes a desarrollar conocimientos de control, mecánica y diseño para poder entrar en el mundo de la robótica, ya que esta área de la ingeniería ha incursionado en la industria, centros de investigación, universidades y hospitales. Actualmente existen fábricas completamente automatizadas mediante robots manipuladores (Reyes Cortés, 2015).

A todo esto el péndulo de Furuta es una forma de robot subactuado, ya que es un mecanismo que al igual que un robot contiene componentes mecánicos, electrónicos entre otros para ser manipulados. Por ello es necesario que el ingeniero en sistemas electrónicos industriales cuente con los conocimientos de control y diseño para garantizar un buen desempeño del sistema. En este trabajo se realiza el control de posición del péndulo de Furuta utilizando técnicas de control, y un diseño mecánico que se pueda implementar por cualquier persona. En las siguientes secciones se explica y se proporciona información acerca del péndulo de Furuta y su relación con el área de la robótica.

1.1. Robótica

La robótica es una disciplina científica que aborda la investigación y desarrollo de una clase particular de sistemas mecánicos, denominados *robots manipuladores*, diseñados para realizar una amplia variedad de aplicaciones industriales, científicas, domésticas y comerciales (Reyes Cortés, 2015).

La naturaleza multidisciplinaria de la robótica permite involucrar una gran cantidad de áreas del conocimiento tales como matemáticas, física, electrónica, computación, visión e inteligencia artificial, entre otras, como se muestra en la Fig.1.2.

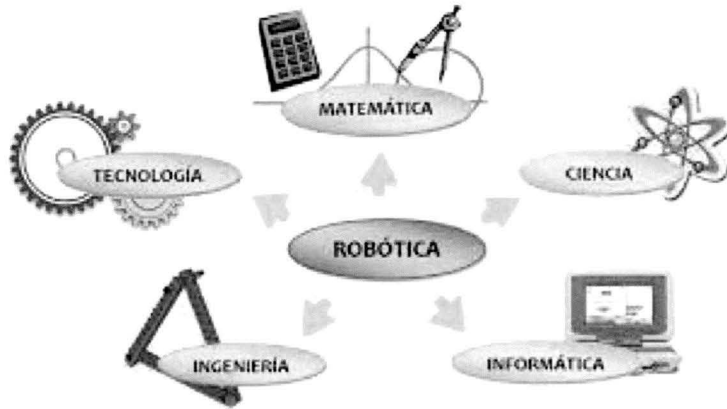


Figura 1.2: Robótica, área multidisciplinaria: Imagen de *Robotechnic's centro educativo*

1.1.1. Robots

Un robot es un manipulador funcional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados para la ejecución de varias tareas. (Reyes Cortés, 2015).

Robots industriales

El tipo de robot industrial se asemeja al péndulo de Furuta, ya que tiene varias particularidades en común. Ya se había mencionado que el péndulo de Furuta consta de articulaciones, actuadores, sensores, sistema mecánico y una consola de control (Reyes Cortés, 2015).

Los robots industriales son el tipo de robots más populares, debido a la importancia que ocupan en el sector industrial. Los robots industriales también son conocidos como brazos robots o brazos mecánicos. Por analogía con el brazo humano, se componen de una base la cual puede rotar 360° grados alrededor de su eje de giro, además de que poseen articulaciones que emulan un hombro y codo. En el extremo final del codo tienen una parte mecánica denominada muñeca que le permite orientar a la herramienta final. (Reyes Cortés, 2015)

En la fig. 1.3 se muestra un robot industrial de la compañía ABB con las particularidades antes mencionadas, para aplicaciones de traslado de cajas, entre otras. Como dato técnico el robot tiene un peso de aproximadamente 3 toneladas, y puede alcanzar una altura de 4 metros y velocidad de $3000 \frac{mm}{s}$.



Figura 1.3: Robot industrial de la compañía ABB (imagen obtenida de la página GLOBAL ROBOTS FZE)

1.2. Tipos de péndulos

1.2.1. Péndulo simple

El péndulo (del lat. *pendulus*, pendiente) es un sistema físico que puede oscilar bajo la acción gravitatoria u otra característica física y que está configurado por una masa suspendida de un punto o de un eje horizontal fijo mediante un hilo, una varilla o algún otro elemento (Newton, 1997).

Para escribir la ecuación del movimiento se observa la Fig. 1.4, correspondiente a una posición genérica del péndulo. La flecha azul representa el peso de la masa pendular. Las flechas en color violeta representan las componentes del peso en las direcciones tangencial y normal a la trayectoria.

En física, una ecuación de movimiento es la formulación matemática que define la evolución temporal de un sistema físico en el espacio. Esta ecuación relaciona la derivada temporal de una o varias variables que caracterizan el estado físico del sistema, con otras magnitudes físicas que provocan el cambio en el sistema (Mario.Frias y Riveras, 2008). Entonces es necesario obtener las ecuaciones de movimiento para saber cómo cambia la posición de los ángulos, tanto del brazo y el péndulo con respecto al tiempo.

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento, tenemos

$$F_t = -mgsen\theta = ma_t \quad (1.1)$$

Donde el signo negativo tiene en cuenta que la dirección es opuesta a la del desplazamiento angular positivo (hacia la derecha). Considerando la relación exis-

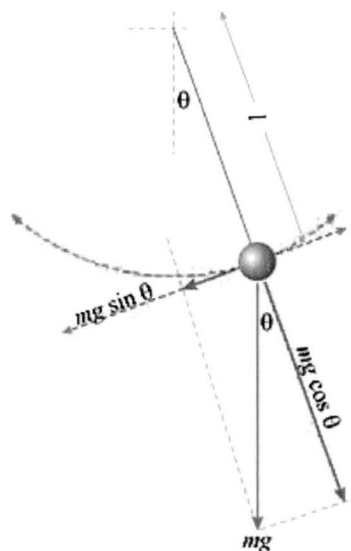


Figura 1.4: Péndulo simple

tente entre la aceleración tangencial y la aceleración angular.

$$a_t = l \ddot{\theta} \quad (1.2)$$

Entonces obtenemos finalmente la ecuación diferencial del movimiento plano del péndulo simple, y l , $\ddot{\theta}$, son la longitud del péndulo y aceleración angular respectivamente.

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (1.3)$$

1.2.2. Péndulo invertido

En la Fig. 1.5 se muestra un ejemplo de péndulo invertido; cuyo centro de masa por encima de su punto de rotación. A menudo se implementa con el punto de rotación montado en un carro que se puede mover horizontalmente, lo cual incrementa el número de grados de libertad. Considerando que un péndulo es estable en la vertical hacia abajo e inestable en la vertical hacia arriba, y debe ser equilibrada activamente con el fin de permanecer en posición vertical, lo cual se logra ya sea mediante la aplicación de un par de torsión en el punto de rotación (pivote), o bien desplazando el punto de pivote horizontal como parte de un sistema de retroalimentación, o mediante la velocidad de rotación de una masa montada en el péndulo sobre un eje paralelo al eje de giro y con ello la generación de un par neto en el péndulo, finalmente haciendo oscilar el punto de pivote vertical. La demostración de mover el punto de rotación en un sistema de

retroalimentación se consigue mediante el equilibrio de un palo de escoba vuelta hacia arriba en el extremo del dedo de uno.

El péndulo invertido es un problema clásico en la dinámica y la teoría de control y se utiliza como punto de referencia para las pruebas de las estrategias de control.

Dentro de los sistemas de péndulos invertidos uno de los más utilizados y profundamente estudiado es el péndulo sobre un carro móvil que se traslada en un riel con cierta distancia, en la Fig. 1.5, dicho sistema se utiliza para el análisis experimental de técnicas de control. El inconveniente con este sistema es que el péndulo se encuentra acotado por el recorrido del carro, lo que limita las maniobras de control. Para eliminar dicha limitación se reemplaza la trayectoria lineal del carro por una trayectoria circular, dando origen al sistema Péndulo de Furuta.

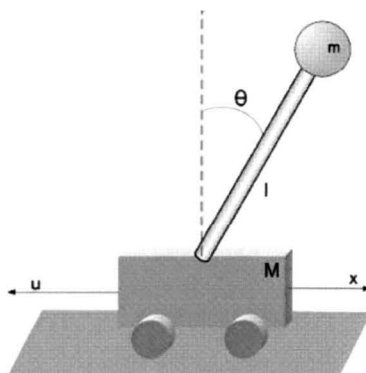


Figura 1.5: Péndulo carro móvil

1.3. Objetivo general

El objetivo es proveer el diseño mecánico del péndulo de Furuta con especificaciones acerca del diseño (costo y durabilidad), para que cualquier estudiante o institución, cuente con el procedimiento de construcción e implantación. Además, obtener algoritmos de control a través del modelado matemático del sistema, y compararlo con el comportamiento obtenido mediante una simulación numérica con el apoyo de un software de diseño de CAD ¹.

¹Computer Aided Design

1.3.1. Objetivos específicos

Para conseguir el objetivo general se tienen los siguientes objetivos específicos:

- **Modelado matemático** del sistema péndulo de Furuta representado en ecuaciones dinámicas en espacio de estados no lineales, que describen en forma diferencial el comportamiento del sistema físico.
- **Diseño de planos** de las piezas mecánicas del sistema para su manufactura.
- **Simulación del comportamiento dinámico del péndulo de Furuta.**
- **Análisis mediante elemento finito**, que incorporará las especificaciones del material, deformaciones de las piezas y límites de ruptura de éstas.
- **Linealización del modelo matemático** del sistema en su representación de espacio de estados, para el diseño de los controladores propuestos.
- **Diseño y verificación de un controlador LQR²**, el cual estabilizará al péndulo en sus puntos de equilibrio.
- **Diseño y verificación del controlador “*Swing up*”**, el cual lleva al péndulo de su punto de la vertical inferior hacia la vertical superior.
- **Diseño y verificación de un controlador no lineal lagrangiano** en su forma normal.
- **Implementación en Matlab**, de las ecuaciones de estado y los controladores diseñados para verificar los resultados teóricos, y comparar el comportamiento de los controladores propuestos.

1.3.2. Objetivos particulares

- Aplicación de los conocimientos que adquirí a lo largo de mi formación profesional la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.
- Mediante este trabajo hacer uso de nuevas habilidades para mi desarrollo como ingeniero.

²Linear Quadratic Regulator

1.4. Justificación

En la industria se utilizan diseños mecánicos de piezas, mecanismos, estructuras entre otras que tengan una mayor durabilidad. Pero el diseño de una pieza o mecanismo en la industria no es nada barato, por lo cual se opta por simular el comportamiento de los materiales y fuerzas aplicadas a las piezas mediante simulación; todo esto para disminuir gastos muy altos y garantizar que el diseño sea factible para producir. Es por esto que aunque no se construyó físicamente el péndulo de Furuta, si se aportó el análisis del diseño mecánico justificando el por qué los materiales, tamaño, componentes externos y costos, que permitan al alumnado e instituciones construirlo, si así lo desea o necesite como tema didáctico para desarrollar la teoría de control.

También la cuestión del modelado y el control que se utilizará para obtener la posición deseada del sistema en una simulación, se utilizaría para controlarlo ya construido físicamente. Los conocimientos aplicados a mi trabajo recepcional me permitirían tener las bases para: modelar, controlar y diseñar mecanismos más complejos como los robots industriales, que es lo que actualmente se utiliza.

1.5. Estructura del trabajo recepcional

Este trabajo se compone de 5 capítulos y un anexo. El capítulo 1, es una introducción al tema de diseño, control, antecedentes y aportaciones del péndulo de Furuta que se han realizado. El capítulo 2, describe el modelado matemático utilizando ecuaciones cartesianas para obtener la posición del péndulo y del brazo del sistema con el objetivo de calcular la energía cinética y potencial, que las cuales son necesarias para el método de Euler Lagrange, y así obtener las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento en general del sistema. Además, se obtiene la representación en variables de estado del modelo matemático para efecto de diseño de controladores. El capítulo 3 detalla el diseño mecánico del péndulo de Furuta. El capítulo 4 incorpora la linealización de las ecuaciones de variables de estado obtenidas en el capítulo 2 alrededor de sus puntos de equilibrio y el análisis para diseño de los controles LQR y *Swing Up*. El capítulo 5 muestra los resultados que se obtuvieron a través de las simulaciones en Matlab y SolidWorks. En el capítulo 6, se dan las conclusiones obtenidas al desarrollar cada uno de los objetivos que se plantearon al inicio de este trabajo. Finalmente, se agrega un apéndice de tablas del análisis mediante elemento finito, hojas de diseño y costo para construir un péndulo de Furuta.

Capítulo 2

Modelo matemático del péndulo de Furuta

Un modelo matemático es una representación mediante ecuaciones que describen un sistema, el cual es un conjunto de elementos que interactúan entre sí para obtener un fin común (Ogata, 2000). El modelo de un sistema sirve para entender de una forma sistemática el entorno del sistema y así solucionar problemas de mayor complejidad.

El péndulo de Furuta es un sistema mecánico, cuya descripción analítica requiere de ecuaciones diferenciales. La naturaleza no lineal, multivariable y acoplada de su comportamiento dinámico ofrece un amplio espectro en la formulación de problemas de control teóricos y prácticos. El sistema requiere de ecuaciones de cinemática y de ellas obtener las ecuaciones dinámicas a través de los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración para describir los movimientos de un cuerpo u objeto,

2.1. Representación de sistemas mediante modelos no lineales

En la vida diaria la representación de casi todos los sistemas son no lineales, por lo que el modelo del sistema debe representar esta dinámica para describir con precisión su comportamiento. En estos procesos, con regularidad, se tienen varias entradas y más de una salida para obtener el modelo necesario para representarlo. La forma de modelar estos sistemas es utilizado la representación de variables de estado.

Para la representación mediante variables de estado de un sistema, se define

los siguientes conceptos:

- **Variable del sistema:** se le denomina de esta manera a cualquier variable que responda a la entrada del sistema o a las condiciones iniciales de éste.
- **Variables de estados:** es la cantidad más pequeña de variables necesarias para, que a partir del conocimiento de éstas y de la entrada al sistema, se pueda determinar por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo futuro.
- **Vector de estado:** es un vector en el cual sus componentes son las variables de estado del sistema.
- **Espacio de estado:** es un espacio dimensional cuyos ejes coordenados son las variables de estado del sistema.
- **Ecuaciones de estado:** son un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden con n variables (las variables de estado).
- **Ecuación de salida:** esta ecuación expresa las variables de salida como una combinación de las entradas y las variables de estado.

Si se tiene un proceso que cuenta con p entradas, m salidas y que describe su dinámica con n variables de estado, en donde cada variable de estado describe su dinámica mediante una función dependiente de todas las variables de estado del sistema, las entradas al sistema y del tiempo, y además, las salidas del sistema son funciones dependientes de las variables de estado, de entradas al sistema y del tiempo, entonces las funciones que describen el comportamiento del sistema mediante la representación de variables se agrupan de la forma:

$$f(x, u, t) = \begin{pmatrix} x_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ x_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ \vdots \\ x_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \end{pmatrix},$$

$$g(x, u, t) = \begin{pmatrix} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ \vdots \\ g_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \end{pmatrix},$$

mediante una representación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(x, u, t), \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(x, u, t). \quad (2.2)$$

que representa la *dinámica no lineal del sistema*, en donde la Ec. (2.1) es denominada *ecuación de salida* (Reyes Cortés, 2015). Por otra parte, si el sistema se encuentra alrededor de un punto de operación, entonces el sistema puede ser representado por medio de ecuaciones lineales, que se explican más adelante.

2.2. Cinemática

El estudio de la cinemática directa, proporciona las trayectorias, desplazamiento, y orientación del sistema. Dependiendo del tipo de articulación que se encuentra en la estructura mecánica del sistema, éstas pueden ser traslacionales o rotacionales, en este trabajo son rotacionales. Se puede clasificar en general, de acuerdo a su entrada en un mecanismo: antropomórfico, esférico, cilíndrico, SCARA y cartesiano.

El péndulo de Furuta consta de dos eslabones con dos articulaciones, por lo tanto tiene dos grados de libertad y sus movimientos son rotacionales, lo que se clasifica como un mecanismo y no como un robot.

El modelo del sistema se muestra en la Fig. 2.1. En él se aprecia la posición del brazo dada por el ángulo ϕ y la posición del péndulo otorgada por el ángulo θ , siendo l_a y l_p las longitudes de los elementos y que cada una está relacionada

con las masas m_a y m_p , respectivamente. A parte contiene una masa de balance al extremo del péndulo como ya se había mencionado con una masa M y J la inercia del actuador, no se especifican en la imagen.

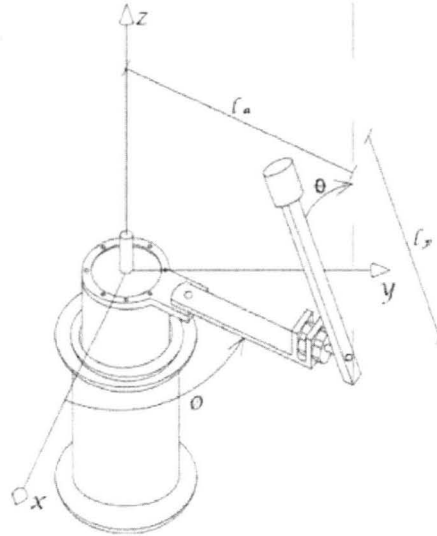


Figura 2.1: Péndulo de Furuta. fuente: De la Torre, 2004

El modelo dinámico de un robot puede ser expresado mediante una ecuación diferencial vectorial definida en las posiciones, ya sean articulares, expresadas como q , o cartesianas expresadas como x, y, z , como se muestra en las Ecs. (2.3) y (2.4).

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0, \quad (2.3)$$

$$g(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau) = 0. \quad (2.4)$$

Donde τ representa el vector de pares aplicadas en las articulaciones, la Ec. (2.3) en este caso sólo se tiene un par y éste actúa en el brazo. El modelo descrito por Ec. (2.3) es conocida como modelo dinámico articular, mientras que la Ec. (2.4) es un modelo dinámico cartesiano. En el desarrollo de las ecuaciones se considerará el modelo cartesiano. Además, se debe señalar que el modelo matemático que se utilizará no es único y se puede hacer varias representaciones.

Como se observa en la Fig. 2.1 el sistema consta de dos cuerpos inerciales conectados. Un pilar central (eje del motor) con momento de inercia J conectado al brazo horizontal de longitud l_a y masa m_a en uno de sus extremos, en el lado opuesto articula un péndulo con longitud l_p y masa m_p y se considera una masa de balance en la parte superior del péndulo de magnitud M . El ángulo del

péndulo, θ , se ha definido como cero en la posición vertical superior, y positivo, cuando el péndulo se mueve en sentido dextrogiro, el ángulo del brazo horizontal ϕ se ha definido como positivo cuando el brazo se mueve sentido levogiro. Todas las variables mencionadas anteriormente se resumen en la siguiente tabla.

| Variables del Péndulo de Furuta | Significado |
|--|--|
| θ | Ángulo que indica la posición del péndulo. |
| ϕ | Ángulo que indica la posición del brazo. |
| l_a | Longitud del péndulo. |
| l_p | Longitud del brazo. |
| m_a | Masa del brazo. |
| m_p | Masa del péndulo. |
| M | Masa de balance. |
| J | Inercia del actuador (en este caso del motor). |

| Parámetros del Péndulo de Furuta | Significado |
|---|--|
| l_a | Longitud del péndulo. |
| l_p | Longitud del brazo. |
| m_a | Masa del brazo. |
| m_p | Masa del péndulo. |
| M | Masa de balance. |
| J | Inercia del actuador (en este caso del motor). |

2.3. Cinématica del sistema

La ubicación de un punto p en el espacio puede ser descrito mediante un vector posición, como se muestra en la Ec. (2.5) (Mario.Frias y Riveras, 2008).

$$r(r_a, r_p) = [r_x(r_a, r_p), r_y(r_a, r_p), r_z(r_a, r_p)]^T. \quad (2.5)$$

Donde las variables r_a y r_p , son las posiciones radiales de los brazos horizontal y vertical, respectivamente, las cuales son medidas desde los centros de rotación de los cuerpos.

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación Ec. (2.5) se encuentra la ecuación vectorial de velocidad. Ec. (2.6)

$$v(r_a, r_p) = [v_x(r_a, r_p), v_y(r_a, r_p), v_z(r_a, r_p)]^T, \quad (2.6)$$

Realizando una descomposición sobre los ejes coordenados se obtienen las ecuaciones de posición, Ecs. (2.7), (2.8) y (2.9)

$$r_x(r_a, r_p) = r_a \cos \phi - r_p \operatorname{sen} \phi \sin \theta, \quad (2.7)$$

$$r_y(r_a, r_p) = r_a \operatorname{sen} \phi - r_p \cos \phi \operatorname{sen} \theta, \quad (2.8)$$

$$r_z(r_a, r_p) = r_p \cos \theta. \quad (2.9)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de las últimas tres ecuaciones, se obtienen las velocidades correspondientes al sistema en cada eje coordenado, como se observa en las Ecs. (2.10), (2.11) y 2.12,

$$v_x(r_a, r_p) = -r_a \operatorname{sen} \phi \dot{\phi} - r_p \cos \phi \operatorname{sen} \theta \dot{\phi} - r_p \operatorname{sen} \phi \cos \theta \dot{\theta}, \quad (2.10)$$

$$v_y(r_a, r_p) = r_a \cos \phi \dot{\phi} + r_p \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \dot{\phi} - r_p \cos \phi \cos \theta \dot{\theta}, \quad (2.11)$$

$$v_z(r_a, r_p) = -r_p \sin \theta \dot{\theta}. \quad (2.12)$$

Considerando que para obtener la energía cinética es necesario conocer la magnitud de la velocidad total del sistema, en la Ec. (2.13) se encuentra la magnitud total del sistema con sus tres componentes.

$$v^2(r_a, r_p) = v_x^2(r_a, r_p) + v_y^2(r_a, r_p) + v_z^2(r_a, r_p). \quad (2.13)$$

En consecuencia mediante la manipulación algebraica de las Ecs. (2.10), (2.11) y (2.12), y efectuando las respectivas manipulaciones algebraicas, se obtiene la Ec.(1.12) de velocidad.

$$v^2(r_a, r_p) = (r_a^2 + r_p^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \dot{\phi}^2 + 2r_a r_p \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + r_p^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.14)$$

2.4. Análisis de las energías potencial y cinética

Después de obtener la magnitud de la velocidad para el péndulo de Furuta, se puede encontrar la energía total del sistema (planta). En el caso del péndulo de Furuta se divide la energía total en cuatro elementos: energía del centro de rotación, energía de la barra horizontal, energía del brazo vertical (péndulo) y energía de la masa de balance. Las energías se denotan con U y K que son

energía potencial y cinética, respectivamente.

Para obtener la energía potencial y cinética del sistema, se recurre a estudiar los temas de **momento de inercia y ejes paralelos**.

Las Ecs. (2.15) y (2.16) representan la forma para calcular las energías presentes en un sistema físico.

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 dm, \quad (2.15)$$

$$U = g \int r_z dm, \quad (2.16)$$

donde dm es un diferencial de masa y g la constante de gravedad.

Usando las Ecs. (2.15) y (2.16) se pueden obtener los resultados mostrados desde la ecuación hasta la ecuación .

Centro de rotación

Las siglas K_{CR} y U_{CR} significan energía cinética del centro de rotación y energía potencial del centro de rotación, respectivamente.

$$K_{CR} = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2, \quad (2.17)$$

$$U_{CR} = 0, \quad (2.18)$$

La energía potencial gravitacional en el centro de rotación es cero debido a que se encuentra en el origen de coordenadas.

Barra horizontal

Las siglas K_{BH} y U_{BH} significan energía cinética del brazo horizontal y energía potencial del brazo horizontal, respectivamente.

$$K_{BH} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_a l_a^2 \dot{\phi}^2 \right), \quad (2.19)$$

$$U_{BH} = 0, \quad (2.20)$$

La energía potencial gravitacional es cero porque el brazo horizontal se encuentra sujeto al centro de rotación que como ya se mencionó, se encuentra en el origen.

Barra vertical

La sigla K_{BV} , significa energía cinética de la barra vertical.

$$K_{BV} = \frac{1}{2} \left[m_p \left(l_a^2 + \frac{1}{3} l_p^2 \text{sen}^2 \theta \right) \dot{\phi}^2 + m_p l_a l_p \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{1}{3} m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 \right], \quad (2.21)$$

$$U_{BV} = \frac{1}{2} g m_p l_p \cos \theta, \quad (2.22)$$

Barra de masa de balance

La sigla K_{MB} , significa energía cinética de la masa de balance y U_{MB} energía potencial de la masa de balance, respectivamente.

$$K_{MB} = \frac{1}{2} \left[M \left(l_a^2 + l_p^2 \text{sin}^2 \theta \right) \dot{\phi}^2 + 2 M l_a l_p \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + M l_p^2 \dot{\theta}^2 \right] \quad (2.23)$$

$$U_{MB} = M g l_p \cos \theta \quad (2.24)$$

Finalmente, para el cálculo de la energía cinética total se usa $K = K_{CR} + K_{BH} + K_{BV} + K_{MB}$ y para la energía potencial total se usa $U = U_{CR} + U_{BH} + U_{BV} + U_{MB}$, como se observa en las Ecs. (2.25) y (2.26).

$$K = \frac{1}{2} \left[\left(J \left(\frac{1}{3} m_a + m_p + M \right) l_a^2 + \left(\frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \text{sin}^2 \theta \right) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{1}{2} m_p + M \right) l_a l_p \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \left(\frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \dot{\theta}^2 \right] \right], \quad (2.25)$$

$$U = \left(\frac{1}{2} m_p + M \right) g l_p \cos \theta. \quad (2.26)$$

2.5. Obtención de las ecuaciones dinámicas

La dinámica es la parte de la física (específicamente de la mecánica clásica) que describe la evolución en el tiempo de un sistema físico en relación con las causas que provocan los cambios de movimiento. El objetivo de la dinámica es describir los factores capaces de producir alteraciones de un sistema físico, cuantificarlos y plantear ecuaciones de movimiento o ecuaciones de evolución para dicho sistema de operación.

Un sistema mecánico cuya descripción analítica requiere de ecuaciones dife-

renciales por su naturaleza no lineal, multivariable y acoplada de su comportamiento dinámico, ofrece un amplio espectro en la formulación de problemas de control teóricos y prácticos. El modelo dinámico del péndulo de Furuta permite explicar todos los fenómenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica, tales como efectos inerciales, fuerzas centrípedas y de Coriolis, par gravitacional y fricción, los cuales son fenómenos físicos intrínsecos o propios de la naturaleza mecánica del sistema. Según que tan complejo o real se necesita el análisis del comportamiento del sistema, se puede obtener o no en las ecuaciones dinámicas los fenómenos físicos antes mencionados (Beer, 2012)

Para obtener las ecuaciones dinámicas se utilizarán las ecuaciones de *Euler-Lagrange*.

2.5.1. Método de ecuaciones de movimiento de *Euler-Lagrange*

En esta sección se obtiene el modelo dinámico del péndulo de Furuta, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad. El método Euler- Lagrange es un método para obtener el modelo dinámico.

La energía total del sistema está dada por la suma de la energía cinética $k(q, \dot{q})$ más la energía potencial $u(q)$:

$$\varepsilon(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) + u(q), \quad (2.27)$$

donde $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ representan los vectores de posición y velocidad articular, respectivamente. Obsérvese que la energía cinética $K(q, \dot{q})$ tiene una dependencia de la posición y velocidad articular, mientras que la energía potencial $u(q)$ está relacionada con el campo conservativo de la gravedad y por lo tanto únicamente depende de la posición.

El *lagrangiano* $L(q, \dot{q})$ de un mecanismo de n grados de libertad se define como la diferencia entre la energía cinética $K(q, \dot{q})$ y la energía potencial $u(q)$:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - u(q). \quad (2.28)$$

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de un mecanismo de n grados de libertad están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau, \quad (2.29)$$

Donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas; $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^n \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados, donde el i -ésimo par τ_i , se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i , y $v(\dot{q}, f_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de la fricción estática f_e que se encuentra presente en las articulaciones del mismo; $t \in \mathbb{R}^n$, representa el tiempo, $n \in N$ es el número de grados de libertad.

La energía cinética tiene una estructura matemática cuadrática bien definida en función de la velocidad articular:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 M(q) \dot{q}. \quad (2.30)$$

Aquí $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del mecanismo, y es una matriz definida positiva (por lo tanto simétrica). Por otro lado, la energía potencial $u(q)$ no tiene una forma específica. Sin embargo, tiene una dependencia exclusivamente del vector de posición \mathbf{q} , ya que se considera su presencia a campos conservativos, como la fuerza de gravedad.

Al final del desarrollo del método Euler-Lagrange las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas de manera sistemática, independientemente del sistema de referencia coordinado para un mecanismo de n grados de libertad de la Ec. (2.31).

$$\boldsymbol{\tau} = M(q)\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(q)\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(q) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial u(q)}{\partial \mathbf{q}} + f(\dot{\mathbf{q}}, f_e), \quad (2.31)$$

2.6. Modelo dinámico

El modelo dinámico de un mecanismo de n grados de libertad está dado por la Ec. (2.32), que en su forma compacta y con la notación más ampliamente utilizada en el área de robótica se encuentra de la siguiente forma:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q)\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}, f_e) \quad (2.32)$$

- $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares.
- $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares.
- $M(q) \in \mathbb{R}^n$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y positiva definida. El efecto inercial representa el cambio de estado de movimiento del mecanismo.
- $C(q) \in \mathbb{R}^n$ es la matriz de fuerzas centrípedas y de Coriolis. El vector de fuerzas centrípedas son fuerzas radiales, teniendo un signo contrario a las fuerzas centrífugas. La fuerza de Coriolis representa una desviación del movimiento de traslación debido a su componente de rotación.
- $g(q) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, es decir, $g(q) = \frac{\partial u(q)}{\partial q}$ debida a la acción de la gravedad.
- $f(\dot{q}, f_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática (f_e) de cada articulación.

2.7. Ecuaciones dinámicas del péndulo de Furuta

Con el método de Euler - Lagrange explicado anteriormente, el cual permite modelar el sistema en función de una entrada (torque) con la combinación de la energía potencial y cinética con (2.33) y (2.34).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_{\phi}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (2.34)$$

La Ec. (2.34) se iguala a cero por que θ representa el ángulo de inclinación de la barra vertical en este caso el péndulo y en su pivote no se encuentra un actuador (motor). L representa la diferencia entre la energía cinética y potencial, Ec. (2.35). La Ec. (2.36) muestra el Lagrangiano con los términos agrupados según la variable de interés y así tener un mejor orden.

$$L = K - U, \quad (2.35)$$

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(J \left(\frac{1}{3} m_a + m_p + M \right) l_a^2 + \left(\frac{1}{3} m_p + M l_p^2 \text{sen}^2 \theta \right) \dot{\phi}^2 + 2 \left(\frac{1}{2} m_p + M \right) l_a l_p \text{cos} \theta \dot{\phi} \dot{\theta} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \dot{\theta}^2 \right] - \left(\frac{1}{2} m_p + M \right) g l_p \text{cos} \theta. \quad (2.36)$$

Para simplificar la Ec. (2.36) se definen parámetros que auxiliarán en los términos de las constantes propias del sistema físico, Ec. (2.37)

$$\begin{aligned} \alpha &= J + \left(\frac{1}{3} m_a + m_p + M \right) l_a^2, \\ \beta &= \left(\frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2, \\ \gamma &= \left(\frac{1}{2} m_p + M \right) l_a l_p, \\ \delta &= \left(\frac{1}{2} m_p + M \right) g l_p. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Al definir estas nuevas constantes, permitirá simplificar la Ec. (2.36).

$$L = \frac{1}{2} \left[(\alpha + \beta \text{sen}^2 \theta) \dot{\phi}^2 + 2\gamma \text{cos} \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \beta \dot{\theta}^2 \right] - \delta \text{cos} \theta. \quad (2.38)$$

Componente ϕ

En la ecuación del Lagrangiano, Ec. (2.38) no depende el ángulo ϕ , por lo tanto al hacer la parcial con respecto a éste, el resultado nos da cero.

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (2.39)$$

Componente $\dot{\phi}$

Realizando la derivada parcial con respecto a la velocidad angular de la barra horizontal en la Ec. (2.38) se obtiene la Ec. (2.40).

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (\alpha + \beta \text{sen}^2 \theta) \dot{\phi} + \gamma \cos \theta \dot{\theta}. \quad (2.40)$$

Derivando con respecto al tiempo la Ec. (2.40), se obtiene la Ec. (2.41).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = (\alpha + \beta \text{sen}^2 \theta) \ddot{\phi} + 2\beta \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \gamma \cos \theta \ddot{\theta} - \gamma \text{sen} \theta \dot{\theta}^2 \quad (2.41)$$

Componente θ

Al realizar la derivada parcial con respecto a la posición angular, θ de la barra vertical en la Ec. (2.38).

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \beta \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \gamma \text{sen} \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \delta \text{sen} \theta \quad (2.42)$$

Componente $\dot{\theta}$

Realizando la derivada parcial con respecto a la velocidad angular, de la barra vertical del Lagrangiano, Ec. (2.38).

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \beta \dot{\theta} + \gamma \cos \theta \dot{\phi}, \quad (2.43)$$

Pasamos a realizar la derivada parcial con respecto del tiempo de la Ec. (2.42).

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \gamma \cos \theta \ddot{\phi} - \gamma \text{sen} \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \beta \ddot{\theta}. \quad (2.44)$$

Finalmente, al realizar la combinación lineal que se muestra en las Ecs. 2.33 y

2.34; y utilizando los resultados de las Ecs. (2.39), (2.41), (2.42) y (2.44), se llega a las expresiones 2.45 y 2.46 que modelan la dinámica del sistema en términos del torque de entrada.

$$(\alpha + \beta \text{sen}^2 \theta) \ddot{\phi} + 2\beta \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \gamma \cos \theta \ddot{\theta} - \gamma \text{sen} \theta \dot{\theta}^2 = \tau_{\phi}, \quad (2.45)$$

$$\gamma \cos \theta \ddot{\phi} + \beta \ddot{\theta} - \beta \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \delta \text{sen} \theta = 0 \quad (2.46)$$

2.8. Modelado del motor de corriente continua

Los motores de corriente continua son los más comunes y económicos, y se pueden encontrar en la mayoría de los juguetes a pilas, constituidos, por lo general, por dos imanes permanentes fijados en la carcasa y una serie de embobinados de cobre ubicados en el eje del motor, que habitualmente suelen ser tres y a su vez son ampliamente usados a nivel industrial. Los motores de corriente continua permiten un amplio rango de velocidad y pueden proporcionar un alto par-motor con control más sencillo y económico que cualquier motor de corriente alterna. En la actualidad los métodos de control de velocidad se han ido desarrollando considerablemente, los más comunes son el control de velocidad por corriente de campo y el control de velocidad por corriente de armadura, que son técnicas de control no lineal (Motoelectrokris, 2010).

Se utilizarán dos métodos de control: primero por representación de espacio de estados y segundo donde simplificarán las ecuaciones del péndulo.

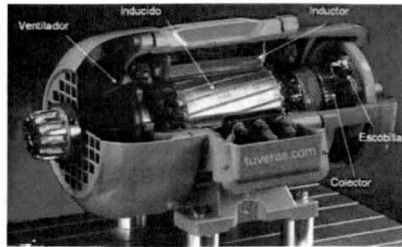


Figura 2.2: Motor de corriente continua. Fuente: motoelectrokris

Teniendo en cuenta que el par de un motor de corriente continua está estrechamente ligado con el voltaje aplicado en las terminales del motor, se hace necesaria la expresión matemática que representa el circuito eléctrico del motor en términos de las variables físicas de corriente, voltaje y velocidad de giro en el eje del motor, como se observar en la Ec. (2.47) (Alvarado, 2012).

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + K_e \dot{\phi} \quad (2.47)$$

donde R es la resistencia interna del motor, L la inductancia y K_e es la constante contra electromotriz.

de la Ec. (2.47) se desprecia el efecto inductivo (por ser muy pequeño), se encuentra un modelo simplificado, y considerando que el par es proporcional a la corriente se obtienen las Ecs. (2.48) y (5.6).

$$i = \frac{1}{R}v - \frac{K_e}{R}\dot{\phi}, \quad (2.48)$$

$$\tau_\phi = K_t i. \quad (2.49)$$

Sustituyendo la Ec. (2.48) en la Ec. (5.6) y considerando que en un motor de corriente continua las constantes K_e y K_t son idénticas en el sistema MKS¹, se obtiene la Ec. 82.50) que relaciona el par del motor con el voltaje aplicado a sus terminales (Motoelectrokris, 2010)

$$\tau_\phi = \frac{K_t}{R}v - \frac{K_t^2}{R}\dot{\phi} \quad (2.50)$$

Una vez obtenida la Ec. (2.48), se integra a la Ec. (2.45) y quedan las ecuaciones de movimiento de la siguiente forma:

$$(\alpha + \beta \text{sen}^2 \theta) \ddot{\phi} + 2\beta \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \gamma \cos \theta \ddot{\theta} - \gamma \text{sen} \theta \dot{\theta}^2 = \tau_\phi = \frac{K_t}{R}v - \frac{K_t^2}{R}\dot{\phi}, \quad (2.51)$$

$$\gamma \cos \theta \ddot{\theta} + \beta \ddot{\theta} - \beta \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \delta \text{sen} \theta = 0 \quad (2.52)$$

¹Metro Kilogramo Segundo

Capítulo 3

Diseño mecánico

El péndulo de Furuta necesita de piezas mecánicas para su realización física; para ello se usa el software *SOLIDWORKS* que permite crear piezas en tercera dimensión (3D) y en dos dimensiones (2D), y así construirlas de acuerdo al prototipo que se diseñe.

3.1. Morfología

La morfología del péndulo de Furuta se refiere a la descripción de componentes, partes y estructura mecánica.

Se utiliza a continuación la analogía con un robot para explicar mejor la morfología del péndulo de Furuta.

Un robot manipulador está compuesto por una serie consecutiva de eslabones y articulaciones para formar una cadena cinemática abierta (Reyes Cortés, 2015). Cada articulación representa la interconexión entre dos eslabones consecutivos.

En el capítulo 1, subsección 1.1.1, se mencionaron características que compartían los robots con el péndulo de Furuta fig. 3.1, esto se da porque el cuál es de uso primordialmente académico para desarrollar conocimientos que ayuden a diseñar y controlar un mecanismo más complejo que son los robots industriales. Las partes del péndulo de Furuta ya se habían mencionado con anterioridad y que a continuación se explican más a detalle.

En general, el péndulo de Furuta y en comparación con un robot industrial está formado por los siguientes elementos descritos:

- **Articulaciones** o uniones formadas por servomotores que permiten la conexión y movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos, en este caso sólo constará con un servomotor en la articulación del brazo. El tipo de

movimiento de las articulaciones del péndulo de Furuta son rotaciones en sus dos articulaciones tanto del brazo como del péndulo. Las unidades de medición asociadas a las articulaciones son radianes o grados.

- **Actuadores:** suministran las señales necesarias a las articulaciones para producir movimiento. Los actuadores que pueden ser empleados son servomotores, elementos neumáticos, eléctricos o hidráulicos. En el apéndice C se encuentra mayor información de los actuadores y de las demás partes del péndulo.
- **Sensores:** Los encargados de proporcionar la información de la posición del brazo y el péndulo, éstos nos pueden dar información de posición y velocidad articular.
- **Sistema mecánico:** consiste en una secuencia de eslabones rígidos de metal conectados en cadena abierta por medio de articulaciones; el péndulo de Furuta está caracterizado por un brazo, un péndulo y una masa de balance que se encuentra en el extremo final del brazo.
- **Consola de control:** El componente o sistema electrónico con la etapa de potencia encargada de suministrar energía al péndulo de Furuta para su movimiento. La capacidad del péndulo de Furuta para realizar su tarea que es tener movimiento tanto del brazo como del péndulo, para llegar a la posición deseada; es dada por un algoritmo de control, el cual permite decidir la ejecución y la acción con respecto a las restricciones impuestas por el sistema mecánico y el medio ambiente.

En la Fig. 3.1 se ilustra las partes morfológicas del robot antes mencionadas.

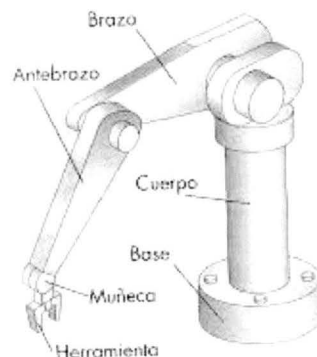


Figura 3.1: Morfología de un brazo robótico. Fuente: platea.pntic

3.2. Diseño mecánico

La parte mecánica del péndulo de Furuta se divide en dos partes, las cuáles son:

1) La parte estructural, la cual se encarga de darle la firmeza y rigidez al sistema mecánico. Si se hace un buen diseño, garantiza una reducción de las vibraciones, logrando que el sistema no introduzca perturbaciones internas. en la Fig. 3.2 se muestra la parte estructural diseñada.

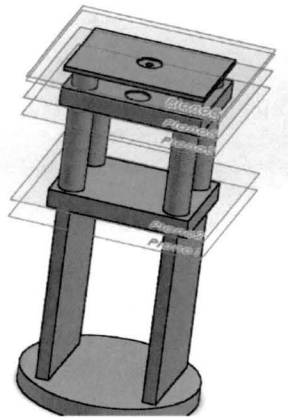


Figura 3.2: Base que sostiene al Péndulo de Furuta

2) La parte móvil que es el péndulo de Furuta que consta del brazo y el péndulo y sus partes que permiten el movimiento entre las piezas (actuadores, barras y articulaciones).

Las siguientes Figs. 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 se diseñarán en *Solidworks*. La Fig. 3.3 es el brazo (barra horizontal) la cual contiene en la parte superior la chumacera, que es la parte donde embona el rodamiento y el rodamiento axial.

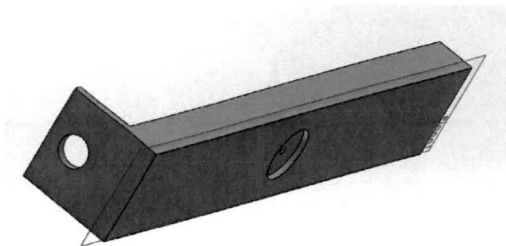


Figura 3.3: Brazo (barra horizontal)

La Fig.3.4 que es la parte que gira en forma circular pero verticalmente y que

se podrá mover en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario a éstas. Contiene una ranura y una masa, que es para otorgarle un equilibrio cuando se desee moverla a la posición deseada; y la ranura en la parte superior, es donde entra la barra que es la unión entre el brazo y el péndulo, la cual se muestra en Fig. 3.4. La Fig. 3.5 es un tubo o eje que se coloca dentro de los rodamientos del brazo y péndulo para unirlos.

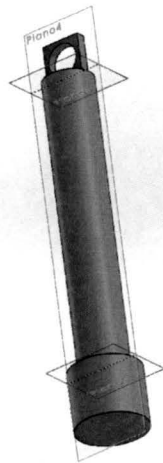


Figura 3.4: Péndulo con masa de balance

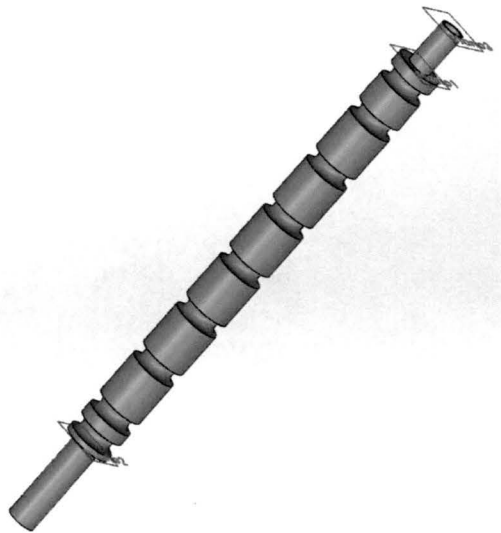


Figura 3.5: Eje que une al péndulo y brazo

Rodamientos

Rodamiento es la denominación de una pieza que, en algunos países, se conoce como rodaje, rolinera, balero, bolillero o rulemán. Se trata de un cojinete: un elemento que sirve como apoyo a un eje y sobre el cual éste gira (?).

El rodamiento axial de rodillos cuyo ángulo de contacto es de 90° a sido concebido para soportar únicamente cargas axiales. El rodamiento axial de bolas de efecto simple soporta la carga axial de un eje en un solo sentido.

Los rodamientos axiales se constituyen de elementos separables: arandela-eje, arandela-alojamiento, jaula de bolas.

Jaula

Los rodamientos axiales están equipados de una jaula de chapa de acero embutido.

Cargas y velocidades

No pueden soportar más que cargas axiales y velocidades reducidas.

Defectos de alineamiento

La prestación de un rodamiento axial está ligada al reparto de la carga sobre toda su circunferencia, por lo que es importante que no haya prácticamente ningún defecto de alineamiento entre la arandela-eje y la arandela-alojamiento (defecto inferior a $0,03^\circ$) (Lara, 2001).

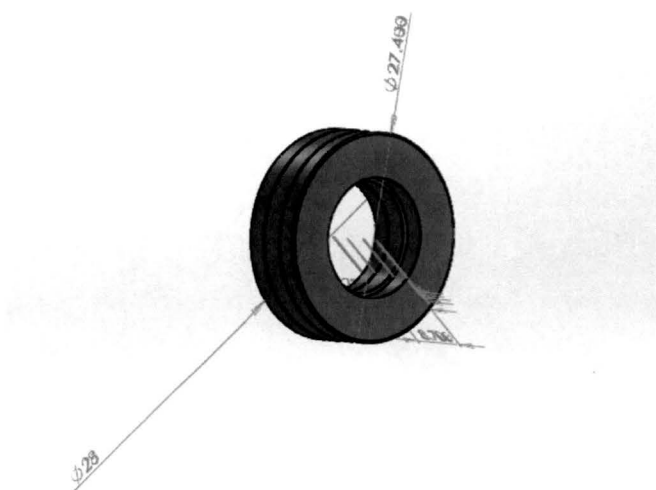


Figura 3.6: Rodamiento AXIAL

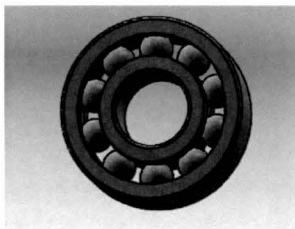


Figura 3.7: Rodamiento ó Balero

Encoder absoluto

Los encoders absolutos asignan a cada posición angular un valor inequívoco, incluso durante varias revoluciones. Incluso después de una caída de tensión el encoder detecta de forma rápida y segura la posición momentánea.

Monovuelta y multivuelta

Los encoders absolutos se dividen en dos tipos: los encoders monovuelta dividen una revolución mecánica en un número determinado de pasos de medición, tras una revolución completa, los valores de medición se repiten, el número máximo de pasos en el caso de los encoders monovuelta es de 8.192. Por el contrario, los encoders multivuelta no sólo registran la posición angular, también cuentan las revoluciones (hasta un máximo de 4.096). La emisión de las señales se efectúa ya sea a través de una interfaz SSI o de un sistema de bus tipo CAN o Profibus.

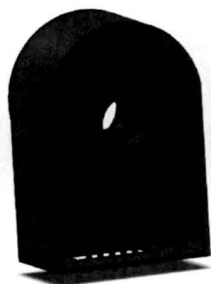


Figura 3.8: Encoder absoluto



Figura 3.9: Diseño en 3D del péndulo de Furuta

Contactador y eje giro

El *contactador* es la pieza con la cual se obtendrá las señales que provienen del encoder del péndulo y este puede ser de hierro o cobre en sus ejes de contacto. Esto es a través de una pieza de giro unida al eje superior del motor y el brazo uniendo los cables provenientes del encoder y cada ranura del el *eje giro* puede utilizarse para cada una de las señales del encoder dependiendo de cuantos pines tenga o necesite para su funcionamiento. La unión entre las cuatro piezas brazo, eje giro, motor y contactador sirve para que el brazo pueda girar los 360 grados libremente sin que se enreden los cables.

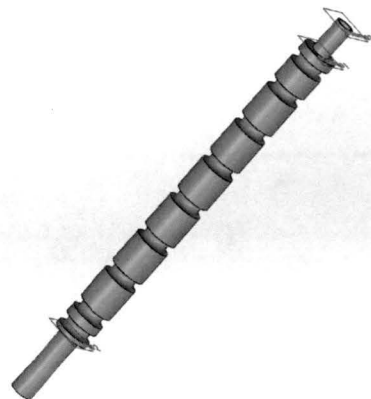


Figura 3.10: Eje giro

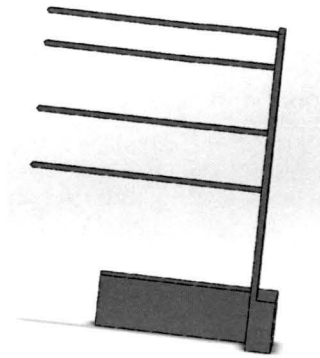


Figura 3.11: Contactor

3.3. Planos de diseño

El módulo de dibujo del software Solidworks permite crear los planos de los modelos de piezas y ensamblajes de forma automática, así como obtener proyecciones ortogonales, vistas estándar, secciones, cortes, perspectivas, acotaciones, lista de materiales, vistas de ensamblajes, entre otras muchas funciones. Los documentos de dibujo están totalmente asociados a las piezas y ensamblajes de forma que cualquier cambio en ellas actualiza los planos. El costo total del diseño físico sin el motor y encoders es de aproximadamente 1100 pesos sin la manufactura que se necesita solo del material.

Consideraciones:

El material y las dimensiones son importantes al momento de construir un objeto. Para el péndulo de Furuta se sugiere el material y se ponen los precios que se investigaron para cada una de las piezas.

- **Péndulo y brazo:** de material de aluminio, por qué es un material ligero y resistente y cumple con la característica de que no se va a romper, calculo que se realizó en el estudio de elemento finito que se obtiene más adelante. El costo es de 600 pesos por una barra de aluminio de diámetro de 3 cm y 50 cm de largo.
- **Base:** el material de la base puede ser de acrílico. El acrílico si se fija en una base solida para que el mecanismo esté firme y tiene un menor costo que el latón de 400 pesos para una con dimensiones de 2.22 x 3.44 mts que nos sirve para diseñar toda la base.
- **Motor y contacto:** el motor debe tener dos ejes, uno superior e inferior para el embone con el eje de giro y el encoder con las dimensiones que

se exponen en su plano que se encuentra en el anexo. El contacto como ya se había mencionado sus ejes de contacto deben de ser de un material conductor como el cobre o alguno otro, e lcostó del cobre por metro es de 2000 pesos por una barra con dimensiones de 1 metro de largo por 2cm de diametro.

Se muestran los planos más referentes del diseño y en el anexo se proporcionan los restantes.

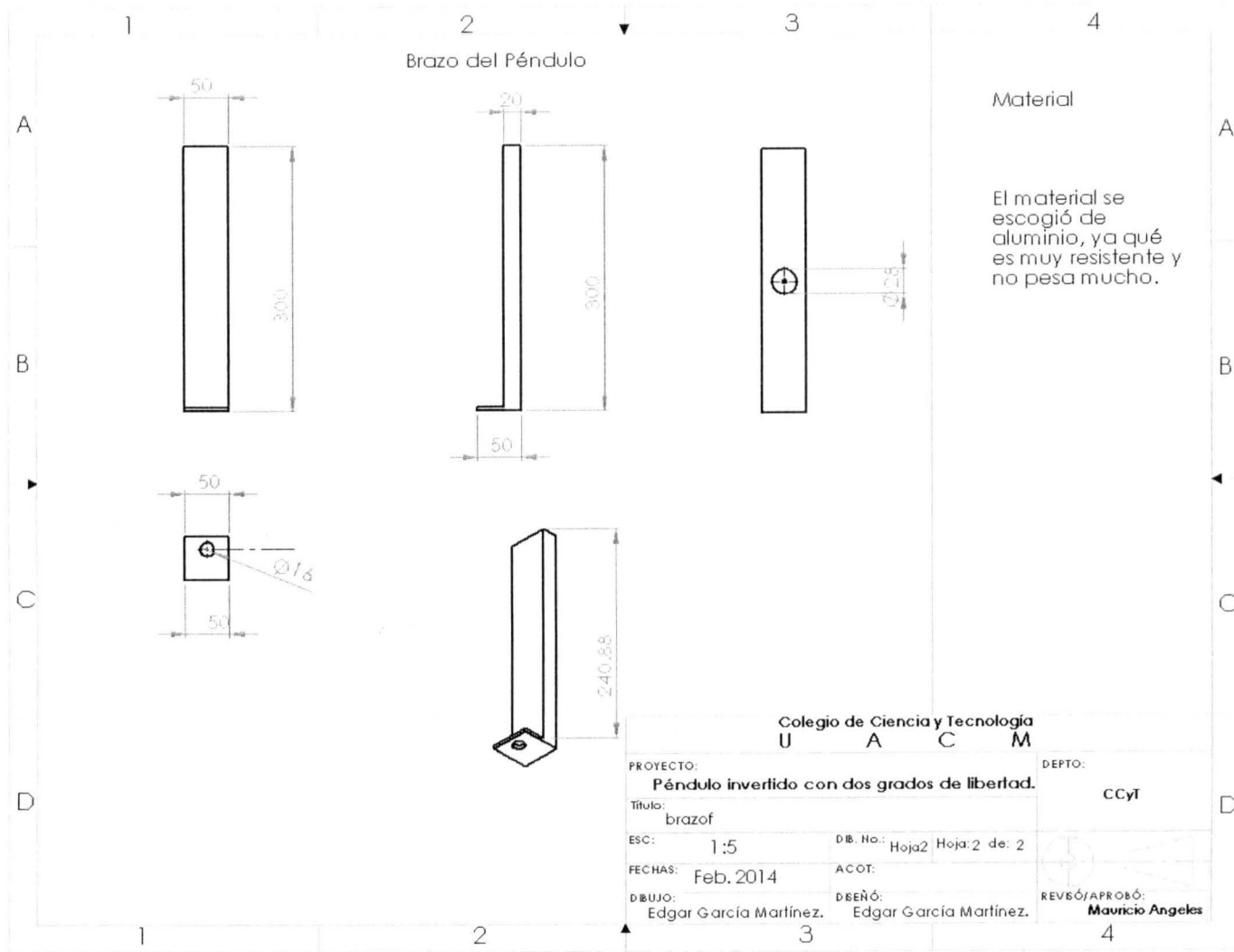


Figura 3.12: brazo del péndulo de Furuta

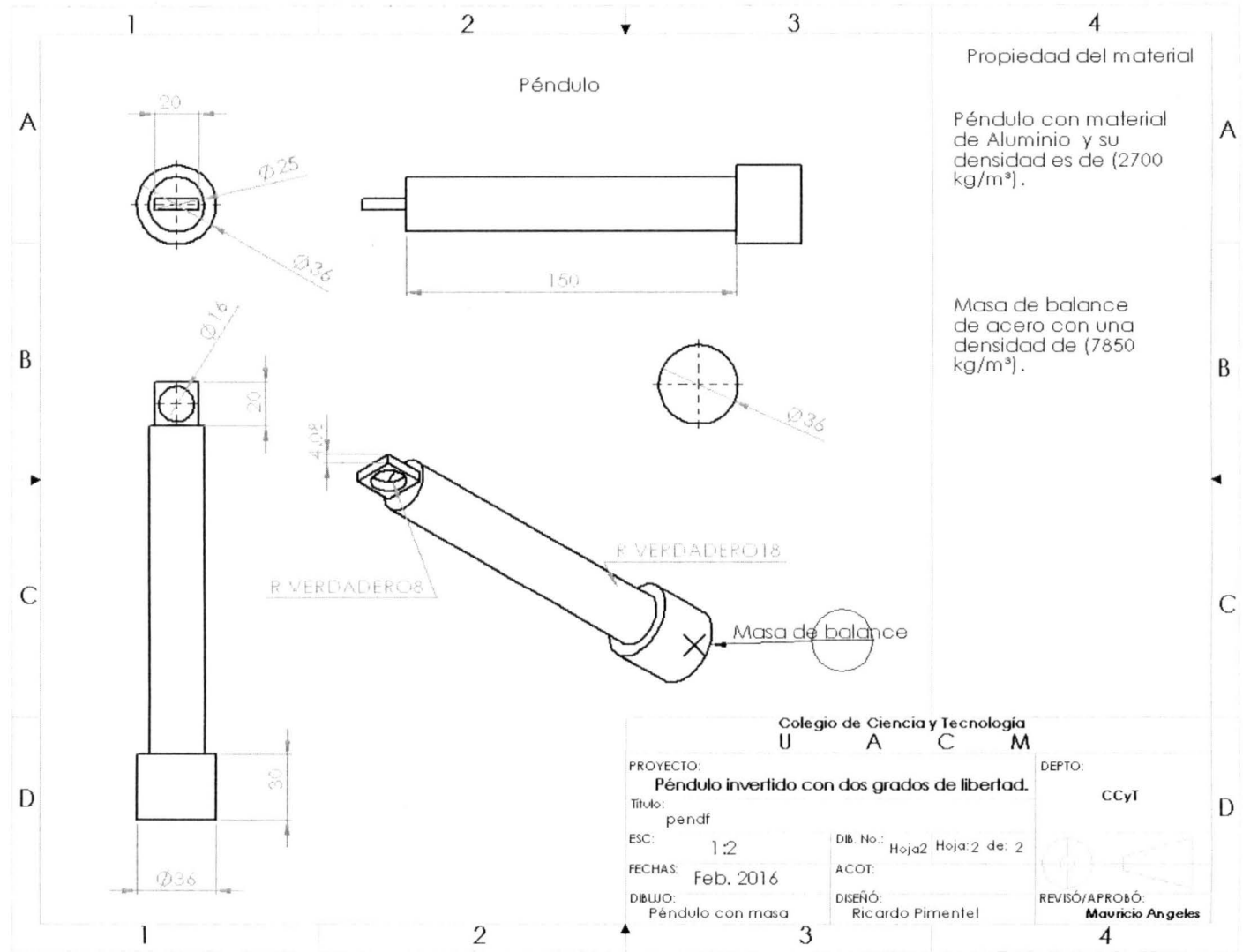


Figura 3.13: Péndulo con masa de balance

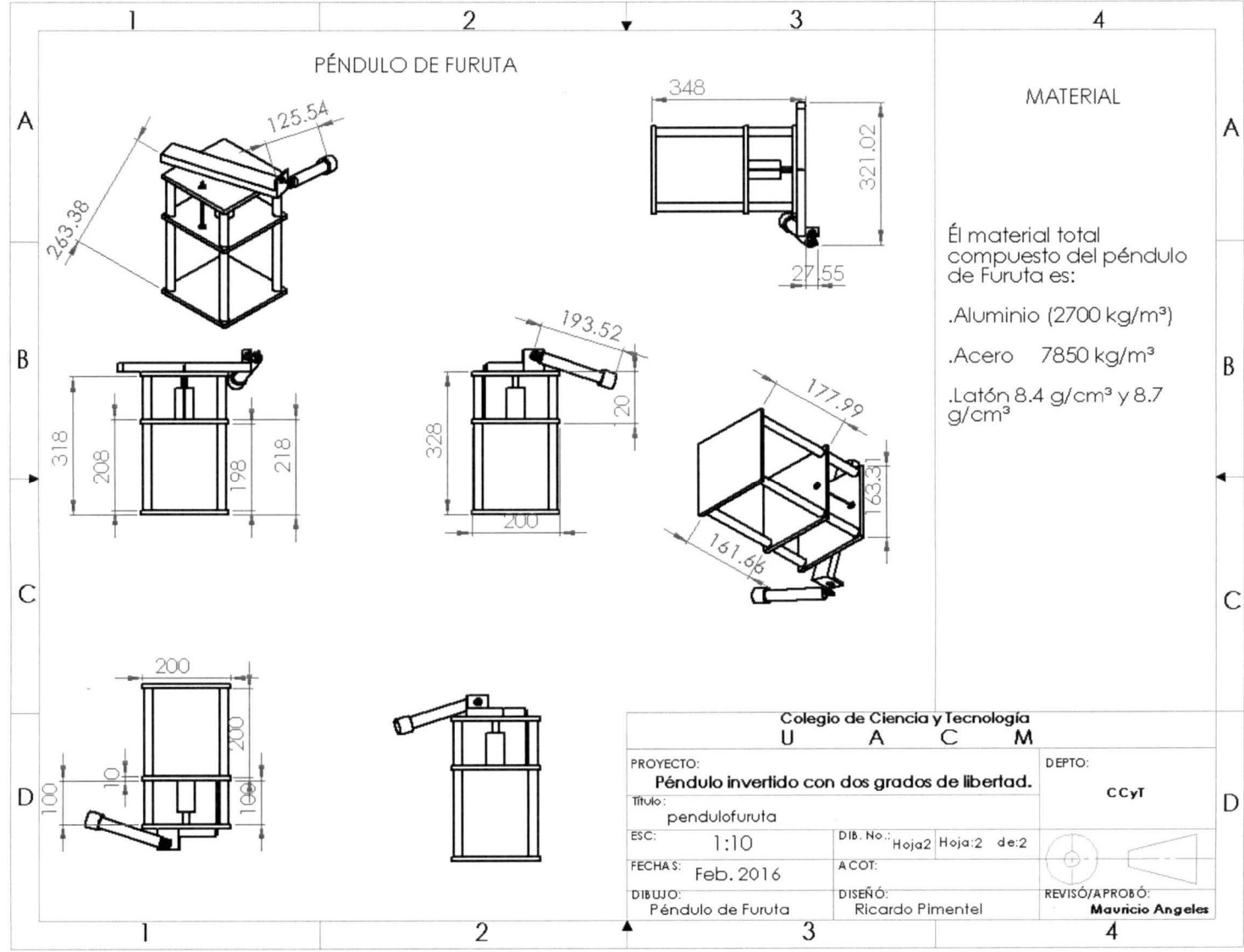


Figura 3.14: Péndulo de Furuta diseño completo

3.4. Análisis por elemento finito

El método de elemento finito, es un método numérico que se basa en calcular desplazamientos, deformaciones y tensiones de los componentes con cargas internas y externas. Para el sistema de estudio, este análisis permitirá verificar si las tensiones y las fuerzas que se encuentran en cada pieza y al final en la estructura completa ya ensamblada, verificar si no causan deformaciones o rupturas en las piezas (Rubio, 2000).

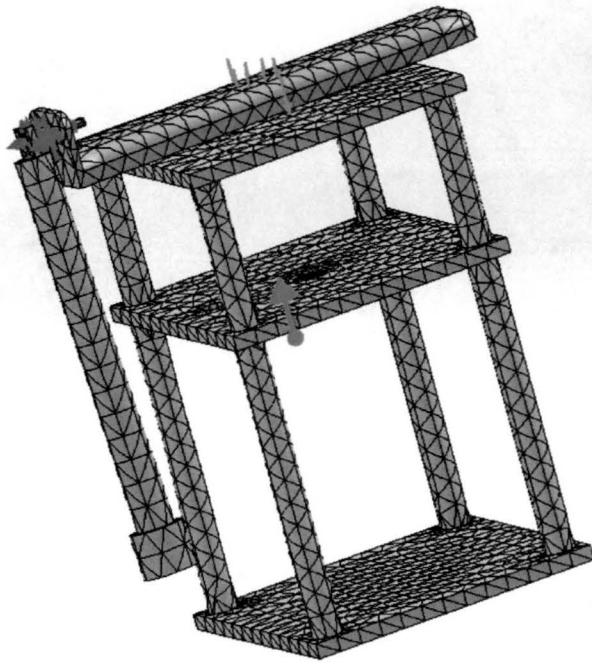


Figura 3.15: Discretización de elementos finitos (malla).

Lo que interesa de las piezas creadas es la deformación máxima que aplican en el estudio estático debido a las fuerzas en las articulaciones (uniones) tanto del péndulo y el brazo. La Fig. 3.15 contiene flechas que indican en donde se ejercen las fuerzas y torsiones. A continuación se muestran las hojas con los resultados del análisis de elemento finito del sistema.

El análisis se realizó de la siguiente forma en Solidworks:

- 1) Se activa el complemento de Solidworks simulation, y se empieza con un nuevo estudio de movimiento.
- 2) Se escogé el tipo de análisis al realizar. En nuestro caso análisis estático.
- 3) Aplicar el material con el que se puede construir.

4) Aplicar los tipos de sujeciones que hay entre los eslabones en nuestro caso de bisagra y rodillo y control deslizante.

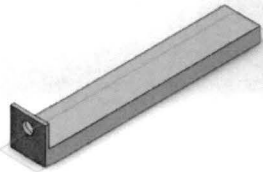
5) Escoger el tipo de cargas que intervienen en el modelo. En el caso del péndulo de furuta y de acuerdo a sus ecuaciones de movimiento es la fricción, torsión presión y gravedad, cada una de éstas tiene un valor que se calcula a mano de acuerdo al peso de las piezas y valor de la gravedad.

6) Crear la malla y después ejecutar estudio.

7) Por ultimo el asesor de resultados nos despliega y guarda los resultados en archivo .doc.



Universidad Autónoma de la Ciudad de México



Descripción
No hay datos

Simulación de brazof

Fecha: jueves, 16 de junio de 2016
Diseñador: Ricardo Israel Pimentel Medina
Nombre de estudio: Análisis estático 1
Tipo de análisis: Análisis estático

Table of Contents

| | |
|--------------------------------|----|
| Descripción | 1 |
| Suposiciones | 3 |
| Información de modelo | 3 |
| Propiedades del estudio | 4 |
| Unidades | 5 |
| Propiedades de material | 5 |
| Cargas y sujeciones..... | 6 |
| Definiciones de conector | 6 |
| Información de contacto | 7 |
| Información de malla | 8 |
| Detalles del sensor | 9 |
| Fuerzas resultantes..... | 10 |
| Vigas | 10 |
| Resultados del estudio..... | 11 |
| Conclusión | 13 |

Figura 3.16: Simulación de elemento finito del brazo.

Propiedades de material


| Referencia de modelo | Propiedades | Componentes |
|---|---|-----------------------------------|
|  | Nombre: 3.3547 (EN-AW 5083) Tipo de modelo: Isotrópico elástico lineal Criterio de error predeterminado: Tensión máxima de von Mises Límite elástico: 2.7e+008 N/m ² Límite de tracción: 3.45e+008 N/m ² Módulo elástico: 7e+010 N/m ² Coefficiente de Poisson: 0.3897 Densidad: 2660 kg/m ³ Módulo cortante: 2.7e+010 N/m ² Coefficiente de dilatación térmica: 2.4e-005 /Kelvin | Sólido 1(Cortar-Extruir4)(brazof) |
| Datos de curva:N/A | | |

Figura 3.17: Propiedades del material.



Figura 3.18: Análisis estático.

En las propiedades del material del brazo el límite elástico es de $2.7 \times 10^4 \frac{N}{m^2}$, mostrado en Fig. 3.17, y en la figura 3.17 se muestra el dato de la distorsión máxima que sufrió el brazo que es de $1.65 \times 10^{-6} \frac{N}{m^2}$ que es más pequeño que el valor del límite elástico antes mencionado lo cuál asegura el brazo con el material de aluminio no tendrá una ruptura.

Las Fig. 3.20 y 3.21 también contienen el análisis estático del péndulo, con un límite elástico de $2.7 \times 10^4 \frac{N}{m^2}$. El análisis mostró distorsión máxima de $3.1405 \times 10^{-7} \frac{N}{m^2}$

que es más pequeño que el valor del límite elástico antes mencionado lo cual asegura que el diseño del péndulo con aluminio no habrá ruptura.

Propiedades de material


| Referencia de modelo | Propiedades | Componentes |
|---|--|---|
|  | Nombre: Aleación 2024 Tipo de modelo: Isotrópico elástico lineal Criterio de error predeterminado: Tensión de von Mises máx. Límite elástico: 7.58291e+007 N/m ² Límite de tracción: 1.86126e+008 N/m ² Módulo elástico: 7.3e+010 N/m ² Coefficiente de Poisson: 0.33 Densidad: 2800 kg/m ³ Módulo cortante: 2.8e+010 N/m ² Coefficiente de dilatación térmica: 2.3e-005 /Kelvin | Sólido 1(Saliente-Extruir1)(embone2-1), Sólido 1(Cortar-Extruir1)(pendf-1) |
| Datos de curva:N/A | | |

Figura 3.20: Propiedades del material.



Figura 3.21: Análisis estático.

3.4.1. Estudio de movimiento

La aplicación **estudio de movimiento** de Solidworks es un conjunto de herramientas para agregar movimiento a los componentes de un ensamblaje y evaluar el correcto funcionamiento del mecanismo. Permite simular efectos con motores rotativos y traslacionales, contactos, gravedad y resortes así como grabar la animación para visualizarla en formato de video AVI. (Gonzalez, 2015)

Las simulaciones físicas realizadas con estudio de movimiento dependen no sólo del tipo de efecto agregado al ensamblaje, también de las Relaciones Geométricas de posición y de la Cinématica de colisiones físicas. Los resultados de las simulaciones son muy útiles no sólo para validar el comportamiento del mecanismo sino también como información para definir las cargas y las condiciones de contorno en los ensayos del comportamiento mecánico con simulación.

La aplicación de estudio de movimiento forma un conjunto de herramientas que permiten agregar movimiento a los componentes de un ensamblaje y visualizar, mediante animación, su movimiento. Estudio de movimiento tiene tres partes para simular, dependiendo de la exactitud y estudio que desees. A continuación se especifica qué puede hacer cada uno de ellos.


- **Animación.** El movimiento creado es conducido por puntos clave o motores y depende de las relaciones de posición del ensamblaje.

- **Movimiento básico.** Genera una simulación realista a partir de las relaciones de posición, resortes, gravedad y motores.

- **Análisis de movimiento.** Es la simulación más real porque tiene en cuenta todos los tipos de movimiento y ofrece resultados numéricos precisos.



Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Company Address Line 2]



Descripción
No hay datos

Simulación de finitopendolo2

Fecha: martes, 9 de agosto de 2016
Diseñador: Ricardo Israel pimentel Medina
Nombre de estudio: Análisis estático 1
Tipo de análisis: Análisis estático

Tabla de contenidos

| | |
|--------------------------------|----|
| Descripción | 1 |
| Suposiciones | 2 |
| Información de modelo | 2 |
| Propiedades de estudio | 3 |
| Unidades | 4 |
| Propiedades de material | 4 |
| Cargas y sujeciones..... | 5 |
| Definiciones de conector | 6 |
| Información de contacto | 6 |
| Información de malla | 7 |
| Detalles del sensor | 8 |
| Fuerzas resultantes..... | 9 |
| Vigas | 9 |
| Resultados del estudio | 10 |
| Conclusión | 13 |



Figura 3.19: Simulación por elemento finito péndulo.

El método a utilizar será el de análisis de movimiento, porque contiene una animación más real y sus partes que permiten interactuar con la fricción entre piezas, motores, gravedad y gráficas que nos proporcionan una idea de lo que está pasando con el movimiento del mecanismo es lo que al final buscamos.

En las Figs. 3.23 y 3.24 se mostrará el comportamiento del movimiento angular del brazo y el péndulo con la fricción entre materiales y componentes.

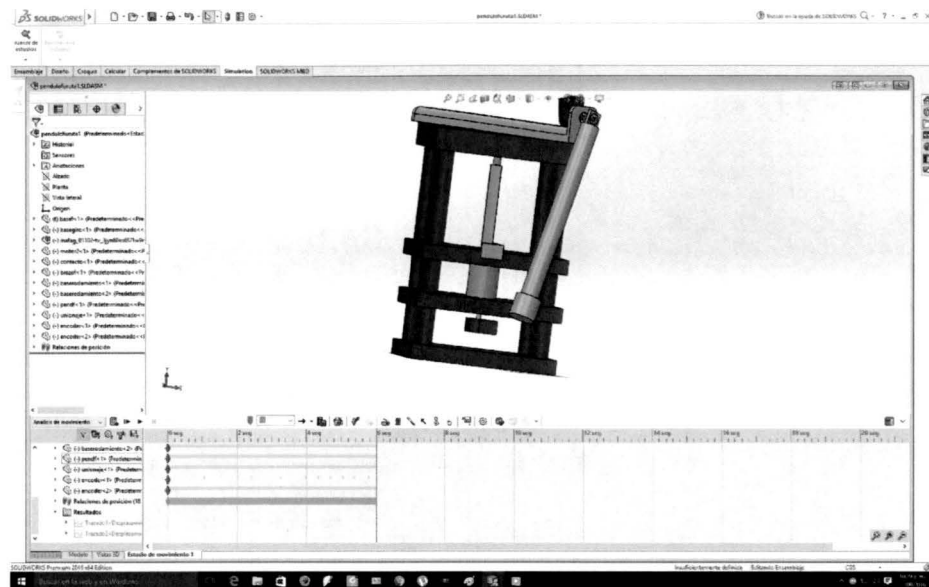


Figura 3.22: Imagen de simulación del péndulo de Furuta en Solidwords

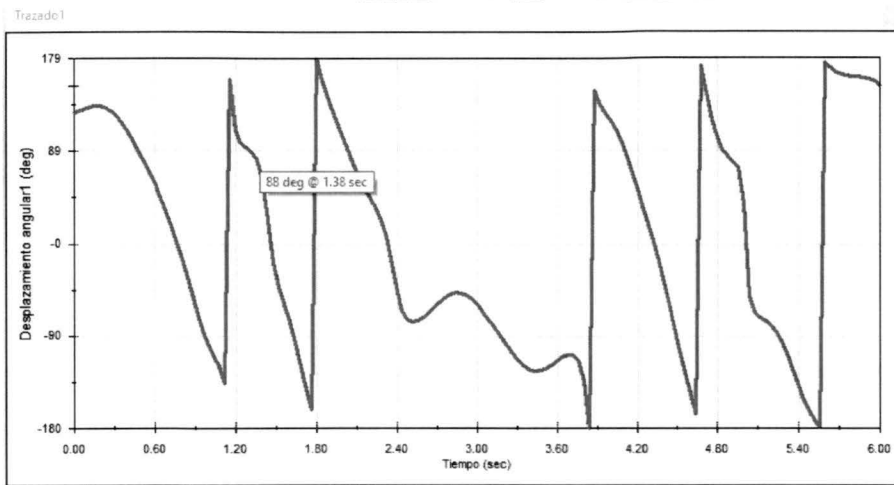


Figura 3.23: Gráfica de posición angular del péndulo

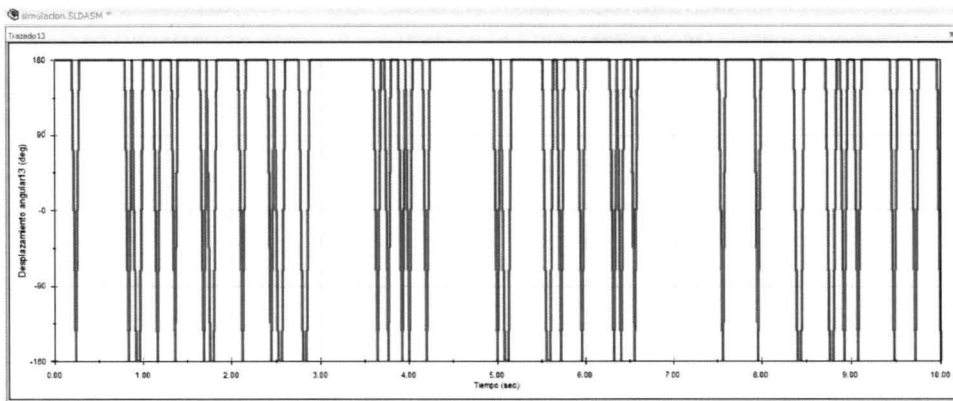


Figura 3.24: Gráfica posición angular del brazo

Capítulo 4

Control del péndulo de Furuta

En este capítulo se emplean los modelos de control para el péndulo Furuta. Como antes se había mencionado el software Matlab, Simulink y el complemento simmechanic se utilizan para aplicar dos métodos de control; el primero por regulador cuadrático lineal y "Swin upz el segundo el control no lineal por lagrangiano.

4.1. Representación en espacio de estados

Con base en el modelo matemático antes presentado del péndulo de Furuta en las Ecs. (2.45) y (2.46) e introduciendo las variables de estado $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, se reescribe el comportamiento de la planta como una serie de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, como se muestra a continuación.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\beta\tau_\phi - \beta\gamma \cos^2 x_3 \text{sen} x_3 x_2^2 - 2\beta^2 \cos x_3 \text{sen} x_3 x_2 x_4 + \beta\gamma \sin x_3 x_4^2 + \gamma\delta \cos x_3 \text{sen} x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \text{sen}^2 x_3}, \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\beta(\alpha + \beta \text{sen}^2 x_3) \cos x_3 \text{sen} x_3 x_2^2 + 2\beta\gamma \cos^2 x_3 \text{sen} x_3 x_2 x_4 - \gamma^2 \cos x_3 \text{sen} x_3 x_4^2}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \text{sen}^2 x_3}$$

$$+ \frac{\delta(\alpha + \beta \sin^2 x_3) \sin x_3 - \gamma \cos x_3 \tau_\phi}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3}. \quad (4.4)$$

4.2. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio en una función no lineal son importantes para linealizar y poder utilizar un método de control lineal.

Los puntos de equilibrio (PE), es un punto tal que si se tiene la función $\dot{x} = f(x)$ evaluada en un punto $x = x^*$, tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x^* , el estado permanece en x^* en todo tiempo futuro.

Un PE puede ser aislado, es decir, no tiene otro PE en la vecindad (alrededor), o puede existir un PE continuo. Cuando el sistema es lineal, tiene la forma conocida $\dot{x} = Ax + Bu$, y el único PE aislado posible es (tomando $u = 0$) $x = 0$.

Las técnicas de análisis y control lineales son mejor conocidas y empleadas en la carrera, y al analizar el sistema péndulo de Furuta que es no lineal, una buena forma para controlarlo es comenzar por linealizalo en sus PE. Sin embargo esto no es suficiente debido a que se pierde información en el proceso y por las siguientes dos razones:

(I) La linealización sólo predice el comportamiento *local*, no sirve para estudiar el comportamiento lejos del punto de operación.

(II) La dinámica de un sistema no lineal es mucho más rica que la de un sistema lineal debido a la presencia de fenómenos no lineales (Guckenheimer and Holmes [1983]).

Para conocer entonces nuestros puntos de equilibrio de la planta, se igualan las ecuaciones de estado no lineales a cero, con lo que se llega al sistema de ecuaciones 4.5.

$$x_2 = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\beta\tau_\phi - \beta\gamma \cos^2 x_3 \operatorname{sen} x_3 x_2^2 - 2\beta^2 \cos x_3 \operatorname{sen} x_3 x_2 x_4 + \beta\gamma \sin x_3 x_4^2 + \gamma\delta \cos x_3 \operatorname{sen} x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \operatorname{sen}^2 x_3} = 0, \quad (4.6)$$

$$x_4 = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\beta(\alpha + \beta \operatorname{sen}^2 x_3) \cos x_3 \operatorname{sen} x_3 x_2^2 + 2\beta\gamma \cos^2 x_3 \operatorname{sen} x_3 x_2 x_4 - \gamma^2 \cos x_3 \operatorname{sen} x_3 x_4^2}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \operatorname{sen}^2 x_3} + \frac{\delta(\alpha + \beta \sin^2 x_3) \sin x_3 - \gamma \cos x_3 \tau_\phi}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} = 0 \quad (4.8)$$

Los puntos de equilibrio del péndulo de Furuta al final realizando las reducciones algebraicas correspondientes, se obtienen el sistema de Ecs. 4.9.

$$x_2 = 0, \quad \cos x_3 \operatorname{sen} x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad (\alpha + \beta \operatorname{sen}^2 x_3) \operatorname{sen} x_3 = 0, \quad (4.9)$$

y las salidas representadas por $h_1(t)$ y $h_2(t)$.

$$h_1(t) = \theta, \quad (4.10)$$

$$h_2(t) = \phi. \quad (4.11)$$

Por lo tanto los puntos de equilibrio al resolver el sistema de ecuaciones son $(x_1, 0, x_3, 0)$, donde $x_1 \in R$ y $x_3 = k\pi$, con $k \in Z$.

4.3. Linealización del sistema dinámico no lineal

Se considera un sistema dinámico no lineal, que se puede representar por un conjunto de ecuaciones diferencial de la forma general en donde f y h son funciones que representan la dinámica del sistema y la salida de éste dados en términos de la variable de estado x y la entrada u .

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.12)$$

$$y(t) = h(x(t)). \quad (4.13)$$

donde f es una función vectorial de $n \times 1$ elementos, expresada en términos de un vector de estado lo cual es una variable de estado de dimensión $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}^p$. La solución $x(t)$ de la Ec. (4.12) corresponde a una curva en el espacio de estado donde t varía de cero hasta infinito, esta curva es conocida como la *trayectoria de estado*.

4.3.1. Interpretación gráfica

La analogía entre una función no lineal de cierta curvatura cuya representación lineal es la línea recta que pasa tangente en uno de sus puntos y las ecuaciones que describen un sistema dinámico no lineal cuya representación lineal se obtiene a partir de las derivadas parciales de la misma función con respecto a sus variables.

Considerando que una determinada función $f(t)$ no lineal en un sistema dinámico, la interpretación gráfica de una linealización es encontrar la forma de la línea tangente en un punto de la función de una curva. Este punto se tomará en cuenta como un punto de operación o el punto de equilibrio. (Rafael y Victor, 2003).

Entonces la tangente en el punto de linealización $t = t_1$ es $f(t_1)$, y la línea que describe el comportamiento del sistema en dicho punto es la tangente a dicho punto. En una vecindad alrededor de este punto se dice que la tangente no cambia, de igual manera sucederá alrededor del punto de operación para el cual se encuentra la linealización del sistema dinámico. La Fig. 4.1 es la interpretación gráfica de lo mencionado anteriormente.

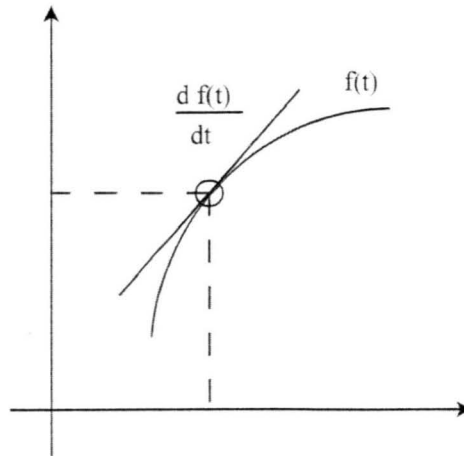


Figura 4.1: Interpretación gráfica de linealización.

4.3.2. Linealización alrededor del punto de equilibrio

La aproximación lineal de un sistema no lineal se hace mediante una expansión en series de Taylor de una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables de estado x . En forma general, esta función no lineal se puede expresar como una representación lineal alrededor de un punto establecido x_0 con expansión en series de Taylor, dada por la Ec. 4.14.

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_0 \delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_0 \delta x + \dots \quad (4.14)$$

Cómo el sistema opera en su punto de equilibrio, se tiene que $x(t) = x(t_0) = X$, $u(t) = U$, $y(t) = h(X) = Y$. El estado del sistema es constante ya que se encuentra en equilibrio.

El sistema se puede representar en forma de ecuaciones de estado como era su forma original derivando con el respecto al tiempo, con las Ecs. (4.15) y (4.16).

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t), \quad x(t_0) = \delta x_0. \quad (4.15)$$

$$\delta y(t) = C \delta x(t). \quad (4.16)$$

donde las matrices A, B y C son:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X,U)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)}, \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X)}. \quad (4.17)$$

y la dimensión de cada matriz o vector de derivadas parciales que se requiere en cada depende de las dimensiones de la variable x y de la variable u .

Entonces para expresar el sistema linealizado se tienen las siguientes ecuaciones.

Si la ecuación de salida $y = g(x, u)$ es no-lineal también $y(t) = y^0 + \delta y$, entonces se tiene que $C(t)\delta x + D(t)\delta u$ es igual a:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|(X,U) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}|(X,U) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}|(X,U) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}|(X,U) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}|(X,U) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}|(X,U) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}|(X,U) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}|(X,U) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}|(X,U) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n}|(X,U) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}|(X,U) & \frac{\partial f_n}{\partial u_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}|(X,U) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La ecuación de salida $y(t) = h(x, u)$ es no lineal también se obtiene su matrix de salida, dada por la Ec. 4.19.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}|(X,U) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}|(X,U) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}|(X,U) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}|(X,U) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial u_1}|(X,U) & \frac{\partial h_n}{\partial u_2}|(X,U) & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial u_n}|(X,U) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Utilizando la Ec. (2.50) y siendo consecuentes con la entrada de interés, al linealizarla y utilizando las ecuaciones anteriores. Se encuentra que las matrices de la relación \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{\delta\gamma}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\gamma K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & -\frac{\delta\alpha}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta K_t^2 \\ 0 \\ \gamma K_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Es de notar que en la matrix \mathbf{C} , las variables de interés son $x_1 = \phi$ y $x_3 = \theta$.

Capítulo 5

Sistemas de control: controlador LQR y Swing Up

5.1. Introduccion

Un sistema de control es aquel que mediante un conjunto de operaciones altera y/o determina el comportamiento de una planta y que en consecuencia permite tener un manejo directo o indirecto de las variables para las cuales se desean unas salidas específicas; en este contexto se puede afirmar que un control automático compara el valor efectivo de la salida del sistema físico con el valor deseado y determina la diferencia o desviación respecto a la señal de referencia y con base en estas mediciones genera una señal de control que permite reducir dicha desviación a cero o a un valor muy próximo a éste, con el fin de tener menor error posible en la señal de salida.

En la actualidad existen muchas acciones de control que coinciden con el objetivo de optimizar procesos y minimizar el costo computacional de los mismos; es así como durante el desarrollo de este capítulo se hará referencia a la técnica conocida como control óptimo cuadrático (Nise, 2009).

Para llegar al objetivo que es controlador el péndulo de Furuta en la posición deseada que será la vertical hacia arriba del péndulo, se empezará con diferentes subtemas que ayudarán a entender más sobre la controlabilidad, observabilidad y estabilidad del sistema.

5.1.1. Controlabilidad

La controlabilidad entre cosas indica la ubicación de los polos del sistema lineal en lazo cerrado $\dot{x} = (A - BK)x + Br(t)$, con $u(t) = -Kx(t)$.

Si se puede hallar una entrada al sistema que tome todas las variables de estado a un estado inicial y un estado final deseado, se dice que el sistema es controlable; de otro forma no es controlable.

La asignación de los polos es una técnica viable de diseño sólo para los sistemas que son controlables. Se realizarán la prueba de controlabilidad para asegurar que el método planteado servirá.

5.1.2. Matriz de controlabilidad

Las pruebas de controlabilidad que se han explorado se pueden emplear para representaciones del sistema que sean de la forma diagonal o paralela con valores característicos distintos.

Para determinar la controlabilidad, o bien, en forma alterna, para diseñar un control para una planta bajo cualquier representación o selección de las variables de estado que se van a controlar por la entrada de planta u , se debe calcular la matriz de controlabilidad C_M .

Una planta de n -ésimo orden cuya ecuación de estado se puede representar por la Ec. (5.2).

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

La planta es completamente controlable, si la matriz de controlabilidad C_M , dada por la Ec. (5.2) es de rango n .

$$C_M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (5.2)$$

5.2. Observabilidad

La capacidad para controlar todas las variables de estado es un requerimiento para el diseño de un controlador. Las ganancias de realimentación de las variables de estado no se pueden diseñar si cualquier variable de estado es no controlable.

Un concepto similar se implementará para crear un diseño de un observador, aunque no implementará, las pruebas que se harán ayudarán a saber más del sistema, y como se había mencionado antes para simplificar las tareas para un futuro si se llega a diseñar físicamente el péndulo de Furuta.

5.2.1. Matriz de observabilidad

Al igual que la controlabilidad, los sistemas representados en forma que no sea diagonalizada no se pueden evaluar para observabilidad por inspección. Determinar la observabilidad para sistemas bajo cualquier representación o selección de las variables de estado, se puede deducir una matriz que debe tener una propiedad particular si todas las variables de estado se observarán a la salida. A continuación expresamos los requisitos para la observabilidad.

Una planta de orden n cuyas ecuaciones de estado y de salida son, respectivamente,

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.3)$$

$$y = Cx(t) \quad (5.4)$$

y es completamente observable si la matriz O_M matriz de observabilidad Ec. (5.5), es de rango n .

$$O_M \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

En la Fig. 5.1, se observa el diagrama de bloques de realimentación de estados para estimar las variables de estados no disponibles: a-observador en lazo abierto, b- observador en lazo cerrado, c- vista con partes desarmadas de un observador

en lazo cerrado, mostrando arreglo de realimentación para reducir el error de estimación de estado variable.

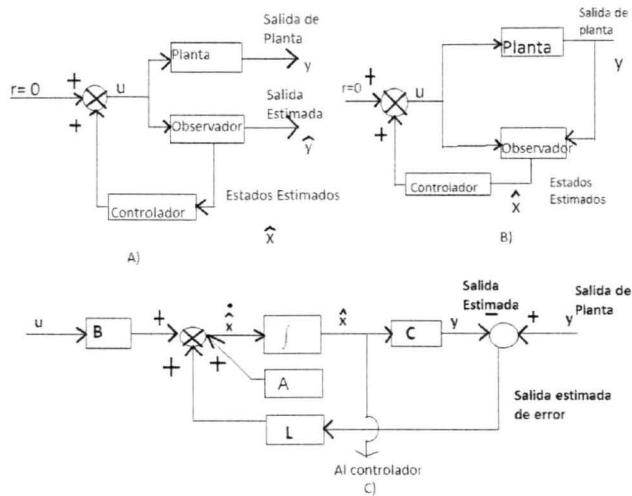


Figura 5.1: Diagrama de bloques de un observador.

5.3. Cálculo de la matriz de controlabilidad y observabilidad

Evaluando los parámetros mostrados en los cuadros 5.1 y 5.2, y los parámetros auxiliares que se definieron en la Ec. (2.37), y las matrices A y B mostradas anteriormente en la Ec. (4.7) se obtiene las matrices mostradas en la Ec. (5.6). Todo esto para obtener los resultados de la matriz de controlabilidad y observabilidad.

| Parámetro | valor |
|-------------------------------------|---------------------|
| Masa brazo horizontal (m_a) | 0,0777kg |
| Masa péndulo (m_p) | 0,01396kg |
| Longitud brazo horizontal (l_a) | 0,084m |
| Longitud péndulo (l_p) | 0,203m |
| Gravedad (g) | 9,8m/s ² |

Cuadro 5.1: Tabla de valores físicos del péndulo de Furuta.

| Parámetro | valor |
|---|--|
| Resistencia (R) | 12,10Ω |
| Inercia (J) | 9,89x10 ⁻⁷ kgm ² |
| Constante de torque (K _t) | 27,40x10 ⁻³ Nm/A |
| Constante de fuerza electromotriz (K _e) | 27,40x10 ⁻³ Vs/rad |

Cuadro 5.2: Tabla de valores físicos del motor de corriente continua.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -,412782 & -102,603297 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & ,342518 & 182,0111525 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15,065037 \\ 0 \\ -12,500657 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Con los valores bien definidos se obtiene la matriz de controlabilidad C_M definida anteriormente en la Ec. (5.2), y después con el comando $rank(C_M)$ en Matlab se obtiene un rango igual a 4. Por lo tanto si $n = 4$ y el rango de C_M también es 4, quiere decir que nuestro sistema es controlable y se puede utilizar el sistema de control.

Al igual que en la matriz de controlabilidad, la matriz de observabilidad O_M de la Ec. (5.5) se aplicó el código $rank(O_M)$ en Matlab, el resultado fué de rango 4; por lo tanto el sistema también es observable.

5.4. Análisis de estabilidad de Lyapunov

En un sistema de control determinado, un aspecto determinante es la estabilidad. Si el sistema es lineal e invariante con el tiempo, existen muchos criterios de estabilidad; entre ellos están el criterio de estabilidad de Nyquist y el criterio de estabilidad de Routh- Horwitz. Sin embargo, si el sistema es no lineal e invariante con el tiempo, tales criterios de estabilidad no se aplican.

El método de Liapunov (también es conocido como método directo de Liapunov) es el método más general para la determinación de la estabilidad de los sistemas no lineales. Las regiones de estabilidad se dividen en 3, las cuáles son: asintóticamente estable, marginalmente estable y estable, y una referencia gráfica se muestra la Fig. 5.2.

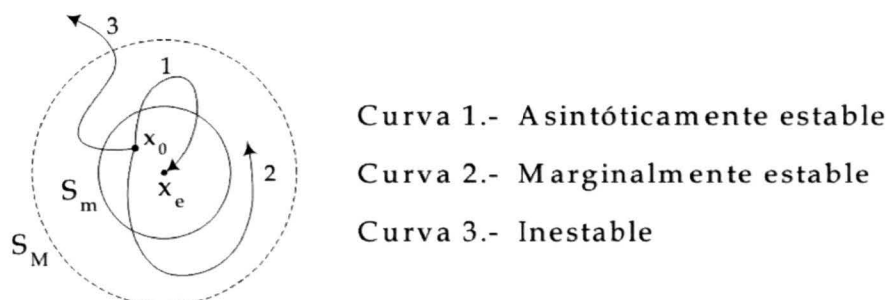


Figura 5.2: Conceptos de estabilidad. Fuente: CENIDET

- Si la trayectoria $x(t)$ permanece siempre dentro de la esfera B_R y converge a 0, el punto de equilibrio es **asintóticamente estable**.

-Si el punto de equilibrio es estable pero no asintóticamente estable, es **marginalmente estable**.

-Si la trayectoria $x(t)$ sale de la esfera B_R , el punto de equilibrio es **inestable**.

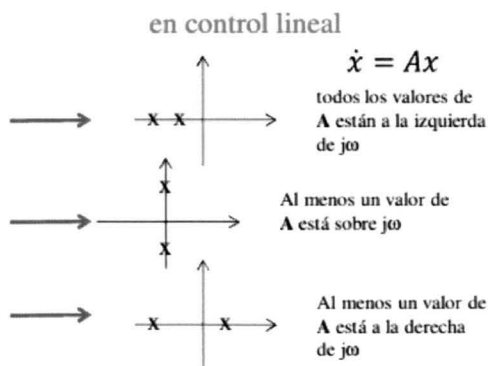


Figura 5.3: Una imagen.

Fuente: Creación no propia

Para la matrix de $(sI - A)$ se calculan los valores propios, para saber que tipo de estabilidad tiene de acuerdo a lo anteriormente mencionado. El resultado fue $0, -0,0458, -10,5405$ y $10,5071$ y por lo tanto tiene un valor del lado derecho del plano imaginario y el sistema es inestable. Tambien se obtuvo la función de transferencia del sistema para cada una de salidas, en este caso ϕ y θ con la Ec. 5.7 y se paso obtener el lugar geométrico de las raíces de los polos y ceros del sistema y verificar la inestabilidad.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (5.7)$$

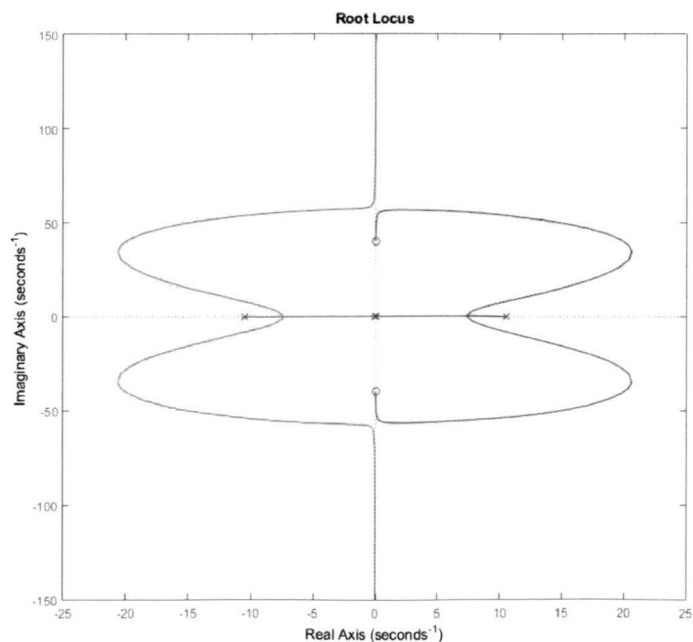


Figura 5.4: Lugar geométrico de las raíces para la salida $y = \theta$

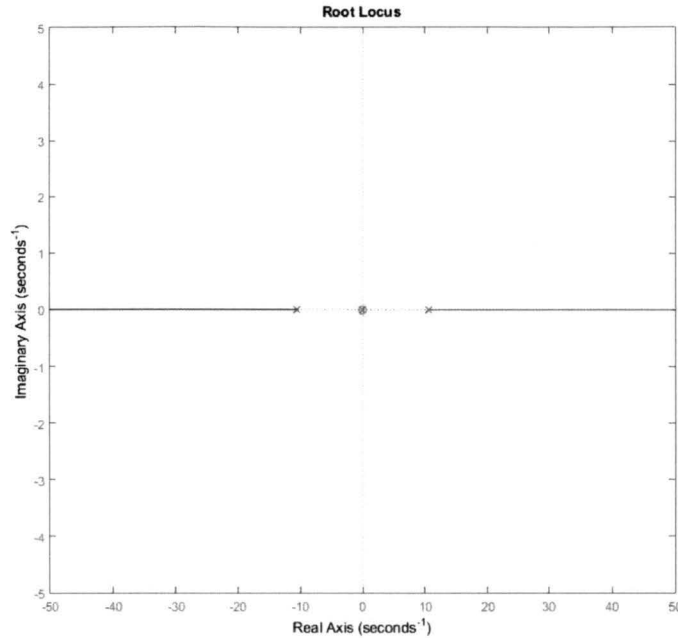


Figura 5.5: Lugar geométrico de las raíces para la salida $y = \phi$

5.5. Regulador cuadrático lineal

EL Regulador cuadrático Lineal (LQR), se usará para desarrollar el control del sistema; el cual tendrá la función de llevar al péndulo de Furuta de una posición $x(0)$ a una posición deseada $x(t)$.

El LQR se formula en el espacio de estados, y su solución es una ley de realimentación de estados de la forma $u = -K X$, donde K es un vector de ganancias óptimas.

Se considera el sistema nominal:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Ax + Bu, \\ y &= CX + DU.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Se tiene la de costo Ec (5.9), y la Ec. (5.10) que es una derivación de está, de donde se obtiene la matriz R , B y P para resolver la Ec. (5.12), de donde se obtiene la matriz de ganancias K .

$$J = \int_0^{\infty} X^T Qx + u^T Ru dt \quad (5.9)$$

$$A^T P + PA - (PB + C^T D)(D^T D)^{-1}(B^T P + D^T C) + C^T C = 0 \quad (5.10)$$

$$K = R^{-1}B^T P. \quad (5.11)$$

$$0 = Q - PBR^{-1}B^T P + PA + A^T P. \quad (5.12)$$

Definiendo $Q = C^T C$, $R = D^T$ y $N = C^T D$ y P debe ser positiva definida y se obtiene de la Ec. (5.11).

Las condiciones para la existencia de una solución única y estabilizante para el control óptimo son:

1. El par (A,B) debe ser estabilizable y se comprueba si la matriz $A - BK$ es estable.

2. $R > 0$ y $Q - NR^{-1}N^T \geq 0$.

3. $(Q - NR^{-1}N^T, A - BR^{-1}N^T)$ no debe poseer modos no observables en el eje imaginario. Usualmente se toma $N = 0$.

Bajo las condiciones anteriores, la solución es una ley lineal de realimentación de estados, donde $u(t)$ depende de K .

$$u(t) = -Kx(t) \quad (5.13)$$

Si $Q = C^T C$, por teoría debe ser una matriz diagonal, se propone $C = I$ (I matriz identidad), C y R es igual a 1 por parámetros de diseño.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 1. \quad (5.14)$$

$$P = \begin{pmatrix} 3,2783 & -0,0066 & -1,0292 & -0,0318 \\ -0,0066 & 0,0018 & 0,0082 & 0,0035 \\ -1,0292 & 0,0082 & 1,5308 & 0,0296 \\ -0,0318 & 0,0035 & 0,0296 & 0,0116 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

$$K = \begin{pmatrix} -1,0000 & 0,7627 & 2,1580 & 1,0292 \end{pmatrix}$$

5.6. "Swing Up" mediante regulación de energía

El diseño de controladores por regulación de energía para un péndulo invertido fue presentado en 1996 por Astrom y Furuta, el cuál mostró como idea fundamental la necesidad de incrementar la energía del sistema hasta alcanzar un nivel suficiente que permita llevar la planta a una región muy cercana al pun-

to de equilibrio (en este caso la posición vertical hacia arriba) y ahí realizar la conmutación de las técnicas de control para efectuar la estabilización del sistema (Carlos, 2009).

Se considera el modelo simplificado del péndulo, como se muestra en la Figura 5.6, donde no se tienen en cuenta los torques de reacción aplicados por el péndulo hacia la barra horizontal (brazo) y se desprecia la fricción existente en el punto de pivote.

Con estas consideraciones es posible estudiar el control de energía de la barra vertical sin incluir la posición y velocidad angular del eje sobre el que se encuentra el actuador (motor), lo que en consecuencia permite obtener un modelo simplificado de segundo orden.

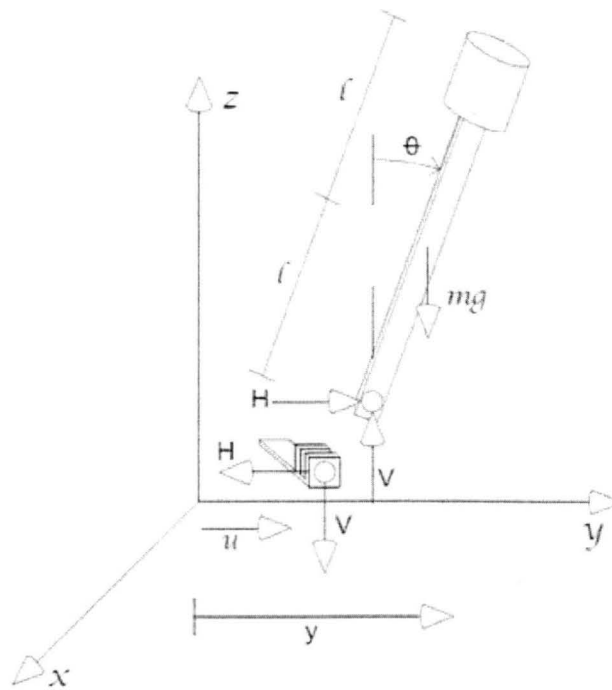


Figura 5.6: Modelo simplificado del péndulo de Furuta para "Swing Up". Fuente: Osorio, 2009.

Realizando una descomposición de las fuerzas de reacción sobre los ejes coordenados considerando como entrada la aceleración aplicada por la barra horizontal u en el punto de pivote y haciendo las operaciones algebraicas correspondientes se obtienen las Ecs. (5.16) y (5.17).

$$\sum F_y = H = m \frac{d^2}{dt^2} (y + L \sin \theta), \quad (5.16)$$

$$\sum F_z = V - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \theta). \quad (5.17)$$

Aplicando la suma de momentos en el centro de masa del péndulo se obtiene la Ec. (5.18)

$$\sum M_{cm} = VL \sin \theta - HL \cos \theta = I \ddot{\theta} \quad (5.18)$$

Con una combinación lineal de las Ecs. (5.16),(5.17) y (5.18), y definiendo como $J_p = I + ml^2$ y $u = \ddot{y}$, se obtiene la ecuación de segundo orden (5.19).

$$J_p \ddot{\theta} + mLu \cos \theta - mgL \sin \theta = 0 \quad (5.19)$$

La expresión de energía para el péndulo, considerando nula la señal de control ($u = 0$) y definiendo como cero la energía potencial del péndulo en la posición vertical superior ($\theta = 0$), se muestra en la Ec. (5.20), donde la energía total está compuesta por la suma de energía cinética y la energía potencial.

$$E = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1). \quad (5.20)$$

Es evidente que para llevar el péndulo a la posición vertical superior es estrictamente necesario llevar la energía a su valor correspondiente en dicho punto, es decir, el valor de θ y $\dot{\theta}$ deben ser cero.

Para realizar el diseño de la técnica de control es necesario conocer la influencia de la señal de control en la energía de la planta. Por lo tanto al diferenciar con respecto al tiempo la ecuación 5.20, se obtiene la expresión 5.21 a partir de la manipulación algebraica de 5.19.

$$\frac{dE}{dt} = J_p \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = mgl \dot{\theta} \cos \theta \quad (5.21)$$

Al observar, es posible inferir que una variación en la señal de control, tendrá repercusión directa sobre la energía de la planta, sin embargo, existen dos condiciones que son ajenas a este comportamiento, y se presentan cuando $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, condiciones para las cuales no existe señal de control que influya la variación energética, pero no son críticos, ya que la planta solo estará allí por un lapso de tiempo muy corto.

Es posible mediante la aplicación de la teoría desarrollada por el matemático y físico Ruso *Aleksander Lyapunov* encontrar una señal de control que permita llevar la posición del péndulo a la de operación deseada, lo que en consecuencia tiene como resultado la ley de control.

$$u = k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta), \quad (5.22)$$

Donde la función $\text{sign}(x)$ representa la dirección que debe ser implementada para llevar la función de energía al valor deseado y k es un parámetro de diseño.

Considerando que la entrada real aplicada al motor es una señal de voltaje, se hace necesario encontrar una relación entre la señal de control u y el torque en función de la señal de alimentación.

La ecuación que relaciona la señal de control con el torque aplicado al motor, es la Ec. (5.23).

$$\tau = \frac{J}{l_a} u, \quad (5.23)$$

Sustituyendo la Ec. (5.22) en la Ec. (5.23), se obtiene:

$$\tau = \frac{J}{l_a} k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (5.24)$$

Igualando la Ec. (5.24) con la Ec. (5.23), se obtiene la Ec. (5.25) que relaciona el voltaje con la energía del péndulo.

$$v = \frac{R}{K_t} \left[\frac{Jk}{l_a} (E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) + \frac{K_t^2}{R} \dot{\varphi} \right]. \quad (5.25)$$

5.7. Controlador no lineal en su forma normal Lagrangiano

El método de control por Lagrangiano, es un método el cual consiste en la energía que se forma para la estabilidad de un sistema mecánico sub actuado. El objetivo es la elección de la ley de control, que dará forma a la energía controlada para la estabilidad del sistema.

Utilizando el método de control por Lagrangiano, una ley de control para estabilizar asintóticamente el sistema en la vertical hacia arriba del péndulo. Se deriva una simplificación del péndulo de Furuta en sus ecuaciones de movimiento, para cumplir determinadas condiciones que se muestran en la figura 5.7.

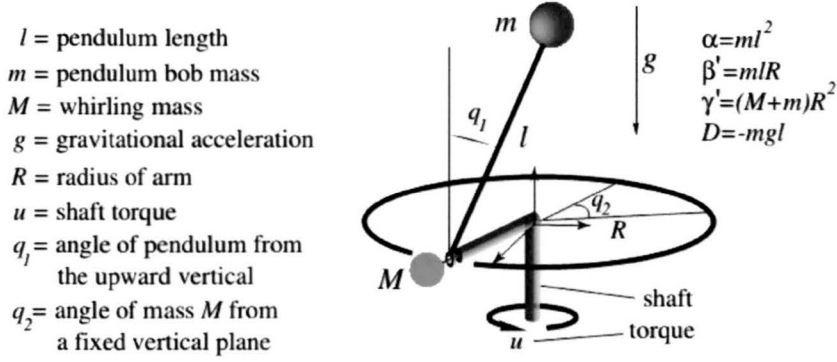


Figura 5.7: Péndulo de Furuta simplificado para el método de control por Lagrangiano. Fuente: APA.

La función de Lagrange para el sistema está dada por la Ec. (5.26) el cual integra la energía cinética menos la potencial.

$$L = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}_1^2 + \beta \cos q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2}(\gamma + \alpha \text{sen}^2 q_1) \dot{q}_2^2 + D \cos q_1. \quad (5.26)$$

Las ecuaciones de movimiento para el péndulo de Furuta en forma matricial y con una entrada $u = u_1 + u_2$, se obtuvieron al aplicar las ecuaciones de Euler Lagrange, en la Ec. (5.26), y se encuentran en la Ec. ()

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \cos q_1 \\ \beta \cos q_1 & \gamma + \alpha \text{sen}^2 q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \text{sen} q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha \text{sen} q_1 \cos q_1 \dot{q}_2^2 \\ -\beta \text{sen} q_1 \dot{q}_1^2 + 2\alpha \text{sen} q_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Quitando los términos de la Ec. (5.27) que se igualan con u_1 , para cancelar términos y transformar la anterior ecuación de la forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \cos q_1 \\ \beta \cos q_1 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \text{sen} q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \text{sen} q_1 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

donde $F_\alpha = \alpha \operatorname{sen} q_1 \cos q_1 \dot{q}_2^2$, y $F_a = -\alpha \operatorname{sen} q_1 \cos q_1 \dot{q}_2$.

La Ec. (5.28) permitirá encontrar las ecuaciones para la estabilidad del péndulo de Furuta. La teoría de estabilidad para sistemas mecánicos sub actuados se realizó mediante el péndulo invertido sobre un carro que se desliza en un riel, y donde se establecieron diferentes ecuaciones que permiten crear la señal de control. La Ec. (5.29) necesita de u_2 , F_α , M_w , M_p , k , B , u_d , ρ y ϵ .

$$u = 2\alpha \sin(q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left(\frac{1}{\beta \cos(q_1)} \right)$$

$$(\gamma + \alpha \sin^2(q_1))(F_\alpha - D \sin(q_1)) - \frac{\det(M_w)}{\det(M_p)} (\gamma(F_\alpha - D \sin(q_1)) - \beta(u_2 + u^d + \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2)) \quad (5.29)$$

$$u_2 = \frac{k\beta \sin q_1 (\alpha \dot{q}_1^2 + D \cos q_1) - \frac{B\epsilon D \gamma^2}{\beta^2} - k\beta F_\alpha \cos q_1}{\alpha - \frac{\beta^2 (k+1) \cos^2 q_1}{\gamma}} \quad (5.30)$$

Las variables $k > 0$, $B = \frac{1}{\rho} (\alpha - \frac{\beta^2 \cos^2 q_1}{\gamma})$, $p_1 = (k + \frac{\rho-1}{\rho} \frac{\beta}{\gamma}) 0$, $\rho < 0$ y $\epsilon > 0$ son variables que al final se les da un valor para poder sintonizar el controlador. La variable $u^d = c\gamma(\dot{q}_2 + p_1 \cos q_1 \dot{q}_1)$ con $c > 0$, M_w y M_p son las matrices del lagrangiano de las Ecs. de (5.27) y (5.28) de movimiento respectivamente.

Capítulo 6

Simulación del control del péndulo de Furuta

Utilizando *Simulink* que permite verificar el comportamiento del péndulo de Furuta y su grafica de la respuesta aparecen las Figs. 6.1 y 6.2 al agregarle los bloques de control que se diseñaron en el capitulo anterior. A continuación se muestra el digrama de que incorporará la planta y las gráficas de posición del brazo y el péndulo.

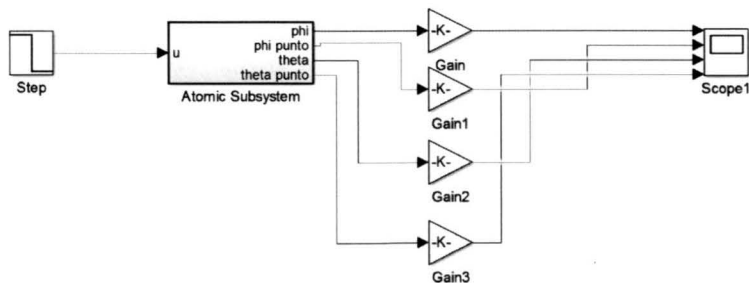


Figura 6.1: Diagrama de bloques del modelado del péndulo de Furuta.

En la Fig. 6.2 muestra la respuesta del comportamiento a un escalón unitario que ejerce un torque de $1Nm$, donde el eje vertical es la posición en grados y el eje horizontal el tiempo.

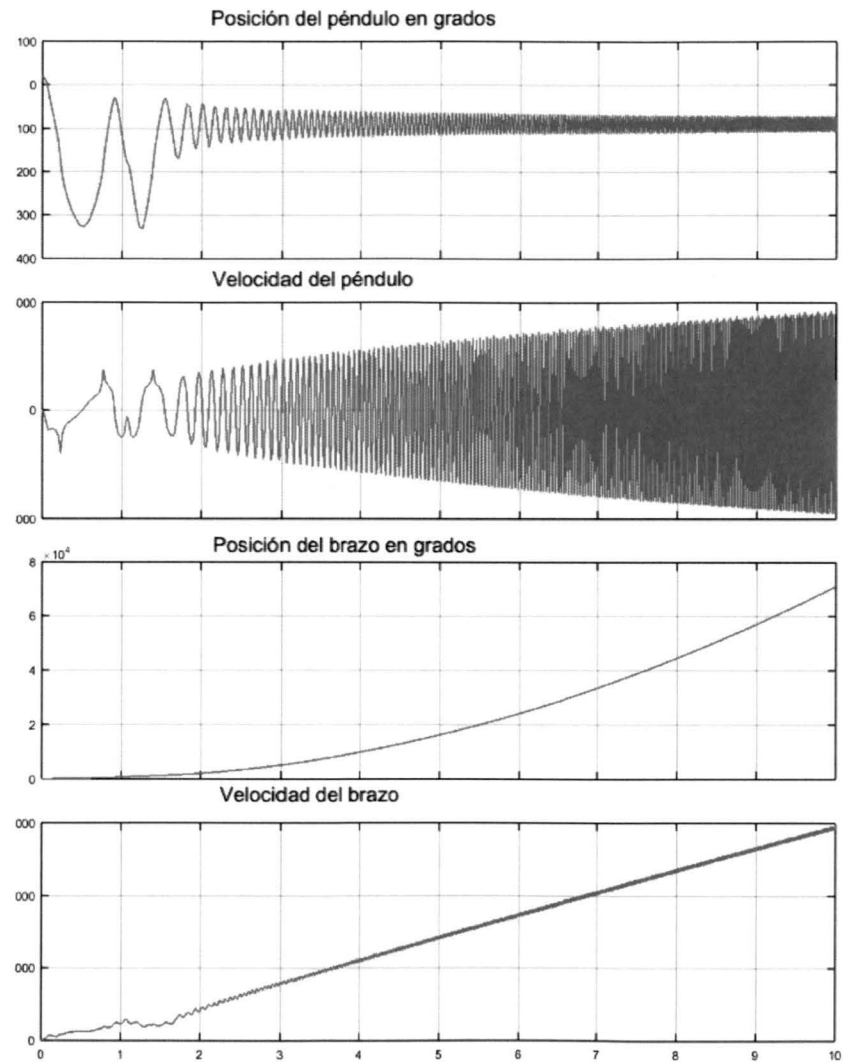


Figura 6.2: Gráfica de la respuesta con control del brazo.

6.1. Simulación del control Lineal

En la Fig. 6.3 se encuentra el diagrama de bloques donde se encuentra el control LQR y el Swing Up, en donde cada uno de ellos responde de acuerdo a la posición del péndulo. la figura 6.4 muestra la respuesta al control lineal del péndulo de Furuta donde la posición que del péndulo debé llegar a cero grados.

Las Figs. 6.3 y 6.3 muestran los bloques de traslado de Solidworks a Simulink para hacer el diseño de planta de acuerdo al diseño CAD. Obteniendo la identificación de la planta e incluyendo el bloque de control de la Fig. 6.3

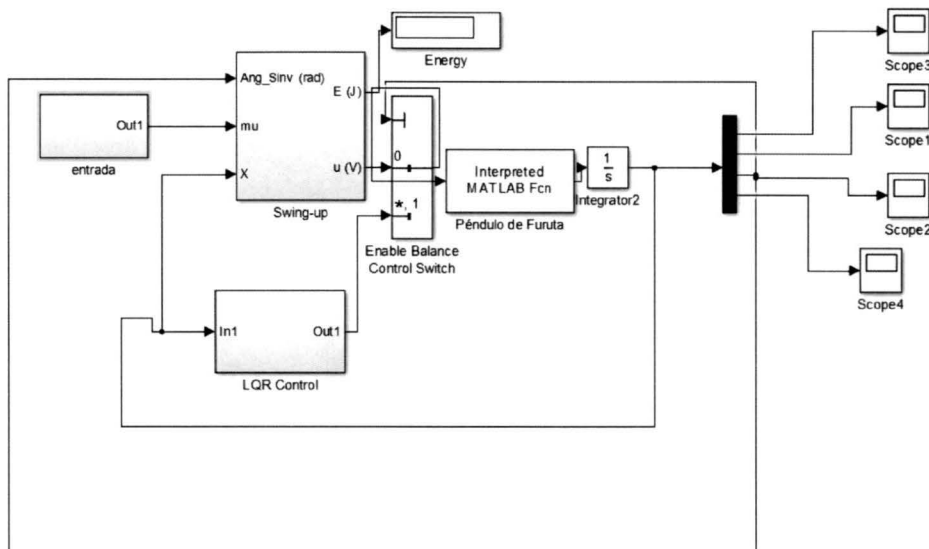


Figura 6.3: Diagrama de bloques del modelado del péndulo de Furuta.

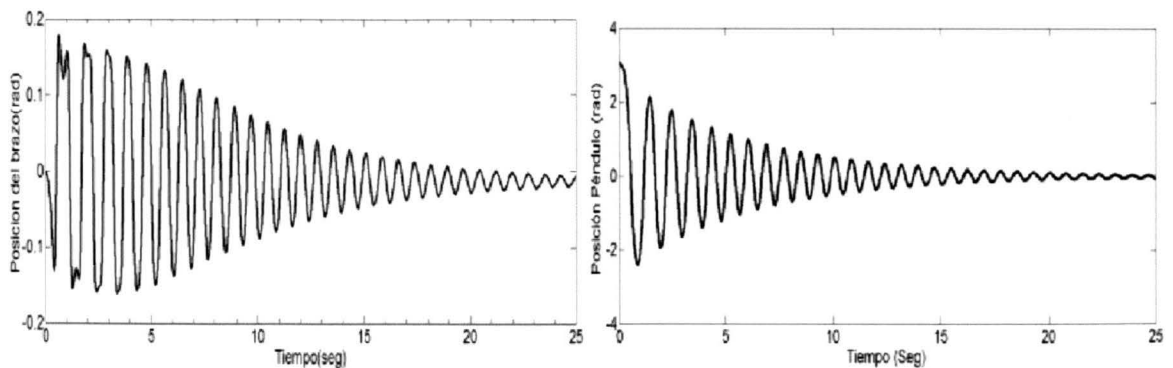


Figura 6.4: Respuestas del péndulo de furuta con control lineal.

Las Figs. 6.5 y 6.8 muestran los bloques de traslado de Solidworks a Simulink para hacer el diseño de planta de acuerdo al diseño CAD. Obteniendo la identi-

ficación de la planta, e incluyendo el bloque de control de la Fig. ??, se obtienen las respuestas de control y el brazo mostradas en las Figs. ?? y 6.3.

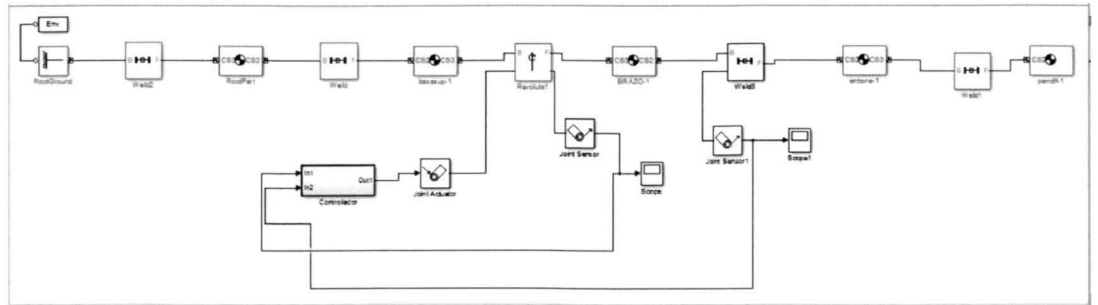


Figura 6.5: Diagrama de bloques con simmechanics y Solidworks.

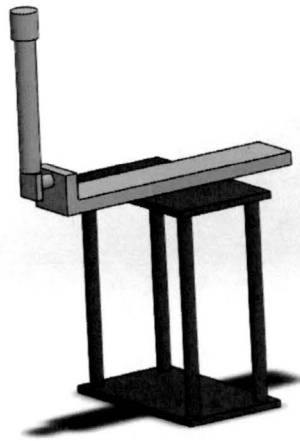


Figura 6.6: Figura 3D del péndulo de Furuta a través de Matlab y Solidworks.

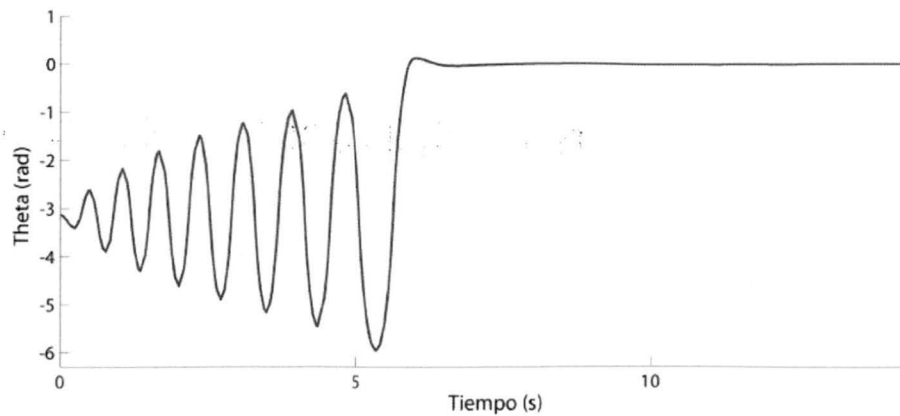


Figura 6.7: Respuesta de control del péndulo con modelo de planta diseñada en Solidworks.

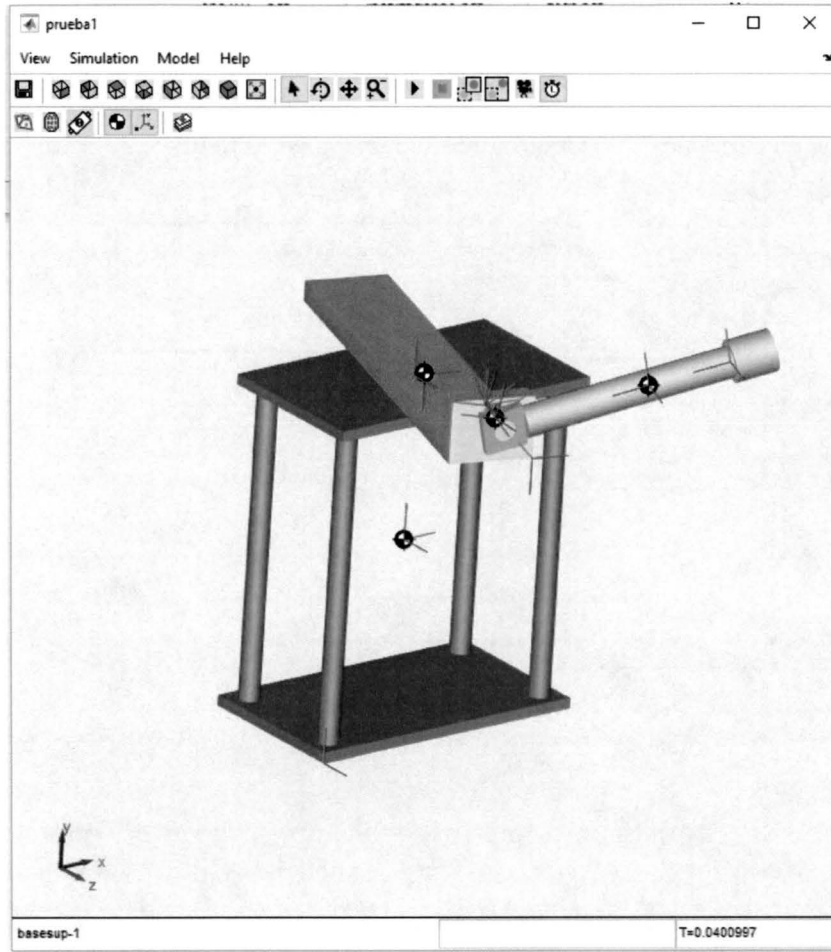


Figura 6.8: Respuesta de control del brazo con modelo de planta diseñada en Solidworks.

BIBLIOTECA UACM

6.2. Simulación del controlador no lineal

Al igual que el controlador lineal el controlador no-lineal tiene funciones contenidas en digramas de bloques que se muestran en la figura 6.9.

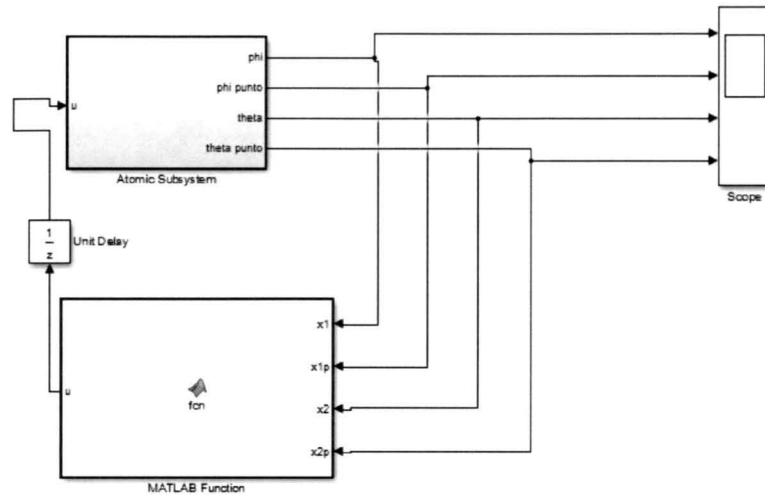


Figura 6.9: Diagrama de bloques del control no-lineal.

Utilizando los mismos parámetros de masa y longitud del control lineal y agregando $k = 25$, $\rho = -0,02$, $c = 0,015$, $\epsilon = 0,00001$ y con las condiciones iniciales de posición del péndulo en -0.81 radianes y del brazo en 0.37 y sus velocidades nulas. Al realizar la simulación se obtienen las gráficas de posición mostradas en la Fig. 6.10 con el eje vertical dado en radianes y el eje horizontal en tiempo.

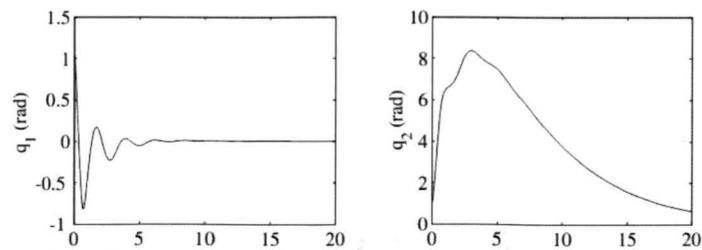


Figura 6.10: Gráficas de la respuesta de la posición del péndulo y brazo con un control no-lineal.

6.3. Comparación de resultados

Al comparar los resultados se debe hablar de la diferencia de cada controlador; para ello recordemos que el control lineal tiene un proceso más tardado pues se hicieron procedimientos y cálculos para linealizar la ecuación de movimiento se

obtuvo después de realizar las ecuaciones de Euler-Lagrange y que al final cuando se controla la planta linealizada actúan dos controladores en acción el LQR y "Swim-up".

El controlador no lineal es una ley de control de estabilización que se formula en sistemas sub actuados mecánicos y más en general sistemas que tienen girán sobre un plano, y en donde se utilizan las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para realizar el control. Es un método donde ya están formuladas las ecuaciones de control que contienen variables de entrada que proponen de acuerdo con las restricciones que se mencionaron y su principal función es la de sintonizar el control y así obtener el resultado deseado utilizando la planta no lineal, sin necesidad de linealizar en los puntos de equilibrio. Las definiciones que a continuación se presentan son parte de la respuesta del sistema con o sin control.

- **Respuesta transitoria** es la parte de la respuesta de un sistema que se presenta cuando hay un cambio en la entrada y desaparece después de un breve intervalo.
- **respuesta en estado estable** es la respuesta que permanece después del estado transitorio.
- **Constante de tiempo** es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 63,2% de su cambio total.
- **tiempo de levantamiento** es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90 por ciento de su valor final.
- **Sobrepaso máximo** es el valor pico máximo de la curva de respuesta.
- **Tiempo de asentamiento** es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final (por lo general 2%) y permanezca dentro de él.

La siguiente tabla contiene resultados numéricos que ayudan a comprender más la diferencia entre cada controlador.

| Control | Tiempo de respuesta [seg] | Tiempo de asentamiento [seg] | Máximo Sobrepaso [%] | Error en Estado estable [radianes] |
|-------------------|---------------------------|------------------------------|----------------------|------------------------------------|
| Control lineal | 14.2 | 22.3 | 21 | .001 |
| Control no lineal | 7 | 7 | 15 | .0001 |

Figura 6.11: Tabla de valores de la respuesta del péndulo de Furuta.

Capítulo 7

Conclusiones

Se desarrolló un modelo matemático del péndulo invertido rotacional considerando fricciones entre las superficies de contacto y sin fricción, se obtiene un modelo de espacio de estados con base en las ecuaciones que definen la dinámica global del sistema alrededor del punto de operación en la posición vertical superior, y se presenta un modelo de energía simplificado para realizar un controlador de Swing Up basado en funciones de energía y un modelo dinámico simplificado para obtener las ecuaciones necesarias para el control.

La técnica de control por realimentación de las variables de estado empleando un regulador lineal óptimo con criterio cuadrático (LQR) adaptado para seguimiento de referencia mostró ser eficiente y capaz de realizar con éxito la tarea de control sin grandes esfuerzos en la señal de control.

Las técnicas de control que se diseñaron fueron a partir de un modelo lineal y después se implementó en el modelo no lineal para ver si funcionaba y resultó en un correcto funcionamiento.

Se implementó el diseño mecánico para obtener los planos en 2D del péndulo de Furuta y así tener la opción en un futuro de implementarlo físicamente. También se realizó una simulación de movimiento en 3D, para visualizar el comportamiento del péndulo de furuta con el programa Solidworks.

La integración de dos controladores de diferente naturaleza para formar un controlador global de características híbridas muestra ser una alternativa exitosa y eficiente para el control de sistemas dinámicos no lineales, implementada anteriormente por Furuta y que permitió controlar el sistema.

El diseño de un controlador no lineal presentó una respuesta más eficaz en comparación al control lineal.

Apéndice A

Planos de cada pieza del péndulo de Furuta

Los planos que se otorgan tienen las medidas necesarias y el formato adecuado para realizar las piezas físicamente y el material propuesto es aluminio para las piezas del péndulo de Furuta, y para la base o soporte puede ser de acrílico montado sobre una mesa o superficie plana para que no tenga vibraciones, si se hace de latón o de algún otro metal debe ser de un peso significativo para que tenga una firmeza que permita hacer girar al brazo del péndulo de Furuta sin que se caiga.

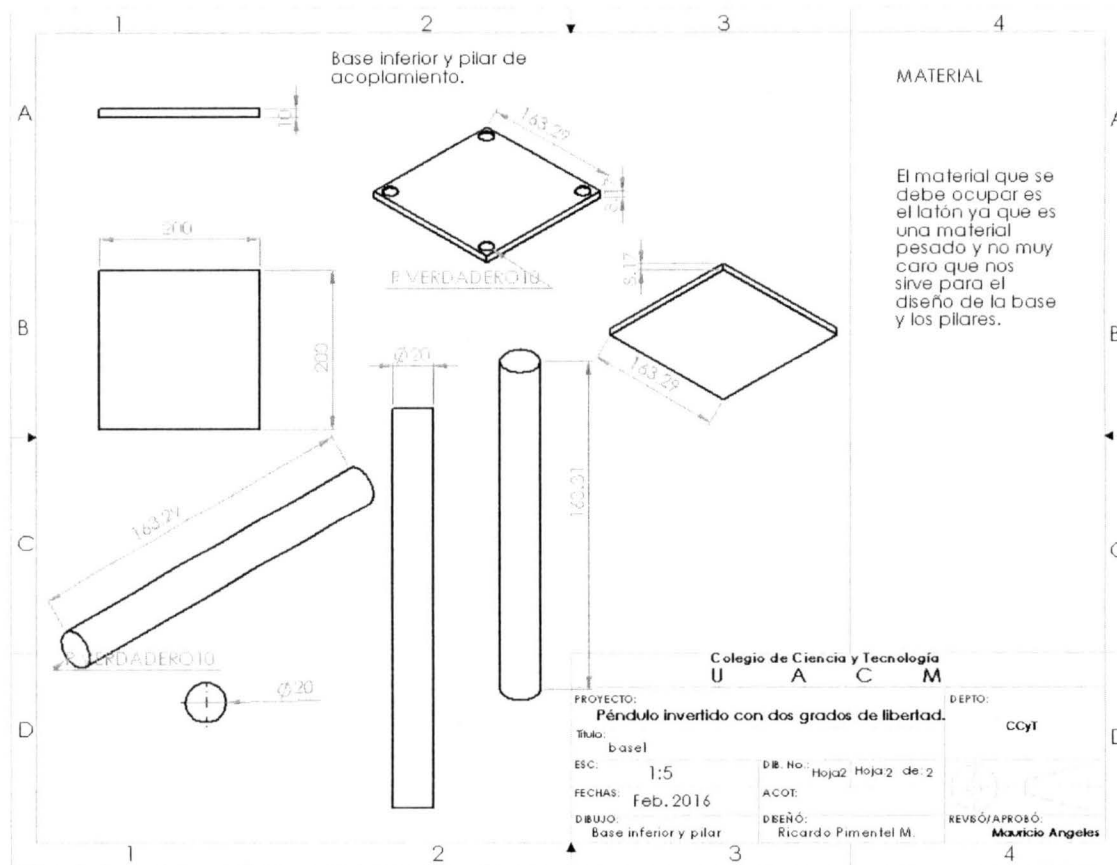


Figura A.1: Pilar y base inferior

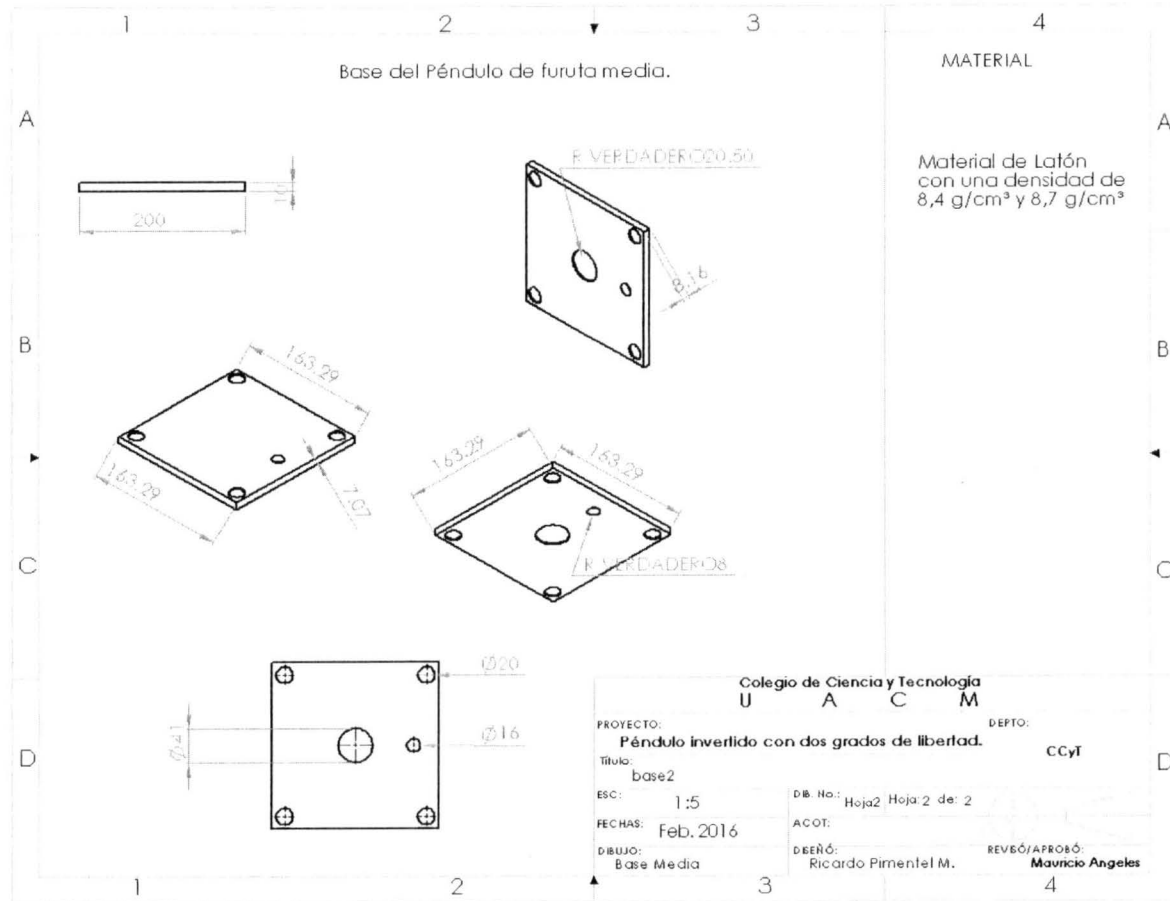


Figura A.2: Base media

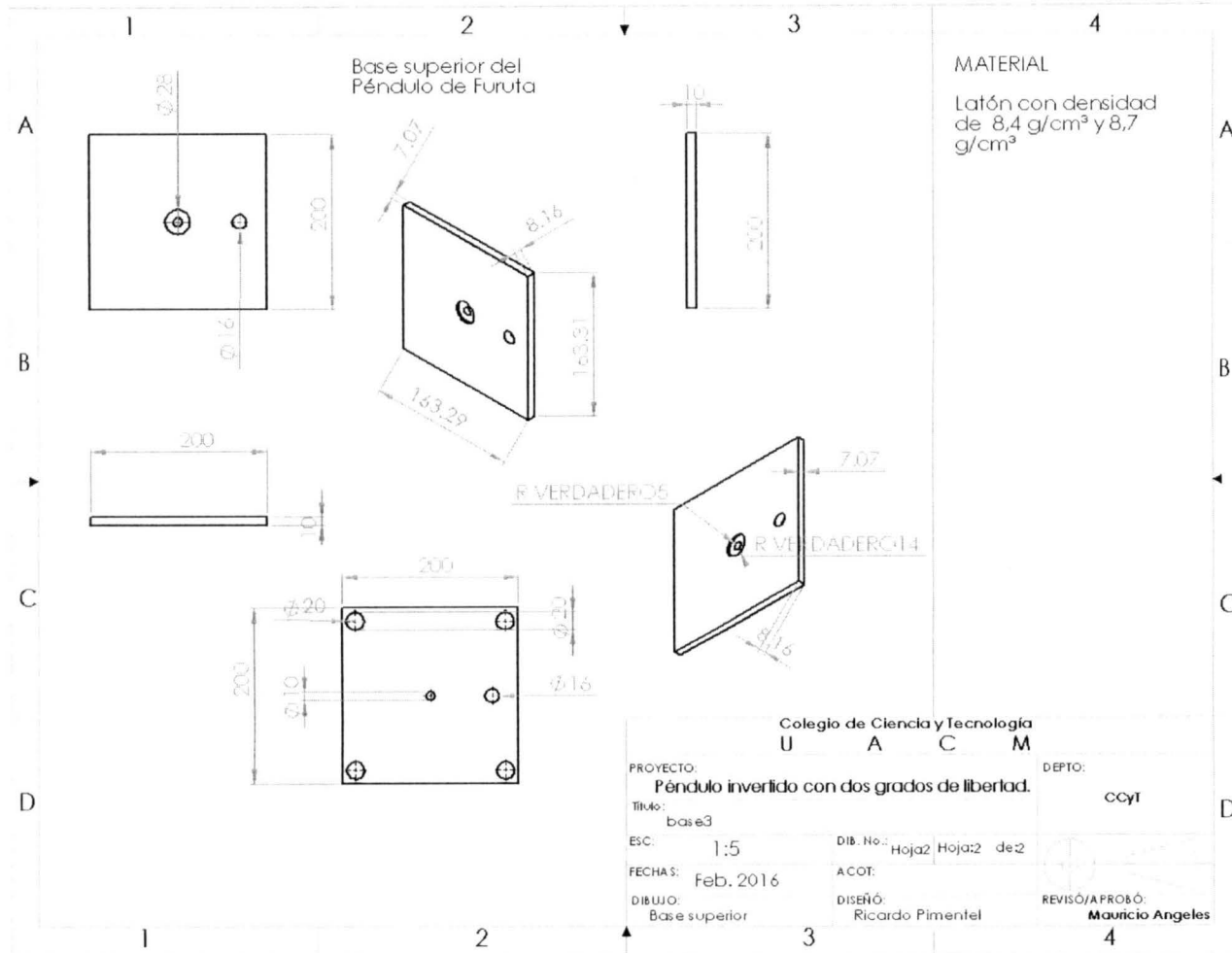


Figura A.3: Base 3

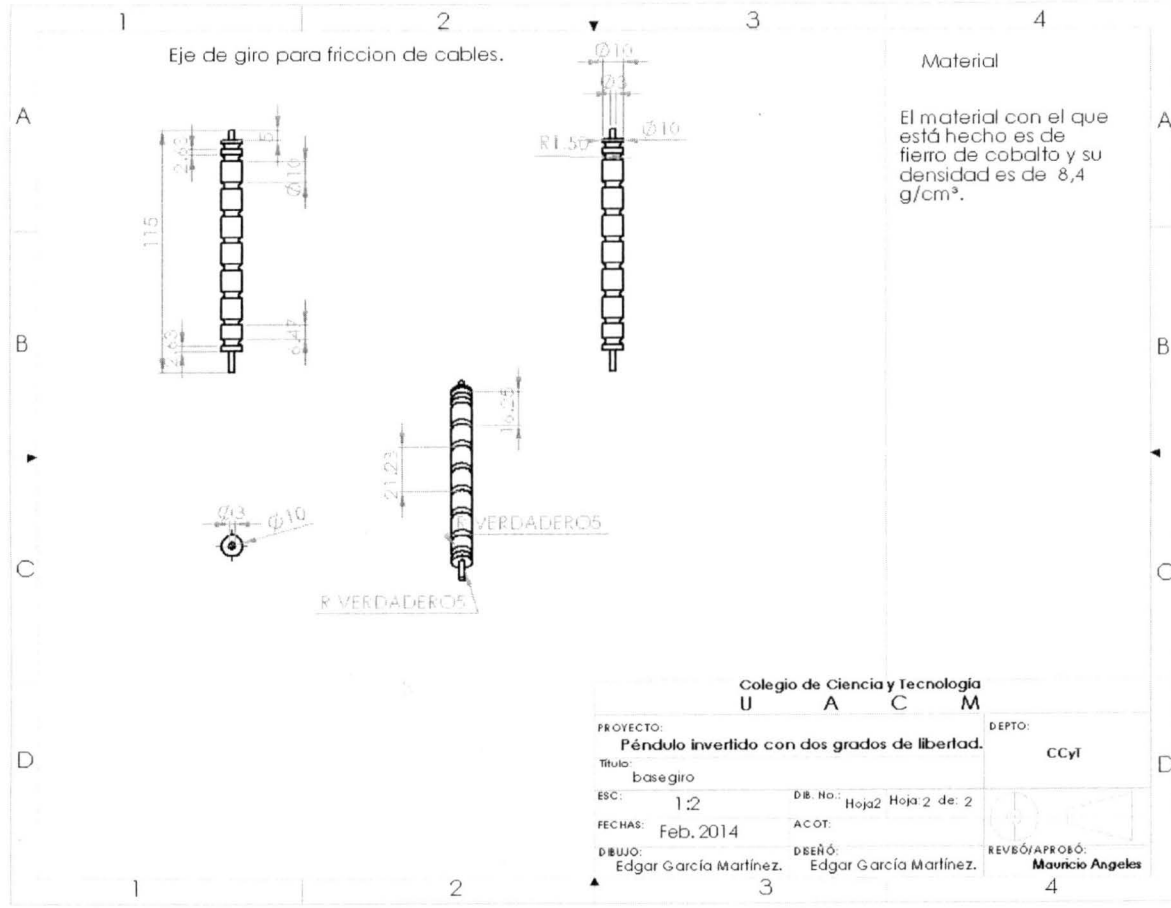


Figura A.4: Base giro

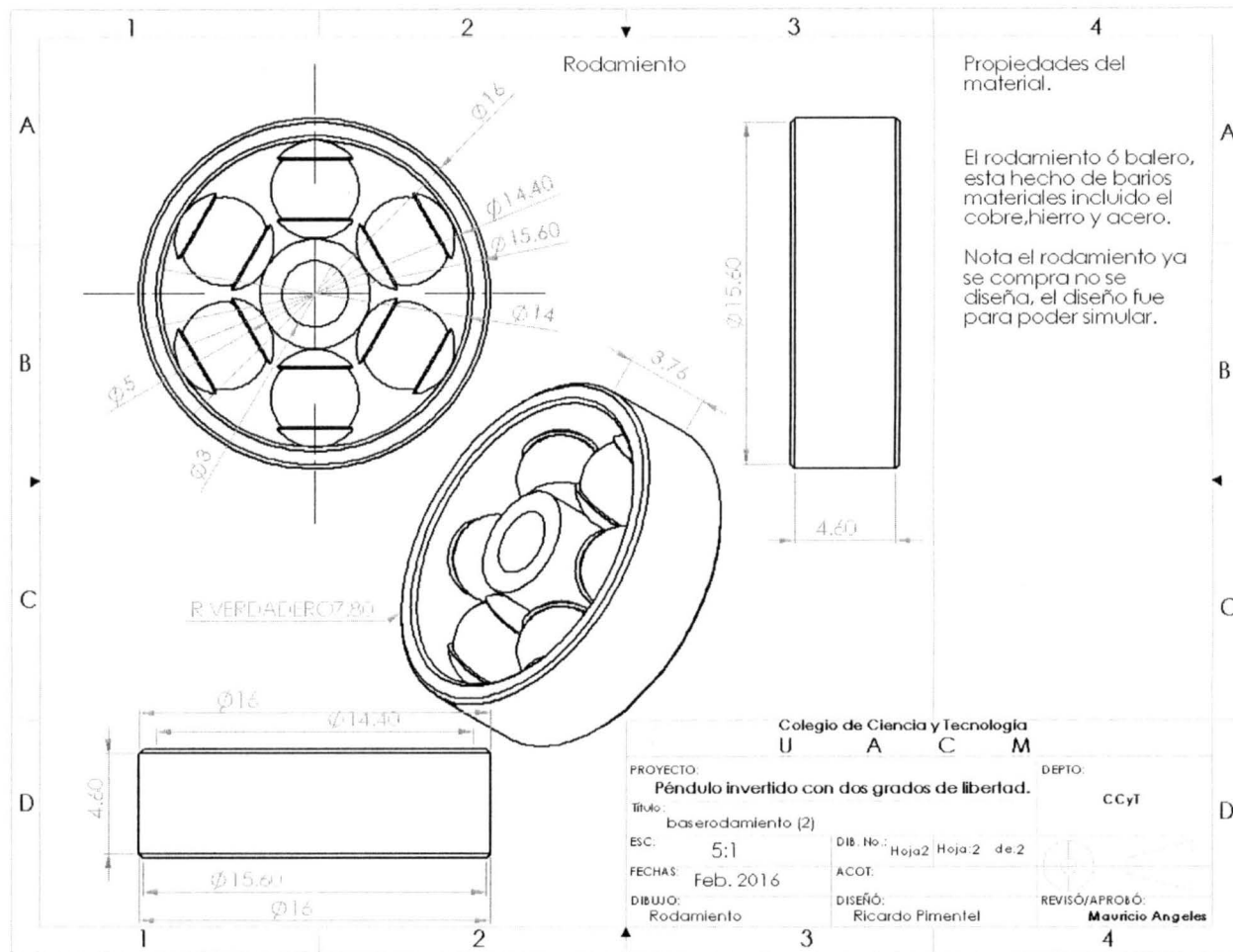


Figura A.5: Rodamiento

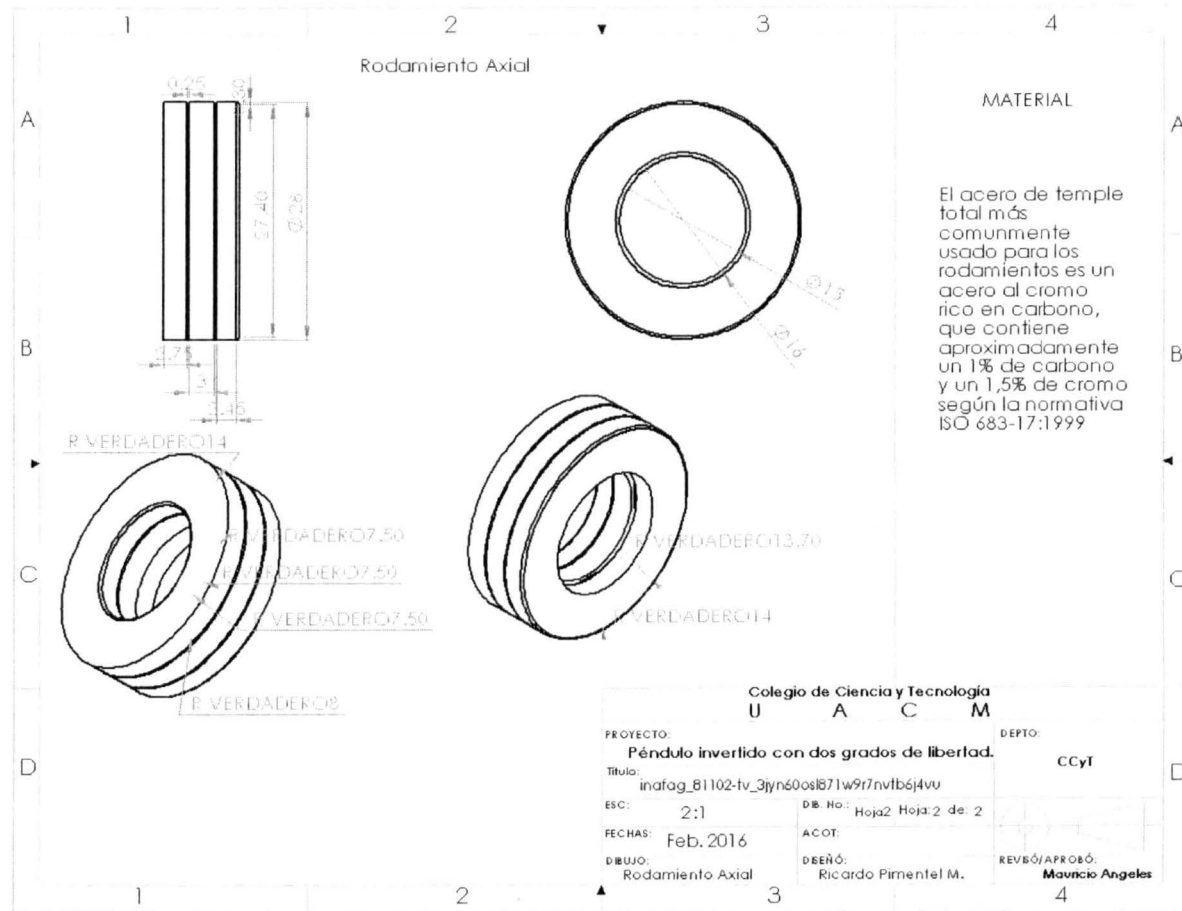


Figura A.6: Rodamiento axial.

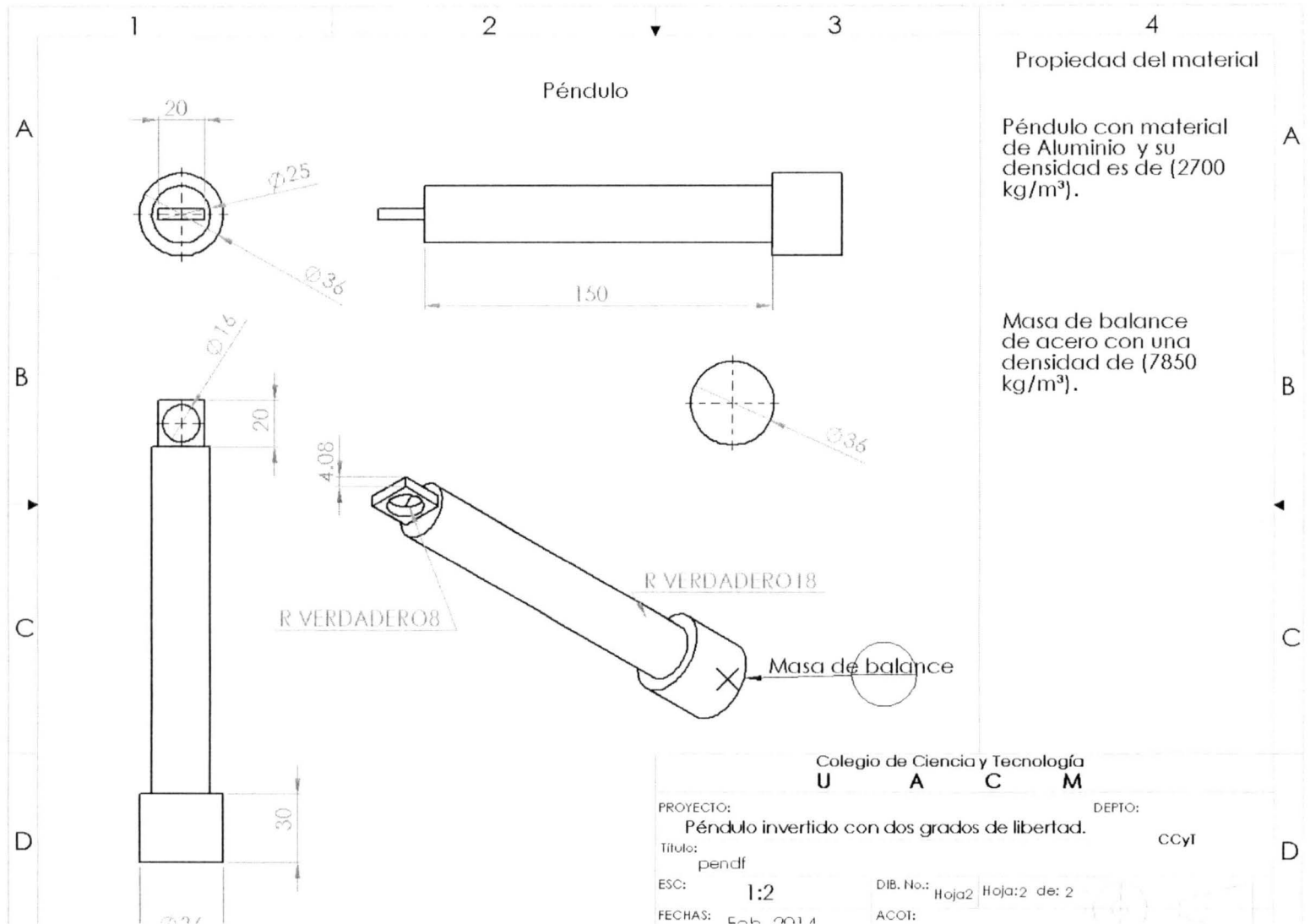


Figura A.7: Pendf

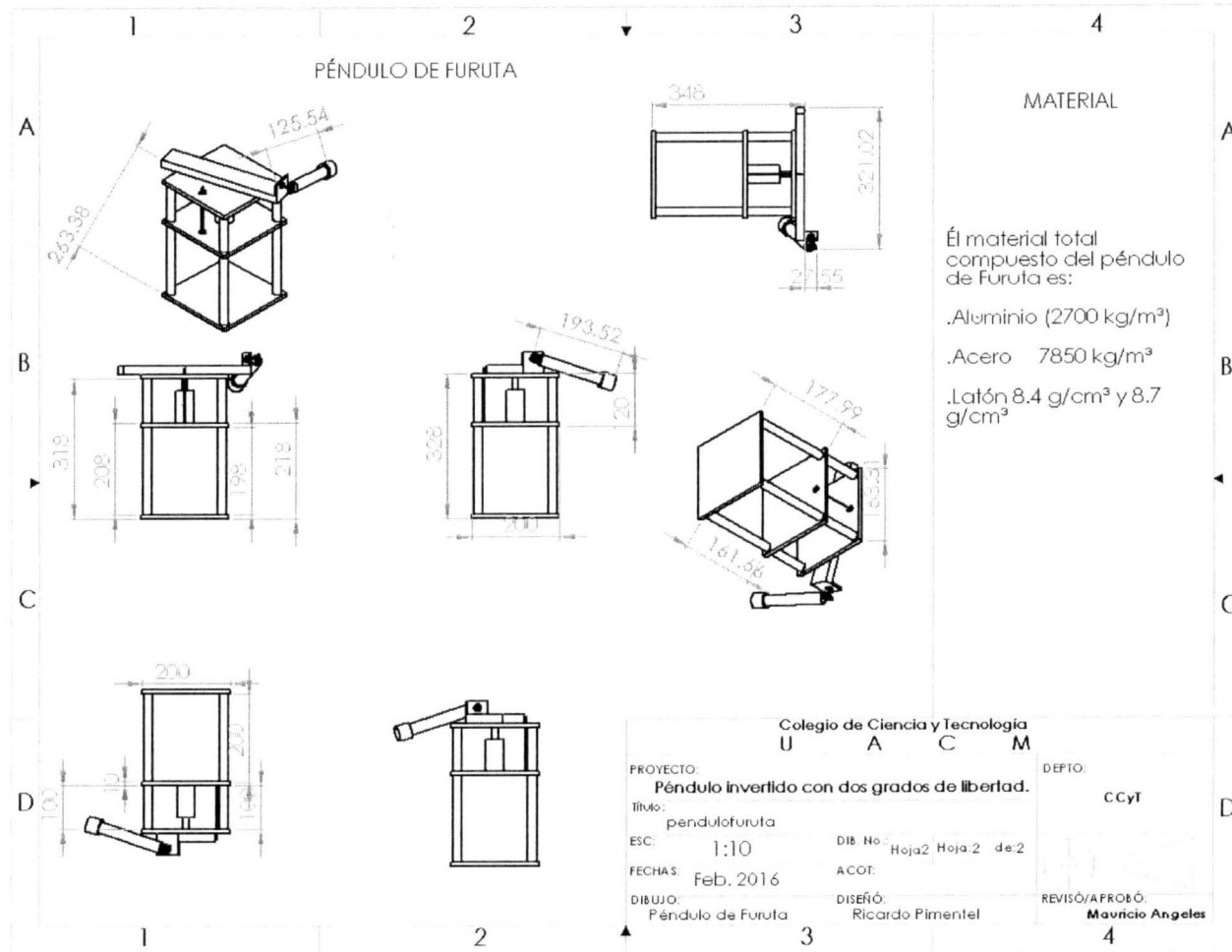


Figura A.8: Péndulo invertido con dos grados de libertad

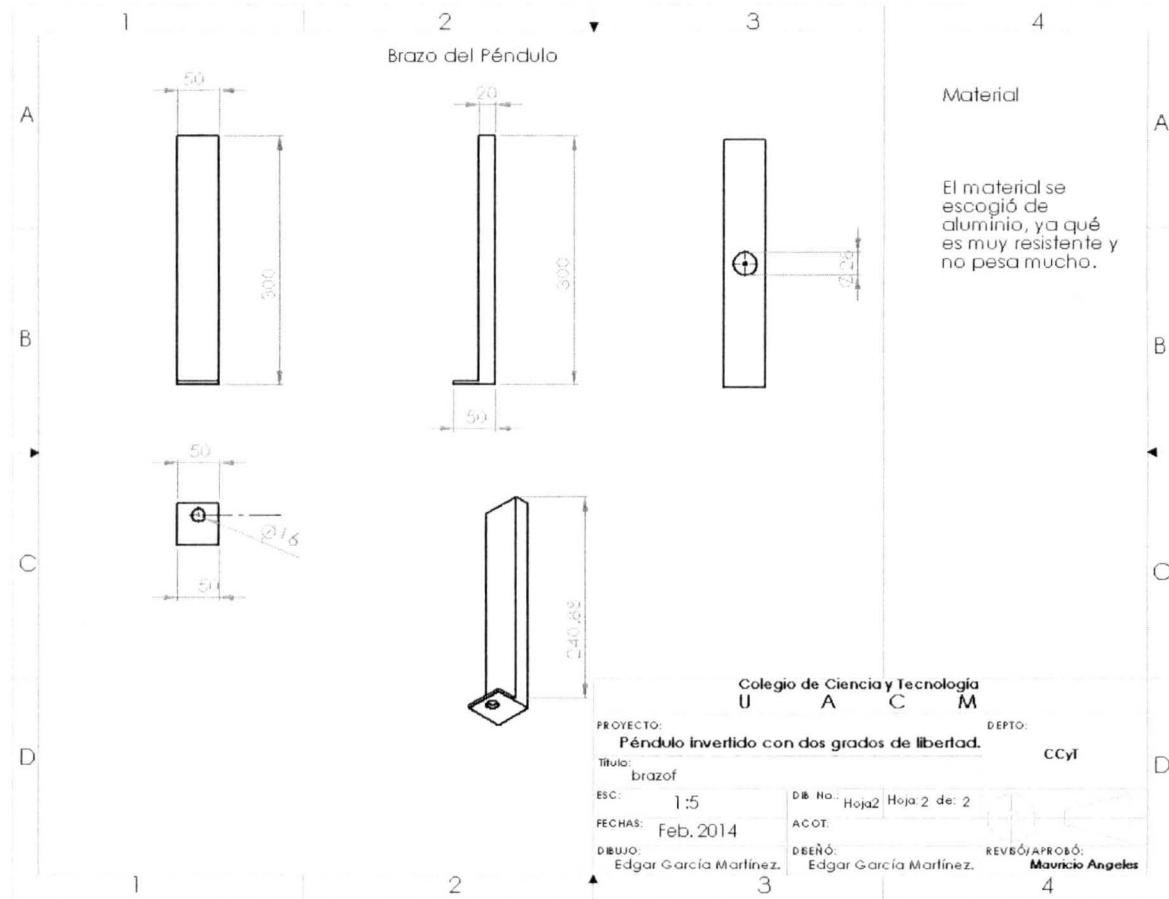


Figura A.9: Brazof

Bibliografía

Manuel Sebastian Alvarez Alvarado. Modelo matemático de un motor de corriente continua separadamente excitado: Control de velocidad por corriente de armadura. Inf. téc., 2012.

Cornwell Beer, Johnson. *Mecánica vectorial para ingenieros, dinámica, novena edición, págs.410*. Mc Graw Hill, 2012.

Osorio Zúñiga Carlos. *Tesis: diseño, construcción y control de un pendulo invertido rotacional*. Universidad de nacional de colombia, 2009.

Sergio Gómez Gonzalez. *El Gran Libro de Solidworks, seg. edición, pág.748*. Alfaomega, 2015.

Jorge Eduardo González Lara. *Tipos de Rodamientos: Rodamiento axial por rodillos*. Addison-Wesley, 2001.

Mario.Frias y Carlos. Riveras. cinemática de una particula. Inf. téc., 2008.

Motoelectrokris. Motores universales monofasicos. Inf. téc., 2010.

Isaac Newton. A re-formulation of gravity with respect to really cool models. *Jornal of Funny Physics*, 35:39–78, 1997.

Norman S. Nise. *Sistemas de Control para Ingeniería*. Grupo Editorial Patria, 2009.

Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control Moderna, terc. edición, pág.990*. Pearson Educación, 2000.

Kelly Rafael y Santibáñez Victor. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson, 2003.

Fernando Reyes Cortés. *Robótica. Control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor S.A, de C.V, 2015.

Carlos Rubio. *Método del elemento finito. Fundamentos y aplicación con ANSYS*,
pra. edición, pág.280. LIMUSA, S.A, 2000.

Hideo Umeki. *The geometry package*, 2002.

