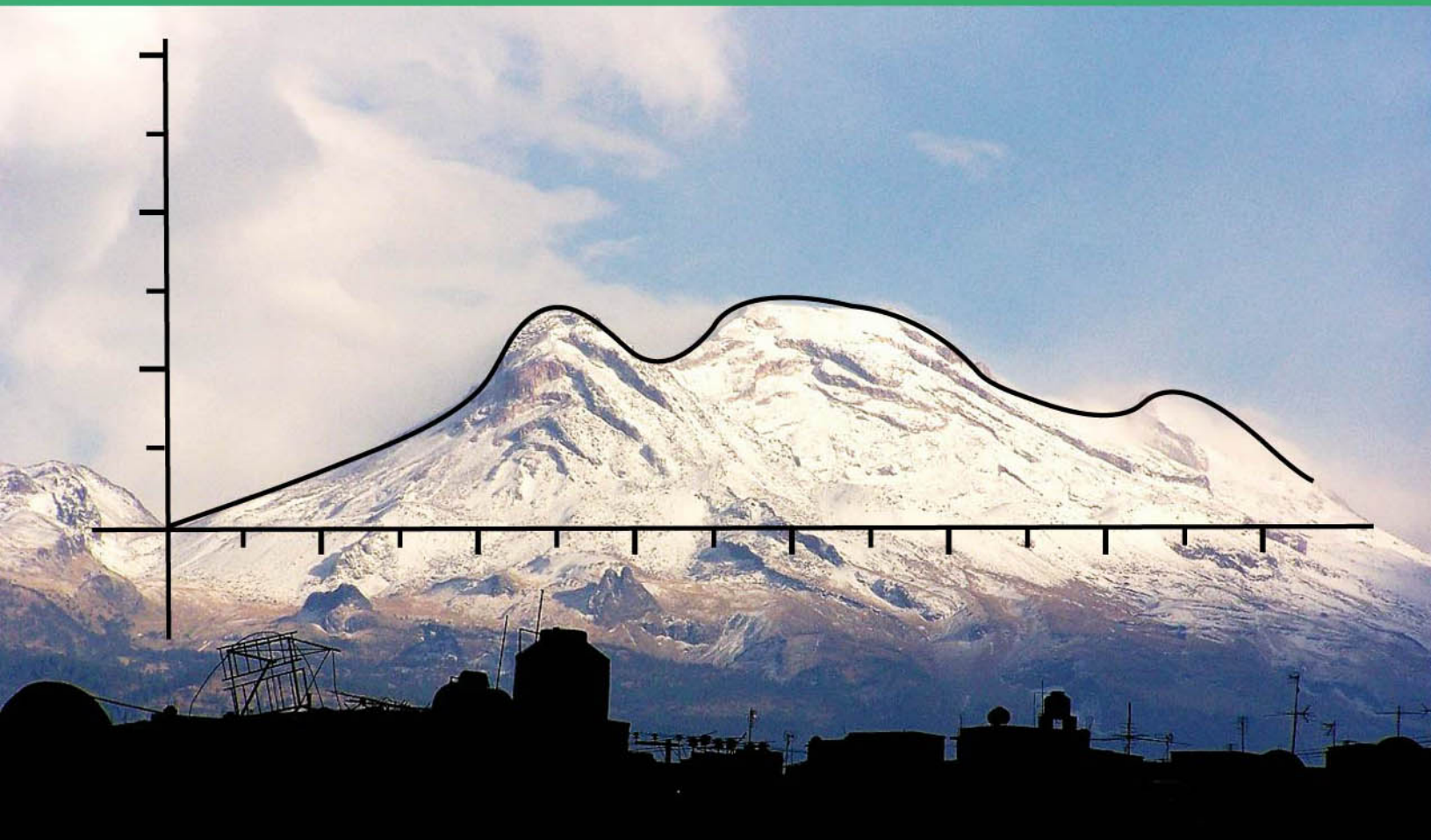


Métodos operativos de cálculo diferencial en Ingeniería

Fausto Cervantes Ortiz



MÉTODOS OPERATIVOS DE
CÁLCULO DIFERENCIAL
EN INGENIERÍA

FAUSTO CERVANTES ORTIZ

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Métodos operativos de cálculo diferencial en Ingeniería

Fausto Cervantes Ortiz

Academia de Matemáticas / Colegio de Ciencia y Tecnología
Ciclo Básico / Ingenierías / Cálculo Diferencial
COORDINACIÓN ACADÉMICA

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Manuel Pérez Rocha
Rector

María Rosa Cataldo Arriagada
Coordinadora Académica

Carlos Ruano Cavazos
Coordinador del Colegio de Ciencia y Tecnología

© *Métodos operativos de cálculo diferencial en Ingeniería,*
primera edición, 2010

© Fausto Cervantes Ortiz

D.R. Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Av. División del Norte 906, Col. Narvarte Poniente,
Delegación Benito Juárez, C.P. 03020, México, D.F.

ISBN: xxx-xxx-xxxx-xx-x

Academia de Matemáticas, Colegio de Ciencia y Tecnología, Ciclo Básico,
Coordinación Académica, UACM.



Fotografía de la portada:

*El volcán Iztaccíhuatl —la mujer dormida—
ubicado en la colindancia del Estado de México
con el estado de Puebla, México.*

Imagen tomada de www.wikipedia.org

- Materiales Educativos: matsedusuacm@gmail.com
- Responsable de la edición: Ana Beatriz Alonso

- Diseño de la portada: Marco Kim
- Formación: Alejandra Galicia, Marco Kim, Alejandra Riba

Material educativo universitario de distribución gratuita, prohibida su venta
Hecho e impreso en México / *Printed in Mexico*

La Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, en su Exposición de motivos, establece:

"7. Contribuir al desarrollo cultural, profesional y personal de los estudiantes:

(...) El empeño de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México deberá ser que todos los estudiantes que a ella ingresen concluyan con éxito sus estudios. Para ello deberá construir los sistemas y servicios que éstos necesiten para alcanzar este propósito de acuerdo con su condición de vida y preparación previa. (...)." ¹

De igual manera, en su Título I, Capítulo II, Artículo 6, Fracción IV, dice:

"Concebida como una institución de servicio, la Universidad brindará a los estudiantes los apoyos académicos necesarios para que tengan éxito en sus estudios. (...)." ²

Atendiendo a este mandato, los profesores - investigadores de la UACM preparan materiales educativos como herramienta de aprendizaje para los estudiantes de los cursos correspondientes, respondiendo así al principio de nuestra casa de estudios de proporcionarles los soportes necesarios para su avance a lo largo de la licenciatura.

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

¹ Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, publicada en la Gaceta Oficial del Distrito Federal el 5 de enero de 2005, reproducida en el Taller de Impresión de la UACM, p. 14

² Ídem., p. 18

Introducción

La primera edición del presente texto se elaboró para apoyar los cursos de matemáticas de la UAM Azcapotzalco. Puesto que el programa de estudios de la UACM es sustancialmente distinto, se ha retomado el texto, modificándolo y ampliándolo para adecuarlo a las necesidades de nuestros estudiantes.

Al igual que en la primera edición y en previos materiales educativos, se ha puesto el énfasis en los métodos operativos. Esto obedece a la intención de promover que el estudiante avance a mayor velocidad en el uso de las matemáticas como herramienta habitual para la solución de problemas de ingeniería. La teoría correspondiente podrá ser expuesta presencialmente, aprovechando así el acompañamiento del profesor ante las posibles dudas que surjan durante la sesión.

Examinando el plan del libro, puede apreciarse que el primer capítulo es el más extenso, ocupándose a fondo del tema de las funciones. Esto se debe a la observación de experiencias previas durante cursos de cálculo diferencial, donde el avance deseable por parte de los estudiantes ha dependido en gran medida de su claro conocimiento del concepto de función, el cual lleva de manera natural y sencilla a la comprensión del cálculo de límites y derivadas.

El segundo capítulo, sobre límites, y el tercero, que trata las derivadas, muestran los métodos en forma concisa y simple, ya que el contenido se vuelve más accesible una vez que se tienen bases firmes sobre las propiedades de las funciones.

El cuarto capítulo expone aplicaciones simples del cálculo diferencial, material significativo para el futuro ingeniero cuya preocupación fundamental será la solución de problemas prácticos.

En cuanto a la realización de esta obra, se agradece a las muchas personas cuya contribución estuvo presente. Se agradece en particular a los profesores Verónica Puente Vera, Léster Alfonso Díaz, José Lizardi del Ángel, Edgar Pérez Pérez (UACM-SLT) y Octavio Páez Osuna (FC-UNAM) por la revisión del texto en su totalidad, aportando valiosas observaciones. Asimismo, se agradece el invaluable apoyo editorial de Ana Beatriz Alonso Osorio, quien con su eficiencia característica llevó a cabo todo el proceso editorial. A pesar de ello, las erratas que subsistan serán la entera responsabilidad del autor, quien agradecerá le sean señaladas para su corrección en futuras ediciones.

Se espera que este material sea de utilidad a los estudiantes de la UACM, para quienes ha sido escrito, y el autor agradecerá todo comentario o sugerencia sobre su contenido a la siguiente dirección electrónica: fausto.cervantes@uacm.edu.mx, o personalmente, en el cubículo E-256 del Plantel San Lorenzo Tezonco, de la UACM.

Nada humano me es ajeno
Fausto Cervantes Ortiz
San Lorenzo Tezonco, D. F.
Junio de 2009

Índice

| | |
|--|------------|
| Introducción | III |
| 1. Funciones | 1 |
| 1.1. Intervalos | 1 |
| 1.2. Desigualdades | 2 |
| 1.3. Valor absoluto | 6 |
| 1.4. Elementos de las funciones | 8 |
| 1.5. Simetrías | 10 |
| 1.6. Monotonía | 11 |
| 1.7. Funciones algebraicas | 12 |
| 1.7.1. Funciones constantes | 13 |
| 1.7.2. Funciones potenciales | 14 |
| 1.7.3. Polinomios | 16 |
| 1.7.4. Funciones racionales | 16 |
| 1.7.5. Funciones irracionales | 18 |
| 1.8. Funciones trascendentes | 19 |
| 1.8.1. Funciones trigonométricas | 19 |
| 1.8.2. Función exponencial | 21 |
| 1.8.3. Funciones hiperbólicas | 23 |
| 1.9. Transformación de funciones | 25 |
| 1.10. Funciones definidas por secciones | 29 |
| 1.11. Combinación de funciones | 36 |
| 1.12. Composición de funciones | 37 |
| 1.13. Funciones inversas | 39 |
| 1.13.1. Funciones trigonométricas inversas | 41 |
| 1.13.2. Funciones logarítmicas | 41 |
| 1.13.3. Funciones hiperbólicas inversas | 42 |
| 1.14. Coordenadas polares | 45 |
| 1.15. Problemas de aplicación | 47 |
| 2. Límites | 55 |
| 2.1. Tangente a una curva | 55 |
| 2.2. Definición del límite | 56 |
| 2.3. Reglas para calcular límites | 58 |
| 2.4. Límites laterales | 61 |

| | |
|--|------------|
| 2.5. Límites de las funciones trigonométricas | 62 |
| 2.6. Límites que involucran infinitos | 64 |
| 2.7. El número e | 66 |
| 2.8. Continuidad | 68 |
| 2.9. Teorema del valor intermedio | 70 |
| 2.10. Comportamiento asintótico | 72 |
| 3. Derivadas | 77 |
| 3.1. Tangentes | 77 |
| 3.2. Definición de derivada | 78 |
| 3.3. Reglas de derivación básicas | 79 |
| 3.4. Derivación de productos de funciones | 81 |
| 3.5. Derivación de cocientes de funciones | 82 |
| 3.6. Derivación de las funciones trigonométricas | 82 |
| 3.7. Regla de la cadena | 85 |
| 3.8. Derivada de la función logarítmica | 86 |
| 3.9. Derivada de la función exponencial | 86 |
| 3.10. Derivación implícita | 89 |
| 3.11. Derivada de la función inversa | 91 |
| 3.12. Diferenciales | 93 |
| 3.13. Derivadas de orden superior | 94 |
| 3.14. La no existencia de la derivada | 95 |
| 4. Aplicaciones de la derivada | 99 |
| 4.1. Rectas tangentes y normales | 99 |
| 4.2. Monotonía | 101 |
| 4.3. Concavidad y convexidad | 101 |
| 4.4. Máximos y mínimos | 102 |
| 4.5. Análisis de la variación de las funciones | 107 |
| 4.6. Razones de cambio relacionadas | 113 |
| 4.7. Problemas de optimización | 118 |
| 4.8. Cálculo de límites indeterminados | 122 |
| Tablas | 125 |
| Bibliografía | 129 |

Capítulo 1

Funciones

En las ciencias, así como en la ingeniería, es necesario tratar con cantidades mensurables y su dependencia con otras cantidades en fenómenos importantes. Para tratar a las cantidades y las relaciones de dependencia entre ellas se utiliza un lenguaje objetivo, preciso y universal: las matemáticas. Por esta razón, es necesario el conocimiento de la forma de tratar las cantidades y relaciones entre ellas matemáticamente. Una cantidad física se puede representar por medio de números. A la relación de dependencia de dos o más cantidades se le denomina *función*. Entonces estudiaremos números y funciones numéricas.

Usaremos el conjunto de los números reales para las funciones que queremos tratar. Pero a veces estaremos interesados sólo en un subconjunto de todo este enorme conjunto, por lo cual comenzaremos examinando brevemente una forma de representar subconjuntos.

1.1. Intervalos

Un intervalo es un subconjunto de números reales delimitado claramente por uno o dos números. Si el intervalo en cuestión contiene a los números que lo delimitan, el intervalo se llama *cerrado*. Si no se incluyen los números que lo delimitan, se llama intervalo *abierto*. También puede haber intervalos *semiabiertos* (o *semicerrados*). Los diferentes tipos de intervalos se simbolizan como sigue:

El intervalo cerrado definido por los números a y b (suponiendo que $a < b$), se representa como

$$[a, b] \equiv \{x | a \leq x \leq b\}. \quad (1.1)$$

Lo que está entre llaves se lee como: *el conjunto de x tales que a es menor o igual que x y x es menor o igual que b* . El intervalo abierto definido por a y b se simboliza por

$$(a, b) \equiv \{x | a < x < b\}. \quad (1.2)$$

Los intervalos semiabiertos definidos por a y b pueden ser

$$[a, b) \equiv \{x | a \leq x < b\} \quad (1.3)$$

o

$$(a, b] \equiv \{x | a < x \leq b\}. \quad (1.4)$$

Cuando se define un intervalo por un solo número, tenemos intervalos infinitos de la forma

$$(a, \infty) \equiv \{x|x > a\} \quad (1.5)$$

o

$$[a, \infty) \equiv \{x|x \geq a\}. \quad (1.6)$$

Hay que recalcar que ∞ NO es un número, sino simplemente un símbolo que indica que el intervalo se extiende indefinidamente hacia valores positivos arbitrarios. Lo mismo se puede decir de $-\infty$, para números negativos.

Geoméricamente, estamos acostumbrados a representar a los números reales por medio de la recta numérica. Los intervalos se pueden representar como segmentos de recta o rayos. En la figura 1.1 se dan como ejemplo las representaciones de algunos intervalos sobre la recta de los números reales.

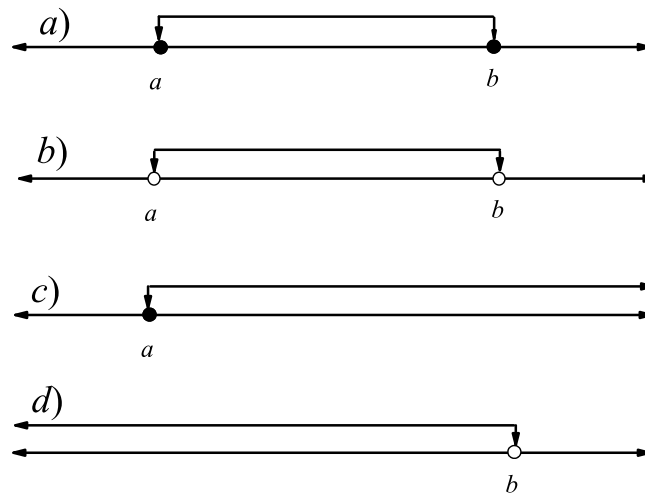


Figura 1.1: Intervalos: a) $[a, b]$, b) (a, b) , c) $[a, \infty)$, d) $(-\infty, b)$

1.2. Desigualdades

Llamamos desigualdad a una expresión que representa una relación entre dos cantidades, una de las cuales es mayor (o en casos especiales, igual) que la otra. Resolver una desigualdad es hallar un intervalo para el cual se cumple la relación expresada.

Para las desigualdades se usan las siguientes reglas:

1. Podemos sumar el mismo número a ambos miembros de la desigualdad

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$$

2. Podemos sumar dos desigualdades

$$a < b \quad \text{y} \quad c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

3. Podemos multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número positivo

$$a < b \quad \Rightarrow \quad ac < bc \quad \text{si} \quad c > 0$$

4. Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, debemos invertir el sentido de la desigualdad

$$a < b \quad \Rightarrow \quad ac > bc \quad \text{si} \quad c < 0$$

5. Si en una desigualdad tenemos dos números positivos, al tomar sus recíprocos debemos invertir el sentido de la desigualdad

$$a < b \quad \Rightarrow \quad 1/a > 1/b \quad \text{si} \quad a > 0 \text{ y } b > 0.$$

Ejemplo

Resolver la desigualdad

$$2 + 4x < 10x + 6.$$

Solución

Restando 2 en ambos miembros obtenemos (regla 1)

$$4x < 10x + 4,$$

restando $10x$ en ambos miembros (regla 1)

$$-6x < 4,$$

multiplicando por $-1/6$ (regla 4)

$$x > -\frac{4}{6},$$

simplificando

$$x > -\frac{2}{3}.$$

El intervalo solución es $(-\frac{2}{3}, \infty)$.

Ejemplo

Resolver la desigualdad

$$x^2 + x - 6 < 0.$$

Solución

Factorizando el primer miembro obtenemos

$$(x - 2)(x + 3) < 0.$$

Para que este producto sea negativo, se requiere que alguno de los factores sea positivo pero el otro sea negativo. Esto puede suceder en dos casos:

Caso 1

$$(x + 3) > 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) < 0.$$

De la primer desigualdad obtenemos

$$x > -3,$$

mientras que la segunda nos da

$$x < 2.$$

Como la condición es que las dos desigualdades se cumplan simultáneamente, debemos buscar la intersección de ambos intervalos. La región de intersección será el intervalo buscado, que es $(-3, 2)$.

Caso 2

$$(x + 3) < 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) > 0.$$

La primera desigualdad nos da

$$x < -3,$$

mientras que la segunda nos da

$$x > 2.$$

Estos intervalos no tienen región de intersección, por lo que no hay conjunto alguno que sea solución.

La solución general es la unión de los dos intervalos hallados en ambos casos

$$x \in (-2, 3).$$

Otra forma de resolver las desigualdades consiste en encontrar las raíces de la ecuación asociada y examinar el signo de la expresión en los intervalos determinados por las raíces encontradas.

Ejemplo

Resolver la desigualdad

$$x^3 - 4x^2 + 3x < 0.$$

Solución

La ecuación asociada

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

se puede factorizar como

$$x(x-1)(x-3) = 0,$$

lo que nos da las raíces $x = 0$, $x = 1$, y $x = 3$. Estas raíces nos determinan cuatro intervalos, que examinaremos como se muestra en la siguiente tabla

| Intervalo | Signo de x | Signo de $(x-1)$ | Signo de $(x-3)$ | Signo de $x(x-1)(x-3)$ |
|----------------|--------------|------------------|------------------|------------------------|
| $(-\infty, 0)$ | - | - | - | - |
| $(0, 1)$ | + | - | - | + |
| $(1, 3)$ | + | + | - | - |
| $(3, \infty)$ | + | + | + | + |

Como queremos que el producto sea menor que cero, tomamos los intervalos en los que el producto $x(x-1)(x-3)$ tenga signo negativo. En este caso son los intervalos $(-\infty)$ y $(1, 3)$, por lo que la solución de la desigualdad es

$$x \in (-\infty) \cup (1, 3).$$

Ejercicios

- $1 + x < 7x + 5$ R: $(-\frac{2}{3}, \infty)$
- $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ R: $[2, 3]$
- $x^2 < 4$ R: $(-2, 2)$
- $x^2 \geq 25$ R: $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$
- $-5 \leq 3x + 1 < 7$ R: $[-2, 2)$
- $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{5}$ R: $[2, 5]$
- $2x - 3 \geq 5x - 2$ R: $(-\infty, -\frac{1}{3}]$
- $x - 7 \leq 2(x - 3) + 4 - x$ R: \mathbb{R}
- $\frac{3}{4}x - 8 > \frac{7}{3}x - 27$ R: $(-\infty, 12)$
- $3x^2 - 7x < 0$ R: $(0, \frac{7}{3})$
- $(x + 7)^2 \geq 25$ R: $(-\infty, -12] \cup [-2, \infty)$
- $(2x + 3)^2 \leq 64$ R: $[-\frac{11}{3}, \frac{5}{2}]$
- $25x^2 \leq -30x - 18$ R: \emptyset
- $4 < x^2 < 9$ R: $(-3, -2) \cup (2, 3)$

15. $3x^2 + 7x - 10 < 0$ R: $(-\frac{10}{3}, 1)$
 16. $-2.1 < x - 2 \leq -1.9$ R: $(-0.1, 0.1)$
 17. $4.29 < 3 - x \leq 4.31$ R: $(-1.31, -1.29)$
 18. $4x^2 + 2x < 9 - 7x \leq 11 - 7x$ R: $(2, \frac{17}{4})$
 19. $x^3 + 3x^2 - 4x > 0$ R: $(-4, 0) \cup (1, \infty)$
 20. $x(x + 3)(x - 1) \leq 0$ R: $(-\infty, -3] \cup [0, 1]$

1.3. Valor absoluto

El valor absoluto de un número a se denota por $|a|$ y es la magnitud del segmento desde el origen hasta el número a sobre la recta. Como las magnitudes son siempre positivas (o cero), el valor absoluto es siempre positivo (o cero).

Como $|a| \geq 0$ para toda a , entonces

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ejemplos

$$|-5| = 5$$

$$|1 - \pi| = \pi - 1$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0 \text{ esto es si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x - 1 < 0 \text{ esto es si } x < 1. \end{cases}$$

Cuando extraemos la raíz cuadrada de un número, frecuentemente se debe tomar la raíz positiva, por lo cual se hace

$$\sqrt{a^2} = |a|. \quad (1.8)$$

Propiedades de los valores absolutos

1. Si $|x| = a$, entonces $x = \pm a$ y viceversa.
2. Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$ ($a > 0$) y viceversa.
3. Si $|x| > a$, entonces $x > a$ ó $x < -a$ ($a > 0$) y viceversa.
4. El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos.

$$|ab| = |a||b|$$

5. El cociente de los valores absolutos es igual al valor absoluto del cociente.

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

6. El valor absoluto de una potencia entera es igual a la potencia del valor absoluto.

$$|a^n| = |a|^n \quad n \text{ entero}$$

7. (Desigualdad del triángulo) El valor absoluto de una suma es menor o igual a la suma de los valores absolutos.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Ejemplo

Encontrar los valores de x que cumplan la siguiente igualdad

$$|3x - 7| = 5.$$

Solución

Para que se cumpla la igualdad, debe cumplirse que (propiedad 5)

$$3x - 7 = -5 \quad \text{ó} \quad 3x - 7 = 5.$$

La primera igualdad nos da

$$x = \frac{2}{3},$$

mientras que la segunda nos da

$$x = 4.$$

Estos son los valores que debe tener x para que se cumpla la igualdad.

Ejemplo

Resolver la desigualdad

$$|2x + 8| \leq 3.$$

Solución

Por la propiedad 6 tenemos que

$$-3 \leq 2x + 8 \leq 3.$$

Restando 8 a los tres miembros tendremos:

$$-11 \leq 2x \leq -5,$$

dividiendo entre 2

$$-\frac{11}{2} \leq x \leq -\frac{5}{2}.$$

Ejercicios

- | | | |
|-----|----------------------|--|
| 1. | $ 2x - 5 = 3$ | R: $\{1, 4\}$ |
| 2. | $ x - 5 < 2$ | R: $(3, 7)$ |
| 3. | $ 3x + 2 \geq 4$ | R: $(-\infty, -2] \cup [2/3, \infty)$ |
| 4. | $ x + 8 < 3$ | R: $(-11, -5)$ |
| 5. | $ 3 - x \geq 3$ | R: $(-\infty, 0] \cup [6, \infty)$ |
| 6. | $ x - 4 < 1$ | R: $(-\infty, 3] \cup [5, \infty)$ |
| 7. | $ x - 6 < 0.1$ | R: $(5.9, 6.1)$ |
| 8. | $ x + 5 \geq 2$ | R: $(-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$ |
| 9. | $ x + 1 \geq 3$ | R: $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$ |
| 10. | $ 2x - 3 \leq 0.4$ | R: $[1.3, 1.7]$ |
| 11. | $ 5x - 2 < 6$ | R: $(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ |
| 12. | $ -5x + 8 < 0.4$ | R: $(1.52, 1.68)$ |
| 13. | $ 2x - 1 \leq 0.02$ | R: $[0.49, 0.51]$ |
| 14. | $ x - 8 \geq 0.2$ | R: $(-\infty, 7.8] \cup [8.2, \infty)$ |
| 15. | $ x - 1 < 0.1$ | R: $(0.9, 1.1)$ |

1.4. Elementos de las funciones

Representaremos una función que depende de una cantidad x por medio de $f(x)$. A la cantidad x se le llama *variable independiente* y a $f(x)$, *variable dependiente*. Al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se le llama *dominio* (D_f), y al de los valores que adquiere la variable dependiente se le llama *recorrido* (R_f) (a veces mal llamado rango). En ocasiones se especifica explícitamente el dominio de la función, pero la mayoría de las veces no se dice nada. En esos casos el dominio es todo número para el que la expresión tenga sentido. En la definición de algunas funciones se hallan raíces, fracciones, etc. Para estas funciones es importante observar que no están definidas para raíces pares de cantidades negativas, ni para valores del dominio que den cero en el denominador, así que para encontrar su dominio será necesario resolver alguna desigualdad.

Para visualizar una función se usa una gráfica. Esto es el lugar geométrico de todos los pares ordenados de la forma $(x, f(x))$ graficados en el plano cartesiano. En principio, cualquier función se puede graficar haciendo una tabla de valores de x y $f(x)$. Más adelante veremos métodos para esbozar gráficas sin tener que tabular.

Ejemplo

Encontrar el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{2x-1}}$$

Solución

En esta función no hay restricciones para el numerador, sino que x puede tomar cualquier valor. Por otra parte, para el denominador hay dos restricciones muy claras: la primera es que no debe valer cero nunca, mientras que la segunda es que la raíz cuadrada siempre debe estar definida, o sea que el radicando nunca debe tomar valores menores que cero. Estas restricciones se escriben como

$$2x - 1 \neq 0 \quad \text{y} \quad 2x - 1 \geq 0,$$

la primera nos dice que $x \neq 1/2$, mientras que la segunda nos dice que $x \geq 1/2$. Entonces, el dominio de la función es

$$1/2 < x < \infty.$$

Ejemplo

Sea

$$f(x) = 2x + 1, \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Encontrar el recorrido.

Solución

El recorrido se puede calcular a partir del dominio completando la función, esto es, el dominio es

$$0 \leq x \leq 1,$$

multiplicando por 2

$$0 \leq 2x \leq 2,$$

sumando 1

$$1 \leq 2x + 1 = f(x) \leq 3,$$

por lo que el recorrido es $R_f : 1 \leq f(x) \leq 3$, o bien, $R_f : [1, 3]$.

Ejercicios

En los ejercicios siguientes, obtener el dominio de las funciones dadas. Graficarlas usando una tabla de valores¹. En los casos que sea posible, encontrar el recorrido.

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = 3 - 2x$ | R: $D_f : \mathbb{R}, \quad R_f : \mathbb{R}$ |
| 2. $f(x) = 3x - 4, \quad -4 \leq x \leq 4$ | R: $D_f : [-4, 4], \quad R_f : [-16, 8]$ |
| 3. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ | R: $D_f : \mathbb{R}, \quad R_f : [-2, \infty)$ |
| 4. $f(x) = x^2 - 6x$ | R: $D_f : \mathbb{R}, \quad R_f : [-9, \infty)$ |
| 5. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ | R: $D_f : \mathbb{R} - \{-1\}, \quad R_f : \mathbb{R} - \{0\}$ |
| 6. $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ | R: $D_f : \mathbb{R} - \{-3, 2\}, \quad R_f : \mathbb{R} - \{0\}$ |

¹Para verificar que las gráficas hechas a mano sean correctas, se recomienda graficar usando el programa *Graph*, que se puede descargar gratis de la dirección <http://www.padowan.dk>

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 7. $f(x) = \sqrt{x-5}$ | R: $D_f : [5, \infty)$, $R_f : [0, \infty)$ |
| 8. $f(x) = \sqrt{6-2x}$ | R: $D_f : (-\infty, 3]$, $R_f : [0, \infty)$ |
| 9. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ | R: $D_f : [-2, 2]$, $R_f : [0, 2]$ |
| 10. $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$ | R: $D_f : \{1\}$, $R_f : \{0\}$ |

1.5. Simetrías

Algunas funciones son simétricas con respecto al eje y , otras son simétricas con respecto al origen. Si una función es simétrica con respecto al eje y se le llama *par*. Una función simétrica con respecto al origen es una función *impar*.

Las funciones pares cumplen que $f(-x) = f(x)$. Las funciones impares cumplen que $f(-x) = -f(x)$. Cuando sabemos que una función es par, podemos dibujar sólo la parte de la gráfica cuyo dominio es positivo y después completarla por reflexión con el eje y . Para una función impar también podemos completar la parte con dominio negativo al *rotar* la gráfica 180° con respecto al origen.

Ejemplo

La función $f(x) = 3x^2 - 2x^4$ es par, puesto que

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x)^4 = 3x^2 - 2x^4 = f(x).$$

Su gráfica es la de la figura 1.2.

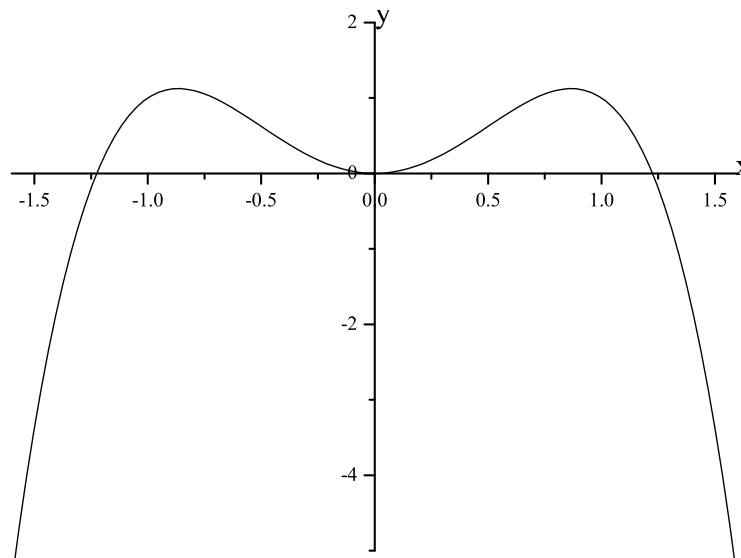


Figura 1.2: La función $f(x) = 3x^2 - 2x^4$

Ejemplo

La función $f(x) = x^3 - x$ es impar, pues

$$f(-x) = -x^3 - x = -f(x).$$

En la figura 1.3 se da la gráfica.

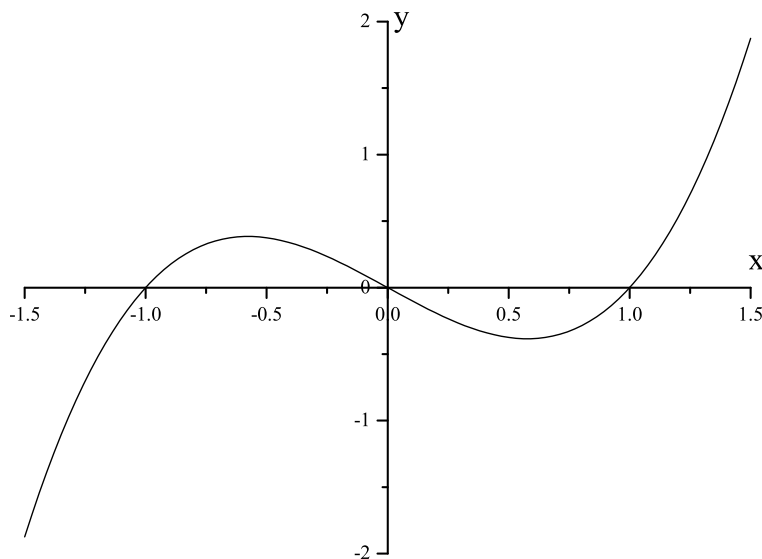


Figura 1.3: $f(x) = x^3 - x$

Ejemplo

La función $f(x) = x^2 + 5x$ no es par ni impar, pues

$$f(-x) = x^2 - 5x,$$

que no guarda relación ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Esto se ve en la figura 1.4.

1.6. Monotonía

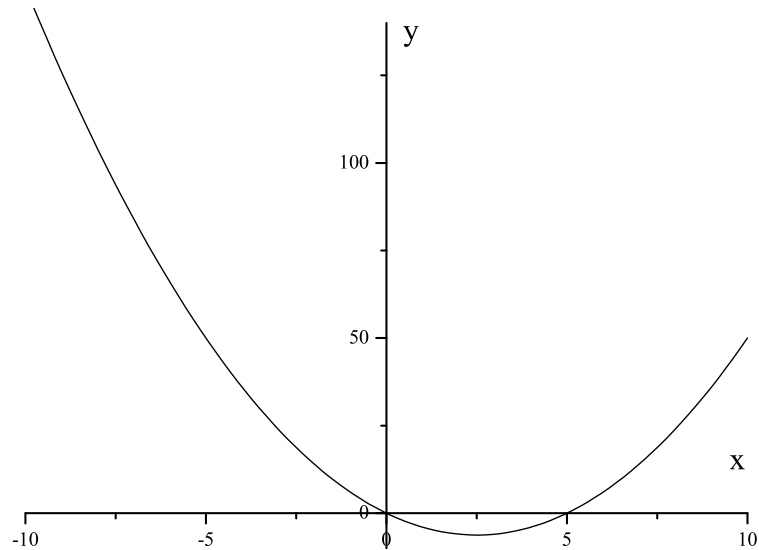
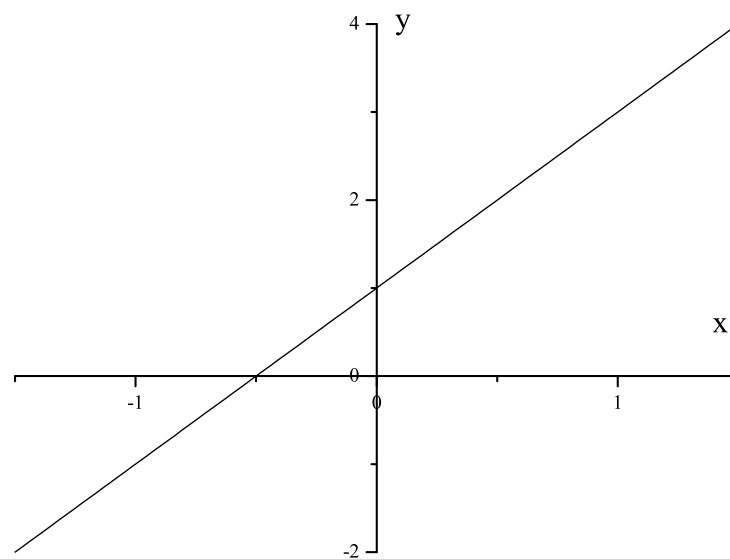
Se dice que una función es creciente en un intervalo si para toda $x_1 < x_2$ en ese intervalo se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función es decreciente si para $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Una función puede ser creciente o decreciente en todo su dominio, o sólo en algunos intervalos a los que se les llaman intervalos de *monotonía*. Gráficamente vemos que una función es creciente si conforme crece x también crecen los valores de $f(x)$, o sea, si la función *sube*. Si pasa lo contrario (si la gráfica *baja*) es decreciente. También puede ser que alguna función no sea creciente ni decreciente, sino que se mantenga constante en algunos intervalos o en todo su dominio.

Ejemplo

La función $f(x) = 2x + 1$ es creciente en todo su dominio. Ver figura 1.5.

Ejemplo

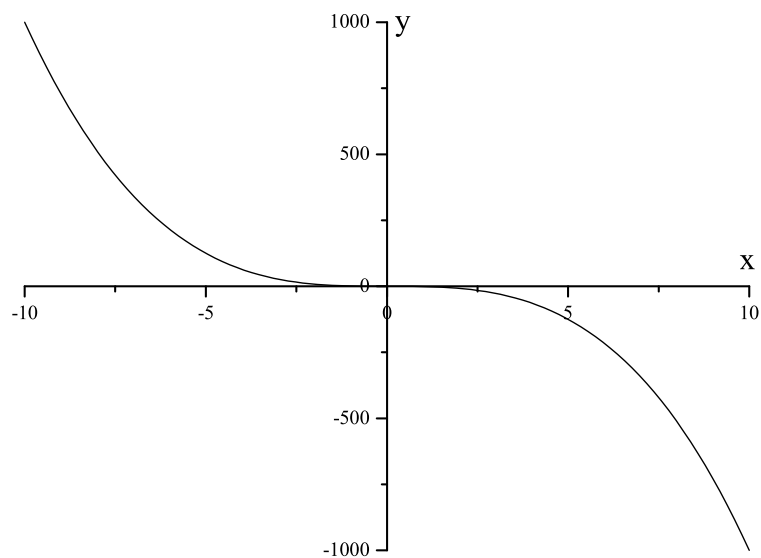
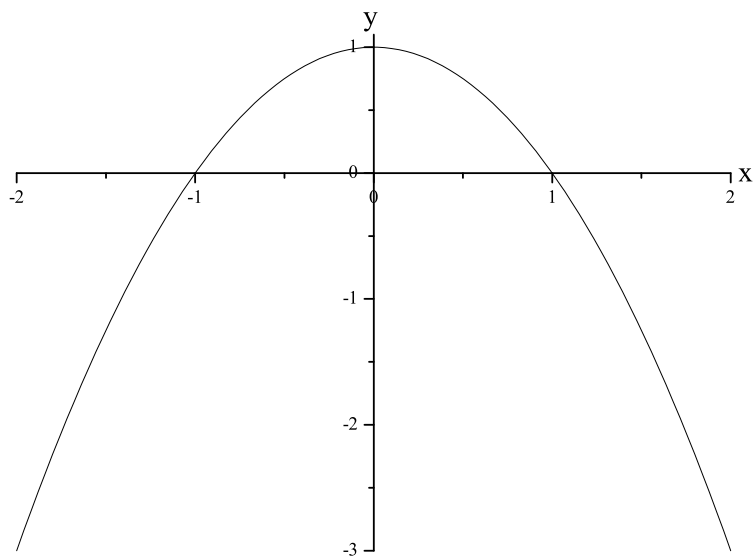
La función $f(x) = -x^3$ es decreciente en todo su dominio. Ver figura 1.6.

Figura 1.4: $f(x) = x^2 + 5x$ Figura 1.5: $f(x) = 2x + 1$ **Ejemplo**

La función $f(x) = -x^2 + 1$ es creciente en $-\infty \leq x < 0$, y es decreciente en $0 \leq x < \infty$. Véase la figura 1.7.

1.7. Funciones algebraicas

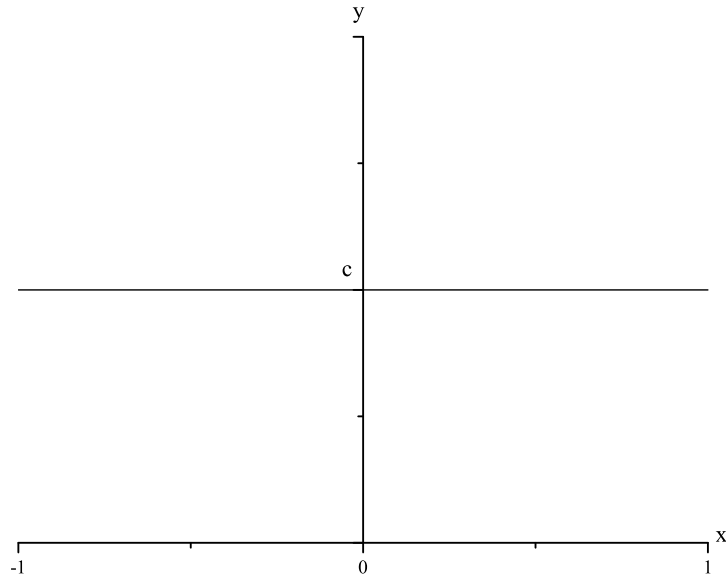
Existen numerosas clases de funciones. Trataremos inicialmente con funciones algebraicas. Estas funciones son las que surgen cuando realizamos con x operaciones básicas: sumas o restas,

Figura 1.6: $f(x) = -x^3$ Figura 1.7: $f(x) = -x^2 + 1$

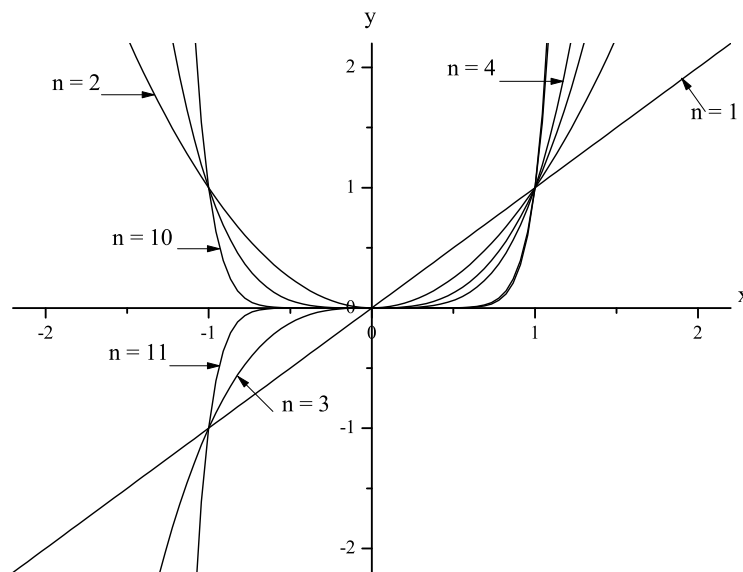
multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces. En esta sección, veremos algunas funciones elementales que será necesario conocer bien, para después poder construir otras nuevas.

1.7.1. Funciones constantes

La función $f(x) = c$ es aquella que le asigna el valor c a la función para todos los valores de x . La gráfica de esta función se ve en la figura 1.8.

Figura 1.8: $f(x) = c$

1.7.2. Funciones potenciales

Figura 1.9: $f(x) = x^\alpha$, α entero positivo

Las funciones de la forma $f(x) = x^\alpha$ son muy importantes y de las más básicas. Veremos que pasa con sus gráficas para diferentes valores de α .

Caso 1: $\alpha = n$, con n un entero positivo. Esto se muestra en la figura 1.9. Nótese que si n es par, la función es par. Si n es impar, la función es impar. Cuando n crece, la función se pega al eje de las x si $|x| < 1$ y se pega a las rectas $|x| = 1$ si $|x| > 1$. Estas funciones tienen

su dominio en todos los reales.

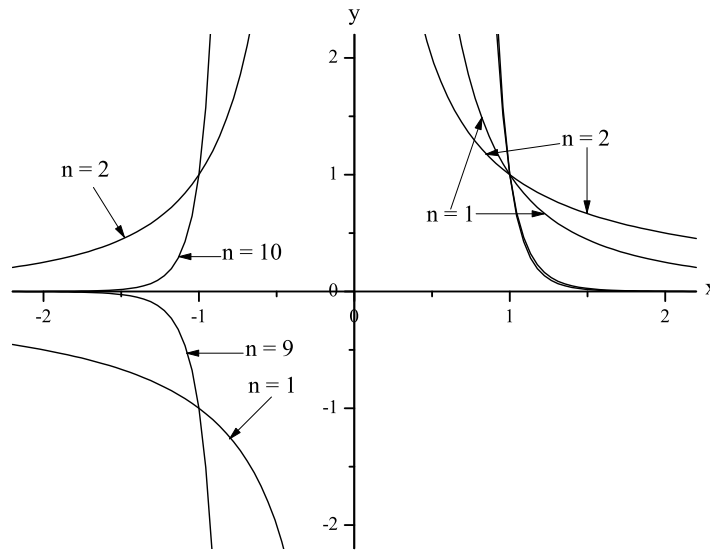


Figura 1.10: $f(x) = x^\alpha$, α entero negativo

Caso 2: $\alpha = -n$. Ver la figura 1.10. Nótese que si n es par, $f(x)$ es par, y viceversa. Si n crece la función se pega al eje de las x para $|x| > 1$, y se pega a las rectas $|x| = 1$ si $|x| < 1$. Éstas tienen como dominio a todos los reales, excepto el 0. Cerca del cero la función toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, acercándose cada vez más al eje de las y , pero sin llegar nunca a tocarlo. A este comportamiento se le llama asintótico. Más adelante estudiaremos con detalle esto.

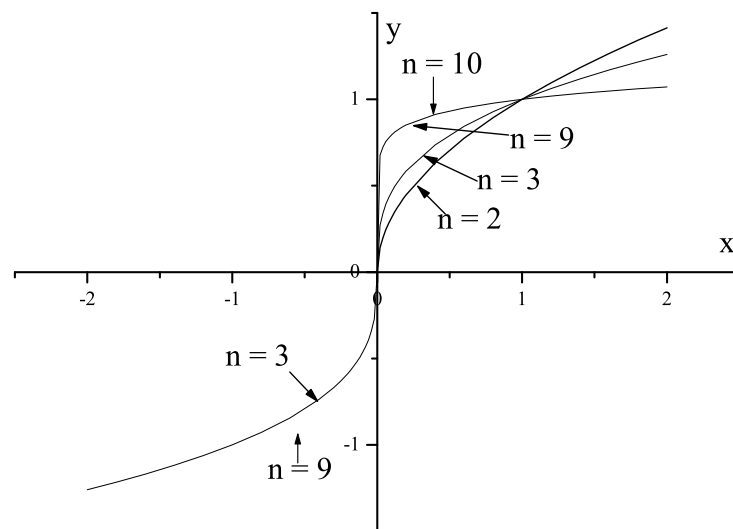


Figura 1.11: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha = 1/n$

Caso 3: $\alpha = 1/n$, n entero positivo. Esto se ve en la figura 1.11. Nótese que para n par, la función sólo está definida para las $x \geq 0$, pero si n es impar, está definida en todos los reales. Si n crece, la función se pega al eje de las y para $|x| \approx 0$, y después se pega a las rectas $|y| = 1$.

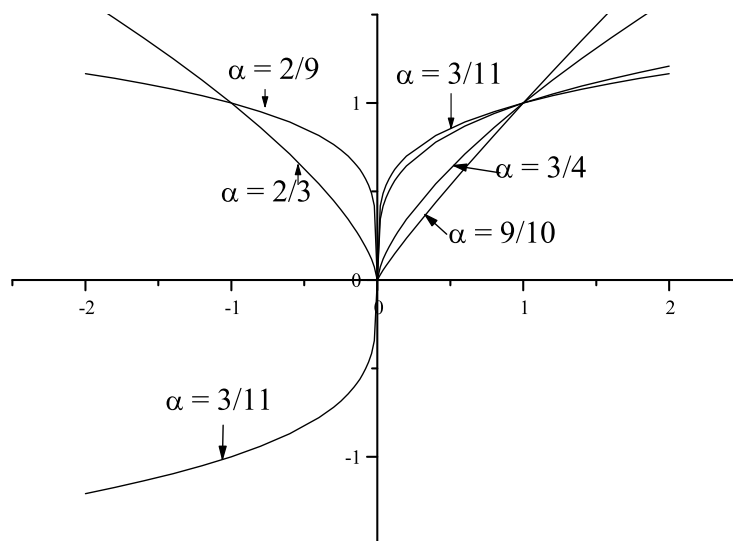


Figura 1.12: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha = m/n$

Caso 4: $\alpha = m/n$, m y n enteros positivos. Véase la figura 1.12. Notemos que si n es par, la función no está definida para $x < 0$, pero si n es impar la función está definida para todos los reales. También se ve que en $x = 0$ la función tiene una *esquina* para valores pares de m (y valores impares de n , por supuesto).

1.7.3. Polinomios

Un polinomio es una suma de múltiplos de potencias y constantes, tales que el exponente n es un entero positivo. Al mayor valor de n en esta suma se le llama grado.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Para esto se supone que por lo menos a_n es diferente de cero. En la figura 1.13 se da la gráfica de algunos polinomios, para tener una idea general del comportamiento de éstos.

Notemos que el grado del polinomio nos dice el número máximo de raíces y de *dobleces* que puede tener la gráfica. Su dominio son todos los reales. Si un polinomio sólo tiene como sumandos potencias pares, es una función par, y es impar si sólo tiene potencias impares.

1.7.4. Funciones racionales

Si tenemos el cociente de dos polinomios, $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ y $q(x) = b_n x^n + \dots + b_0$, le llamamos función racional a la función

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}. \quad (1.9)$$

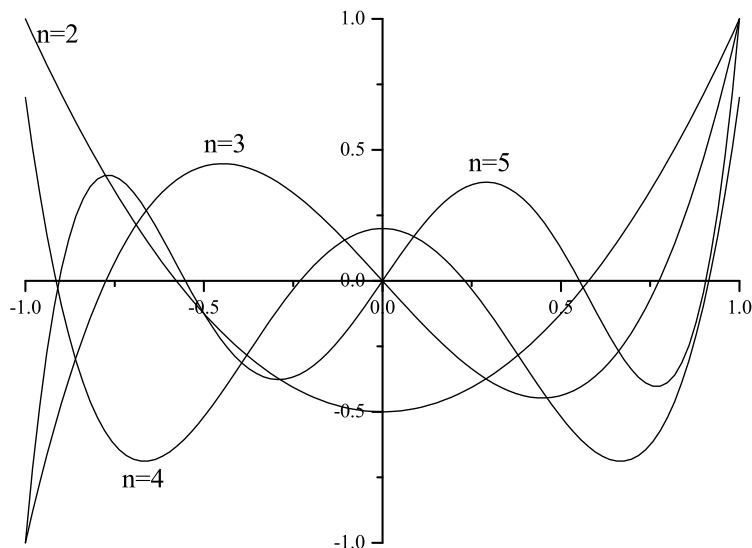
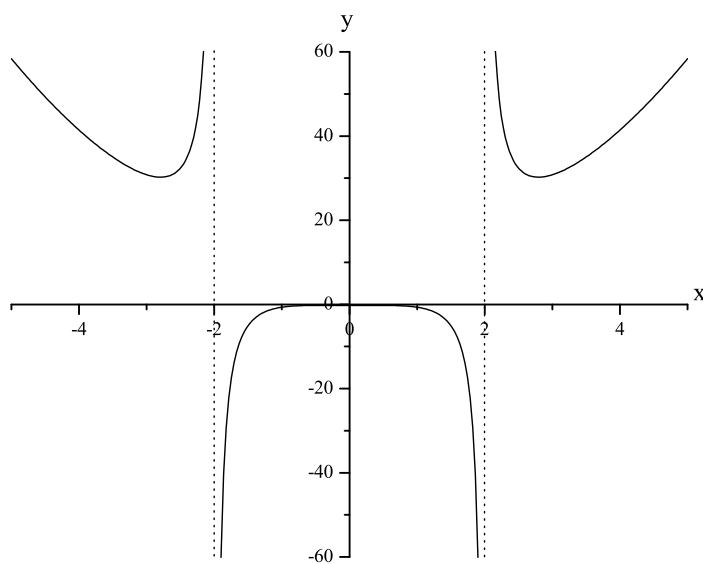


Figura 1.13: Polinomios

Las funciones racionales tienen su dominio en todos los valores de x , excepto aquellos en los que $q(x)$ se hace cero. Para las raíces de $q(x)$, la función toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, esto es, tiene asíntotas (más adelante se detalla lo relativo a las asíntotas).

Ejemplo

La gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ tiene la forma mostrada en la figura 1.14.

Figura 1.14: $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

1.7.5. Funciones irracionales

Cuando en una función intervienen raíces, les llamamos funciones irracionales. El caso potencial $\alpha = m/n$ es un caso particular de funciones irracionales. Las funciones irracionales tienen como dominio todos los valores en los que la raíz esté definida. También hay que tomar las restricciones impuestas por cualesquiera otras operaciones que haya, por ejemplo cocientes. Es frecuente que las gráficas de estas funciones presenten *esquinas*, como vemos con las funciones de la forma $x^{m/n}$. También es frecuente que tengan intervalos grandes que no pertenecen a su dominio, y se formen *huecos*.

Ejemplo

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ tiene el aspecto mostrado en la figura 1.15.

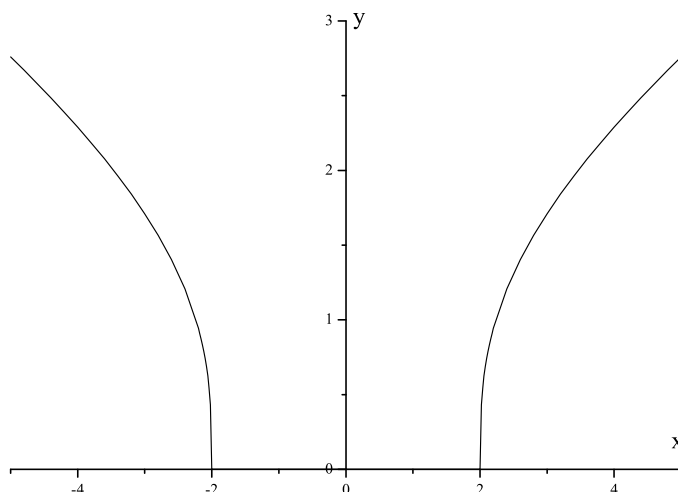


Figura 1.15: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Ejercicios

Clasificar cada una de las siguientes funciones de acuerdo a la nomenclatura dada en esta sección y dar su dominio. Graficarlas mediante tabulación.

1. $f(x) = x^9$ R: potencial, \mathbb{R}
2. $f(x) = x^{9/4}$ R: potencial, \mathbb{R}
3. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x - 6$ R: polinomio, \mathbb{R}
4. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x + 1}$ R: racional, $\mathbb{R} - \{-1\}$
5. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ R: racional, $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$ R: irracional, $(-1, \infty)$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ R: potencial, $\mathbb{R} - \{0\}$
8. $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ R: potencial, $\mathbb{R} - \{0\}$

9. $f(x) = \frac{1}{x^4 - x^2 + 1}$

R: racional, \mathbb{R}

10. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 1}$

R: irracional, \mathbb{R}

1.8. Funciones trascendentes

Las funciones cuyos valores no pueden calcularse haciendo un número finito de operaciones aritméticas (sumas, productos, potencias, etc.) se denominan *trascendentes*. Estudiaremos algunas de estas funciones.

1.8.1. Funciones trigonométricas

En los cursos de matemáticas elementales se introducen las funciones trigonométricas para calcular los elementos de los triángulos. Ahora veremos la generalización de estas funciones para utilizarlas en el cálculo diferencial.

Para definir las funciones trigonométricas se utiliza una circunferencia con centro en el origen y de radio uno. Trazando un segmento desde el origen a algún punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia (esto es, un radio), tomamos el ángulo de giro entre el rayo dado por la dirección positiva del eje x y dicho radio como base para definir las funciones². Llamando θ al ángulo antes definido, la función $f(\theta) = \text{sen } \theta$ será numéricamente igual al valor de la coordenada y del punto P , mientras que $f(\theta) = \text{cos } \theta$ será igual al valor de la coordenada x . Esto se muestra en la figura 1.16.

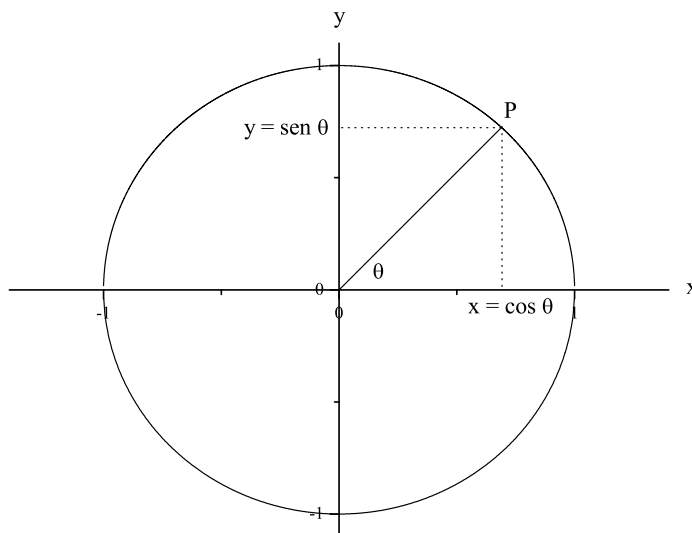


Figura 1.16: Círculo unitario usado para definir las funciones trigonométricas

²Obsérvese que hay dos posibilidades de elección del ángulo. Convencionalmente se toma el que resulte de girar en el sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.

De la forma en que definimos a las funciones anteriores podemos notar varias cosas. Primero, vemos que los ángulos pueden tomar cualquier valor (algo que en los triángulos no es posible). También observamos que las funciones seno y coseno pueden tener valores tanto negativos como positivos.

Ahora bien, puesto que la circunferencia tiene radio 1, los valores de x y y están entre -1 y 1 solamente. Lo anterior se expresa matemáticamente diciendo que el dominio es \mathbb{R} y el recorrido es $[-1,1]$.

De la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos (y sabiendo que el centro es $(0,0)$ y el radio 1), obtenemos la identidad trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1. \quad (1.10)$$

Es posible obtener otras identidades trigonométricas a partir de la anterior, pero no lo haremos aquí.

Nótese también que los valores de las funciones se repiten cada vez que se regresa al mismo punto, después de haber dado una vuelta completa. Esto se expresa escribiendo $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$, y se dice que son *periódicas*, de periodo³ 2π .

Si tomamos un ángulo negativo en lugar de uno positivo (lo que equivale a girar en el sentido de las manecillas del reloj), vemos que los valores de x son los mismos, mientras que los valores de y son sus negativos. Esto se escribe como $\operatorname{cos}(-\theta) = \operatorname{cos} \theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$, y significa que el coseno es una función par, mientras que el seno es impar.

También se puede ver que los valores de x son equivalentes a los valores de y al tomar el ángulo $\theta + \pi/2$. Esto es, $\operatorname{cos} \theta = \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)$. Esta propiedad importante también nos liga las funciones seno y coseno.

Las raíces de estas funciones se pueden localizar fácilmente, observando los lugares donde se anulan las longitudes de x y y . Tenemos que $\operatorname{cos}(\pi/2) = 0 = \operatorname{cos}(3\pi/2)$, etc., y $\operatorname{sen} 0 = 0 = \operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 2\pi$, etc.

Las otras funciones trigonométricas se definen fácilmente a partir de las dos anteriores, en la forma siguiente

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \quad (1.11)$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad (1.12)$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \quad (1.13)$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}. \quad (1.14)$$

De lo anterior podemos deducir las propiedades de estas nuevas funciones. Por ejemplo, para la tangente vemos que el dominio consiste en todos los valores de θ que no hagan cero al denominador, esto es, $\mathbb{R} - \{\theta \mid \theta = (n - 1/2)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$. Como la tangente es la razón de una función impar entre una par, la tangente es impar. Los ceros de la función están en los mismos valores que para el seno, o sea, en $2n\pi$, con n entero. El recorrido va de $-\infty$ a ∞ , ya que la

³En general se dice que una función es periódica si $f(x) = f(x + p)$, para cualquier valor de x . El número p es el periodo de la función.

razón que la define puede tomar cualquier valor. Para las otras funciones se puede hacer un análisis similar y confirmar que es válida la información dada en la tabla siguiente.

| Función | Dominio | Recorrido | Raíces | Paridad |
|----------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------|---------|
| $\text{sen } \theta$ | \mathbb{R} | $[-1, 1]$ | $2n\pi$ | impar |
| $\text{cos } \theta$ | \mathbb{R} | $[-1, 1]$ | $(n - 1/2)\pi$ | par |
| $\text{tg } \theta$ | $\mathbb{R} - \{(n - 1/2)\pi\}$ | \mathbb{R} | $2n\pi$ | impar |
| $\text{ctg } \theta$ | $\mathbb{R} - \{2n\pi\}$ | \mathbb{R} | $(n - 1/2)\pi$ | par |
| $\text{sec } \theta$ | $\mathbb{R} - \{(n - 1/2)\pi\}$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | \emptyset | par |
| $\text{csc } \theta$ | $\mathbb{R} - \{2n\pi\}$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | \emptyset | impar |

Las gráficas de estas funciones están en la figura 1.17.

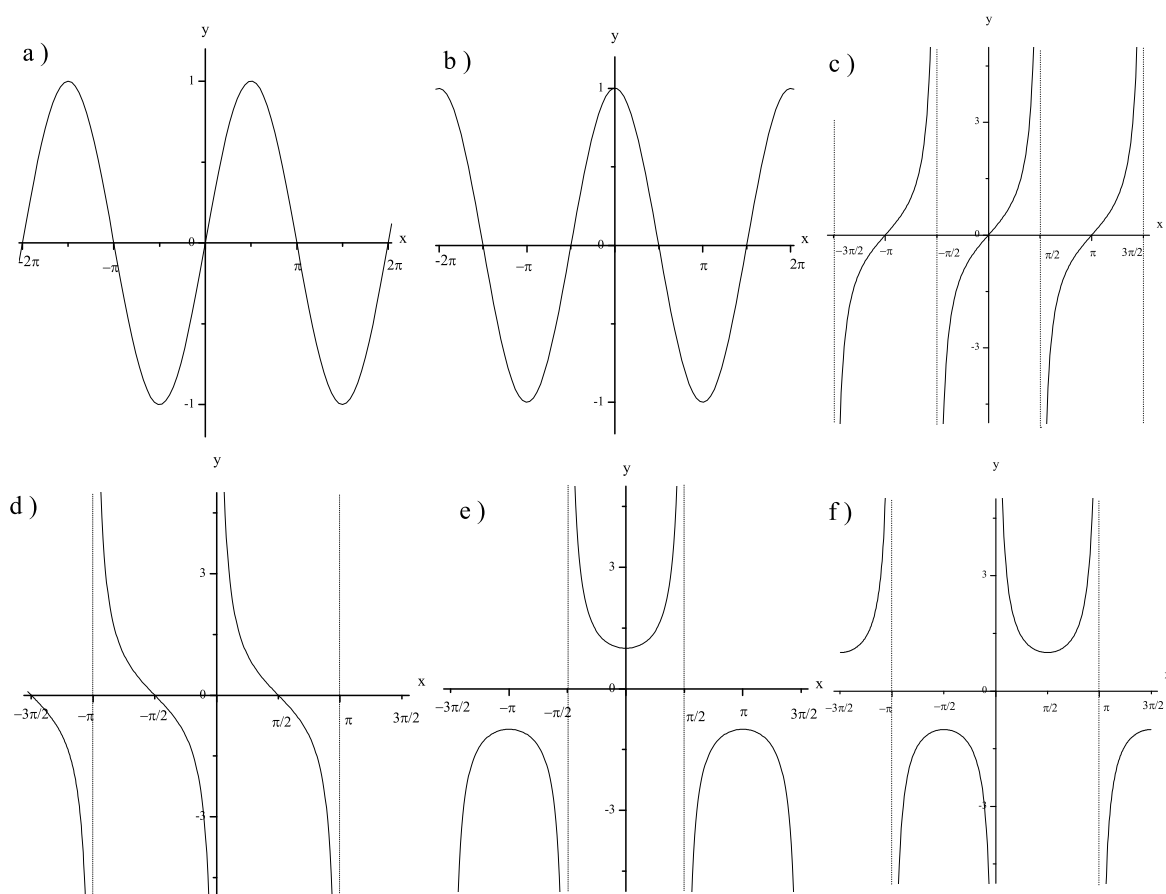


Figura 1.17: Gráfica de las funciones trigonométricas: a) $\text{sen } \theta$, b) $\text{cos}(\theta)$, c) $\text{tg}(\theta)$, d) $\text{ctg}(\theta)$, e) $\text{sec}(\theta)$, f) $\text{csc}(\theta)$

1.8.2. Función exponencial

Recordemos que al elevar una cantidad a cierta potencia, tenemos una base y un exponente. Cuando se fija el valor de la base y se varía el exponente, tenemos una función exponencial.

Como base se puede tomar cualquier número positivo diferente de 1 (pues este valor sólo nos daría una función constante). Los exponentes que se usen pueden tener cualquier valor, por lo que su dominio son todos los números reales. Como al elevar a cualquier potencia siempre se obtiene un número positivo, el recorrido consta de todos los números reales positivos. Esto indica que la función exponencial no tiene raíces. Tampoco tiene paridad.

Si se tiene que $f(x) = a^x$, con a positivo, se cumple lo siguiente

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (1.15)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (1.16)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (1.17)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (1.18)$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad (1.19)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \quad (1.20)$$

Si bien es posible utilizar cualquier número como base para las funciones exponenciales, en la práctica lo común es utilizar al 10 y al número e (que se definirá más adelante, pero su valor aproximado es 2.71828182846) como bases de las funciones exponenciales. En estos casos las funciones son crecientes. La figura 1.18 muestra las gráficas de estas funciones.

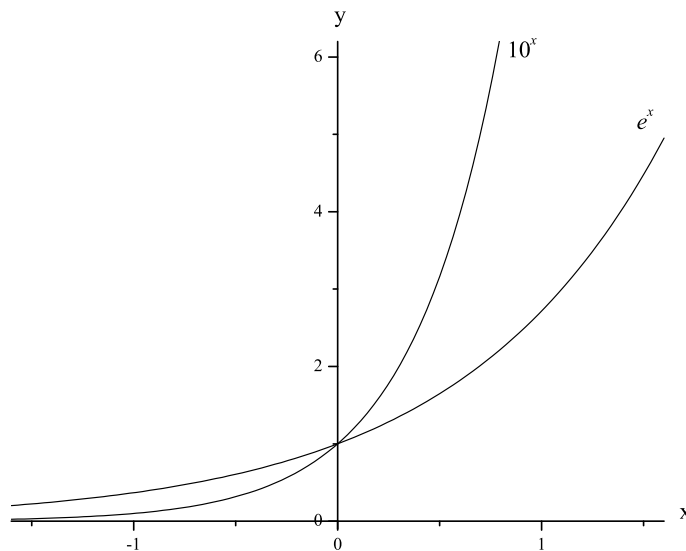


Figura 1.18: Gráficas de las funciones $f(x) = 10^x$ y $f(x) = e^x$

1.8.3. Funciones hiperbólicas

En algunas aplicaciones del cálculo se usan ciertas combinaciones de las funciones exponenciales a las que se les llama *funciones hiperbólicas*, por poseer propiedades análogas a las de las funciones trigonométricas (también llamadas *funciones circulares*).

Las combinaciones en cuestión son

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \quad (1.21)$$

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad (1.22)$$

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \quad (1.23)$$

$$\operatorname{ctgh} \theta = \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta} \quad (1.24)$$

$$\operatorname{sech} \theta = \frac{1}{\cosh \theta} \quad (1.25)$$

$$\operatorname{csch} \theta = \frac{1}{\sinh \theta}. \quad (1.26)$$

La analogía se ve en la figura 1.19, donde al ángulo θ le corresponde el punto P y con ello ciertos valores (x, y) a los que se les asignan los valores $x = \cosh \theta$ y $y = \sinh \theta$. Haciendo uso de las definiciones de las funciones hiperbólicas, es fácil verificar la siguiente identidad fundamental

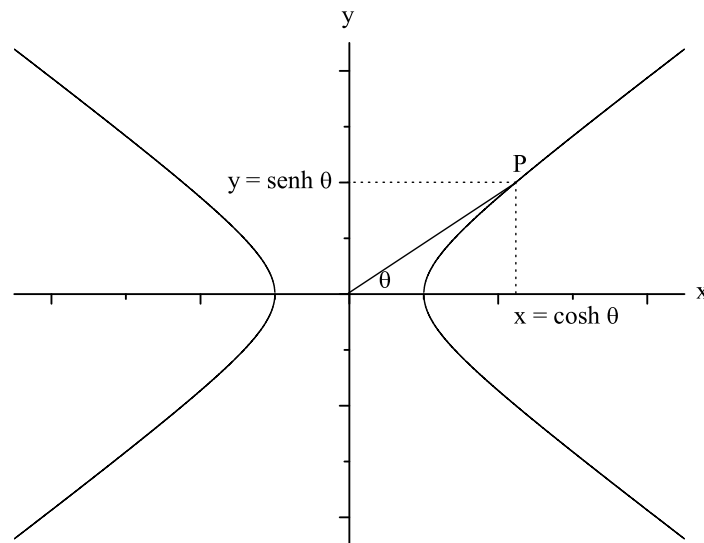


Figura 1.19: Definición de las funciones hiperbólicas

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1. \quad (1.27)$$

Existen otras identidades similares que no se darán aquí (al final del libro se presentan tablas de identidades). La tabla siguiente resume las características fundamentales de las funciones hiperbólicas.

| Función | Dominio | Recorrido | Raíces | Paridad |
|------------------------------|----------------------|----------------------------------|-------------|---------|
| $\sinh \theta$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} | 0 | impar |
| $\cosh \theta$ | \mathbb{R} | $[1, \infty)$ | \emptyset | par |
| $\operatorname{tgh} \theta$ | \mathbb{R} | $(-1, 1)$ | 1 | impar |
| $\operatorname{ctgh} \theta$ | \mathbb{R} | $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ | \emptyset | impar |
| $\operatorname{sech} \theta$ | \mathbb{R} | $(0, 1]$ | \emptyset | par |
| $\operatorname{csch} \theta$ | $\mathbb{R} - \{0\}$ | $\mathbb{R} - \{0\}$ | \emptyset | impar |

La figura 1.20 muestra las gráficas de estas funciones.

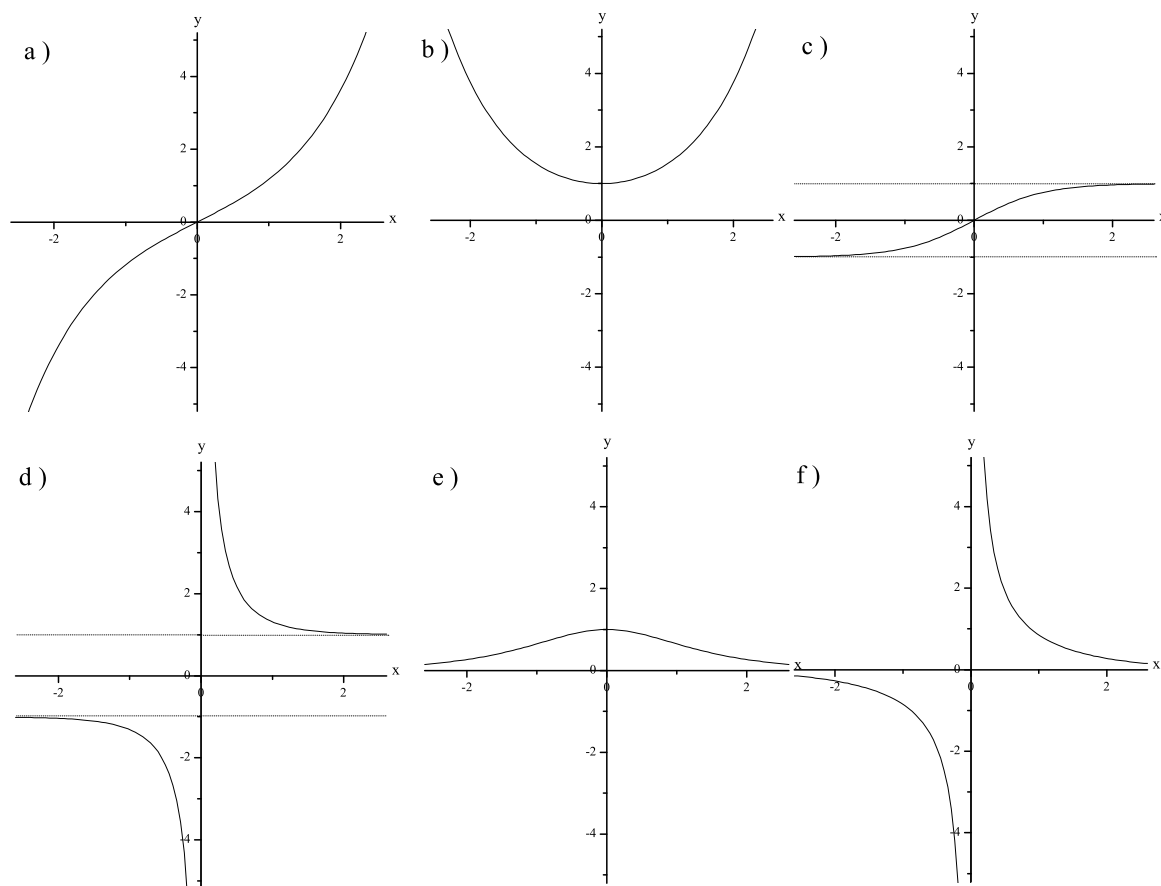


Figura 1.20: Gráfica de las funciones hiperbólicas: a) $\sinh \theta$, b) $\cosh(\theta)$, c) $\operatorname{tgh}(\theta)$, d) $\operatorname{ctgh}(\theta)$, e) $\operatorname{sech}(\theta)$, f) $\operatorname{csch}(\theta)$

Ejercicios

Encontrar dominio y recorrido de las siguientes funciones y graficarlas.

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = 2 - \cos x$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [1, 3]$ |
| 2. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ | R: $D_f : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\}$, $R_f : \mathbb{R}$ |
| 3. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [-1, 1]$ |
| 4. $f(x) = -2 \operatorname{sen} \pi x$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [-2, 2]$ |
| 5. $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} (x - \frac{\pi}{6})$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ |
| 6. $f(x) = \cos x $ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [0, 1]$ |
| 7. $f(x) = e^x + 1$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : (1, \infty)$ |
| 8. $f(x) = e^{x+1}$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : (0, \infty)$ |
| 9. $f(x) = e^{ x }$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : (0, \infty)$ |
| 10. $f(x) = 3 - e^x$ | R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : (-\infty, 3)$ |

1.9. Transformación de funciones

Las funciones conocidas se pueden transformar en otras nuevas, a partir de ciertas operaciones entre ellas. Sea $f(x)$ una función conocida. A continuación damos las principales operaciones que transforman esta función conocida en funciones nuevas.

Traslaciones

Si a la función $y = f(x)$ le sumamos una constante c , la función se trasladará verticalmente c unidades sobre el eje y .

Si al argumento x de la función $y = f(x)$ le restamos una constante c , de tal modo que tengamos $y = f(x - c)$, la función se trasladará c unidades en dirección horizontal sobre el eje de las x .

Ejemplo

Graficar $f(x) = x^2 + 2$.

Solución

La función $y = x^2 + 2$ tiene una gráfica igual a la de la función $y = x^2$, pero desplazada dos unidades hacia arriba, como se ve en la figura 1.21.

Ejemplo

Graficar la función $f(x) = (x - 2)^2$.

Solución

La gráfica de la función $y = (x - 2)^2$ es igual a la de $y = x^2$, pero desplazada dos unidades a la derecha, según se ve en la figura 1.22.

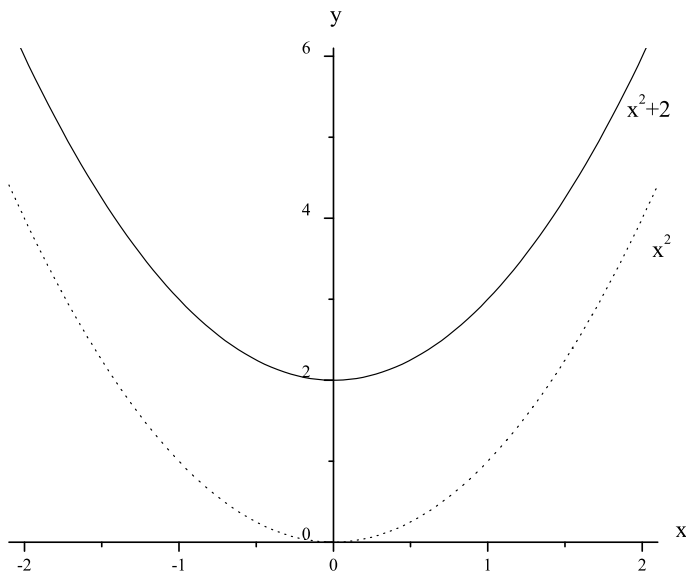


Figura 1.21: Gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2$

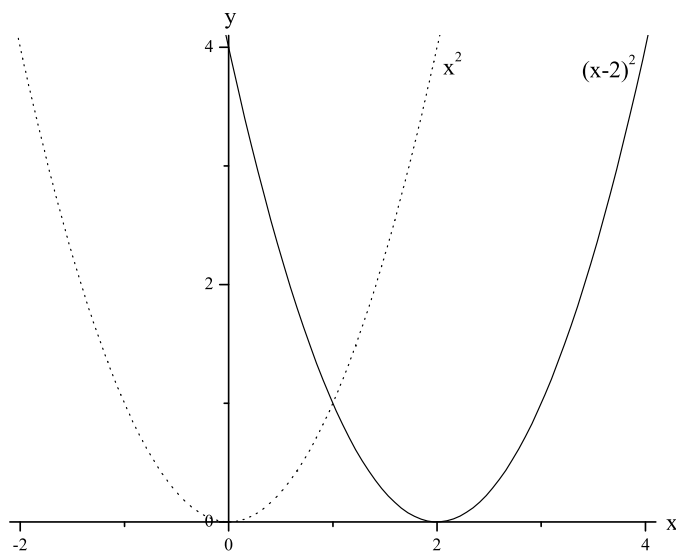


Figura 1.22: Gráfica de la función $f(x) = (x - 2)^2$

Alargamientos (o compresiones)

Si en la función $y = f(x)$ hacemos la operación $y = cf(x)$, la función original se alarga c veces en la dirección vertical.

Haciendo $y = \frac{f(x)}{c}$, la función se comprime c veces verticalmente.

Si hacemos $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$, la función se alarga c veces horizontalmente.

Haciendo $y = f(cx)$, la función se comprime horizontalmente c veces.

Ejemplo

La función $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$ hace que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se alargue al triple en la dirección del eje y . La figura 1.23 muestra la gráfica de ambas funciones, para que se vea el efecto de esta transformación.

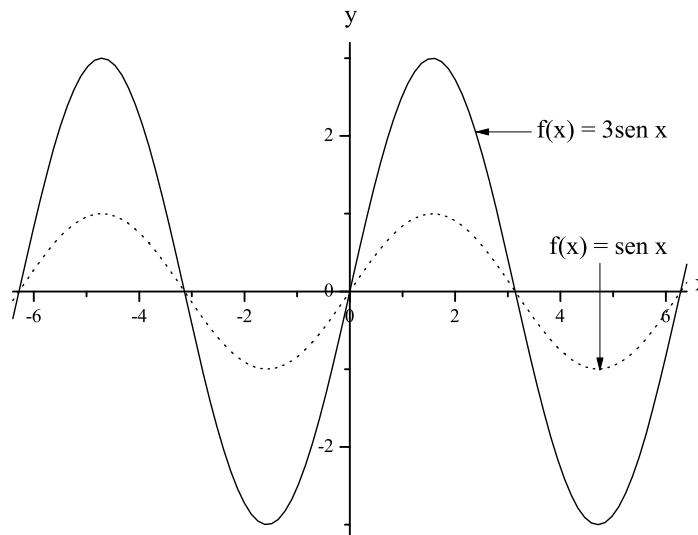


Figura 1.23: Funciones $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$

Ejemplo

La función $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$ hace que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se comprima a la tercera parte en la dirección del eje x . La figura 1.24 muestra la gráfica de ambas funciones, para que se vea el efecto de esta transformación.

Reflexiones

La operación $y = -f(x)$ refleja a $f(x)$ con respecto al eje x .

La operación $y = f(-x)$ refleja a $f(x)$ con respecto al eje y .

Ejemplo

La función $y = -\sqrt{x}$ refleja hacia abajo a la función \sqrt{x} , como se ve en la figura 1.25.

La función $y = \sqrt{-x}$ refleja hacia la izquierda a la función $\sqrt{-x}$, como se ve en la figura 1.26.

Ejercicios

Graficar las siguientes funciones, y dar su dominio y recorrido.

1. $f(x) = -\frac{1}{x-2}$

R: $D_f : \mathbb{R} - \{2\}$, $R_f : \mathbb{R} - \{0\}$

2. $f(x) = 2 - \cos x$

R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [1, 3]$

3. $f(x) = \operatorname{tg}(2 - x)$

R: $D_f : \mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{4}\}$, $R_f : \mathbb{R}$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : \mathbb{R}$

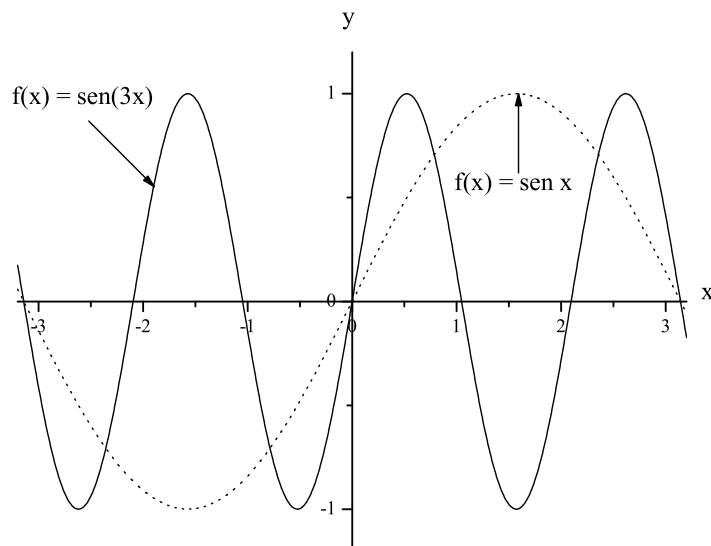


Figura 1.24: Funciones $f(x) = \text{sen}(3x)$ y $f(x) = \text{sen } x$

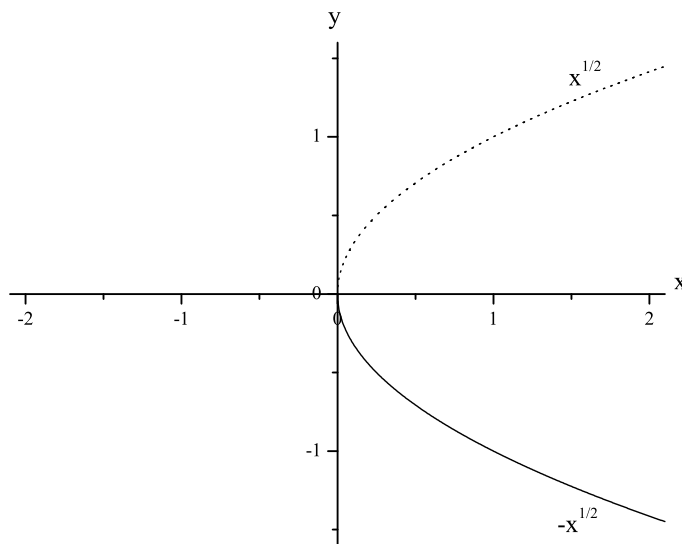


Figura 1.25: Gráfica de la función $f(x) = -\sqrt{x}$

- | | | |
|-----|--|--|
| 5. | $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : [-1, 1]$ |
| 6. | $f(x) = x^2 + 2x + 3$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : [2, \infty)$ |
| 7. | $f(x) = \frac{1}{x-3}$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R} - \{3\}, R_f : \mathbb{R} - \{0\}$ |
| 8. | $f(x) = -2 \text{sen } \pi x$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : [-2, 2]$ |
| 9. | $f(x) = \frac{1}{3} \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ |
| 10. | $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R} - \{-1\}, R_f : \mathbb{R} - \{2\}$ |

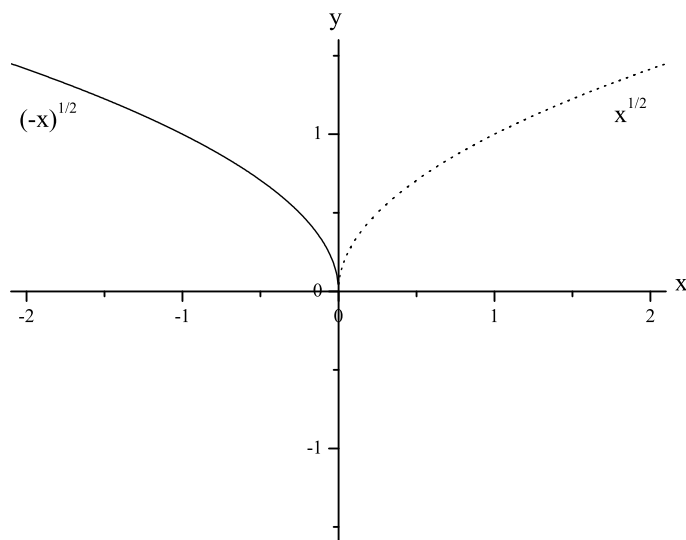


Figura 1.26: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{-x}$

- | | |
|---|--|
| 11. $f(x) = 1 + 2x - x^2$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : [2, \infty)$ |
| 12. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 3$ | $\mathbb{R}: D_f : [-4, \infty), R_f : [-3, \infty)$ |
| 13. $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ | $\mathbb{R}: D_f : [-1, \infty), R_f : (-\infty, 2]$ |
| 14. $f(x) = (x-1)^3 + 2$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : \mathbb{R}$ |
| 15. $f(x) = 3 - e^x$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : (-\infty, 3)$ |
| 16. $f(x) = 2 + 5(1 - e^{-x})$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : (2, \infty)$ |
| 17. $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ | $\mathbb{R}: D_f : [-2, \infty), R_f : [1, \infty)$ |
| 18. $f(x) = (x-1)^4 - 1$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : [-1, \infty)$ |
| 19. $f(x) = 3 - 2 \operatorname{sen} x$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : [1, 5]$ |
| 20. $f(x) = 1 - e^{-x}$ | $\mathbb{R}: D_f : \mathbb{R}, R_f : (-\infty, 1)$ |

1.10. Funciones definidas por secciones

Existen funciones que tienen diferentes fórmulas de definición en diferentes partes de su dominio. Estas funciones se utilizan con más frecuencia de lo que parecería a primera vista, como se verá más adelante. Para definir funciones así, es necesario dar cuidadosamente los intervalos de validez de cada sección. Sin embargo existen muchas funciones que se usan tanto, que no es necesario definir cada vez los intervalos de validez, sino que se utiliza alguna notación especial previamente convenida. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ se define como $f(x) = x$ para $x \geq 0$, y como $f(x) = -x$ para $x < 0$. La gráfica de esta función se ve en la figura 1.27.

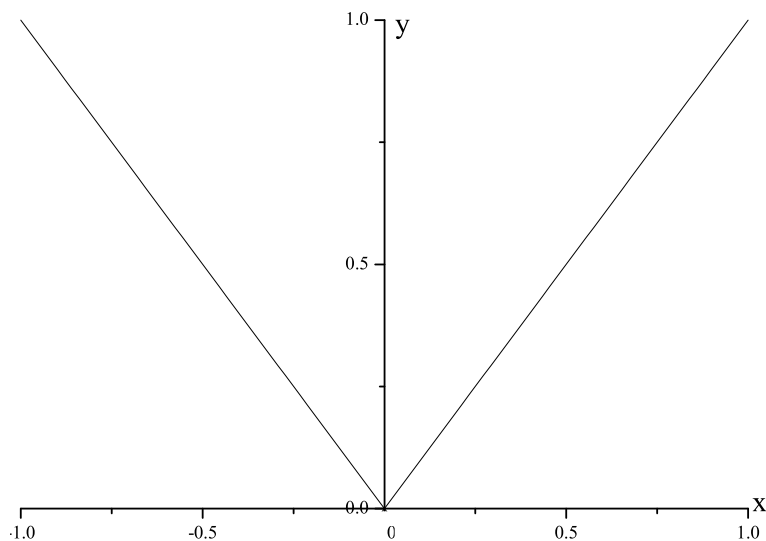


Figura 1.27: Gráfica de la función $f(x) = |x|$

Ejemplo

La función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

tiene como dominio de definición el intervalo $[-2,2]$, su recorrido es $[-1,2]$, y su gráfica es la que se muestra en la figura 1.28.

Ejemplo

La función

$f(x) = [x]$ se define como la parte entera de x , y se denomina función *máximo entero*. En este libro se le llamará a veces función *escalera*. Algunos valores de $f(x)$ son

$$f(1.3) = 1$$

$$f(\pi) = 3$$

$$f(-5) = -5.$$

La gráfica de esta función es la que se muestra en la figura 1.29.

Ejemplo

La función $y = 2[x]$ hace que la función *escalera* vaya subiendo los escalones de 2 en 2, como vemos en la figura 1.30 (se da la función $f(x) = [x]$ como referencia).

La función $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ es la función *escalera* con los escalones más largos (al doble). Esto se muestra en la figura 1.31.

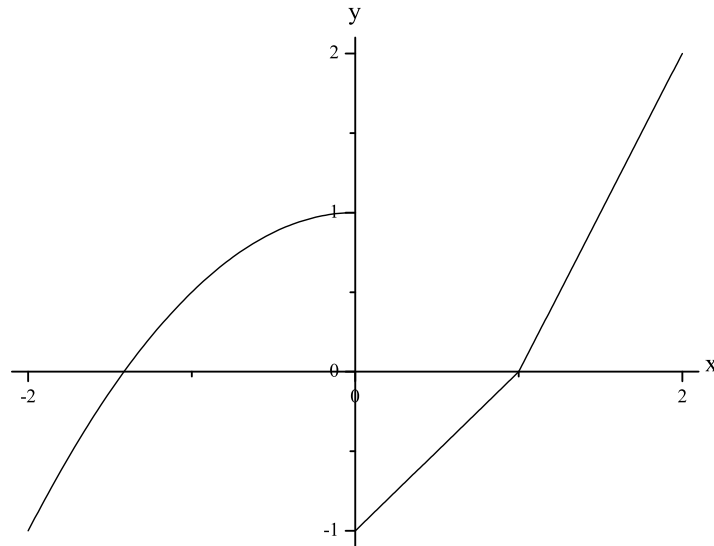
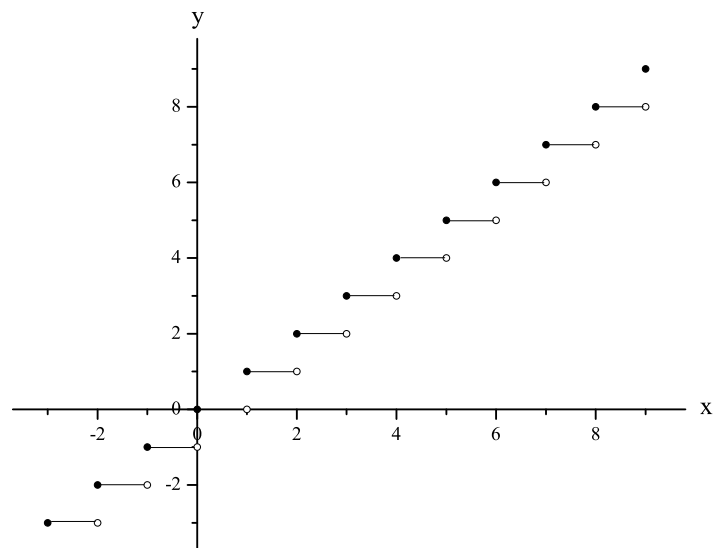


Figura 1.28: Gráfica de una función definida por secciones

Figura 1.29: Gráfica de la función $f(x) = [x]$, máximo entero de x (o *escalera*)**Ejemplo**

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1} + 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

encontrar dominio, rango, intervalos de monotonía y dibujar su gráfica.

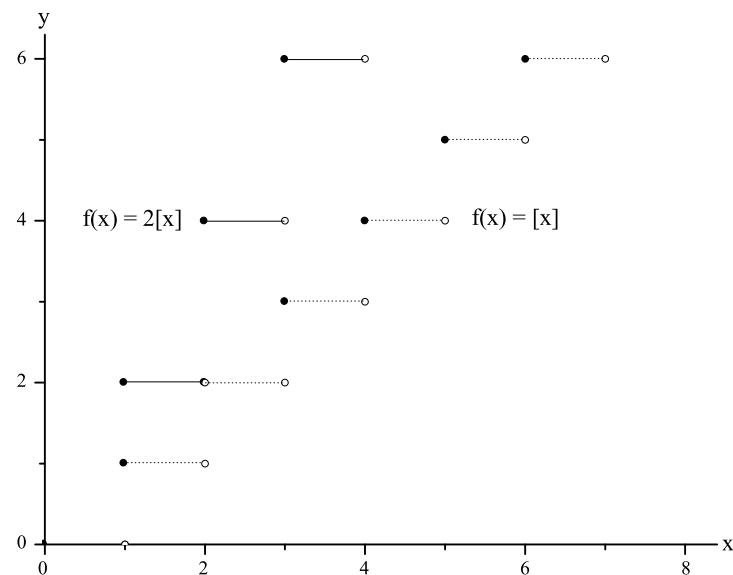


Figura 1.30: Gráfica de la función $f(x) = 2[x]$

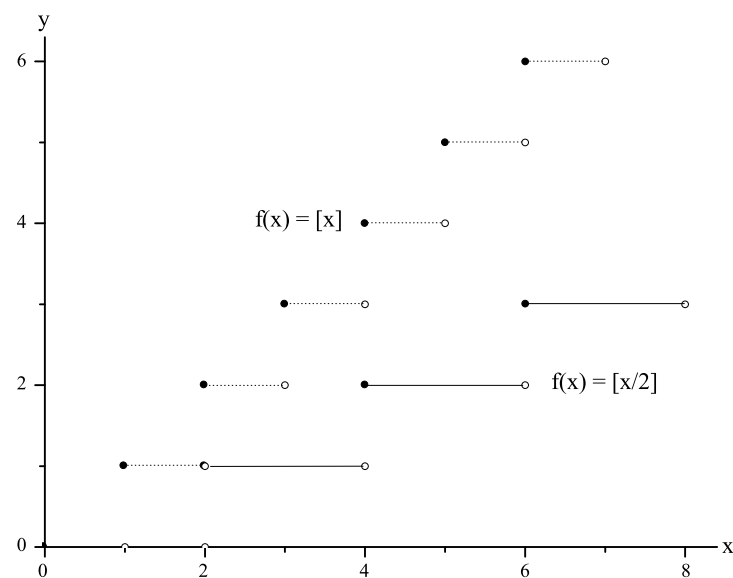


Figura 1.31: Gráfica de la función $f(x) = [x/2]$

Solución

Esta es una función definida en dos secciones diferentes. Trabajaremos con cada una por separado. Para la primera, tenemos a la función $y = \sqrt{x}$ recorrida un lugar hacia la derecha (nos lo dice el -1 dentro de la raíz), y recorrida un lugar hacia arriba (nos lo dice el +1 luego de la raíz). Esto lo representamos gráficamente como se muestra en la figura 1.32.

Para la otra sección tenemos a la función $y = |x|$ recorrida en un lugar hacia abajo (nos lo indica el -1), por lo que completamos la gráfica como se ve en la figura 1.33.

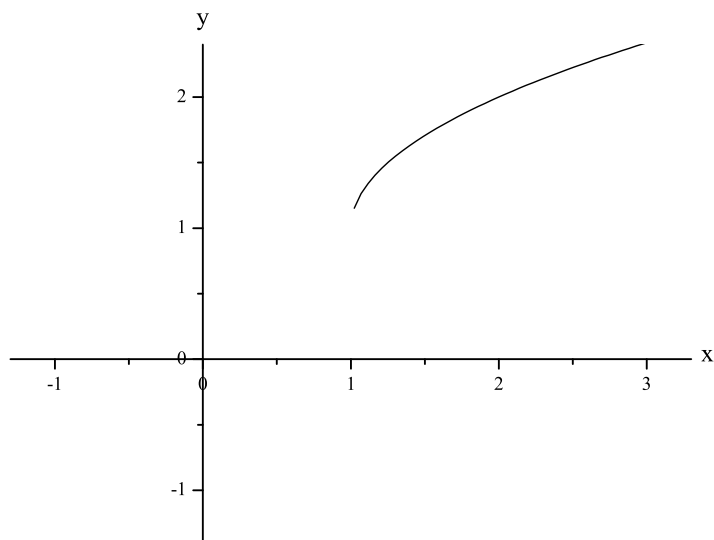


Figura 1.32: Gráfica de una función definida por secciones

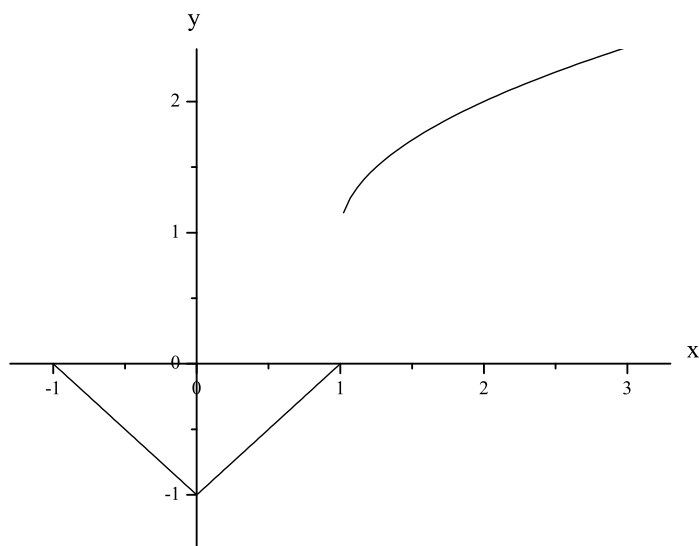


Figura 1.33: Gráfica de una función definida por secciones

Con todo lo aprendido en este capítulo, ya somos capaces de analizar el comportamiento de varias funciones y determinar sus características principales. Podemos graficar muchas funciones sin necesidad de tabular, reconociendo las transformaciones de las funciones básicas.

Ejemplo

Graficar la función

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 6$$

y encontrar dominio, rango, raíces, paridad e intervalos de monotonía.

Solución

Esta función es un polinomio, por lo cual sabemos que tendrá como máximo dos raíces (podría tener sólo una, o ninguna). Pero no sabemos dibujarla a primera vista, sino que hay que trabajar un poco con ella. Primero reescribimos

$$f(x) = 2(x^2 + 4x + 3) = 2(x^2 + 4x + 4 - 1),$$

este paso nos sirvió para completar el cuadrado, por lo cual podremos escribir la función como

$$f(x) = 2(x^2 + 4x + 4) - 2 = 2(x + 2)^2 - 2,$$

que es la función $y = x^2$ recorrida 2 lugares hacia la izquierda, alargada 2 veces en la dirección del eje y , y recorrida dos lugares hacia abajo. La gráfica resultante aparece en la figura 1.34.

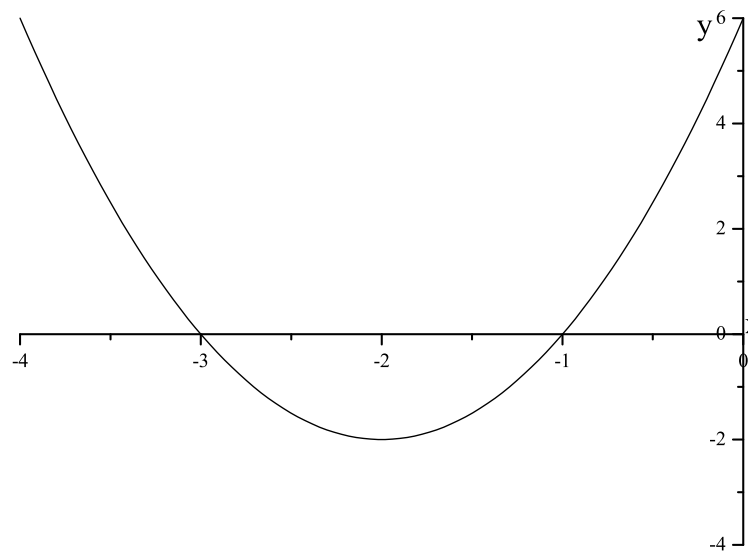


Figura 1.34: Gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

Sabemos que para cualquier polinomio el dominio son todos los reales. De la gráfica vemos que su rango es $-2 \leq x < \infty$. Podemos factorizar la función como: $f(x) = 2(x + 1)(x + 3)$, por lo cual concluimos que las raíces son $x = -3$ y $x = -1$. Las raíces se obtienen también de la gráfica si se tiene suficiente resolución, pero generalmente será al revés: al obtener las raíces, sabremos por cuáles puntos corta al eje de las x . Al sustituir x por $-x$ vemos que: $f(-x) = 2x^2 - 8x + 6$, lo que indica que no hay paridad, como se ve también en la gráfica. La función es decreciente en $-\infty < x \leq -2$, y es creciente en $-2 \leq x < \infty$.

Ejemplo

Graficar la función $y = 1 - 2/x$. Encontrar dominio, rango, raíces, paridad e intervalos de monotonía.

Solución

Reconocemos a ésta como la función $y = 1/x$, con las siguientes modificaciones: el 2 nos indica que está estirada al doble con respecto al eje y , el signo nos indica que está reflejada con respecto al eje x , el 1 nos indica que está recorrida una unidad hacia arriba. Con esto la gráfica queda como en la figura 1.35.

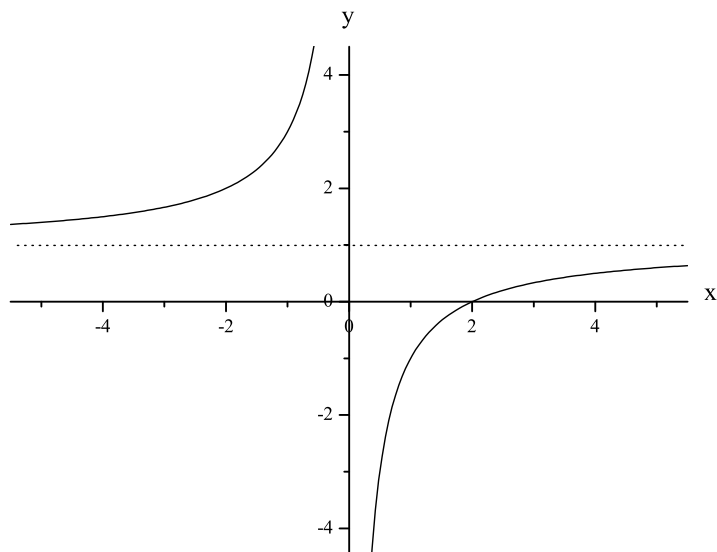


Figura 1.35: Gráfica de la función $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$

De la gráfica vemos que el dominio son todos los reales, excepto el 0 (pues en ese valor no está definida la expresión). El rango son todos los reales excepto el 1, no tiene paridad y es creciente en todo su dominio. Las raíces se hallan al igualar a cero y resolver

$$1 - 2/x = 0,$$

$$x = 2/1 = 2,$$

que coincide con lo que se ve en la gráfica.

Ejercicios

Para cada función obtener dominio, recorrido, raíces, y realizar un esbozo gráfico.

1. $f(x) = |x - 3| + 2$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [2, \infty)$, \emptyset
2. $f(x) = 3|x - 2| - 1$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [-1, \infty)$, $\{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$
3. $f(x) = |x - 1/2|$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [0, \infty)$, $\{\frac{1}{2}\}$
4. $f(x) = |-x + 3|$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [0, \infty)$, $\{3\}$
5. $f(x) = 1 + 2|3x + 6|$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [1, \infty)$, $\{-1\}$
6. $f(x) = [x + 1]$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : [2, \infty)$, $[-1, 0)$
7. $f(x) = [3x]$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : \mathbb{N}$, $[0, 1)$
8. $f(x) = -1 + 3[-x + 2]$ R: $D_f : \mathbb{R}$, $R_f : k \in \mathbb{N} | k = 3n - 1$, \emptyset
9. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq -1 \\ 3(x - 1) & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x} - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$ R: $D_f : [-4, 5]$, $R_f : [-6, 17]$, $\{1\}$

10. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & \text{si } -5 \leq x < -2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 - 2x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ R: $D_f : [-5, 3], R_f : [-5, -1] \cup (-1/2, -1/5) \cup [0, \sqrt{21}], \{-2\}$
11. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ 2 - x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 1 - 2x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ R: $D_f : [-4, 4], R_f : [-7, -2], \emptyset$
12. $f(x) = \begin{cases} |2x| & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{si } x > 2, \end{cases}$ R: $D_f : \mathbb{R}, R_f : [0, \infty) \cup \{-2\}, \{0\}$
13. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ |x - 8| & \text{si } x > 0 \end{cases}$ R: $D_f : \mathbb{R}, R_f : [0, \infty), \{8\}$
14. $f(x) = \begin{cases} 3|x - 2| & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{x-5} & \text{si } x \geq 3, \end{cases}$ R: $D_f : \mathbb{R} - \{5\}, R_f : (-\infty, -1/2] \cup [0, \infty), \{2\}$
15. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 4 - x & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ R: $D_f : (-4, 3], R_f : [-1/2, -1/5] \cup (1, 3], \emptyset$
16. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 3x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ R: $D_f : [-3, 2], R_f : [-5, 6], \{-2\}$
17. $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } -5 \leq x \leq -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$ R: $D_f : [-5, 4], R_f : [-1, 4], \{-4, 2\}$
18. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 8 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ R: $D_f : \mathbb{R}, R_f : (-8, -6] \cup [1, \infty), \emptyset$
19. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 1 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$ R: $D_f : \mathbb{R}, R_f : (-\infty, -3) \cup [0, 4], (-\infty, 0]$
20. $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } -5 \leq x \leq -2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ R: $D_f : [-5, 0) \cup (0, 3], R_f : [-9, -6] \cup (-1, \infty), \{\sqrt{2}\}$

1.11. Combinación de funciones

Se pueden combinar dos o más funciones conocidas para formar funciones nuevas, mediante las operaciones básicas conocidas, suma, resta, multiplicación y división. La nueva función resultante tendrá como dominio la intersección de los dominios de las funciones originales.

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
3. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

En el caso de la división se excluye, además, a los valores de x que hagan que $g(x)$ sea cero.

Al hacer operaciones con funciones, a veces es posible graficar cada función independientemente y hacer la operación indicada entre algunos puntos notables de las gráficas por separado. No siempre es fácil encontrar la gráfica de la combinación, pero por lo menos tendremos una idea aproximada del comportamiento general.

Ejemplo

Graficar $y = x + \frac{1}{x}$ en $1 \leq x \leq 5$.

Solución

La función $y = x + 1/x$ se obtiene de sumar las dos funciones conocidas $f(x) = x$ con $g(x) = 1/x$. Si graficamos cada función por separado y tratamos de sumar veremos que: como la gráfica de $y = 1/x$ es decreciente, mientras que la de $y = x$ es creciente, la gráfica combinada tendrá regiones de crecimiento y de decrecimiento, por lo que por fuerza habrá un mínimo en algún punto. Éste resulta ser el punto en que se cruzan las gráficas. Lo anterior se muestra en la figura 1.36.

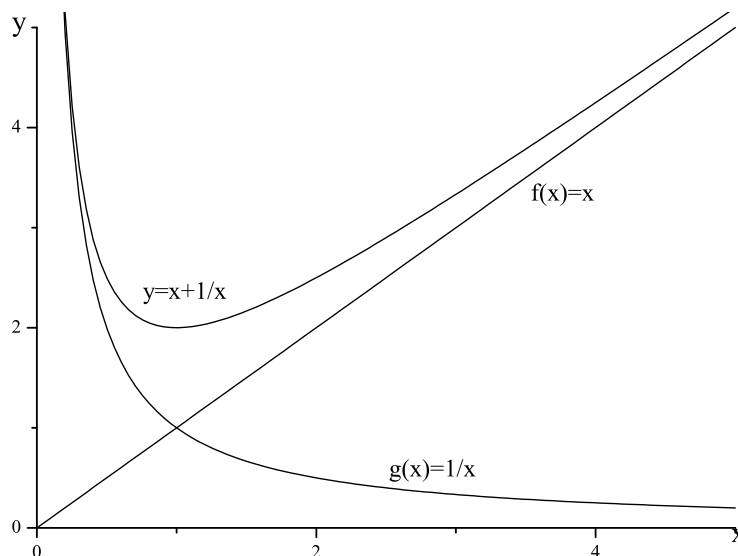


Figura 1.36: Gráfica de la función $f(x) = x + 1/x$

Ejemplo

La función $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ se obtiene al dividir $y = x$ entre $y = x^2 + 2$, como se muestra en la figura 1.37.

1.12. Composición de funciones

También se pueden obtener nuevas funciones por composición. La composición de funciones se denota con $(f \circ g)(x)$ y se define como

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]. \quad (1.28)$$

El dominio de una composición es aquel para el que $g(x)$ está definida, y $f[g(x)]$ también lo está. Esto no necesariamente coincide con los dominios de f y g , ni con la intersección de ambos dominios.

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^{3/2}$. Con esto tendremos que

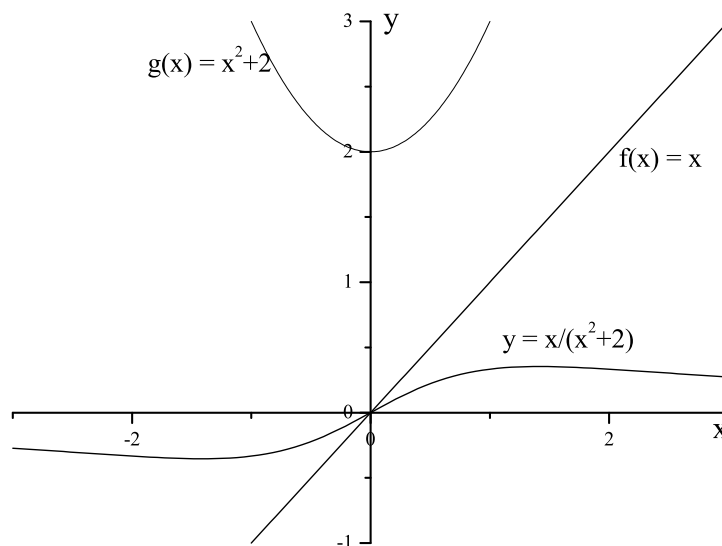


Figura 1.37: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

$$(f \circ g)(x) = 2x^{3/2} - 1$$

$$(g \circ f)(x) = (2x - 1)^{3/2}.$$

El dominio de f son todos los reales. Para g son sólo los reales no negativos. Pero para la composición $(g \circ f)$ deben ser los reales que cumplan $2x - 1 \geq 0$, lo cual no es la intersección de los dominios de f y g .

Obviamente, se pueden componer tres o más funciones, simplemente haciendo

$$(f \circ g \circ h)(x) = f\{g[h(x)]\}$$

etc.

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x$, $g(x) = 1/x$ y $h(x) = x^3$. Entonces

$$(f \circ g \circ h)(x) = 2/x^3$$

$$(g \circ h \circ f)(x) = 1/8x^3$$

etc.

Ejercicios

Encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$ para cada par de funciones

1. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$ R: $f \circ g = 18x^2 + 21x + 6$, $g \circ f = 6x^2 - 3x + 2$
2. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$ R: $f \circ g = 27x^6 - 9x^4 - 3x^2 + 1$, $g \circ f = 3x^6 + 12x^5 + 12x^4 - 1$
3. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2$ R: $f \circ g = \sqrt{x^2-1}$, $g \circ f = x-1$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3 + 2x$ R: $f \circ g = \frac{1}{x^3+2x}$, $g \circ f = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}$
5. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$ R: $f \circ g = \sqrt{1+\sqrt{1-x}}$, $g \circ f = \sqrt{1-\sqrt{1+x}}$
6. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ R: $f \circ g = \frac{1-x}{2}$, $g \circ f = \frac{2}{x} - 1$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ R: $f \circ g = \operatorname{sen}(1 - \sqrt{x})$, $g \circ f = 1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$ R: $f \circ g = \sqrt{-x}$, $g \circ f = \sqrt{1-\sqrt{x^2-1}}$
9. $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 - 9$ R: $f \circ g = \ln(x^2 - 9)$, $g \circ f = (\ln x)^2 - 9$
10. $f(x) = e^x$, $g(x) = \operatorname{tg} x$ R: $f \circ g = e^{\operatorname{tg} x}$, $g \circ f = \operatorname{tg}(e^x)$

1.13. Funciones inversas

Frecuentemente, en lugar de querer calcular el valor de una función $f(x)$ para algún valor de x conocido, lo que se necesita es saber para qué valor de x la función $f(x)$ adquiere algún valor en particular, digamos y . Esto se puede hacer mediante el cálculo de la *función inversa* a $f(x)$, denotada como $f^{-1}(x)$. Para que esto sea posible, es necesario que entre x y $f(x)$ exista una correspondencia biunívoca (o uno-a-uno), esto es, que a cada valor de $f(x)$ le corresponda un solo valor de x . De aquí se deduce que no toda función tendrá inversa.

La función $f^{-1}(x)$ inversa de $f(x)$ cumple lo siguiente

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x. \quad (1.29)$$

Además tiene las propiedades siguientes

1. dominio de $f^{-1} =$ recorrido de f
2. dominio de $f =$ recorrido de f^{-1}
3. $y = f(x)$ es equivalente a $x = f^{-1}(y)$
4. la inversa de f^{-1} es f
5. la función inversa f^{-1} de f es única

Para determinar la función inversa de una función f (en caso de existir), se usa la ecuación 1.29, y se despeja f^{-1} . En la práctica puede ser muy difícil despejar f^{-1} .

Ejemplo

Encontrar la inversa de la función

$$f(x) = \frac{1}{2x - 3}.$$

Solución

De la ecuación 1.29 tenemos que

$$f(f^{-1}) = \frac{1}{2(f^{-1}) - 3} = x,$$

que aplicando álgebra se puede transformar en

$$\frac{1}{x} = 2f^{-1} - 3,$$

o bien

$$f^{-1}(x) = \frac{\frac{1}{x} + 3}{2} = \frac{3x - 1}{2x}.$$

La gráfica de la función inversa de $f(x)$ tiene la propiedad útil de ser una reflexión de $f(x)$ con respecto a la recta $y = x$, como se muestra en la figura 1.38.

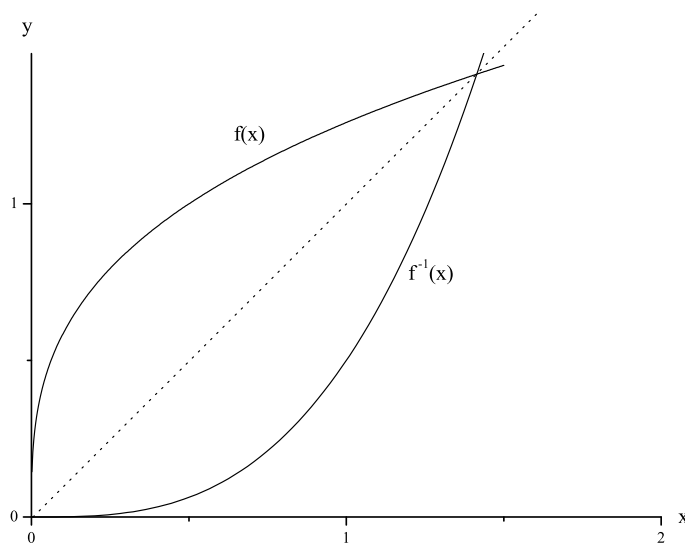


Figura 1.38: Gráfica de una función $f(x)$ y su inversa

Para muchas funciones que no tienen inversa, se usan intervalos donde la correspondencia es biunívoca para definir inversas. Esto sucede por ejemplo en las funciones trigonométricas que, como vimos antes, son periódicas. En ellas se toma un intervalo, frecuentemente de la misma longitud que su periodo o de la mitad, y se define una inversa para ese único intervalo.

1.13.1. Funciones trigonométricas inversas

Las inversas de las funciones trigonométricas también son funciones trascendentes, por lo que será necesario dar tablas análogas a las que se usaron antes. Tales funciones a veces se representan en la forma (por ejemplo) $f(\theta) = \text{sen}^{-1} \theta$. Sin embargo, puesto que esto puede confundirse con una potencia negativa ⁴, aquí se utilizará sólo la notación (por ejemplo) $f(\theta) = \text{arc sen } \theta$, que aunque es más larga, no se presta a confusión alguna.

La tabla siguiente resume las características de éstas, mientras que la figura 1.39 muestra las gráficas de cada una de ellas.

| Función | Dominio | Recorrido | Raíces | Paridad |
|--------------------------|--|-----------------------------------|-------------|---------|
| $\text{arc sen } \theta$ | $[-1, 1]$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | 0 | impar |
| $\text{arc cos } \theta$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ | 1 | ninguna |
| $\text{arc tg } \theta$ | \mathbb{R} | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | 0 | impar |
| $\text{arcctg } \theta$ | \mathbb{R} | $(0, \pi)$ | \emptyset | ninguna |
| $\text{arcsec } \theta$ | $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ | $[0, \infty)$ | 1 | ninguna |
| $\text{arccsc } \theta$ | $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ | $\mathbb{R} - \{0\}$ | \emptyset | impar |

1.13.2. Funciones logarítmicas

Las funciones exponenciales tienen como inversas a las funciones logarítmicas. La función logaritmo nos da el valor del exponente al que se elevó la base para obtener el valor de la función. La definición del logaritmo es

$$y = f(x) = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y. \quad (1.30)$$

Como las funciones exponenciales sólo toman valores positivos, el dominio de una función logarítmica consiste en todos los números reales positivos, mientras que el recorrido consta de todos los números reales.

Los logaritmos tienen las siguientes propiedades

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (1.31)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (1.32)$$

$$\log_a(x^n) = n \log_a x \quad (1.33)$$

$$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x. \quad (1.34)$$

Como se dijo en las funciones exponenciales, aunque la base puede tener cualquier valor, lo más frecuente es tener como bases los números 10 y e . En este último caso es costumbre escribir $\log_e x = \ln x$, y se le llama *logaritmo natural* de x . Las calculadoras de bolsillo usan la notación $\log x = \log_{10} x$ y $\ln x = \log_e x$, y en general no usan otras bases. Para poder calcular logaritmos de otras bases se usa la identidad

⁴Esto es, frecuentemente se comete el error de escribir (por ejemplo) $\text{sen}^{-1} x = \frac{1}{\text{sen } x} = \text{csc } x$, error que se debe evitar a toda costa.

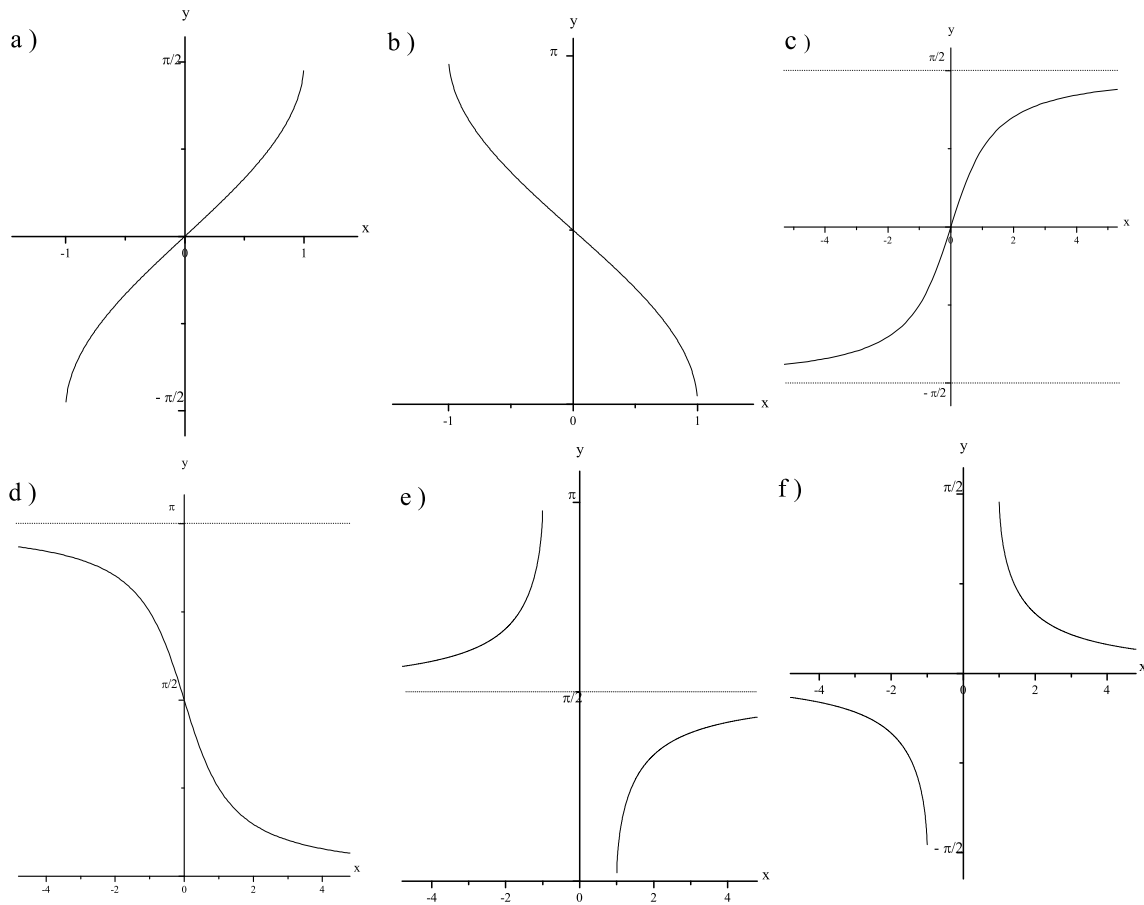


Figura 1.39: Gráficas de las funciones trigonométricas inversas: a) $\arcsen x$, b) $\arccos x$, c) $\arctg x$, d) $\text{arcctg } x$, e) $\text{arcsec } x$, f) $\text{arccsc } x$

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (1.35)$$

La figura 1.40 muestra las gráficas de las funciones logarítmicas.

1.13.3. Funciones hiperbólicas inversas

Las inversas de las funciones hiperbólicas también se representarán como arcos, esto es, la inversa de $\sinh \theta$ es $\text{arsenh } \theta$. La tabla siguiente resume las características de estas funciones, mientras que la figura 1.41 muestra las gráficas.

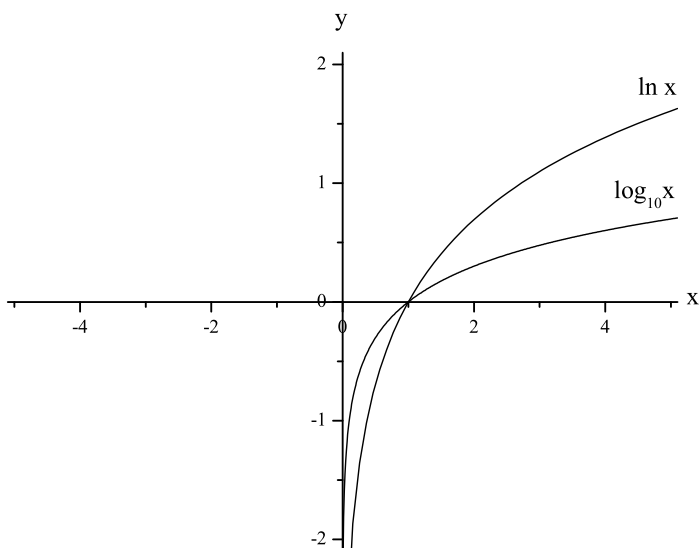


Figura 1.40: Gráfica de las funciones logarítmicas

| Función | Dominio | Recorrido | Raíces | Paridad |
|---------------------------------|----------------------------------|----------------------|-------------|---------|
| $\operatorname{arsenh} \theta$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} | 1 | impar |
| $\operatorname{arccosh} \theta$ | $[1, \infty)$ | $[0, \infty)$ | 1 | ninguna |
| $\operatorname{arctgh} \theta$ | $(-1, 1)$ | \mathbb{R} | 1 | impar |
| $\operatorname{arctgh} \theta$ | $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ | $\mathbb{R} - \{0\}$ | \emptyset | impar |
| $\operatorname{arcsech} \theta$ | $(0, 1]$ | $[0, \infty)$ | 1 | ninguna |
| $\operatorname{arcsch} \theta$ | $\mathbb{R} - \{0\}$ | $\mathbb{R} - \{0\}$ | \emptyset | impar |

Como las funciones hiperbólicas son combinaciones de funciones exponenciales, sus inversas pueden calcularse en términos de logaritmos, por medio de las fórmulas

$$\operatorname{arsenh} x = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| \quad (1.36)$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \quad (1.37)$$

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad (1.38)$$

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad (1.39)$$

$$\operatorname{arcsech} x = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| \quad (1.40)$$

$$\operatorname{arcsch} x = \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right|. \quad (1.41)$$

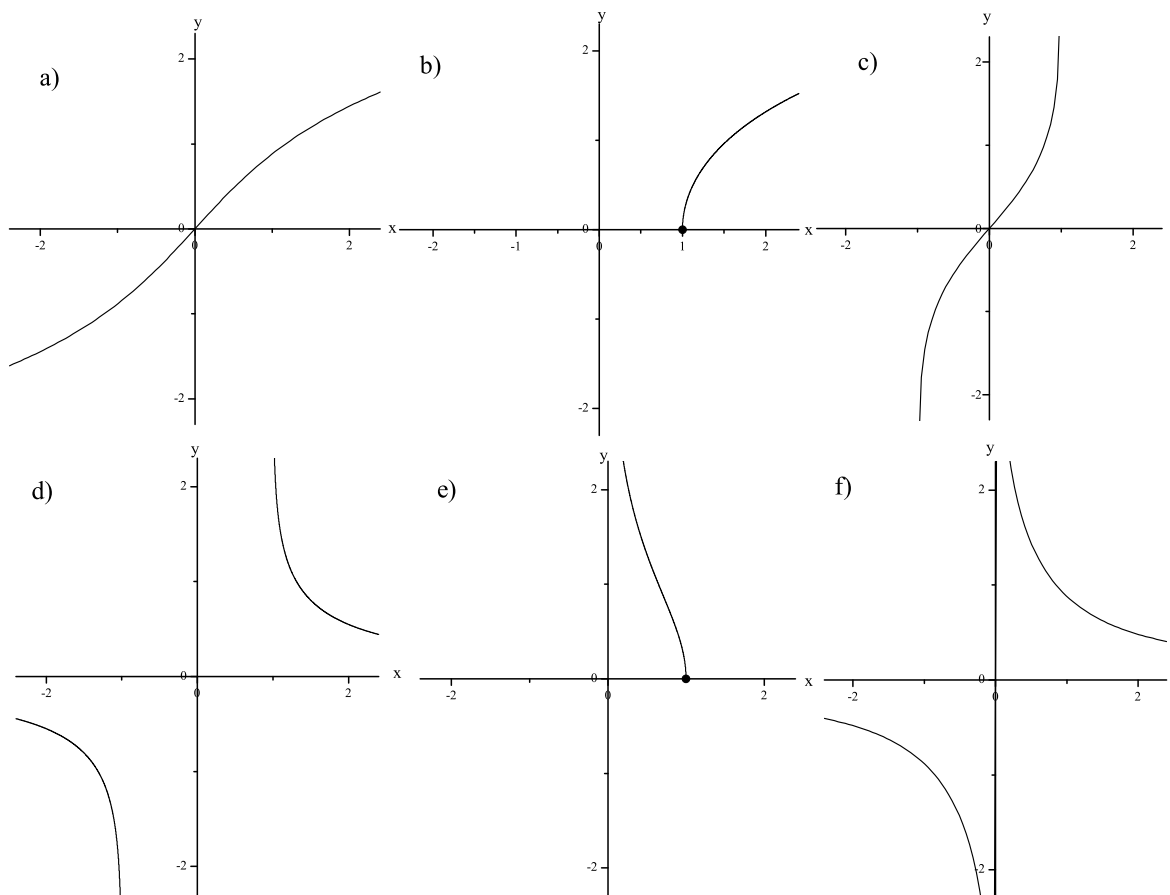


Figura 1.41: Gráficas de las funciones hiperbólicas inversas: a) $\operatorname{arcsenh} x$, b) $\operatorname{arccosh} x$, c) $\operatorname{arctgh} x$, d) $\operatorname{arcctgh} x$, e) $\operatorname{arcsech} x$, f) $\operatorname{arccsch} x$

Ejercicios

Encontrar la inversa de cada función y graficar ambas funciones.

1. $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$ R: $f^{-1}(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$
2. $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ R: $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}$
3. $f(x) = 5 - 4x^3$ R: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{5-x}{4}}$
4. $f(x) = \sqrt{2-5x}$ R: $f^{-1}(x) = \frac{2-x^2}{5}$
5. $f(x) = 2^{10^{-x}}$ R: $f^{-1}(x) = -\log_{10}(\log_2 x)$
6. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x+3)$ R: $f^{-1}(x) = \sin x - 3$
7. $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ R: $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
8. $f(x) = \log_{10}(x+5)$ R: $f^{-1}(x) = 10^x - 5$
9. $f(x) = -\ln x$ R: $f^{-1}(x) = e^{-x}$
10. $f(x) = \ln(-x)$ R: $f^{-1}(x) = -e^x$

1.14. Coordenadas polares

Un sistema alternativo para ubicar un punto P en el plano cartesiano es el de las *coordenadas polares*. Este sistema consiste en dar como coordenadas la distancia r del origen (llamado a veces *polo*) al punto en cuestión, y el ángulo θ que forma el segmento que pasa entre ellos con respecto a la dirección positiva del eje x . Esto se ilustra en la figura 1.42

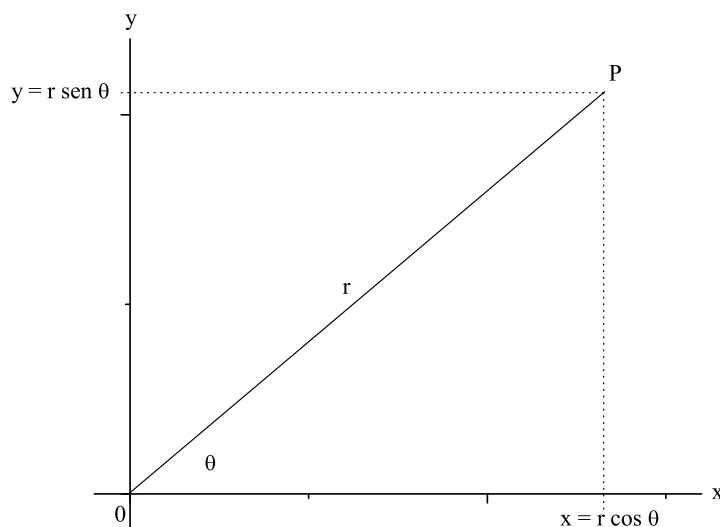


Figura 1.42: Coordenadas polares

Si conocemos las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto, para pasar a coordenadas polares usamos las relaciones siguientes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1.42)$$

poniendo atención al cuadrante donde está ubicado el punto para, de ser necesario, sumar o restar π al ángulo que se obtiene por medio de la calculadora. Si por el contrario, tenemos las coordenadas polares y queremos pasar a coordenadas cartesianas, las relaciones a utilizar son

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1.43)$$

En coordenadas polares se considera a θ como la variable independiente y a r la dependiente, esto es, se tiene $r = f(\theta)$. A pesar de lo anterior, es costumbre especificar las coordenadas polares de un punto en el orden (r, θ) , es decir, primero se da la variable dependiente y después la independiente.

Para representar gráficamente las funciones en coordenadas polares puede hacerse una tabla de valores, dando a θ preferentemente valores que sean fracciones o múltiplos de π y calculando en cada caso r . Si sucede que en algún valor de θ resulta r negativo, se mide el radio en la dirección opuesta a aquella en que se mediría normalmente el ángulo, es decir, el punto quedará en un ángulo π veces mayor que lo que se dio como argumento.

Ejemplo

Graficar la función $r(\theta) = \theta$.

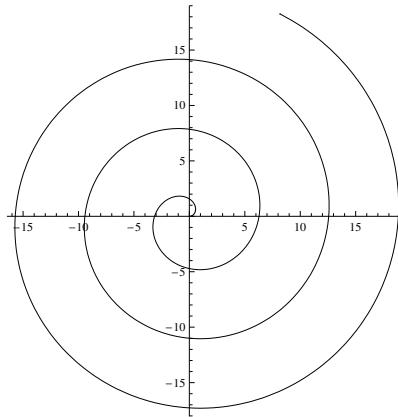
Solución

Figura 1.43: Gráfica de la función $r = \theta$

La tabla de valores siguiente nos muestra los valores calculados para esta función. La gráfica se muestra en la figura 1.43.

| | | | | | | | | | | |
|----------|---|---------|---------|----------|-------|----------|--------|----------|----------|----|
| θ | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | π | $3\pi/2$ | 2π | $9\pi/5$ | $5\pi/2$ | 10 |
| r | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | π | $3\pi/2$ | 2π | $9\pi/5$ | $5\pi/2$ | 10 |

Ejemplo

Graficar la función $r = \cos(5\theta)$.

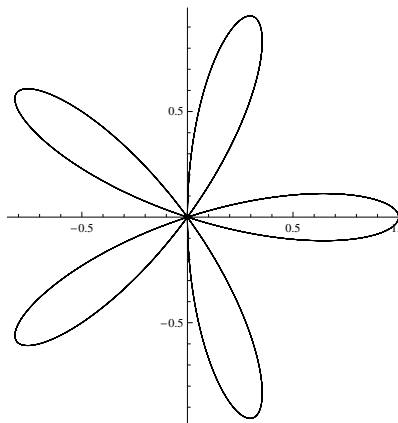
Solución

Figura 1.44: Gráfica de la función $r = \cos(5\theta)$

La siguiente tabla muestra los valores de r para diferentes valores de θ .

| | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|---------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|----------|--------|
| θ | 0 | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ | $5\pi/8$ | $3\pi/4$ | $7\pi/8$ | π | $5\pi/4$ | $3\pi/2$ | $7\pi/4$ | 2π |
| r | 1 | -0.3826 | -0.7071 | 0.9238 | 0 | -0.9238 | 0.7071 | 0.3826 | -1 | 0.7071 | 0 | -0.7071 | 1 |

Para ahorrar trabajo al graficar funciones dadas en coordenadas polares (y también funciones en coordenadas cartesianas), se recomienda utilizar algún programa de computadora.

Ejercicios

Graficar las siguientes funciones

1. $r = \text{sen}(3\theta)$
2. $r = 3(1 + \cos \theta)$
3. $r = 2 \text{sen}(2\theta)$
4. $r^2 = 4 \cos(2\theta)$
5. $r = 5(2 + \text{sen} \theta)$
6. $r = \cos \theta + 2$
7. $r = \text{csc}^2(\theta/2)$
8. $r = \frac{1}{2 - \cos \theta}$
9. $r = \frac{2}{1 - 2 \cos \theta}$
10. $r = \text{sen}(7\theta)$

1.15. Problemas de aplicación

Lo aprendido en las secciones anteriores se aplica continuamente a la solución de problemas, pues en ellos se nos dice únicamente con palabras las condiciones que se requiere satisfacer, mientras que lo que se requiere para tener una caracterización objetiva es alguna relación escrita en forma matemática. Por ejemplo, cuando nos dicen que una cantidad que depende de otra debe estar en cierto intervalo, debemos interpretarlo como en una desigualdad; o cuando se nos requiere encontrar una cantidad sabiendo otras relacionadas, lo que se está haciendo es definir una función sólo con palabras, por lo que debemos ser capaces de traducirla a términos matemáticos.

Cuando tengamos una función definida sólo con palabras, será fundamental poder pasar a la forma algebraica y/o visual para poder resolver el problema. En general, para plantear correctamente un problema es necesario comprender correctamente qué es lo que buscamos, qué es lo que conocemos, además de las relaciones que existan entre las variables involucradas. Para ello frecuentemente es necesario tener a la mano fórmulas geométricas, de física, etc.

Ejemplo

Se desea construir una caja con tapa y base cuadradas de lado x . Se quiere que la longitud x sea al menos de 0.20 m y su altura sea igual al doble de la longitud del lado de la base. Determinar el intervalo de variación de x para que la superficie total de la caja no exceda de 2.5 m².

Solución

Como se requiere que la longitud sea de al menos 0.20 m, la primera restricción es que

$$x \geq 0.20$$

Para la altura h se requiere que

$$h = 2x.$$

La primera contribución a la superficie total será la suma de las áreas de la base y la tapa, que son dos cuadrados de área x^2 cada uno, o sea que éstas contribuyen con un área parcial A_1 dada por

$$A_1 = 2x^2,$$

mientras que la contribución de los cuatro lados de la caja son cuatro rectángulos de área xh cada uno, por lo que su contribución A_2 es

$$A_2 = 4xh = 8x^2,$$

por lo tanto, el área total A será

$$A = 10x^2,$$

y ésta tiene que ser menor que 2.5 m^2 . Esto implica que

$$10x^2 < 2.5.$$

Resolviendo esta desigualdad se tiene que

$$x^2 < 0.25$$

$$|x| < 0.5$$

$$-0.5 < x < 0.5.$$

Recordando la restricción inicial, finalmente tenemos que

$$0.2 \leq x < 0.5.$$

Ejemplo

La relación entre las escalas de temperaturas de Celsius y la de Fahrenheit es lineal. Si se sabe que 0° C corresponde a 32° F , y que 100° C corresponde a 212° F , represente en forma algebraica y visual la temperatura en grados Fahrenheit como función de la temperatura en grados Celsius.

Solución

Como la relación entre ambas escalas es lineal, buscamos la fórmula de transición entre ellas como la ecuación de una recta

$$(y - y_0) = m(x - x_0).$$

En este caso y será la temperatura en grados Fahrenheit y x será la temperatura en grados Celsius. La ecuación queda entonces como

$$(T(^{\circ}\text{F}) - 32) = m(T(^{\circ}\text{C}) - 0),$$

donde m es la pendiente, que se puede encontrar por medio de

$$m = \frac{212\text{ }^{\circ}\text{F} - 32\text{ }^{\circ}\text{F}}{100\text{ }^{\circ}\text{C} - 0\text{ }^{\circ}\text{C}} = \frac{180\text{ }^{\circ}\text{F}}{100\text{ }^{\circ}\text{C}} = \frac{9}{5}\text{ }^{\circ}\text{F}/^{\circ}\text{C}.$$

Entonces

$$T(^{\circ}\text{F}) = \left(\frac{9\text{ }^{\circ}\text{F}}{5\text{ }^{\circ}\text{C}}\right) T(^{\circ}\text{C}) + 32\text{ }^{\circ}\text{F},$$

y la gráfica es la de la figura 1.45.

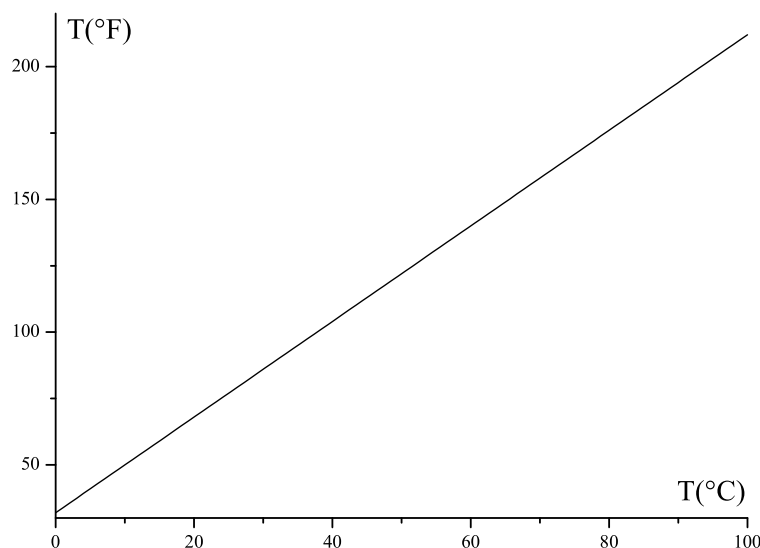


Figura 1.45: Conversión de temperaturas

Ejemplo

Expresa el volumen V de una esfera en función de su área A .

Solución

El área de una esfera es

$$A = 4\pi r^2.$$

El volumen es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Como queremos el volumen en función del área, despejamos r de la fórmula del área

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

y sustituimos en la fórmula para el volumen

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{3/2} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{A^3}{\pi}}.$$

Ejemplo

Un campo petrolero que tiene 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios de petróleo. Por cada nuevo pozo que se perfora, la producción diaria de cada pozo disminuye en 5 barriles. Escribir la producción diaria p del campo petrolero en función del número x de pozos nuevos que se perforen. Construir una gráfica de $p(x)$ y usarla para encontrar el valor de x que maximiza a p .

Solución

Podemos hacer una tabla que nos diga lo que va pasando conforme se agregan pozos nuevos. Sea N el número total de pozos, x el número de nuevos pozos, b el número de barriles que produce cada pozo y $p(x)$ el número total de barriles que se producen

| N | x | b | $p(x)$ |
|-----|-----|-----|--------|
| 20 | 0 | 200 | 4000 |
| 21 | 1 | 195 | 4095 |
| 22 | 2 | 190 | 4180 |

En esta tabla se ve que la producción total $p(x)$ es el producto de N por b . Pero N es simplemente $20 + x$. Por otra parte, b es $200 - 5x$, de manera que se obtiene para $p(x)$

$$p(x) = (20 + x)(200 - 5x) = -5x^2 + 100x + 4000.$$

Para la gráfica manipulamos el polinomio de la siguiente manera:

Primero sacamos el -5 como factor común

$$p(x) = -5(x^2 - 20x - 800)$$

Ahora completamos un cuadrado dentro del paréntesis

$$p(x) = -5(x^2 - 20x + 100 - 900) = -5(x^2 - 20x + 100) + 4500 = -5(x - 10)^2 + 4500.$$

De este modo, sabemos que la gráfica es la de una parábola recorrida 10 unidades a la derecha, estirada 5 veces, invertida y subida 4500 unidades. La gráfica pues, es la que se muestra en la figura 1.46.

Y de la gráfica se ve que la producción máxima es de 4500 pozos, lo cual se alcanza cuando se perforan 10 pozos nuevos.

Ejemplo

Cuando abordamos un taxi, el taxímetro marca al inicio del viaje \$ 4.80 (el banderazo), y después va dando saltos de \$ 0.65 por cada 45 segundos de tiempo transcurrido. Dar una expresión para el costo total de un viaje que dure t segundos.

Solución

La forma más fácil de resolverlo es considerando lo que sucede en instantes de tiempo que sean múltiplos de 45, con lo que tendríamos la tabla siguiente



Figura 1.46: Producción de los pozos petroleros

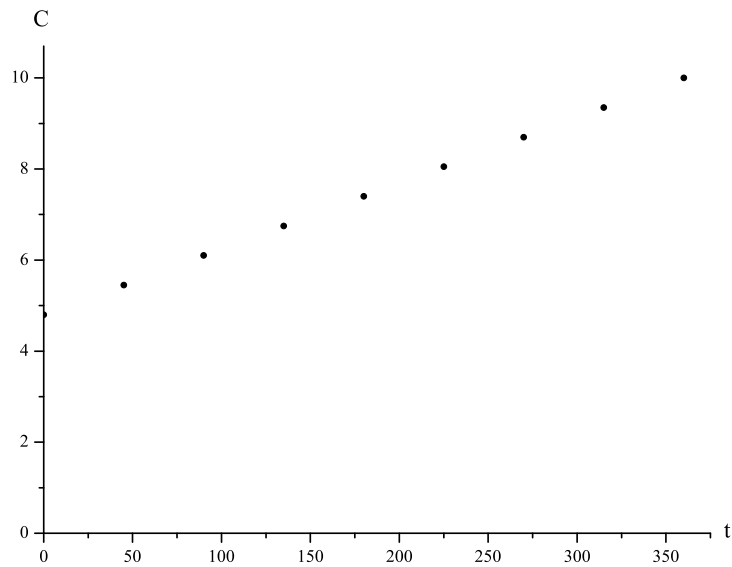


Figura 1.47: Costos cada 45 segundos

| | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| t | 0 | 45 | 90 | 135 | 180 | 225 | 270 | 316 | 360 |
| C | 4.80 | 5.45 | 6.10 | 6.75 | 7.40 | 8.05 | 8.70 | 9.35 | 10 |

Si hacemos la gráfica para estos puntos, obtendríamos algo como lo que se muestra en la figura 1.47.

Para completar la gráfica, NO debe cometerse el error de tratar de hacer pasar una recta a través de esos puntos; recuérdese que el taxímetro va dando saltos. La gráfica que describe esta situación es algo parecido a la función máximo entero, como la de la figura 1.48.

Y la ecuación que describe esto será

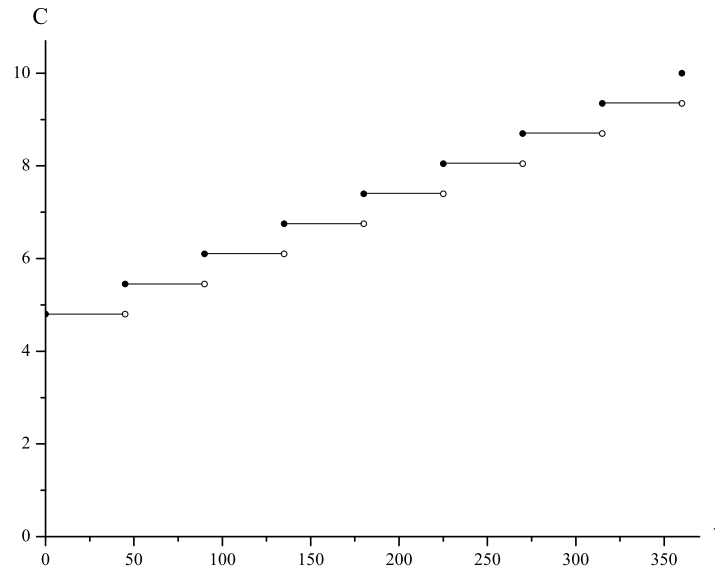


Figura 1.48: Costo para cualquier tiempo

$$C = 4.80 + 0.65 \left[\frac{t}{45} \right].$$

Ejercicios

- Un rectángulo tiene un perímetro de 80 cm. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud x de uno de sus lados.
R: $A(x) = x(40 - x)$
- Un rectángulo tiene 100 cm^2 de área. Expresar su perímetro P como función de la longitud x de su base. Si x está entre 8 y 12 cm, ¿qué valores puede tomar el perímetro?
R: $P = 2x + \frac{200}{x}$, $30 \leq P \leq 40\frac{2}{3}$
- Un rectángulo cuyo perímetro fijo es 36 gira en torno a uno de sus lados x para generar un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de este cilindro en función de la longitud x del lado sobre el que giró.
R: $V = \pi x(18 - x)^2$
- Una caja rectangular tiene 120 cm^3 de volumen y una base cuadrada de longitud x en su arista. Expresar el área A de la caja como función de x . Si x está entre 10 y 15 cm, ¿qué valores puede tomar el área de la base?
R: $A = 2x^2 + \frac{480}{x}$, $100 \leq A_b \leq 225 \text{ cm}^2$
- Una fábrica tiene capacidad para producir de 0 a 100 refrigeradores diarios. Los gastos fijos de la planta son de \$20000, el material y mano de obra para producir un refrigerador es de \$1500. Escribir una fórmula para el costo total C de producir x refrigeradores al día.
R: $C = 20000 + 1500x$
- Un tractor cuesta \$ 120 000 y cada año se devalúa 8% de su precio original. Encuentre una fórmula para el valor V del tractor después de t años.
R: $V = 120000 - 9600[t]$
- Una agencia de renta de automóviles cobra \$260 diarios por el alquiler de un automóvil, más \$4.50 por km recorrido. a) Escribir una fórmula para el costo total de la renta por día. b) Si se renta un carro por un día, ¿cuántos km se podrían recorrer por \$ 2 000?
R: a) $C = 260 + 4.5[x]$, b) 386
- Un recipiente para almacenamiento en forma de prisma rectangular con la parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3 . La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta \$12 el metro cuadrado y el material para los lados cuesta \$16 el metro cuadrado. Expresar el costo del material como función del ancho de la base.
R: $C = 24x^2 + \frac{480}{x}$

9. De acuerdo a la ley de Boyle, la presión p (en libras por pulgada cuadrada) y el volumen v (en pulgadas cúbicas) de cierto gas satisfacen la condición $pv = 800$. ¿Cuál es el intervalo de valores posibles de la presión, dado que $100 \leq v \leq 200$? R: $4 \leq p \leq 8$
10. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es de 10 m, expresar el área A de la ventana en función de su ancho x . R: $A = 5x + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)x^2$
11. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 8 m, expresar el área $A(x)$ de la ventana en función de su ancho x . R: $A = \frac{16x - (2+\pi)x^2}{4}$
12. En un triángulo rectángulo de base $b = 10$ y altura $h = 6$, está inscrito un rectángulo. Expresar el área de dicho rectángulo A como función de su base x (Indicación: ubicar al triángulo en un sistema de coordenadas, con los catetos en los ejes). R: $A = 6x - 0.6x^2$
13. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene el volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encontrar una función que represente el volumen de aire necesario para inflarlo desde un radio de r cm hasta otro de $r + 1$ cm. R: $A(r) = \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3r + 1)$
14. Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 96 ft/s, por lo que su altura t segundos después es $y = 96t - 16t^2$ ft. a) Determinar la máxima altura que alcanza la pelota construyendo una gráfica de y como función de t . b) Encontrar el intervalo de tiempo durante el cual la pelota está a más de 48 pies del suelo. R: a) 144 ft, b) $0.55 \leq t \leq 5.45$
15. El aire seco al moverse hacia arriba se expande y se enfría a razón de aproximadamente 1°C por cada 100 m de elevación, hasta cerca de 12 km. a) Si la temperatura del suelo es de 25°C , escriba una fórmula para la temperatura a una altura h . b) ¿Qué intervalo de temperaturas debe esperarse si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 km? R: $T(h) = 25 - \frac{h}{100}$, $h \in [0, 12000]$, $-25 \leq T \leq 25$
16. Una estrella variable tiene un brillo de magnitud promedio 4.0 y una variación de ± 0.35 magnitudes en un periodo de 5.4 días. Suponiendo que la variabilidad sigue la forma de una función seno, dar el brillo B de la estrella como función del tiempo t . R: $B(t) = 4 + 0.35 \sin\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$
17. La fórmula para la expansión de una varilla metálica sujeta a cambios pequeños de temperatura es

$$\ell - \ell_0 = a\ell_0(T - T_0),$$

en donde ℓ es la longitud del objeto a la temperatura T , ℓ_0 es la longitud inicial del objeto a la temperatura inicial T_0 , y a es una constante que depende del tipo de metal. a) Expresar ℓ como función lineal de T . Encontrar la pendiente y la intersección con el eje y . b) Supóngase que se tiene una varilla con longitud inicial de 100 cm a 20°C fabricada con un metal con $a = 10^{-5}$ cm/ $^\circ\text{C}$. ¿Qué longitud tendrá a los 90°C ? c) ¿Cuál es la temperatura máxima que puede tener para no deformarse más de 0.01 %?

$$\text{R: a) } \ell = a\ell_0 T + \ell_0(1 - aT_0), \text{ b) } 1.0007 \text{ m, c) } T_{\max} = 30^\circ\text{C}$$

18. Un avión que vuela a una altitud de 6 millas y con una velocidad (constante) de 650 mi/h pasa por una estación de radar en el instante $t = 0$. a) Expresar la distancia horizontal d recorrida por el avión (en millas) como función de t , para $t \geq 0$. b) Expresar la distancia s entre el avión y la estación de radar, como función de d . c) Expresar la distancia s ahora como función de t . R: a) $d = 650t$, b) $s(d) = \sqrt{36 + d^2}$, c) $s(t) = \sqrt{36 + (650t)^2}$
19. Se va a construir una caja sin tapa con una pieza de cartón rectangular, que mide 60 por 40 cm, cortando cuadrados de lado x en cada esquina y doblando por la línea punteada, según se muestra en la figura 1.49. Encontrar una función que nos de el volumen V de la caja como función de x . R: $V(x) = x(60 - 2x)(40 - 2x)$
20. Se va a fabricar una lata cilíndrica con la tapa superior abierta. Para un volumen dado V , expresar el área de la lata como función del radio r del cilindro. R: $A(r) = \pi r^2 + 2\frac{V}{r}$
21. Se quiere fabricar un tanque compuesto de un cilindro y dos semiesferas a los lados, que tenga capacidad para 1000 litros de gas. Encontrar una función para encontrar el área del material que se va a utilizar como función del radio del cilindro (que es el mismo que el de las semiesferas). R: $A(r) = \frac{4}{3}\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

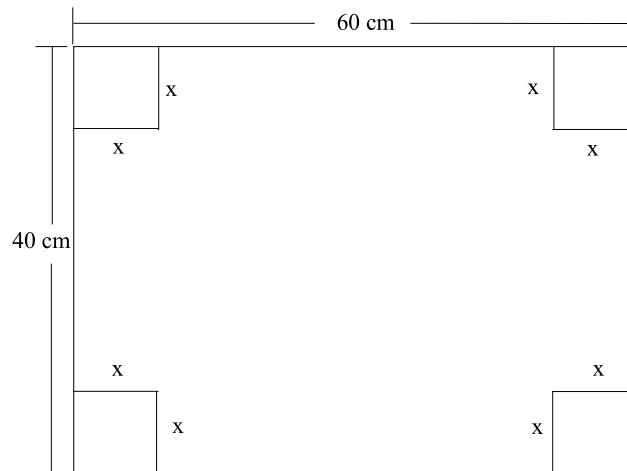


Figura 1.49: Pieza de cartón para construir la caja

22. En los extremos de cierta calle de un pueblo, que mide 2 km, hay dos fiestas con música que emiten ruido a volúmenes diferentes V_1 y V_2 , con $V_2 = 4V_1$. Si la intensidad del sonido varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia, encontrar una función que nos de el volumen del escándalo en algún punto intermedio, a una distancia x medida desde V_1 . [Indicación: Suponer que la constante de proporcionalidad para la intensidad del sonido vale 1] R: $I(x) = V_1 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(2-x)^2} \right)$
23. Petra está a 6 km de la playa en un bote y se dirige a su pueblo, que está a 12 km en línea recta desde el punto más cercano a la costa (que llamaremos A). Ella rema a 4 km/h y camina a 10 km/h. Encontrar una función que exprese el tiempo que tarda Petra en llegar a su pueblo como función de la distancia x desde el punto A hasta el punto en que desembarca para seguir caminando R: $t(x) = \frac{\sqrt{6^2+x^2}}{4} + \frac{12-x}{10}$
24. Se debe fabricar un canal abierto en forma de prisma trapezoidal. El fondo y los costados del canal deben medir 10 cm y los costados deben estar igualmente inclinados respecto al fondo. Encontrar una función para hallar el ancho del canal en la parte superior, como función de el ángulo de inclinación de los costados. R: $A(\theta) = 10(1 + 2 \operatorname{sen} \theta)$
25. Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio R . Encontrar el volumen del cilindro como función del radio r del cilindro. R: $V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$

Capítulo 2

Límites

Algunos procesos en el análisis de funciones nos llevan a la definición del límite. Iniciaremos el estudio del concepto de límite al tratar con la tangente a una curva.

2.1. Tangente a una curva

Para una circunferencia es muy fácil decir que una tangente es una recta que la toca en sólo un punto. Cualquier otra recta que la toque en dos puntos se le llama secante. También es muy fácil dar la pendiente de la recta tangente, sabiendo que siempre es perpendicular al radio que pase por el punto de tangencia.

Pero si tratamos de definir una tangente a otra clase de curva, nos encontramos con dificultades, pues una recta que sólo la corte en un punto puede no ser tangente sino secante, mientras que una tangente podría tocarla en más de un punto. Esto se ilustra en la figura 2.1.

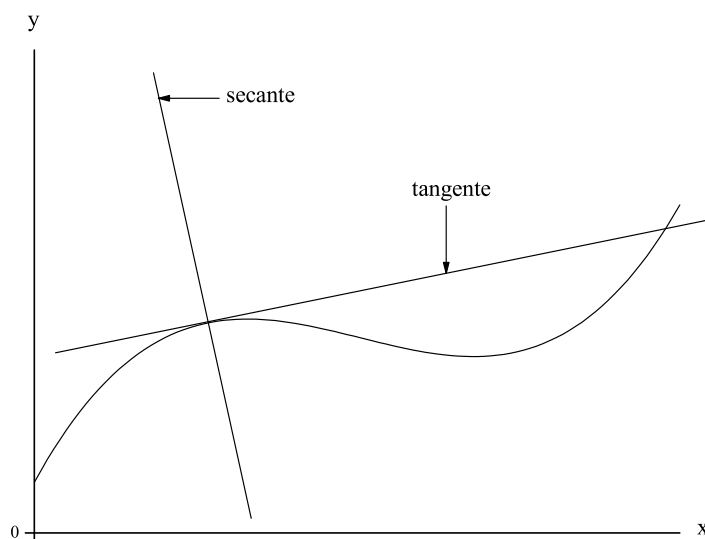


Figura 2.1: Curva con tangente que la corta

Y por supuesto que, al tratar de determinar la pendiente de la recta tangente, no tenemos un método fácil, ya que esto dependerá de cada curva en particular.

Como una forma de aproximar la recta tangente a una curva en un punto, tomemos una secante a la curva en cuestión, y démosle al otro punto coordenadas cada vez más próximas a las del punto de tangencia. Conforme ambos puntos se acercan, vemos que el valor de la pendiente que calculamos se acerca a un cierto número. A este número es al que llamamos *límite*.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $P(1, 1)$.

Solución

Para resolver este problema necesitamos hallar la pendiente de la recta tangente, por lo que es necesario tomar otro punto muy cercano a P , al que llamaremos Q . La pendiente de la secante que pasa por los puntos P y Q es

$$m_{PQ} = \frac{x^3 - 1}{x - 1},$$

donde Q puede estar antes o después de P . Por ejemplo, para $x = 0.5$ tendremos

$$m = \frac{(0.5)^3 - 1}{0.5 - 1} = 1.75,$$

mientras que para $x = 1.5$ tendremos que

$$m = \frac{(1.5)^3 - 1}{1.5 - 1} = 4.75.$$

A continuación una breve tabla de valores cercanos a 1 y las pendientes que resultan de ellos

| | | | | | | | | |
|-----|------|--------|----------|--------|------|--------|----------|--------|
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | 1.1 | 1.01 | 1.001 | 1.0001 |
| m | 2.71 | 2.9701 | 2.997001 | 2.9997 | 3.31 | 3.0301 | 3.003001 | 3.0003 |

Observando esta tabla, se puede concluir que el valor más apropiado debe ser 3. En efecto es así, y la pendiente de la recta se toma como $m = 3$, con lo que la ecuación será

$$(y - 1) = 3(x - 1),$$

$$y = 3x - 2.$$

Al número 3 obtenido es al que llamamos *límite*.

2.2. Definición del límite

Decimos que la función $f(x)$ tiene como límite a L cuando x tiende a a si podemos hallar un número muy pequeño $\varepsilon > 0$ para el cual existe otro número muy pequeño $\delta > 0$ que cumpla lo siguiente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \tag{2.1}$$

si

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad (2.2)$$

siempre y cuando

$$0 < |x - a| < \delta. \quad (2.3)$$

Ejemplo

Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7.$$

Solución

De la anterior definición tenemos que

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \quad \text{siempre y cuando} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

La primera desigualdad nos da

$$-\varepsilon < 4x - 5 - 7 < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < 4x - 12 < \varepsilon$$

$$-\varepsilon/4 < x - 3 < \varepsilon/4$$

que al sustituir en la segunda, escrita en la forma

$$-\delta < x - 3 < \delta$$

nos da

$$-\delta = -\varepsilon/4 < x - 3 < \varepsilon/4 = \delta.$$

O sea que si nos dan cualquier ε , siempre habrá un δ igual a $\varepsilon/4$ que satisfaga ambas desigualdades, lo cual prueba que en efecto 7 es el límite buscado.

Ejemplo

Hallar un número δ tal que

$$|(x^2 - 6x + 6) - 6| < 0.2 \quad \text{siempre y cuando} \quad |x - 6| < \delta.$$

Solución

Aquí $f(x) = x^2 - 6x + 6 = (x - 3)^2 - 3$. Poniendo esto en la definición de límite, tenemos que: $L = 0.2$, $f(x) = x^2 - 6x + 6$, $\varepsilon = 0.2$, y $a = 6$. O sea que lo que vamos a hacer es probar que

$$x^2 - 6x + 6 = 6$$

dentro de la precisión dada por $\varepsilon = 0.2$. La primera desigualdad da

$$-0.2 < (x^2 - 6x + 6) - 6 < 0.2$$

$$6 - 0.2 < x^2 - 6x + 6 < 6 + 0.2$$

$$5.8 < f(x) < 6.2.$$

Para hallar los valores de x entre los cuales se cumple la anterior desigualdad, resolvemos las ecuaciones

$$5.8 = x^2 - 6x + 6 \quad \text{y} \quad 6.2 = x^2 - 6x + 6$$

lo cual nos da

$$x_1 \approx 5.966 = a - 0.034 \quad \text{y} \quad x_2 \approx 6.033 = a + 0.033.$$

Esto es, $\delta_1 = 0.034$ y $\delta_2 = 0.033$. Para el δ final tomamos el menor, o sea $\delta = 0.033$ y decimos que se cumple que

$$|(x^2 - 6x + 6) - 6| < 0.2 \quad \text{siempre y cuando} \quad |x - 6| < 0.033.$$

2.3. Reglas para calcular límites

La definición de límite que dimos anteriormente, no nos da un método para encontrarlo, sólo nos permite comprobar que un número es (o verificar que no es) el límite buscado. Por lo anterior, será necesario usar ciertas reglas para calcular límites.

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$
6. $\lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$
7. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
8. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$
9. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$
10. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

Estas reglas nos muestran que en los polinomios se pueden hallar los límites por sustitución directa, esto es

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (2.4)$$

Esto mismo vale para las funciones racionales que no tengan alguna singularidad (cuando el denominador vale cero) o indeterminación (cuando hay cero en el numerador y denominador simultáneamente). Para las funciones racionales que al sustituir directamente obtengamos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, debemos hacer un poco de álgebra que nos permita eliminar esa indeterminación.

Ejemplo

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Solución

Como aquí al sustituir encontramos una indeterminación del tipo $0/0$, hacemos un truco muy usual: factorizamos el numerador (observemos que éste es una diferencia de cuadrados), con lo cual

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2}.$$

Cancelando el factor común tanto en el numerador como en el denominador, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Ejemplo

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}.$$

Solución

Aquí tenemos que hacer una doble factorización, pues en el numerador se tiene una diferencia de cubos mientras que en el denominador hay una diferencia de cuadrados. Con las fórmulas para cada caso se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)},$$

cancelando factores comunes y sustituyendo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = 3.$$

Ejemplo

Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}.$$

Solución

Para límites de esta clase, es conveniente convertirlos en funciones racionales, para lo cual buscamos un común divisor de ambas raíces, que en este caso resulta ser $x^{1/6}$, por lo cual es recomendable hacer el cambio de variable $y = x^{1/6}$, con lo cual el límite se convierte en

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4}.$$

Esto ya se puede resolver como en el ejemplo anterior, con una doble factorización.

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y - 2)(y^2 + 2y + 4)}{(y + 2)(y - 2)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + 2y + 4}{y + 2} = 3.$$

Ejercicios

Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3)$ R: 75
2. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$ R: -174
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3}$ R: 1/2
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^4+x^2-6}{x^4+2x+3} \right)^2$ R: 4/9
5. $\lim_{x \rightarrow -2} (x+1)^9(x^2-1)$ R: -3
6. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4+3x+6}$ R: 4
7. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{16-x^2}$ R: $\sqrt{12}$
8. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-x+12}{x+3}$ R: ∞
9. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$ R: -7
10. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-x-6}$ R: -1/5
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$ R: -3
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2-25}{x}$ R: $-\infty$
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ R: 3/2
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4-1}{x}$ R: 4
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$ R: 12
16. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$ R: 6
17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ R: 5/4
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{2}}{x}$ R: ∞
19. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$ R: 32
20. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ R: 108

2.4. Límites laterales

Lo dicho anteriormente sobre los límites vale cuando nos acercamos hacia a desde valores menores, igualmente que cuando nos acercamos desde valores mayores que a . Cuando nos acercamos a un punto $(a, f(a))$ tomando sólo valores menores que a , podemos hablar del límite lateral izquierdo de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, \quad (2.5)$$

donde el menos nos indica que estamos acercándonos desde la izquierda. Si nos acercamos sólo desde valores mayores, tendremos el límite derecho de la función

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L. \quad (2.6)$$

Igual que antes, el signo más nos indica que nos acercamos desde la derecha.

Si al calcular los límites laterales éstos coinciden, el límite existe. De lo contrario, el límite no existe. En las funciones definidas por secciones es frecuente que existan los límites laterales, pero no sean iguales.

Ejemplo

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Solución

Por la izquierda vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1,$$

mientras que por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0.$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0.

Ejemplo

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Solución

Por la izquierda vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1,$$

mientras que por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1.$$

Como los límites laterales coinciden, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es 1.

2.5. Límites de las funciones trigonométricas

Un límite muy útil para el estudio de las funciones trigonométricas es

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}. \quad (2.7)$$

Podemos calcular este límite a cuantos decimales sea posible para convencernos de que su valor es 1, y utilizar la definición del límite para demostrar que es así. Sin embargo, es muy frecuente que se demuestre a partir de un argumento geométrico. La idea central es la siguiente: en la figura 2.2 observamos varios triángulos formados respectivamente por los lados BC , CO

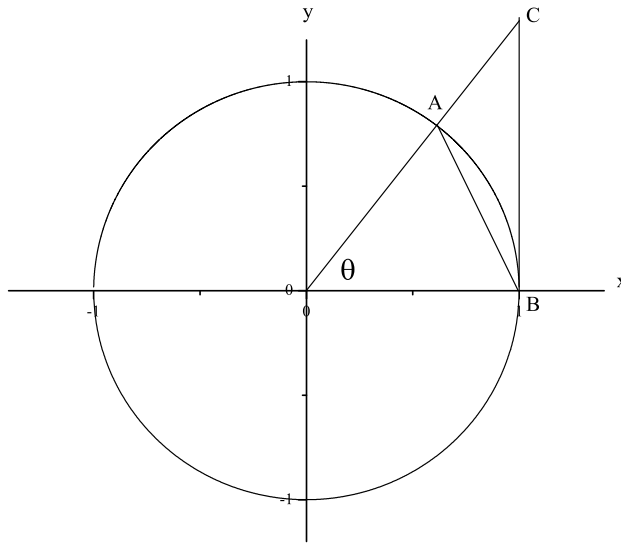


Figura 2.2: Áreas para el cálculo del límite

y OB ; por OA , AB y BO ; y por los lados OA , OB y el arco AB . La relación entre las áreas de tales triángulos es

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} \theta}{2}, \quad (2.8)$$

que al multiplicarse por $2/\operatorname{sen} \theta$ (cantidad positiva) nos da

$$1 \leq \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}, \quad (2.9)$$

o bien, al invertir

$$\cos \theta \leq \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \leq 1. \quad (2.10)$$

En esta última desigualdad calculamos los límites para cada miembro

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} 1, \quad (2.11)$$

lo que nos da, al calcular los límites más externos

$$1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \leq 1, \quad (2.12)$$

o sea que indiscutiblemente se cumple que

$$\boxed{\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1.} \quad (2.13)$$

Basándonos en este límite, será posible calcular otros límites de las funciones trigonométricas, por lo que es conveniente memorizarlo.

Ejemplo

Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Solución

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, podemos reescribir el límite anterior en la forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ejercicios

Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ R: 5
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{sen} 9x}$ R: 8/9
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\sec x}$ R: 1
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}$ R: 0
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$ R: 0
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$ R: 1/4
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\csc x}$ R: 1
8. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos 2x}$ R: 1
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{tg} x}$ R: 1/2
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2}$ R: 1

2.6. Límites que involucran infinitos

Para algunas funciones hemos visto que no hay un límite, sino que el valor de la función aumenta su valor absoluto indefinidamente conforme x tiende hacia a . Esto se simplifica como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad (2.14)$$

donde el signo $+$ se toma si la función toma valores positivos arbitrariamente grandes y el signo $-$ si la función toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. Esto no quiere decir que el límite sí exista y sea $\pm\infty$. Reiteramos que ∞ sólo es un símbolo para decir que la cantidad puede aumentar indefinidamente.

Ejemplo

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x^2 - 6x + 9}.$$

Solución

Al sustituir el valor de x por el 3, vemos que hay un cero en el denominador. Como el numerador es diferente de cero, el límite es ∞ .

Es posible definir límites infinitos izquierdos y derechos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty. \quad (2.15)$$

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{1}{x-5}$. Hallar $\lim_{x \rightarrow 5^+}$ y $\lim_{x \rightarrow 5^-}$.

Solución

Si nos acercamos a $x = 5$ desde valores menores que 5, obtenemos valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto, por lo cual

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty,$$

mientras que si nos acercamos desde valores mayores que 5, obtenemos valores positivos arbitrariamente grandes, por lo cual

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \infty.$$

A veces sucede que al hacer x tan grande como se desee (en valor absoluto), la función tiende a un límite. En estos casos se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad (2.16)$$

donde se entiende que si los valores de x se vuelven arbitrariamente grandes en sentido positivo, se dice que $x \rightarrow \infty$, mientras que si toma valores negativos arbitrariamente grandes en

valor absoluto, se dice que $x \rightarrow -\infty$. Por último, tenemos muchos casos en que al aumentar (o disminuir) indefinidamente el valor de x , el valor de la función aumenta o disminuye indefinidamente. Esto se representa con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad (2.17)$$

Para evaluar estos límites, es muy útil usar las reglas siguientes

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty \quad (n \text{ positivo}) \quad (2.18)$$

El signo se selecciona de acuerdo a los siguientes criterios: si n es par se usa el signo más; si n es impar pero x crece, el signo también es más. Pero si n es impar y x decrece, el signo es menos.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-n} = 0 \quad (n \text{ positivo}) \quad (2.19)$$

Ejemplo

Hallar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Solución

Para evaluar este límite, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia del denominador, en este caso, x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/x + 1/x^2}{1 + 1/x^2},$$

con lo cual de inmediato vemos que el límite vale 1, pues los demás términos se hacen cero.

Ejemplo

Hallar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x + 3}.$$

Solución

Dividiendo entre x numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{1 + 3/x} = \infty.$$

Ejercicios

Calcular los siguientes límites.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2-2x+5}$ R: 0
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+4x}{2x^3-x^2+3}$ R: $\frac{7}{2}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$ R: $\frac{1}{6}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^2-1}{x+8x^2}}$ R: $\frac{1}{2}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x^2+1}{x^5+x^3-x}$ R: 0
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2+5x}{(1+x)(2x-3)}$ R: 3
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$ R: 2
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$ R: $\frac{1}{4}$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ R: -1
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x+1} - x)$ R: $\frac{3}{2}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$ R: 0
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2+2x})$ R: -2
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2+x} - 3x)$ R: $\frac{1}{6}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ R: no existe
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$ R: ∞
16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x}$ R: ∞
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x})$ R: ∞
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x})$ R: ∞
19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x^2)$ R: $-\infty$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7-1}{x^6+1}$ R: ∞

2.7. El número e

Calculemos valores para encontrar el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (2.20)$$

La tabla siguiente muestra los resultados de los cálculos involucrados.

| | | | | | | | |
|--------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| x | 1 | 10 | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^6 |
| $f(x)$ | 2 | 2.54374 | 2.70481 | 2.71692 | 2.71815 | 2.71827 | 2.71828 |

En la tabla anterior, después de aproximar a cinco cifras decimales, reconocemos el número e . Este número se define con

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (2.21)$$

La definición de este número así se debe a que el uso del número e como base hace que en algunos cálculos haya constantes con valores iguales a uno, lo que permite simplificar la escritura. Es muy recomendable memorizar este límite, ya que el mismo nos permite calcular otros límites similares.

Ejemplo

Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Solución

Hagamos $y = x/2$, de donde obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = \left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^2 = e^2.$$

Ejemplo

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}.$$

Solución

Podemos reescribir lo anterior como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x-1+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x-1+3}.$$

Sea $y = \frac{x-1}{4}$, de donde el límite anterior se transforma en

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{4y+3} = \left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^4 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^3 = e^4 \cdot 1^3 = e^4.$$

Ejercicios

Calcular los siguientes límites.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ R: e^{-1}
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ R: e^{-1}
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ R: e
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}$ R: e^3
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ R: e^3

2.8. Continuidad

Se dice que una función es continua en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (2.22)$$

Si una función no es continua en $x = a$, pero sí en sus vecindades, se dice que tiene una *discontinuidad* allí.

Una función es continua desde la izquierda si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a), \quad (2.23)$$

y desde la derecha si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a). \quad (2.24)$$

Una función es continua sobre un intervalo si es continua en todo número en el intervalo. Para los puntos extremos sólo hay continuidad por la izquierda o por la derecha. Cuando en una función definida por secciones existen los límites laterales pero no coinciden, se dice que tiene una discontinuidad *de salto*. En funciones en las que existe el límite en a , pero $f(a)$ no está definida, se puede redefinir la función en a como $f(a)$ para volverla continua. En tales ocasiones decimos que hay una discontinuidad *removible* en a . Si hay una discontinuidad en a y no existe el límite de la función en a , hablamos de una discontinuidad *esencial*.

Gráficamente la continuidad de una función se ve si podemos dibujar la curva de un solo trazo, o sea, sin necesidad de despegar el lápiz (pluma, gis, etc). En funciones definidas por secciones, puede haber o no continuidad, dependiendo de si existen y coinciden los límites laterales para cada sección de la función.

Ejemplo

La función $f(x) = 1/x^3$ tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$, puesto que no existe el límite de la función cuando x tiende a cero.

Ejemplo

La función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$, pues los límites laterales no coinciden (el límite izquierdo vale cero y el derecho vale uno).

Ejemplo

La función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

tiene una discontinuidad removible en $x = 3$, pues los límites laterales coinciden (valen ambos seis), pero la función no está definida en $x = 3$. No obstante, si redefinimos la función como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

la función será continua en $x = 3$.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, también lo son

1. $(f \pm g)(x)$
2. $cf(x)$
3. $(fg)(x)$
4. $(f/g)(x)$ siempre y cuando $g(x) \neq 0$.

De aquí se deduce que

- a) Los polinomios son continuos en todos los reales.
- b) Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.
- c) Las funciones irracionales son continuas en todo su dominio.

Para las funciones compuestas se cumple que si $f(x)$ es continua en b y

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \quad (2.25)$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f(b). \quad (2.26)$$

O sea que si $g(x)$ es continua en a y $f(x)$ es continua en $g(a)$, entonces $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ es continua en a . Esto indica que una función continua de otra función continua es también función continua.

Ejemplo

Sea la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 3 \\ 4 - x^2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Hallar los valores de las constantes a , b y c que hacen que $f(x)$ sea continua en su dominio.

Solución

Para resolver este problema debemos conocer el valor de los límites de la sección que sí está bien definida, en los extremos del intervalo. Esto nos dirá cuáles son los valores de los límites que debe asumir la función en las secciones restantes al acercarse a los mismos valores que limitan dicho intervalo.

Si x tiende a -3 , $(4 - x^2)$ tiende a -5 . Si x tiende a 1 , $(4 - x^2)$ a 3 . Esto implica que

$$\lim_{x \rightarrow -3} ax + b = -5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1} ax + b = 3.$$

Esto permite establecer las ecuaciones siguientes sustituyendo el límite por el valor de la función (puesto que la función en cuestión es un polinomio)

$$-5 = a(-3) + b \quad \text{y} \quad 3 = a(1) + b.$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos que $a = 2$ y $b = 1$.

Ejercicios

1. Dibujar la gráfica de una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, -4, 4, 6\}$, la cual tenga discontinuidades esenciales en $x = -1$ y $x = 6$ y discontinuidades removibles en $x = -4$ y $x = 4$.

Determinar los valores de a , b y c que hagan que las siguientes funciones sean continuas.

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{R: } a = 1, b = 1$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + b & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{R: } a = 2, b = -2$$

4. Un equipo médico de investigación estableció que la masa $M(t)$ de un tumor, como función del tiempo t al cual el paciente es expuesto a radiación durante el tratamiento, está dado por

$$M(t) = \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 6},$$

en donde $M(t)$ está en miligramos y t en segundos. Debido al mal funcionamiento de los aparatos utilizados es imposible exponer al paciente exactamente por tres segundos de terapia de radiación. ¿Qué valor se debe dar a $M(3)$, a fin de que $M(t)$ sea una función continua? R: 0

2.9. Teorema del valor intermedio

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y N es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c) = N$. Esto es fácil de ver gráficamente en la figura 2.3.

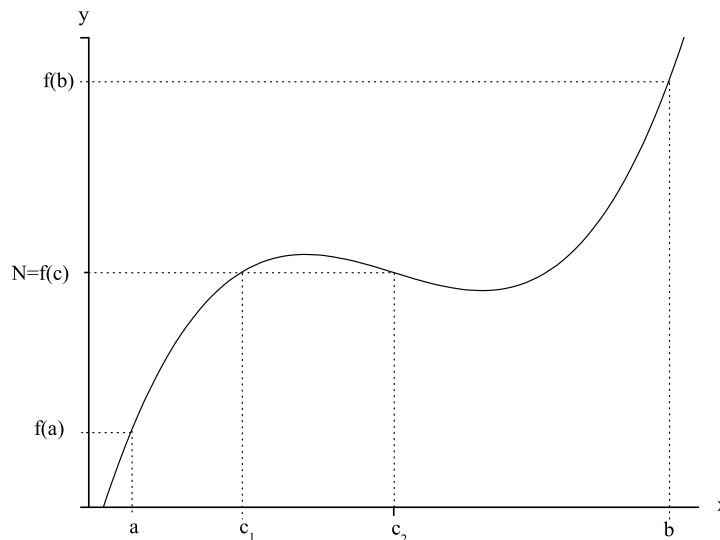


Figura 2.3: Teorema del valor intermedio

El teorema establece que existe un número, pero no condiciona a que sea único. Puede haber dos o más números que cumplan la condición. Pero si no hay ninguno, es porque no se

cumplieron las condiciones del teorema; por ejemplo, puede ser que la función no sea continua, o que el intervalo no sea cerrado.

Esto tiene gran utilidad para hallar raíces de ecuaciones no lineales. En tal caso $N = 0$, por lo que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Para hallar raíces, debemos hacer que a y b estén lo más cerca posible, pero no dejen de cumplir la condición de que $f(a)$ es negativo y $f(b)$ es positivo. En métodos numéricos, esto se llama *método de bisección*.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^3 - 4x + 2$. Aproximar una raíz en el intervalo $[1,2]$ con un error menor que $1/4$.

Solución

Primero verifiquemos que el cero está entre los extremos

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = -1,$$

$$f(2) = (2)^3 - 4(2) + 2 = 2.$$

Se verifica que $N = 0$ está entre $f(1)$ y $f(2)$. Para aproximar la raíz, partiremos el intervalo sucesivamente en mitades, y nos quedaremos con aquellos intervalos que contengan a c con una precisión de $1/4$, o sea que buscaremos que $f(c)$ esté entre $-1/4$ y $1/4$.

$$f(3/2) = -5/8.$$

Como es negativo, c está entre $3/2$ y 2 , por lo que al partir el intervalo nuevamente, etc.

$$f(7/4) = 23/64.$$

$$f(13/8) = 107/512 \approx 0.21 < 1/4.$$

O sea que la raíz buscada está próxima a $x = 13/8$.

Ejercicios

Dar una raíz aproximada para cada función, con una precisión de 0.01 (se puede usar un programa computacional).

1. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3 - 1/x$ R: 0.41, -2.41
2. $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$ R: -1.80, -0.45, 1.00, 1.25
3. $f(x) = -x^5 + 3x - 1$ R: -1.39, 0.33, 1.21
4. $f(x) = \text{sen } x - x$ R: 0.00
5. $f(x) = \text{tg } x - e^x$ R: 1.31 (no es única)

2.10. Comportamiento asintótico

Cuando tenemos límites del tipo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad (2.27)$$

observamos que la función se aproxima cada vez más a la recta $x = a$, pero nunca la toca. A esta recta se le llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$. También es asíntota aunque sólo exista uno de los límites laterales.

Si tenemos un límite del tipo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad (2.28)$$

la función se aproxima cada vez más a la recta $y = L$. A esta recta se le llama asíntota horizontal de $f(x)$. También en estos casos se pueden tener asíntotas aunque sólo exista el límite superior o el límite inferior.

A veces la función se aproxima a una recta que no es ni horizontal ni vertical, sino que tiene una ecuación del tipo $y = mx + b$ (está inclinada). Para hallar la ecuación de la recta se usan las fórmulas siguientes

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (2.29)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]. \quad (2.30)$$

Cuando tenemos límites de la forma

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad (2.31)$$

resulta muy útil saber de qué forma crece (o decrece) la función conforme crece el valor de x . Esto se logra si observamos la forma funcional que no se hace cero al calcular el límite. Con esto sabremos que la función crece (decrece) aproximándose cada vez más a la función encontrada, aunque no se trate de una línea recta, como es el caso de lo que llamamos asíntotas. A la función hallada podemos considerarla como una *curva asíntota* de la función que se está examinando.

Ejemplo

Hallar las asíntotas de la curva

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}.$$

Solución

Para las asíntotas verticales, observemos qué pasa en los puntos en que el denominador se hace cero, esto es, en $x = \pm 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}.$$

O sea que sólo en $x = 2$ hay asíntota vertical. Para las asíntotas no verticales (horizontales o inclinadas), veamos el comportamiento de la función cuando $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 3/x + 2/x^2}{1 - 4/x^2} = 1,$$

de donde resulta que en $y = 1$ hay una asíntota horizontal.

Ejemplo

Hallar las asíntotas de la curva $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Solución

Como en $x = 0$ el denominador se hace cero, la recta $x = 0$ es asíntota vertical. Para las asíntotas no verticales calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} [x + 2 - 1/x] = \infty.$$

Vemos que no hay asíntotas horizontales. Sin embargo, puede haber asíntotas inclinadas, pues vemos que la expresión resultante se comporta en forma lineal. Para hallar los parámetros de la recta calculamos

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2,$$

por lo tanto, la ecuación de la asíntota es

$$y = x + 2.$$

Lo visto en este capítulo nos permite ampliar la gama de funciones cuyo comportamiento podemos analizar tanto gráfica como algebraicamente, añadiendo a lo aprendido en el capítulo anterior, lo relacionado a la continuidad y el comportamiento asintótico de las funciones.

Ejemplo

Graficar la curva $y = \frac{1+x^{3/2}}{x-1}$.

Solución

En primer lugar, vemos que la función no está definida para valores negativos de x , debido al término $x^{3/2}$. Esta función tiene un cero en el denominador en $x = 1$. Calculamos el límite para saber si hay asíntota

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x^{3/2}}{x - 1} = \pm\infty,$$

así que vemos que en $x = 1$ hay una asíntota vertical. Siendo más cuidadosos, podemos ver que para valores menores que uno, tendremos cantidades negativas, por lo que antes de 1 vale el signo menos; mientras que para valores positivos tendremos cantidades positivas, por lo que después de 1 vale el signo más.

Para ver si hay asíntotas no verticales, hacemos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^{3/2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1/x + x^{1/2}}{1-1/x} = \infty.$$

De aquí se observa que no hay asíntotas horizontales ni inclinadas, y que la función se comporta asíntoticamente como $x^{1/2}$. Además de la anterior información, vemos que $f(0) = -1$.

Para trazar la gráfica, podemos hacer primero la asíntota en $x = 1$, y como $f(0) = -1$, la función debe salir de $y = -1$. Para la otra parte, trazamos una curva que baje desde valores muy grandes como lo marca la asíntota, y para completar, trazamos una curva que se aproxime a $y = x^{1/2}$ a valores cada vez mayores de x . Esto se ve en la figura 2.4.

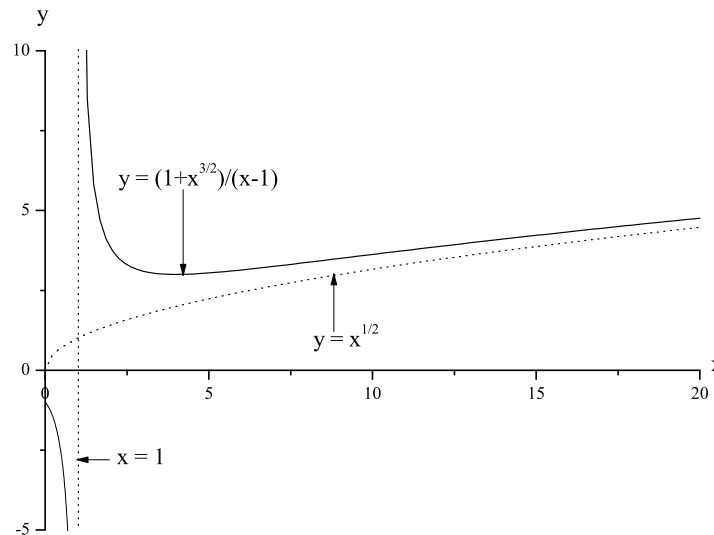


Figura 2.4: Gráfica de $f(x) = \frac{1+x^{3/2}}{x-1}$

Ejemplo

El número de calculadoras $N(p)$ que puede vender una compañía manufacturera a un precio de p pesos por unidad, está dado por $N(p) = 500/p^2$. Encontrar $N(p)$ e interpretar el resultado.

Solución

$$\lim_{p \rightarrow 0} N(p) = \lim_{p \rightarrow 0} 500/p^2 = \infty.$$

Como ya se ha reiterado a lo largo del texto, ∞ no es un número, sólo un símbolo. Esto lo que quiere decir en relación con el problema planteado es que no habrá límites en el número de unidades que pueda vender la compañía si cada vez son más baratas.

Ejemplo

Dibujar la gráfica de una función continua en $\mathbb{R} - \{-2, -1, 2\}$, que satisfaga lo siguiente

$$f(3) = 0, \quad f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4^-, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3^+.$$

Solución

Lo primero que conviene hacer es ubicar los puntos por donde estamos seguros que pasa la función, estos son, $(3,0)$ y $(0,0)$.

Luego de ello, vemos qué sucede cerca de los puntos de discontinuidad. Cerca de -2 la función está cerca de cero, lo cual nos dice que la función tiene una discontinuidad removible ahí. Cerca de -1 hay una asíntota que lleva a la función hacia abajo indefinidamente. Cerca de 2 también hay asíntota, la cual lleva a la función hacia arriba en la parte izquierda, mientras que en la derecha la trae desde abajo.

Por último, vemos que el comportamiento asintótico es tal que lleva a la parte negativa de la función hacia 3 , desde valores mayores (o sea, desde arriba). Por otro lado, la parte positiva va hacia 4 desde valores menores (o sea, desde abajo).

Todo esto se ilustra en la figura 2.5.

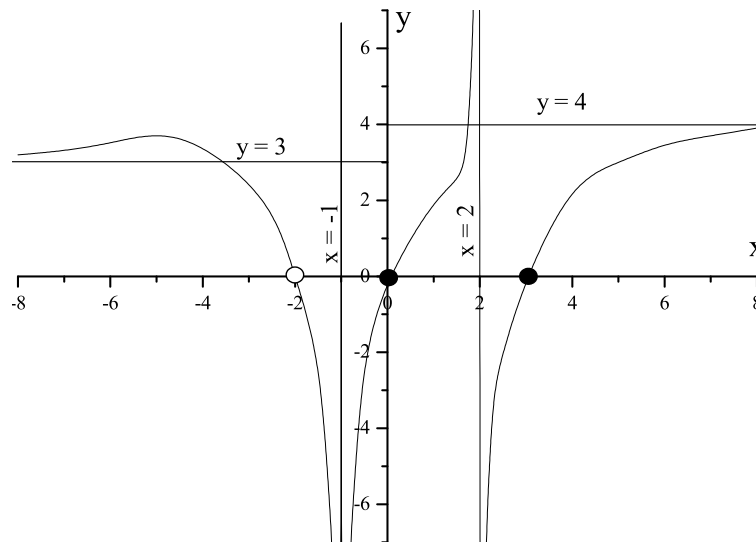


Figura 2.5: Función con asíntotas

Ejercicios

Determinar las ecuaciones de las asíntotas de cada función.

1. $f(x) = \frac{x}{x+4}$ R: $y = 1, x = -4$.
2. $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}$ R: $y = 1, x = -1, x = 1$.
3. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+x}$ R: $y = 1, x = 0$.
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ R: $y = -1, y = 1$.
5. $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$ R: $y = -1/2, y = 1/2$.

-
6. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ R: $x = \pm 1, y = 0$
7. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$ R: $y = 1, x = 2, x = -3$
8. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x-10}$ R: $x = -5, x = 2, y = x - 3.$
9. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ R: sin asíntotas
10. Dibujar la gráfica de una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, -4, 4, 6\}$, la cual tenga discontinuidades esenciales en $x = -1$ y $x = 6$ y discontinuidades removibles en $x = -4$ y $x = 4$.

Capítulo 3

Derivadas

En el análisis de la variación de las funciones será muy útil el concepto de derivada. Ya nos hemos acercado a la definición de esta cantidad al buscar ecuaciones de tangentes a curvas. Ahora formalizaremos esto.

3.1. Tangentes

Si una función tiene la ecuación $y = f(x)$ y queremos hallar la pendiente de la recta tangente a ella en el punto $P(a, f(a))$, entonces consideramos un punto cercano $Q(x, f(x))$ con $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la secante

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (3.1)$$

A continuación hacemos tender x hacia a , lo cual nos dará

$$m_{PQ} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (3.2)$$

Ejemplo

Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 2$ en el punto $P(1, 0)$.

Solución

La pendiente de la recta está dada por

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 2) - (2(1)^2 - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 4.$$

Con esto la ecuación de la recta es

$$(y - 0) = 4(x - 1),$$

o

$$y = 4x - 4.$$

Ejercicios

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

1. $f(x) = x^2$, $(1, 1)$ R: $y = 2x$
2. $f(x) = 1 - 2x - 3x^2$, $(-2, -7)$ R: $y = 10x + 13$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $(1, 1)$ R: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-2, \frac{1}{4})$ R: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
5. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $(0, 0)$ R: $y = x$

3.2. Definición de derivada

Al límite siguiente (cuando existe)

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),} \quad (3.3)$$

se le llama derivada de $f(x)$ en el número a y se simboliza con la prima, pero también se usa la notación $f'(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$. Otra forma de escribirlo es

$$\boxed{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.} \quad (3.4)$$

Aunque las dos formas de escribir la derivada son equivalentes, a veces a la hora de calcular el límite puede resultar más conveniente alguna de ellas que la otra.

La derivada se puede interpretar geoméricamente como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. También se puede interpretar como la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$. Si no fijamos el valor de x en a , la derivada es función de x , $f'(x)$. En este caso también se suele escribir

$$\boxed{\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.} \quad (3.5)$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$.

Solución

La ecuación 3.3 nos da

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2.$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = x^2$ (esto es, encontrar la derivada como función de x).

Solución

La ecuación 3.4 nos da

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = x^3$.

Solución

De la fórmula 3.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 - x^3}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + \Delta x) = 3x^2. \end{aligned}$$

Ejercicios

Encontrar la derivada de cada función aplicando la definición y dar los dominios correspondientes.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f(x) = 5x + 3$ | R: $f'(x) = 5$ |
| 2. $f(x) = x^4$ | R: $f'(x) = 4x^3$ |
| 3. $f(x) = 5 - 4x + 3x^2$ | R: $f'(x) = -4 + 6x$ |
| 4. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ | R: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ |
| 5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ | R: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ |
| 6. $f(x) = x + \sqrt{x}$ | R: $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 7. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ | R: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ |
| 8. $f(x) = \sqrt{1+2x}$ | R: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ |
| 9. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ | R: $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$ |
| 10. $f(x) = \frac{4-3x}{2+x}$ | R: $f'(x) = -\frac{10}{(2+x)^2}$ |

3.3. Reglas de derivación básicas

De las reglas para calcular límites y de la definición de la derivada, se pueden deducir muy fácilmente las siguientes fórmulas de derivación

1. Derivada de una constante

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

2. Derivada de x con respecto a x

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

3. Derivada de la función potencial

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

4. Derivada de función multiplicada por una constante

$$\frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx}$$

5. Derivada de suma (resta) de funciones

$$\frac{d[f \pm g]}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

Estas reglas son más o menos sencillas (la 3 puede inferirse al extrapolar los resultados para $n = 1, 2$ y 3). Por ejemplo, es obvio que la derivada de una suma sea la suma de las derivadas, puesto que el límite de una suma es la suma de los límites. Pero en el caso de las reglas para el producto y el cociente las cosas son diferentes, por lo cual estudiaremos esto en otras secciones.

Ejercicios

Derivar cada función usando las reglas anteriores.

- | | |
|---|--|
| 1. $f(x) = 5x - 1$ | R: 5 |
| 2. $f(x) = -4x^{10}$ | R: $-40x^9$ |
| 3. $f(x) = (16x)^3$ | R: $12288x^2$ |
| 4. $f(x) = x^2 + 3x - 4$ | R: $2x + 3$ |
| 5. $f(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$ | R: $40x^7 - 10x^4$ |
| 6. $f(x) = x^{-2/5}$ | R: $-\frac{2}{5}x^{-7/5}$ |
| 7. $f(x) = 5x^{-3/5}$ | R: $-3x^{-8/5}$ |
| 8. $f(x) = 6x^{-9}$ | R: $-54x^{-10}$ |
| 9. $f(x) = \frac{\sqrt{10}}{x^7}$ | R: $\frac{-7\sqrt{10}}{x^8}$ |
| 10. $f(x) = (16x)^3$ | R: $12288x^2$ |
| 11. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ | R: $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ |
| 12. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ | R: $2x - \frac{2}{x^3}$ |
| 13. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | R: $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}^3}$ |
| 14. $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ [Indicación: Dividir antes de derivar] | R: $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ |
| 15. $f(x) = \frac{x^2-2\sqrt{x}}{x}$ | R: $1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| 16. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$ | R: $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 17. $f(x) = x^{4/3} - x^{2/3}$ | R: $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ |
| 18. $f(x) = ax^2 + bx + c$ | R: $2ax + b$ |
| 19. $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ | R: $-\frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3}$ |
| 20. $f(x) = x + \sqrt[5]{x^2}$ | R: $1 + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ |

21. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x^3}$ R: $\frac{2}{3\sqrt[3]{3}} + 3\sqrt{x}$
22. $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ R: $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x^7}}$
23. $f(x) = \frac{x-3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ R: $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3$
24. $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ R: $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
25. $f(x) = (x - \frac{1}{x})$ R: $1 + \frac{1}{x^2}$

3.4. Derivación de productos de funciones

Supóngase que tenemos una función $u(x)$ que consta del producto de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$ continuas. Entonces, al incrementarse el valor de x en Δx , la función $u(x)$ se incrementa en

$$\Delta u = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = (f + \Delta f)(g + \Delta g) - fg = \quad (3.6)$$

$$= fg + f\Delta g + g\Delta f + \Delta f\Delta g - fg = f\Delta g + g\Delta f + \Delta f\Delta g \quad (3.7)$$

que al dividir entre Δx nos da

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = f\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}, \quad (3.8)$$

y si hacemos tender Δx a cero, obtendremos

$$\boxed{\frac{du}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}}. \quad (3.9)$$

El último término se hizo cero porque se supuso que ambas funciones son continuas. En esta parte (así como en algunas otras) no se escribió explícitamente la dependencia funcional con x de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con el fin de simplificar la escritura y sabiendo que no hay confusión posible en este contexto.

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = x^{5/3}(1 + x^2)$.

Solución

De acuerdo a la ecuación 3.9 tendremos que

$$\frac{df}{dx} = x^{5/3}\frac{d}{dx}(1 + x^2) + (1 + x^2)\frac{d}{dx}(x^{5/3}) = x^{5/3}(2x) + (1 + x^2)(5x^{2/3}/3) = \frac{11}{3}x^{8/3} + \frac{5}{3}x^{2/3}.$$

3.5. Derivación de cocientes de funciones

Sabiendo la regla para derivar productos, es fácil obtener la fórmula para cocientes de funciones. En efecto, si tenemos una función $v(x)$ que consta del cociente de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, ambas continuas, se cumple que

$$v(x)g(x) = f(x), \quad (3.10)$$

derivando a $f(x)$ obtendremos que

$$v \frac{dg}{dx} + g \frac{dv}{dx} = \frac{df}{dx}, \quad (3.11)$$

despejando a dv/dx , que es la que nos interesa, obtenemos

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} - v \frac{dg}{dx}}{g} = \frac{\frac{df}{dx} - \frac{f}{g} \frac{dg}{dx}}{g}, \quad (3.12)$$

simplificando, obtenemos la regla

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}}. \quad (3.13)$$

Ejemplo

Derivar

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Solución

De la regla anterior tenemos

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(1+x) \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

3.6. Derivación de las funciones trigonométricas

Para $f(x) = \text{sen } x$ tenemos que

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}. \quad (3.14)$$

Usando la identidad

$$\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

podemos escribir

$$\text{sen}(x+h) - \text{sen } x = 2 \text{sen} \left(\frac{x+h-x}{2} \right) \cos \left(\frac{x+h+x}{2} \right) = 2 \text{sen} \left(\frac{h}{2} \right) \cos \left(x + \frac{h}{2} \right),$$

con lo cual el límite anterior se puede reescribir como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{h}{2} \right) \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Esto es

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x.} \quad (3.15)$$

Análogamente, para $f(x) = \cos x$ tenemos

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}, \quad (3.16)$$

es decir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} \left(\frac{h}{2} \right) \operatorname{sen} \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left(x + \frac{h}{2} \right) = -1 \cdot \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x.$$

Para encontrar la derivada de $f(x) = \operatorname{tg} x$ usamos la regla del cociente

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{d \operatorname{sen} x}{dx \cos x} = \frac{\cos x \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \quad (3.17)$$

Procediendo en forma análoga, se puede ver que las siguientes derivadas son ciertas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\operatorname{csc}^2 x \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \operatorname{tg} x \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csc} x = -\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x. \quad (3.20)$$

Ejemplo

Derivar

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x.$$

Solución

Tenemos para la derivada

$$\frac{d}{dx} (x^2 \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} (x^2) + x^2 \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x.$$

Ejercicios

Derivar las funciones dadas.

$$1. f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad \text{R: } \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$2. f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \text{R: } \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$3. f(x) = (1 + \sqrt{x})(x - x^3) \quad \text{R: } \frac{x-x^3}{2\sqrt{x}} + (1 + \sqrt{x})(1 - 3x^2)$$

$$4. f(x) = \frac{3x-7}{x^2+5x-4} \quad \text{R: } \frac{-3x^2+14x+23}{(x^2+5x-4)^2}$$

$$5. f(x) = \frac{4x+5}{2-3x} \quad \text{R: } \frac{23}{(2-3x)^2}$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \quad \text{R: } \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$7. f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+1} \quad \text{R: } 1$$

$$8. f(x) = \frac{15}{x^4+x^2+1} \quad \text{R: } \frac{-60x^3+30x}{(x^4+x^2+1)^2}$$

$$9. f(x) = \frac{x}{x+\frac{1}{x}} \quad \text{R: } \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$10. f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{R: } \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$11. f(x) = x - 3 \operatorname{sen} x \quad \text{R: } 1 - 3 \cos x$$

$$12. f(x) = x \operatorname{sen} x \quad \text{R: } \operatorname{sen} x + x \cos x$$

$$13. f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \quad \text{R: } \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$14. f(x) = \cos x - 2 \operatorname{tg} x \quad \text{R: } -\operatorname{sen} x - 2 \sec^2 x$$

$$15. f(x) = x^3 \cos x \quad \text{R: } 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x$$

$$16. f(x) = 4 \sec x + \operatorname{tg} x \quad \text{R: } 4 \sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x$$

$$17. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \quad \text{R: } \frac{x \sec^2 x - \operatorname{tg} x}{x^2}$$

$$18. f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \quad \text{R: } \frac{1}{1+\cos x}$$

$$19. f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \quad \text{R: } \frac{(1+x) \operatorname{sen} x + (1-x) \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$20. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x} \quad \text{R: } \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sec x}$$

$$21. f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \quad \text{R: } \frac{x \cos x - 2 \operatorname{sen} x}{x^3}$$

$$22. f(x) = \operatorname{tg} x (\operatorname{sen} x + \cos x) \quad \text{R: } (\operatorname{sen} x + \cos x) \sec^2 x + (\cos x - \operatorname{sen} x) \operatorname{tg} x$$

$$23. f(x) = \operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x \quad \text{R: } -\operatorname{csc} x \operatorname{tg} x (\operatorname{csc} x + \operatorname{ctg} x)$$

$$24. f(x) = 4 \sec 5x \quad \text{R: } 20 \sec 5x \operatorname{tg} 5x$$

$$25. f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \quad \text{R: } \frac{\operatorname{sen} x (2 \cos x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x}$$

3.7. Regla de la cadena

Cuando tenemos una función compuesta, se cumple que $w(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Para derivar notamos que al incrementarse el valor de x en Δx

$$\Delta w = f(g + \Delta g) - f(g), \quad (3.21)$$

$$\Delta f = g(x + \Delta x) - g(x), \quad (3.22)$$

al tender a cero Δx , también tiende a cero Δg , por lo cual

$$\lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta g} = \frac{dw}{dg}. \quad (3.23)$$

Entonces la razón $\Delta w/\Delta g$ difiere de la derivada con respecto a g por una cantidad pequeña, digamos α

$$\frac{\Delta w}{\Delta g} = \frac{dw}{dg} + \alpha, \quad (3.24)$$

esta cantidad α tiende a cero si Δx tiende a cero. Por lo tanto, el incremento de la función w es

$$\Delta w = \frac{dw}{dg} \Delta g + \alpha \Delta g, \quad (3.25)$$

que al dividir entre Δx se vuelve

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dg} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta g}{\Delta x}, \quad (3.26)$$

y al hacer tender Δx a cero nos da

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dg} \frac{dg}{dx}, \quad (3.27)$$

ya que el último término se hace cero (como ya se había dicho).

Así pues, la derivada de una función compuesta es el producto de las derivadas de las funciones que la componen

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f \circ g) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}}. \quad (3.28)$$

Ejemplo

Derivar la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 8x + 11}$.

Solución

Notemos que $\sqrt[3]{x^2 + 8x + 11} = [x^2 + 8x + 11]^{1/3}$, con lo cual, de acuerdo a la ecuación 3.28 tenemos que la derivada es

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3}(x^2 + 8x + 11)^{-2/3} \frac{d}{dx}(x^2 + 8x + 11) = \frac{1}{3} \frac{2x + 8}{(x^2 + 8x + 11)^{2/3}}.$$

3.8. Derivada de la función logarítmica

Sea $f(x) = \log_a x$, entonces

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{hx} = \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \quad (3.30)$$

Nótese que si la base es el número e , se obtiene

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}. \quad (3.31)$$

Ejemplo

Derivar la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Solución

La regla del cociente nos da

$$\frac{d}{dx} \frac{\ln x}{x} = \frac{x \frac{d}{dx} \ln x - \ln x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

3.9. Derivada de la función exponencial

Sea $y = f(x) = a^x$. Para hallar la derivada, la consideraremos como ecuación, y tomaremos los logaritmos de ambos miembros

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a. \quad (3.32)$$

Derivando en ambos miembros

$$\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot y, \quad (3.33)$$

esto es

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a. \quad (3.34)$$

Nótese que si $a = e$, se tiene que

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}. \quad (3.35)$$

Ahora consideremos la derivada de la exponencial compuesta. Sea

$$y = f(x) = u(x)^{v(x)}. \quad (3.36)$$

Análogamente a lo que hicimos antes, consideremos como ecuación esta expresión y tomemos logaritmos en ambos miembros

$$\ln y = \ln[u^v] = v \ln u. \quad (3.37)$$

Ahora derivemos en ambos miembros

$$\frac{dy}{dx} = \ln u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{u dx}, \quad (3.38)$$

esto es

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\ln u \frac{dv}{dx} + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right], \quad (3.39)$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = u^v \ln u \frac{dv}{dx} + u^{v-1} v \frac{du}{dx}. \quad (3.40)$$

Ejemplo

Derivar la función

$$f(x) = x^{\cos x}.$$

Solución

Sea

$$y = x^{\cos x},$$

con lo cual, sacando logaritmos en ambos miembros

$$\ln y = \ln(x^{\cos x}) = \cos x \ln x,$$

y derivando

$$\frac{y'}{y} = -\operatorname{sen} x \ln x + \frac{\cos x}{x},$$

entonces, despejando

$$y' = y \left(-\operatorname{sen} x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right),$$

y poniendo el valor de y

$$y' = \frac{d}{dx} f(x) = x^{\cos x} \left(-\operatorname{sen} x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) = -x^{\cos x} \operatorname{sen} x \ln x + x^{\cos x - 1} \cos x.$$

Ejercicios

Derivar cada función.

1. $f(x) = 5e^x + 3$ R: $5e^x$
2. $f(x) = 3x + 2e^x$ R: $3 + 2e^x$
3. $f(x) = e^{x+1} + 1$ R: e^{x+1}
4. $f(x) = x^3 e^x$ R: $(x^3 + 3x^2)e^x$
5. $f(x) = \ln(2x + 1)$ R: $\frac{2}{2x+1}$
6. $f(x) = \frac{e^x}{x+e^x}$ R: $\frac{e^x(x-1)}{(x+e^x)^2}$
7. $f(x) = \csc x + e^x \operatorname{ctg} x$ R: $-\csc x \operatorname{ctg} x + e^x \operatorname{ctg} x(1 + \csc x)$
8. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ R: $e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$
9. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ R: $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ R: $e^x \operatorname{sen}(e^x)$
11. $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$ R: $\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x}}$
12. $f(x) = \frac{1}{(x^2-2x-5)^4}$ R: $\frac{8-8x}{(x^2-2x-5)^2}$
13. $f(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} x}$ R: $\frac{\sec^2 x}{3(1+\operatorname{tg} x)^{2/3}}$
14. $f(x) = (3x - 2)^{10}(5x^2 - x + 1)^{12}$ R: $30(3x - 2)^9(5x^2 - x + 1)^{12} + 12(10x - 1)(5x^2 - x + 1)^{11}(3x - 2)^{10}$
15. $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$ R: $2x\sqrt[3]{x^2 + 2} + \frac{2x(x^2+1)}{3(x^2+2)^{2/3}}$
16. $f(x) = e^{-5x} \cos 3x$ R: $-e^{-5x}(5 \cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)$
17. $f(x) = \left(\frac{x-6}{x+7}\right)^3$ R: $\frac{39(x-6)^2}{(x+7)^3}$
18. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^3+1}{x^3-1}}$ R: $\frac{-3x(x^3-1)^{3/4}}{2(x^3+1)^{11/4}}$
19. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$ R: $\frac{14-3x}{2(7-3x)^{3/2}}$
20. $f(x) = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}$ R: $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x}}$
21. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos kx)$ R: $-2k \operatorname{sen} kx \operatorname{sen}(\cos kx)$
22. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ R: $\operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$
23. $f(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$ R: $\frac{3e^{3x} + 2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$
24. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$ R: $\cos x \cos(\operatorname{sen} x) \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$
25. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ R: $\frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$
26. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ R: $\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)$
27. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{sen} x})$ R: $\cos(\operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{sen} x}) \sec^2 \sqrt{\operatorname{sen} x} \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$
28. $f(x) = \cos(\ln x)$ R: $-\frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$
29. $f(x) = \ln \sqrt{x}$ R: $\frac{1}{2x}$
30. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ R: $\frac{1}{3x(\ln x)^{2/3}}$

31. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ R: $\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$
32. $f(x) = e^x \ln x$ R: $e^x(\ln x + 1/x)$
33. $f(x) = (\ln \operatorname{tg} x)^2$ R: $2 \ln(\operatorname{tg} x) \left(\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} \right)$
34. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{3x+2}{3x-2}}$ R: $\frac{-6}{(3x-2)^2} \sqrt{\frac{3x-2}{3x+2}}$
35. $f(x) = \ln(x + \ln x)$ R: $\frac{1 + \frac{1}{x}}{x + \ln x}$
36. $f(x) = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$ R: $\sec x$
37. $f(x) = \frac{1}{1 + \ln x}$ R: $\frac{-1}{x(1 + \ln x)^2}$
38. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ R: $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$
39. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ R: $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$
40. $f(x) = x^x$ R: $x^x(\ln x + 1)$
41. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ R: $x^{\operatorname{sen} x} \left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$
42. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$ R: $(\operatorname{sen} x)^x (\ln(\operatorname{sen} x) + x \operatorname{ctg} x)$
43. $f(x) = (\ln x)^x$ R: $(\ln x)^x (\ln(\ln x) + 1/\ln x)$
44. $f(x) = x^{e^x}$ R: $x^{e^x} e^x (\ln x + 1/x)$
45. $f(x) = (\ln x)^{\cos x}$ R: $(\ln x)^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x \ln x} - \operatorname{sen} x \ln(\ln x) \right)$
46. $f(x) = \frac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$ R: $\frac{-2 \operatorname{senh} x}{(1 + \cosh x)^2}$
47. $f(x) = \operatorname{ctgh} \sqrt{1 + x^2}$ R: $-\operatorname{csc}^2 \sqrt{1 + x^2} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
48. $f(x) = \ln(\operatorname{senh} x)$ R: $\operatorname{tgh} x$
49. $f(x) = \operatorname{tgh}(e^x)$ R: $e^x \sec^2(e^x)$
50. $f(x) = e^{\cosh 3x}$ R: $3 \operatorname{senh} 3x e^{\cosh 3x}$

3.10. Derivación implícita

A veces no se tiene una forma explícita de la función, como $y = f(x)$, sino que se tiene una expresión en forma de ecuación, en la cual no es fácil despejar a la variable dependiente como función de la variable independiente. En tales casos es más conveniente hallar la derivada en forma implícita, como función de x y y , no sólo como función de x . Para esto se derivan ambos miembros de la ecuación, utilizando la regla de la cadena cada vez que se encuentre a la variable dependiente, y finalmente despejando a la derivada en la expresión obtenida.

Ejemplo

Hallar la derivada de y con respecto a x en la siguiente función implícita

$$x^2 + y^2 - 36 = 0.$$

Solución

Derivando con respecto a x tendríamos que

$$2x + 2yy' = 0.$$

Despejando

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida por $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ en el punto (3,3).

Solución

Para hallar la pendiente, derivamos implícitamente

$$3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0.$$

Agrupando

$$y'(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2.$$

Despejando

$$y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x},$$

entonces,

$$m = \frac{6(3) - 3(3)^2}{3(3)^2 - 6(3)} = -1,$$

y la ecuación será

$$(y - 3) = -1(x - 3)$$

o

$$y = -x + 6.$$

Ejercicios

Hallar $y'(x)$ por derivación implícita.

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

R: $-\left(\frac{y+6x+2}{x}\right)$

2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

R: $-\frac{4x}{9y}$

3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

R: $-\left(\frac{y}{x}\right)^2$

4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

R: $-\sqrt{\frac{y}{x}}$

5. $x^2 + y^2 = 1$

R: $-\frac{x}{y}$

6. $x^2 - y^2 = 1$

R: $\frac{x}{y}$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$

R: $-\left(\frac{3x^2+2xy}{x^2+8y}\right)$

8. $x^2 - 2xy + y^3 = c$

R: $\frac{2y-2x}{3y^2-2x}$

9. $x^2y + xy^2 = 3x$

R: $\frac{3-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

10. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$ R: $\frac{2xye^{x^2} - 2xy^3}{5y^4 + 3x^2y^2 - e^{x^2}}$
11. $\frac{y}{x-y} = x^2 + 1$ R: $\frac{y}{x} + 2(x-y)^2$
12. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$ R: $-\frac{\sqrt{xy} + y\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy} + 2x\sqrt{x+y}}$
13. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ R: $\frac{4x^{3/2}y^{3/2} - y}{x(1-2x\sqrt{xy})}$
14. $\sqrt{1+x^2y^2} = 2xy$ R: $-\left(\frac{2y\sqrt{1+x^2y^2} - xy^2}{2x\sqrt{1+x^2y^2} - x^2y}\right)$
15. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ R: $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$
16. $x \operatorname{sen} y + \cos 2y = \cos y$ R: $\frac{-\operatorname{sen} x}{x \cos y - 2 \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y}$
17. $x \cos y + y \cos x = 1$ R: $\frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$
18. $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$ R: $\frac{\cos x (\cos y - 1)}{\operatorname{sen} y (\operatorname{sen} x - 1)}$
19. $y = \ln(x^2 + y^2)$ R: $\frac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$
20. $y^x = x^y$ R: $\frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}$

3.11. Derivada de la función inversa

Si para la función $y = f(x)$ existe una función inversa $x = \phi(y)$, las derivadas $\frac{df}{dx}$ y $\frac{d\phi}{dy}$ están relacionadas por

$$\boxed{\frac{df}{dx} \cdot \frac{d\phi}{dy} = 1,} \quad (3.41)$$

esto es, son inversas multiplicativas.

Ejemplo

Derivar $y = f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$.

Solución

La inversa es

$$x = \operatorname{sen} y.$$

Derivando

$$\frac{dx}{dy} = \cos y,$$

por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y},$$

que se puede escribir como

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ejemplo

Derivar $y = \operatorname{arcsenh} x$.

Solución

$$x = \operatorname{senh} y,$$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{cosh} y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{cosh} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh} y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ejercicios

Derivar las funciones dadas.

1. $f(x) = \operatorname{arc} \cos \sqrt{x}$ R: $\frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$
2. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \ln \sqrt{1-x^2}$ R: $\frac{-x}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}$
3. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2+9}$ R: $\frac{-x}{\sqrt{9+x^2}(10+x^2)}$
4. $f(x) = x^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} 5x$ R: $2x \operatorname{arc} \operatorname{sen} 5x + \frac{5x^2}{\sqrt{1-25x^2}}$
5. $f(x) = x^4 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ R: $\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} + 4x^3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$
6. $f(x) = x^3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ R: $3x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{1+x^2}$
7. $f(x) = \operatorname{arccsc} \sqrt{x}$ R: $\frac{-1}{2x^{3/2}} \sqrt{\frac{x}{x-1}}$
8. $f(x) = \operatorname{arccsc} x^2$ R: $\frac{-2}{x^3} \sqrt{\frac{x^4}{x^4-1}}$
9. $f(x) = \operatorname{arcsenh} \sqrt{1-x^2}$ R: $\frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}$
10. $f(x) = \operatorname{arccosh} \sqrt{x^2+1}$ R: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{-1+\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$
11. $f(x) = x^2 \operatorname{arctgh} 2x$ R: $\frac{2x}{1-4x^2} + 2x \operatorname{arctgh} 2x$
12. $f(x) = \operatorname{arctgh} \sqrt{x}$ R: $\frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$
13. $f(x) = x \operatorname{arctgh} x + \ln \sqrt{1-x^2}$ R: $\operatorname{arctgh} x$
14. $f(x) = \operatorname{arcsech} \sqrt{1-x^2}$ R: $\frac{x}{(1-x^2)(1+\sqrt{1-x^2})} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}}$
15. $f(x) = \operatorname{arccsch} \sqrt{x^2+1}$ R: $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}}$

3.12. Diferenciales

Si la función $y = f(x)$ es derivable, el incremento de la función en un intervalo $[x, x + \Delta x]$ está dado aproximadamente por

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

donde $\alpha \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Pero si esto sucede, al incremento de la variable se le llama *diferencial* y se escribe dx ó dy . Entonces tenemos la relación

$$dy = f'(x) dx. \quad (3.42)$$

Obsérvese que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad dy = f'(x) dx \quad (3.43)$$

son enunciados equivalentes, por lo cual a veces se confunde a la derivada con el cociente de dos diferenciales.

Geoméricamente tenemos que la diferencial es el incremento de la ordenada de la recta tangente a la curva descrita por la función al incrementarse x , mientras que la derivada es la pendiente de la recta tangente.

Ejercicios

Derivar

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = 5e^x + 3$ | R: $5e^x dx$ |
| 2. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ | R: $(2x - \frac{2}{x^3}) dx$ |
| 3. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | R: $(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}) dx$ |
| 4. $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ | R: $(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}) dx$ |
| 5. $f(x) = +\frac{x^2-2\sqrt{x}}{x}$ | R: $(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$ |
| 6. $f(x) = 3x + 2e^x$ | R: $(3 + 2e^x) dx$ |
| 7. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$ | R: $(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}) dx$ |
| 8. $f(x) = x^{4/3} - x^{2/3}$ | R: $(\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}) dx$ |
| 9. $f(x) = ax^2 + bx + c$ | R: $(2ax + b) dx$ |
| 10. $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ | R: $-(\frac{b}{x^2} + \frac{2c}{x^3}) dx$ |
| 11. $f(x) = x + \sqrt[5]{x^2}$ | R: $(1 + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}) dx$ |
| 12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x^3}$ | R: $(\frac{2}{3\sqrt[3]{3}} + 3\sqrt{x}) dx$ |
| 13. $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ | R: $(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x^7}}) dx$ |
| 14. $f(x) = e^{x+1} + 1$ | R: $e^{x+1} dx$ |
| 15. $f(x) = \frac{x-3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ | R: $(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3) dx$ |

3.13. Derivadas de orden superior

Es claro que la derivada es una nueva función de x . Esto tiene como implicación que esta nueva función se puede volver a derivar. Cuando se deriva a la derivada de una función $f(x)$, hablamos de la segunda derivada de $f(x)$. Como esta segunda derivada también es una función de x , se puede volver a derivar y obtendremos la tercera derivada, etc. A éstas se les llama *derivadas de orden superior*. El orden de la derivada es el número ordinal con que la nombramos, y al escribirlas se simbolizan como

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(iv)}(x), f^{(v)}(x), \dots, f^{(n)}(x),$$

donde n es el orden de la derivada. El paréntesis superior es para evitar confundir el orden de una derivada con una potencia.

Ejemplo

Hallar la quinta derivada de $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Solución

$$y' = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1,$$

$$y'' = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2,$$

$$y''' = 60x^2 + 24x + 6,$$

$$y^{(iv)} = 120x + 24,$$

$$y^{(v)} = 120.$$

Ejercicios

Encontrar la segunda derivada de cada función.

1. $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ R: $\frac{8x^2+4}{(1-x^2)^2} + \frac{8x^2(1+x^2)}{(1-x^2)^3}$
2. $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ R: $e^x \left(\frac{1}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \right)$
3. $f(x) = x^3 \cos x$ R: $6x \cos x - 6x^2 \sin x - x^3 \cos x$
4. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$ R: $\cos x + \sec x \operatorname{tg} x + \sec^3 x$
5. $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ R: $-\operatorname{csc}^2 x$
6. $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$ R: $-2 - 4x \operatorname{sen} x \cos x$
7. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ R: $-\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^3}$
8. $f(x) = \frac{\cos x}{1+x}$ R: $\frac{2 \cos x}{(1+x)^3} + \frac{2 \operatorname{sen} x}{(1+x)^2} - \frac{\cos x}{1+x}$
9. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ R: $\frac{3 \cos x \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)} - \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} + \frac{2 \operatorname{sen}^3 x}{(1+\cos x)^3}$
10. $f(x) = \operatorname{arctgh} \sqrt{x}$ R: $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)^2} - \frac{1}{4x^{3/2}(1+x)}$

3.14. La no existencia de la derivada

Para ciertas funciones podría no existir la derivada en algunos puntos. Esto puede suceder en tres casos específicos:

1. La función tiene una *esquina*. En este caso es imposible decidir cuál es la recta tangente, pues muchas rectas lo podrían ser. Aquí no hay derivada porque los límites laterales que definen a la derivada no coinciden. Esto se ilustra en la figura 3.1, donde se ve que no existe derivada en $x = 0$.

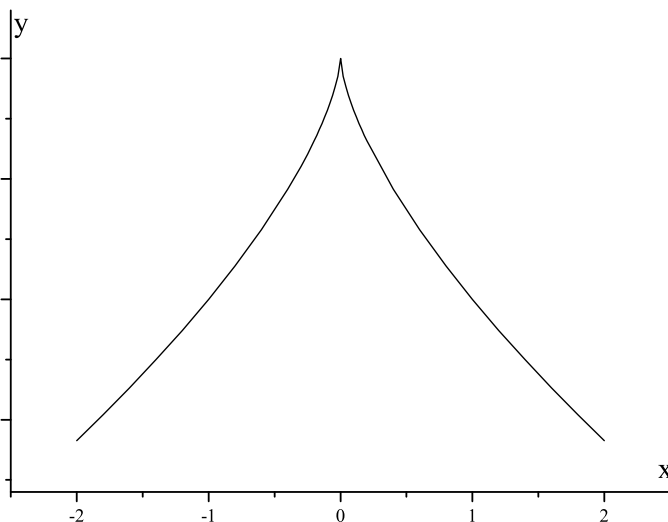


Figura 3.1: Función con derivada discontinua

2. La recta tangente es vertical. En este caso su pendiente no está definida, y los límites laterales tienden a más o menos infinito. Esto se ilustra en la figura 3.2: en $x = 0$ la pendiente está indefinida.
3. La función tiene una discontinuidad. En ese caso no puede existir la derivada, sea la discontinuidad de cualquier tipo. En efecto, si la discontinuidad es esencial, la pendiente de la recta tangente tampoco está definida. Sin embargo, también sucede que en una discontinuidad de salto los límites laterales están definidos pero no coinciden. Y aun en el caso que haya una discontinuidad removible, los límites existen y coinciden, pero no puede haber tangencia a un punto inexistente. Esto se ve en la figura 3.3 en $x = 0$ no hay derivada porque hay una discontinuidad. En la misma figura se ve que en $x = 1$ no hay derivada porque hay una *esquina*.

Así como es importante conocer el dominio y recorrido de una función, es importante saberlo también para la derivada. Esto nos dará mucha información sobre la derivada y sobre la función misma.

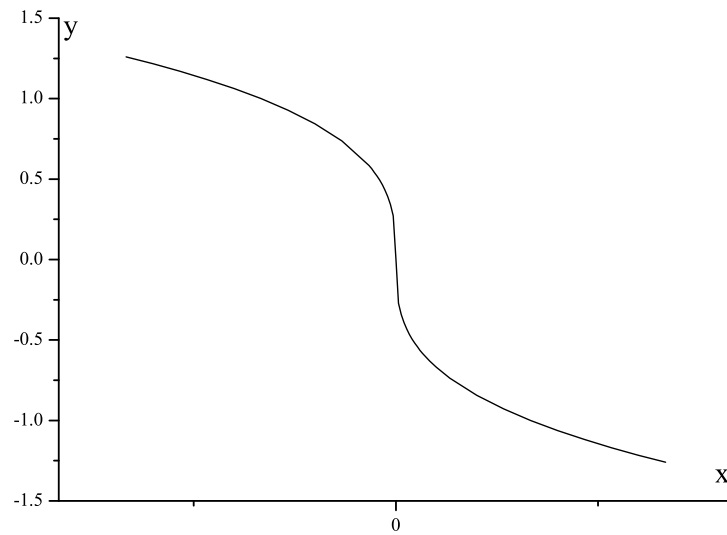


Figura 3.2: Otra función con derivada discontinua

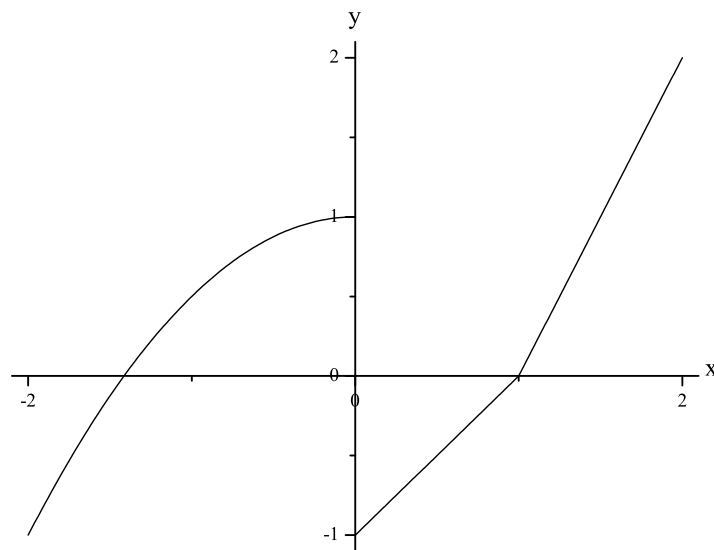


Figura 3.3: Función discontinua con derivada discontinua

Ejercicios

Para cada función, hallar los puntos en donde no existe la derivada.

1. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ R: 0
2. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ R: 1
3. $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ R: 0
4. $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ R: siempre existe

-
5. $f(x) = (1 + \sqrt{x})(x - x^3)$ R: siempre existe
6. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ R: 0
7. $f(x) = \frac{x}{x+\frac{1}{x}}$ R: 0
8. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ R: $-\frac{d}{c}$
9. $f(x) = \ln(\cos(x))$ R: $n\pi$
10. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ R: $0, (n - \frac{1}{2})\pi$

Capítulo 4

Aplicaciones de la derivada

Las derivadas se usan en muchas ramas de la ciencia e ingeniería para resolver problemas. Para poder aprovecharlas, es necesario formular el problema en forma de función, y a continuación aplicar los métodos estudiados en capítulos anteriores.

4.1. Rectas tangentes y normales

Para una función $y = f(x)$, la derivada nos da la pendiente de la recta tangente. Si tenemos un punto $P(x_0, y_0)$, la ecuación de la recta tangente en el punto P estará dada por

$$y - y_0 = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0), \quad (4.1)$$

mientras que la recta normal tendrá la ecuación

$$y - y_0 = -\left. \frac{1}{\frac{df}{dx}} \right|_{x_0} (x - x_0). \quad (4.2)$$

Ejemplo

Escribir las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3$ en el punto $(1, 1)$.

Solución

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2,$$

que evaluando nos da

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 3(1)^2 = 3.$$

Entonces la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \text{o} \quad y = 3x - 2,$$

mientras que la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1), \quad \text{o} \quad y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}.$$

La figura 4.1 muestra la función y las rectas indicadas.

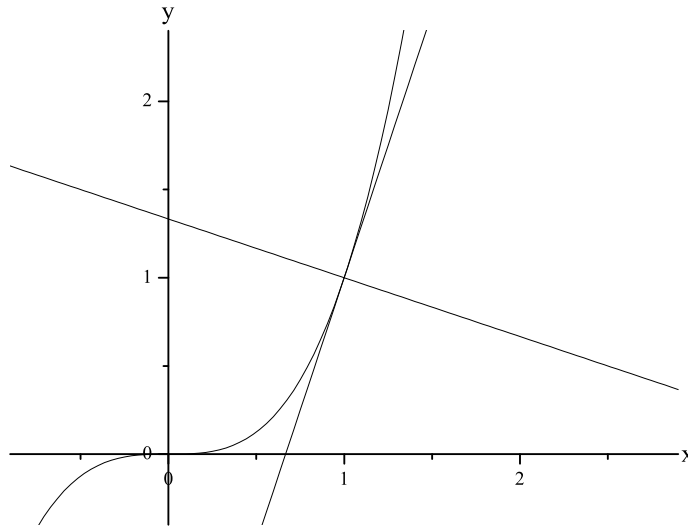


Figura 4.1: Rectas tangente y normal a una curva

Ejercicios

Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto indicado.

1. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $(1, 1)$ R: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = -2x + 3$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$, $(4, 0.4)$ R: $y = \frac{x}{100} + 0.36$, $y = -100x + 400.4$
3. $f(x) = \frac{8}{\sqrt{4+3x}}$, $(4, 2)$ R: $y = -\frac{3}{8} + \frac{7}{2}$, $y = \frac{8}{3}x - \frac{26}{3}$
4. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $(\pi/4, 1)$ R: $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{2}$
5. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $(\pi/6, 1)$ R: $y = \sqrt{3}x + 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$
6. $f(x) = x + \cos x$, $(0, 1)$ R: $y = 1$, $x = 0$
7. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$, $(0, 1)$ R: $y = -x + 1$, $y = x + 1$
8. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos 2x$, $(\pi/6, 1)$ R: $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + 1$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
9. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$ R: $y = -x + \pi$, $y = x - \pi$
10. $f(x) = 2xe^x$, $(0, 0)$ R: $y = 2x$, $y = -\frac{1}{2}x$
11. $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $(1, e)$ R: $y = e$, $x = 1$
12. $f(x) = 10^x$, $(1, 10)$ R: $y = 10 \ln 10x - 10(\ln 10 - 1)$, $y = -\frac{x}{10 \ln 10} + \frac{1}{10 \ln 10} + 10$
13. $f(x) = \ln(\ln x)$, $(e, 0)$ R: $y = \frac{x}{e} - 1$, $y = -ex + e^2$
14. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $(1, \ln 2)$ R: $y = x - 1 + \ln 2$, $y = -x + 1 + \ln 2$
15. $f(x) = \operatorname{senh}(x - 1)$, $(1, 0)$ R: $y = x - 1$, $y = -x + 1$

4.2. Monotonía

Cuando una función es creciente, su derivada es positiva en todo el intervalo de crecimiento. Lo opuesto también es cierto: si en un intervalo la derivada de una función es positiva, podemos estar seguros de que en ese intervalo la función es creciente.

Por el contrario, si una función es decreciente, su derivada es negativa. Entonces si la derivada de una función es negativa en cierto intervalo, podemos estar seguros de que la función es decreciente en tal intervalo.

Esto tiene gran utilidad en el análisis de la variación de las funciones.

Ejemplo

Hallar los intervalos de monotonía de la función

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5.$$

Solución

La derivada de la función es

$$f'(x) = 6x - 2.$$

Para hallar el intervalo en que es creciente, resolvemos la desigualdad

$$6x - 2 > 0,$$

$$x > 1/3.$$

O sea que la función es creciente en

$$(1/3, \infty),$$

y es decreciente en el intervalo

$$(-\infty, 1/3).$$

Esto se ve en la figura 4.2.

4.3. Concavidad y convexidad

Cuando una función es creciente a una razón cada vez mayor o decreciente a una razón cada vez menor, vemos que su gráfica se *tuerce* hacia arriba. Por el contrario, si crece a una razón cada vez menor o decrece a una razón cada vez mayor, su gráfica se *tuerce* hacia abajo. A este modo en que se *tuerce* la gráfica de una función se le llama concavidad o convexidad. Para una función que se *tuerce* hacia arriba, se dice que es cóncava. Si la función se *tuerce* hacia abajo, se dice que es convexa. Cuando una función es cóncava, su segunda derivada es negativa; si la función es convexa, la segunda derivada es positiva.

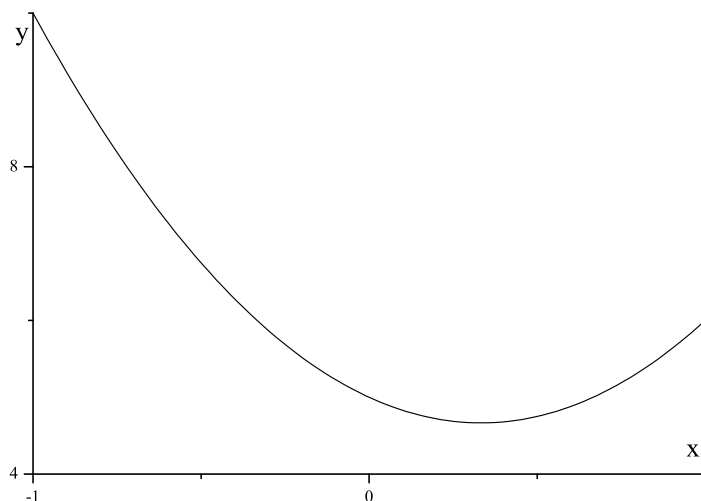


Figura 4.2: Función $y = 3x^2 - 2x + 5$

Ejemplo

Hallar los intervalos de concavidad de la función siguiente

$$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 1,$$

Solución

$$y' = 6x^2 - 6x + 1$$

$$y'' = 12x - 6$$

Para hallar concavidad resolvemos la desigualdad

$$12x - 6 > 0,$$

$$x > 1/2.$$

O sea que la función es cóncava en $(1/2, \infty)$ y es convexa en $(-\infty, 1/2)$.

Esto se ve en la figura 4.3.

4.4. Máximos y mínimos

Una función puede tener máximos y mínimos *absolutos* y máximos y mínimos *locales*. La diferencia entre absolutos y locales se establece diciendo que el máximo absoluto es el mayor valor que adquiere la función en el dominio en cuestión, y el mínimo absoluto es el menor valor en dicho dominio. Los máximos locales son aquellos que superan los valores de la función para

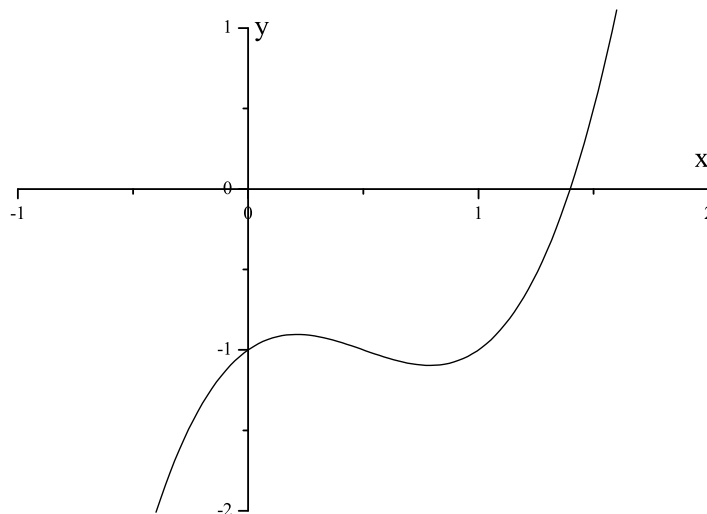


Figura 4.3: Función $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

valores cercanos, y similarmente para los mínimos locales. En la figura 4.4 se muestran valores máximos y mínimos, tanto absolutos como locales, de una función.

Para funciones cuya derivada existe en todo su dominio, sucede que en los puntos en que hay máximos y mínimos locales la derivada vale cero. Sin embargo, lo opuesto no siempre es cierto, pues a veces la derivada puede ser cero en un punto y aún así no haber máximo ni mínimo. A estos puntos se les llama *puntos de inflexión*.

A los puntos en que la derivada se vuelve cero, se les llama *puntos críticos*. También se usa este término para los puntos en que la derivada no existe. Para determinar la naturaleza de los puntos críticos, esto es, clasificarlos como máximos, mínimos o puntos de inflexión, se puede estudiar lo que sucede en las vecindades del punto crítico, o se puede utilizar el criterio de la segunda derivada para determinar la concavidad: si la función es convexa, claramente hay un máximo; si la función es cóncava, hay un mínimo; y si hay un cambio en la concavidad, hay un punto de inflexión. Esto se resume en la forma siguiente

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en a .

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en a .

En funciones continuas, los máximos o mínimos absolutos pueden coincidir con los máximos o mínimos locales. Cuando no es así, se encuentran en los extremos del dominio de definición, de tal forma que para hallar máximos o mínimos absolutos es suficiente comparar los valores de la función en los extremos de su dominio con los de los máximos y mínimos locales. Para funciones que son continuas pero no continuamente derivables, se puede decidir sobre la existencia de máximos o mínimos locales a partir de evaluar la función en los puntos en que no existe la derivada, o a partir de una gráfica.

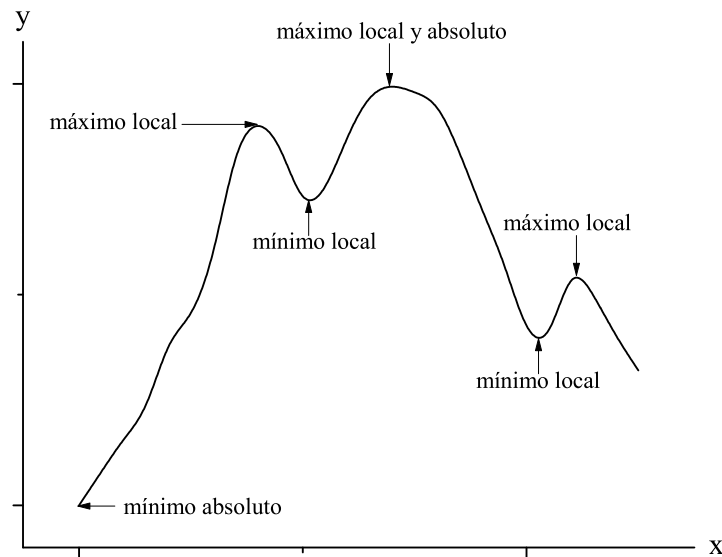


Figura 4.4: Máximos y mínimos locales y absolutos

Ejemplo

Hallar los máximos y mínimos locales y absolutos de la función

$$f(x) = 6x^4 + x^3 - 5x^2 + 0.5 \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Solución

La derivada de esta función es

$$f'(x) = 24x^3 + 3x^2 - 10x \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Las raíces de esta función son (aproximando a seis decimales)

$$x(24x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -0.711016$$

$$x_3 = 0.586016.$$

Para decidir sobre su naturaleza, hallamos la segunda derivada

$$f''(x) = 72x^2 + 6x - 10 \quad -1 \leq x \leq 1$$

y evaluamos en los puntos críticos hallados

$$f''(0) = -10 < 0,$$

o sea que en $x = 0$ hay un máximo local.

$$f''(-0.711016) = 22.133054 > 0,$$

por lo que en $x = -0.711016$ hay un mínimo local.

$$f''(0.586016) = 18.241958 > 0,$$

de manera que en $x = 0.586016$ hay un mínimo local.

Para hallar los máximos o mínimos absolutos, hallamos los valores de la función en los extremos de su dominio y en los puntos donde hay máximos o mínimos locales

$$f(-1) = 0.5$$

$$f(1) = 2.5$$

$$f(0) = 0.5$$

$$f(-0.711016) = -0.853722$$

$$f(0.586016) = -0.308225.$$

Así que, como el mayor de estos valores es el de $f(1)$, éste es el máximo absoluto. También vemos que el menor de estos valores es el de $f(-0.711016)$, entonces éste es el mínimo absoluto, que en este caso coincide con un mínimo local.

Todo esto se puede ver en la figura 4.5.

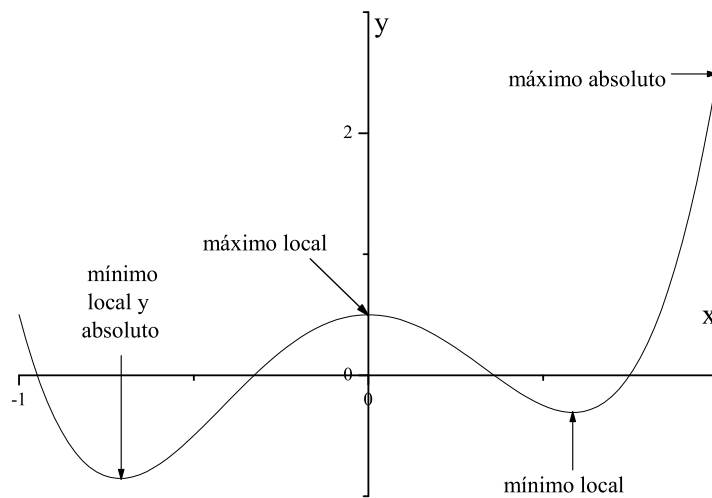


Figura 4.5: Función $y = 24x^3 + 3x^2 - 10x$

Ejemplo

Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función

$$y = 1 - x^{2/3} \quad -8 \leq x \leq 1.$$

Solución

La derivada de la función es

$$y' = -\frac{2}{3}x^{-1/3} \quad -8 \leq x \leq 1.$$

Podemos observar que la derivada no tiene raíces, por lo cual no obtenemos puntos críticos de esta forma. Pero también notamos que en $x = 0$ no existe la derivada, por lo cual vamos a examinar lo que pasa con la función ahí, además de ver lo que pasa en los extremos del intervalo de definición

$$f(-8) = -3,$$

$$f(0) = 1,$$

$$f(1) = 0.$$

Entonces el mínimo absoluto está en $x = -8$, y el máximo absoluto en $x = 0$. Observando que hacia la derecha del 0 la función decrece, deducimos que el máximo absoluto es también un máximo local.

Esto se ve en la figura 4.6.

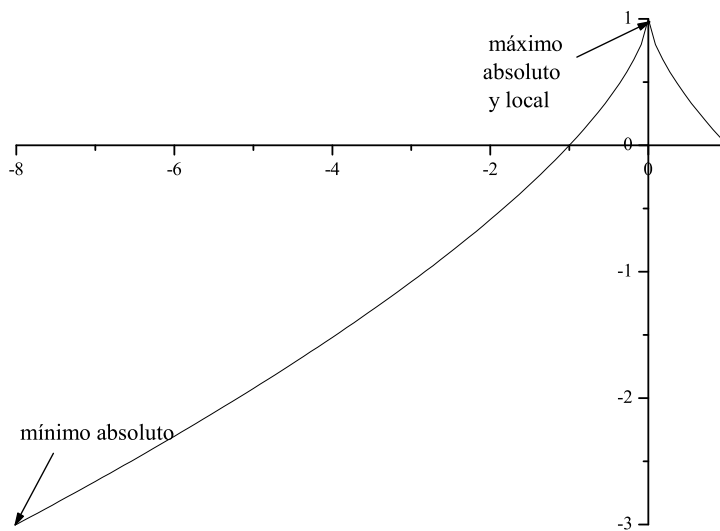


Figura 4.6: Función $y = 1 - x^{2/3}$

4.5. Análisis de la variación de las funciones

Lo anteriormente aprendido nos permite hacer el análisis de la variación de las funciones estudiando el comportamiento de sus derivadas primera y segunda. Sumado esto a lo aprendido anteriormente relacionado con las traslaciones, alargamientos y compresiones, comportamiento asintótico, etc., podemos dibujar la gráfica de cualquier función con gran facilidad.

Ejemplo

Graficar la función

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1.$$

Solución

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12,$$

$$f''(x) = 12x - 18.$$

Los puntos críticos se hallan al igualar a cero la primer derivada y resolver

$$6x^2 - 18x + 12 = 0,$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4(6)(12)}}{12},$$

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = 2.$$

Para saber cuál es la naturaleza de estos puntos críticos, evaluamos la segunda derivada en esos valores de x

$$f''(1) = 12(1) - 18 = -6 < 0,$$

$$f''(2) = 12(2) - 18 = 6 > 0,$$

por lo que en $x = 1$ hay un máximo, mientras que en $x = 2$ hay un mínimo. Al evaluar a la función en los mismos valores de x obtenemos

$$f(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) + 1 = 6,$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) + 1 = 5.$$

Esto se puede usar para la gráfica de la forma siguiente: en los puntos hallados graficamos pequeñas curvas que representen máximos y mínimos (figura 4.7).

Por otra parte, se analiza la segunda derivada para hallar los intervalos de concavidad

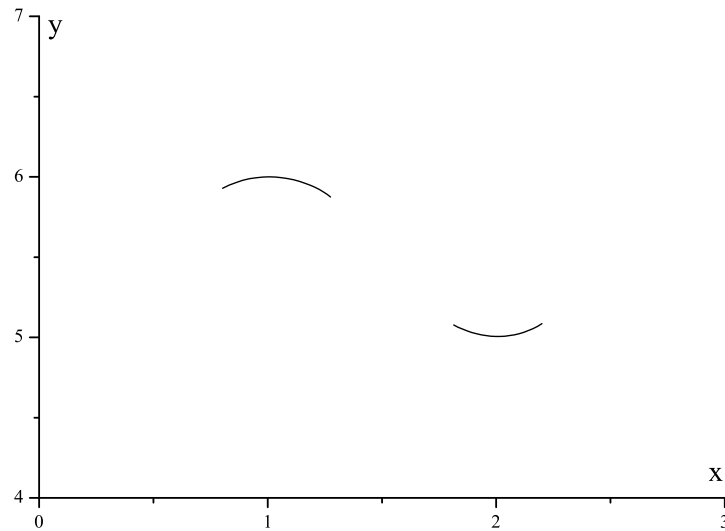


Figura 4.7: Graficando la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

$$12x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3/2,$$

$$12x - 18 > 0 \Rightarrow x > 3/2,$$

$$12x - 18 < 0 \Rightarrow x < 3/2.$$

Entonces, en $(-\infty, 3/2)$ la función es convexa, en $(3/2, \infty)$ es cóncava, y en $x = 3/2$ hay un punto de inflexión. Evaluando a $f(x)$ en $x = 3/2$

$$f(3/2) = 2(3/2)^3 - 9(3/2)^2 + 12(3/2) + 1 = 11/2 = 5.5.$$

Con esto podemos completar la gráfica colocando el punto $(3/2, 11/2)$ y uniendo esto a los segmentos anteriores, respetando la dirección de concavidad (figura 4.8), con lo cual concluimos este problema.

Ejemplo

Analizar la variación de la siguiente función y graficarla

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Solución

En primer lugar, notemos que la función es impar, pues al sustituir x por $-x$ obtenemos $-f(x)$. De este modo, será suficiente con analizar lo que sucede con el dominio positivo y luego extender esto al dominio negativo. Para valores positivos de x , y toma valores positivos siempre. La única raíz es $x = 0$.

El denominador nunca se vuelve cero, por lo que no hay asíntotas verticales. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal, puesto que

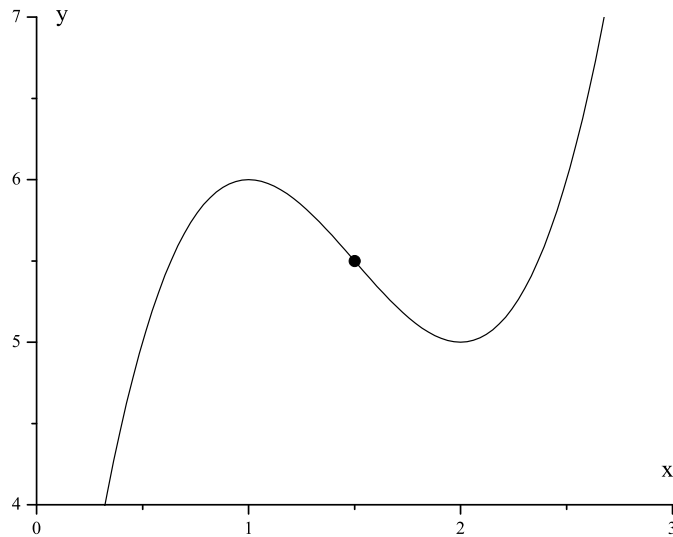


Figura 4.8: Función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0.$$

Al derivar obtenemos

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2},$$

y la segunda es

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Para hallar los puntos críticos resolvemos la ecuación

$$\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0, \Rightarrow 1 - x^2 = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Sustituyendo $x = 1$ en la segunda derivada nos da

$$f''(1) = \frac{2(1)((1)^2 - 3)}{((1)^2 + 1)^2} > 0,$$

lo que indica que en $x = 1$ hay un máximo. Su ordenada la obtenemos al sustituir en la función original

$$f(1) = \frac{1}{(1)^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Entonces el máximo está en $(1, 1/2)$.

Para ver si hay puntos de inflexión resolvemos la ecuación

$$\frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0, \Rightarrow 2x(x^2 - 3), \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = \pm\sqrt{3}.$$

En $x = \sqrt{3}$ hay un punto en que cambia la concavidad. Como antes de él, en $x = 1$, la función es convexa, después de él es cóncava. La ordenada de este punto es

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433.$$

Como se dijo antes, la función es impar, por lo que los datos anteriores se repiten para los simétricos impares. Con toda esta información podemos hacer una gráfica como la que se muestra en la figura 4.9.

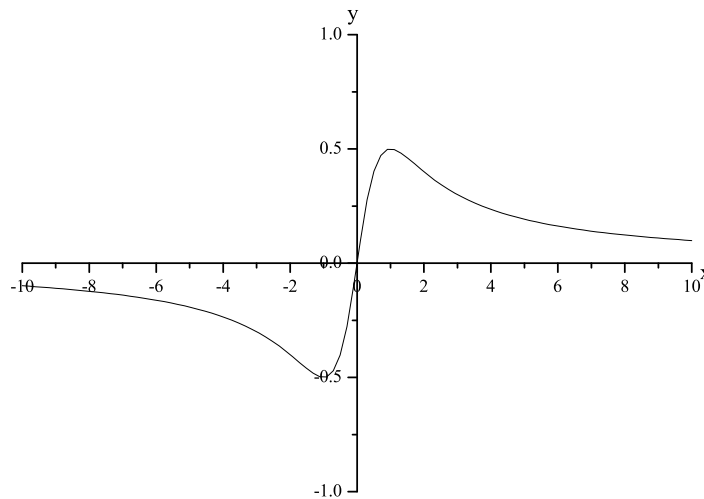


Figura 4.9: Función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Ejemplo

Analizar la variación de la función

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x}.$$

Solución

En primer lugar vemos que el dominio son todos los reales, y notamos que no hay paridad, por lo que debemos hacer el análisis de la función para todos los valores del dominio. Las raíces de la función son $x = 0$, $x = 1$. Entre estos valores la función es negativa, y fuera de este intervalo la función es positiva.

Al derivar la función obtenemos

$$y' = \frac{2x - 1}{3\sqrt[3]{(x^2 - x)^2}},$$

y la segunda

$$y'' = \frac{6(x^2 - x) - (4x - 2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - x)^5}}.$$

Para hallar los puntos críticos resolvemos

$$y' = 0 = \frac{2x - 1}{3\sqrt[3]{(x^2 - x)^2}},$$

lo cual nos da el punto crítico $x = 1/2$. Al sustituir en la segunda derivada hallamos

$$y''(1/2) = \frac{6[(1/2)^2 - (1/2)] - [4(1/2) - 2]}{9\sqrt[3]{[(1/2)^2 - (1/2)]^5}} = 0.383 > 0,$$

por lo que en $x = 1/2$ hay un mínimo. Su ordenada es

$$y(1/2) = \sqrt[3]{(1/2)^2 - (1/2)} = -0.623.$$

Para los puntos de inflexión tenemos que resolver

$$\frac{6(x^2 - x) - (4x - 2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - x)^5}} = 0,$$

lo cual nos da las raíces,

$$x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6},$$

que definen los puntos de inflexión

$$p_1 = (0.232, -0.563), \quad p_2 = (1.434, 0.854).$$

A la izquierda de p_1 la función es convexa, entre p_1 y p_2 es cóncava, y a la derecha de p_2 es convexa nuevamente.

Todo esto se muestra en la figura 4.10.

Ejercicios

Encontrar máximos y mínimos locales y puntos de inflexión, y graficar cada función.

1. $f(x) = x^3 - 12x + 1$ R: máximo en -2 , mínimo en 2
2. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$ R: máximo en 0 , mínimo en 6
3. $f(x) = 2 + 3x - x^3$ R: mínimo en -1 , máximo en 1
4. $f(x) = x^4 - 6x^2$ R: máximo en 0 , puntos de inflexión en $\pm\sqrt{3}$
5. $f(x) = x^6 + 192x + 17$ R: mínimo en -2
6. $f(x) = 200 + 800x^3 + x^4$ R: mínimo en -600 , punto de inflexión en 0
7. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$ R: máximo en -1 , mínimo en 1 , punto de inflexión en 0
8. $f(x) = (x^2 - 1)^3$ R: mínimo en 0 , puntos de inflexión en ± 1
9. $f(x) = x - 3x^{1/3}$ R: máximo en -1 , mínimo en 1
10. $f(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$ R: mínimo en -1
11. $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ R: máximo en 1

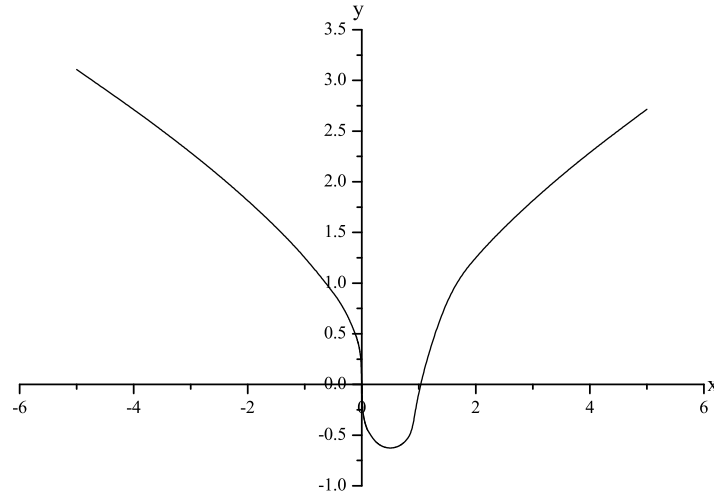


Figura 4.10: Función $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$

12. $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ R: mínimo en 0
13. $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ $\leq x \leq$ R: mínimo en -1
14. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ R: punto de inflexión en 0
15. $f(x) = xe^x$ R: mínimo en -1
16. $f(x) = x^2e^x$ R: mínimo en 0
17. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ R: máximo en e^2
18. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ R: punto de inflexión en 0
19. $f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}}$ [Indicación: Examinar la segunda derivada] R: punto de inflexión en $-\frac{1}{2}$
20. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ R: máximo en 0

Encontrar máximos y mínimos absolutos en los intervalos indicados

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$, $-1 \leq x \leq 1$ R: máximo en -1 , mínimo en 1
2. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$, $-1 \leq x \leq 2$ R: máximo en 2, mínimo en 1
3. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi$ R: máximo en $\frac{\pi}{3}$, mínimo en π
4. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ R: máximo en $\frac{\pi}{2}$, mínimo en $\frac{3\pi}{2}$
5. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ R: máximos en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$; mínimos en 0, π y 2π
6. $f(x) = x + \cos x$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ R: máximo en 2π , mínimo en 2π
7. $f(x) = x \operatorname{tg} x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ R: máximos en $\pm\frac{\pi}{4}$, mínimo en 0
8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $-2 \leq x \leq 2$ R: máximo en -2 , mínimo en 2
9. $f(x) = x \ln x$, $\frac{1}{10} \leq x \leq 1$ R: máximo en 1, mínimo en e^{-1}
10. $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $-2 \leq x \leq 1$ R: máximo en 2, mínimo en 0

4.6. Razones de cambio relacionadas

A veces al estudiar las razones de cambio de algunas cantidades, la derivada que nos interesa tiene que calcularse a partir de la razón a la que cambia alguna otra de las variables que sí sabemos como cambia.

Al resolver problemas en los que intervienen razones de cambio relacionadas, es necesario conocer la relación entre las variables a través de alguna fórmula o ecuación general. Esto es particularmente usual en problemas geométricos, por lo cual se aconseja repasar las principales fórmulas para hallar perímetros, áreas y volúmenes de la geometría elemental, así como las relaciones de semejanza. Algunos problemas también involucran conceptos de física que es necesario repasar, como velocidad, aceleración, etc., que se deben tener presentes durante el proceso.

Ejemplo

Si una bola de nieve se funde de modo que su área superficial disminuye a razón de $1 \text{ cm}^2/\text{min}$, encontrar la razón a la cual disminuye el diámetro cuando es de 10 cm.

Solución

Para resolver el problema necesitamos hallar una relación entre el diámetro de la esfera de nieve y su diámetro. El área de una esfera de radio r es

$$A = 4\pi r^2,$$

entonces

$$\frac{dA}{dr} = 8\pi r.$$

Por otra parte, el diámetro y el radio están relacionados por medio de

$$D = 2r,$$

entonces

$$\frac{dD}{dt} = 2 \frac{dr}{dt}.$$

Sabemos como dato que

$$\frac{dA}{dt} = 1 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \frac{dr}{dt},$$

así que despejando tendremos que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dA}{dr}} = \frac{1 \text{ cm}^2/\text{min}}{8\pi r} = \frac{1 \text{ cm}^2/\text{min}}{4\pi D},$$

finalmente

$$\frac{dD}{dt} = 2 \frac{dr}{dt} = \frac{1 \text{ cm}^2/\text{min}}{2\pi D} \approx 0.015915 \text{ cm/min.}$$

Ejemplo

Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia el oeste a 25 mi/h. ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles dos horas más tarde?

Solución

Supongamos que el auto que va hacia el sur lo hace en la dirección negativa del eje y , y que el que va hacia el oeste lo hace en la dirección negativa del eje x . Las velocidades en cada dirección son las derivadas con respecto al tiempo de x y de y (con signo negativo, por la convención adoptada). Con esto, después de dos horas, cada uno estará en las posiciones

$$y = -120 \text{ km}, \quad x = -50 \text{ km},$$

y su distancia estará dada por

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-120)^2 + (-50)^2} = 130 \text{ km};$$

su razón de cambio con respecto al tiempo será

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(-120 \text{ km})(60 \text{ km/h}) + (-50 \text{ km})(-25 \text{ km/h})}{130 \text{ km}} = 65 \text{ km/h.}$$

Ejemplo

Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 1 m/s desde un punto P . Cinco segundos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 1.2 m/s desde un punto a 50 m al este de P . ¿Con qué razón se separan 15 s después de que la mujer empezó a caminar?

Solución

A los 20 s el hombre va a una distancia de 20 m al norte de su punto de partida, mientras que la mujer va a 18 m al sur de su punto de partida. La figura 4.11 muestra el diagrama con las cantidades involucradas.

La distancia total es $D = d_1 + d_2$. La relación entre ésta y las cantidades dadas es

$$D = \sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{(50 - x)^2 + y_2^2},$$

que al derivarse con la regla de la cadena nos da

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y_1 \frac{dy_1}{dt}}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} + \frac{y_2 \frac{dy_2}{dt} - (50 - x) \frac{dx}{dt}}{\sqrt{(50 - x)^2 + y_2^2}}.$$

En la ecuación anterior, sólo nos falta conocer x , para lo cual debemos hallar la ecuación de la recta que une a las dos personas y encontrar el punto en que atraviesa al eje de las abscisas. Para esto tomamos a y como la distancia vertical entre y_1 y y_2 , que resulta ser $y = y_1 - y_2$.

$$(y + 18) = \frac{-18 - 20}{50 - 0}(x - 50) = -\frac{19}{25}x + 38,$$

$$y = -\frac{19}{25}x + 20.$$

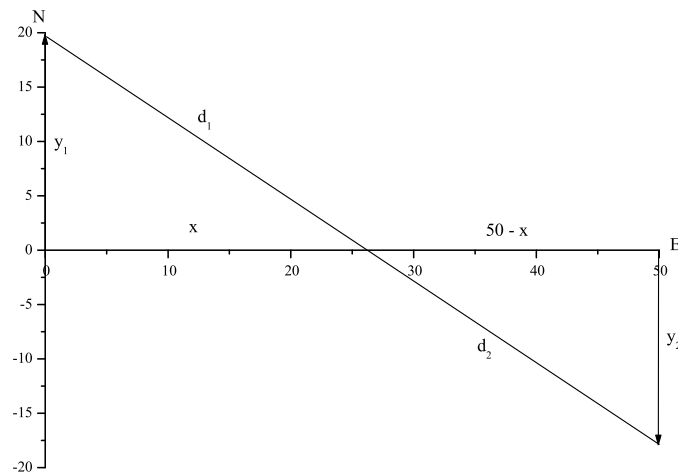


Figura 4.11: Configuración geométrica del problema

Cuando $y = 0$, $x = 26.3$. Para hallar la razón de cambio de x en el momento en cuestión, expresamos dx/dt en términos de dy_1/dt y dy_2/dt

$$x = -\frac{25}{19}y + 26.3 = -\frac{25}{19}(y_1 - y_2) + 26.3,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{25}{19} \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) = -2.89 \text{ m/s.}$$

Así pues, al sustituir, encontramos que

$$\frac{dD}{dt} = 4.72 \text{ m/s.}$$

Ejemplo

Dos vagonetas, A y B , están conectadas por medio de una cuerda de 39 m de largo que pasa sobre una polea P . El punto Q está en el piso 12 m directamente debajo de P y entre las vagonetas. Se tira de la vagoneta A alejándola de Q a una velocidad de 2 m/s. ¿Con qué rapidez se mueve la vagoneta B hacia Q en el instante en que A está a 5 m de Q ?

Solución

En la figura 4.12 se muestran las cantidades involucradas.

Como es una sola cuerda, tendremos que $a + b = 39$ m. Cada una de las cantidades a y b está relacionada con las otras cantidades así

$$a = \sqrt{h^2 + x_1^2},$$

$$b = \sqrt{h^2 + x_2^2}.$$

Tendremos entonces que

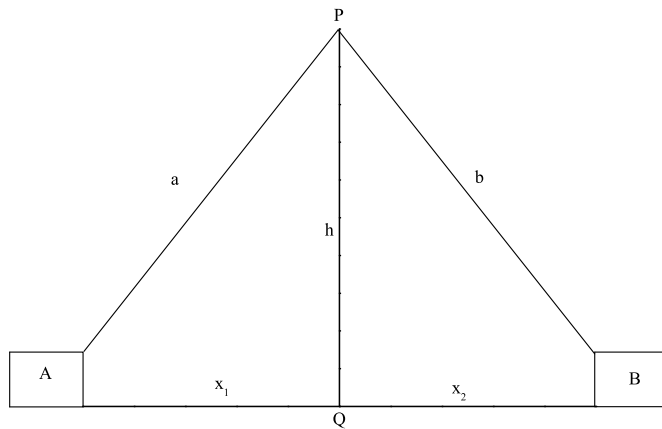


Figura 4.12: Diagrama de las furgonetas

$$\sqrt{h^2 + x_1^2} + \sqrt{h^2 + x_2^2} = 39,$$

derivando

$$\frac{x_1 \frac{dx_1}{dt}}{\sqrt{h^2 + x_1^2}} + \frac{x_2 \frac{dx_2}{dt}}{\sqrt{h^2 + x_2^2}} = 0,$$

y al despejar de aquí a dx_2/dt nos resulta

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-x_1 \frac{dx_1}{dt} \sqrt{h^2 + x_2^2}}{x_2 \sqrt{h^2 + x_1^2}},$$

sustituyendo los valores (el valor de x_2 se obtiene de la suma de las raíces cuadradas), obtenemos

$$\frac{dx_2}{dt} = -0.87 \text{ m/s.}$$

Ejercicios

- Si V es el volumen de un cubo con longitud de arista x y que se está expandiendo, encontrar la velocidad de expansión dV/dt en términos de la velocidad dx/dt a que crecen sus aristas. R: $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$
- Si A es el área de un círculo con radio r , encuentre dA/dt en términos de dr/dt . R: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$
- Dos trenes parten de una estación con tres horas de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El segundo se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón cambia la distancia entre los trenes dos horas después que partió el segundo tren? R: 111.2 km/h
- A mediodía, el velero A está a 150 km al oeste del velero B . El A navega hacia el este a 35 km/h y el B hacia el norte a 25 km/h. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre las embarcaciones a las 4:00 P.M.? R: 21.39 km/h

5. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 2 km a una velocidad de 800 km/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando aquél está a 4 km de ésta. R: 692.8 km/h
6. Un farol de una calle está montado en el extremo superior de un poste de 15 ft de alto. Un hombre cuya altura es de 6 ft se aleja del poste a una velocidad de 5 ft/s a lo largo de una trayectoria recta. ¿Con qué rapidez se mueve la punta de su sombra cuando el hombre está a 40 ft del poste? R: 8.33 ft/s
7. Una lámpara situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia el edificio a una velocidad de 1.6 m/s, ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre la pared cuando se encuentra a 4 m de ella? R: -2.4 m/s
8. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 mi/h y la otra camina hacia el norte a 2 mi/h. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre ambas después de 15 min? R: 0.53 km/h
9. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 ft por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base a una velocidad de 24 ft/s. a) ¿A qué razón disminuye su distancia a la segunda base cuando está a la mitad de la distancia de la primera? b) ¿A qué razón aumenta su distancia a la tercera base en el mismo momento? R: 10.73 ft/s
10. La altura de un triángulo crece 1 cm/min y su área 2 cm²/min, ¿Con qué razón cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área de 100 cm²? R: -1.6 cm/s
11. Se tira de un bote hacia un muelle por medio de una cuerda atada a la proa que pasa por una polea que está sobre el muelle 1 m más arriba que la proa. Si se tira de la cuerda a razón de 1 m/s, ¿con qué rapidez se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 8 m de éste? R: 1.008 m/s
12. Un avión vuela a una velocidad constante de 300 km/h, pasa sobre una estación de radar a una altitud de 1 km y asciende formando un ángulo de 30°. ¿Con qué razón aumenta la distancia del avión a la estación de radar 1 min más tarde? R: 296.39 km/h
13. El agua se fuga de un tanque cónico invertido a razón de 10 000 cm³/min, al mismo tiempo que se bombea agua hacia el tanque con una razón constante. El tanque tiene 6 m de altura y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua sube a razón de 20 cm/min cuando la altura de ese nivel es de 2 m, encontrar la razón a la que se bombea el agua al tanque. R: 0.28 m³/min
14. Una artesa de agua tiene 10 m de largo y una sección transversal en forma de trapecio isósceles cuyo ancho en el fondo es de 30 cm, el de la parte superior 80 cm y la altura 50 cm. Si la artesa se llena con agua a razón de 0.2 m³/min, ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando ésta tiene 30 cm de profundidad? R: 3.33 cm/min
15. Una piscina tiene 20 ft de ancho, 40 ft de largo y 3 ft de profundidad, en el extremo menos profundo, y 9 ft de profundidad en el más profundo, de modo que su sección transversal a lo largo es un trapecio. Si la piscina se llena a razón de 0.8 ft³/min, ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad en el punto más profundo es de 5 ft? R: 0.0012 ft/min
16. Se descarga grava desde un transportador de banda, a razón de 30 ft³/min y su grosor es tal que forma una pila a manera de un cono cuyo diámetro en la base y su altura siempre son iguales. ¿Con qué rapidez aumenta la altura de la pila cuando ésta tiene 10 ft de alto? R: 0.38 ft/min
17. La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponer que en cierto instante, el volumen es de 600 cm³, la presión es de 150 kPa y ésta aumenta a razón de 20 kPa/min. ¿Con qué razón disminuye el volumen en este instante? R: 80 cm³/min
18. Cuando se expande aire adiabáticamente (sin ganar ni perder calor), su presión P y el volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponer que en cierto instante, el volumen es de 400 cm³ y la presión es de 80 kPa y disminuye a razón de 10 kPa/min. ¿Con qué razón aumenta el volumen en ese instante? R: 0.98 cm³/min
19. El voltaje V , la corriente I y la resistencia R de un circuito están relacionadas por medio de la ecuación $V = IR$.

a) ¿Cómo se relacionan $\frac{dR}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dI}{dt}$?

$$R: \frac{dV}{dt} = I \frac{dR}{dt} + R \frac{dI}{dt}$$

b) Suponiendo que V crece a razón de 1 V/s, mientras que I decrece a razón de $1/3$ A/s, hallar la razón a que cambia R cuando $V = 12$ V e $I = 12$ A. ¿ R crece o decrece?

$$R: \frac{dR}{dt} = 9 \Omega/s, \text{ es decir, } R \text{ crece}$$

20. La potencia P de un circuito está relacionada con la resistencia R y la corriente I por medio de la ecuación $P = I^2 R$.

a) ¿Cómo se relacionan $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dR}{dt}$ y $\frac{dI}{dt}$, si P , I y R no son constantes?

$$R: \frac{dP}{dt} = 2IR \frac{dI}{dt} + I^2 \frac{dR}{dt}$$

b) ¿Cómo se relaciona $\frac{dR}{dt}$ con $\frac{dI}{dt}$ si P es constante?

$$R: 2R \frac{dI}{dt} + I \frac{dR}{dt} = 0$$

4.7. Problemas de optimización

Lo aprendido sobre la teoría de máximos y mínimos nos permitirá resolver una gran diversidad de problemas en las ciencias e ingeniería. Siempre que tengamos un problema en el que nos interese hallar un máximo o un mínimo (por ejemplo, el máximo rendimiento, o el gasto mínimo), tendremos que formular el problema en forma de una función, derivarla e igualar a cero a fin de hallar los puntos críticos, y determinar qué clase de puntos críticos son, para elegir el que resuelva nuestro problema. También será importante tener en cuenta los dominios de definición de cada función para hallar máximos y mínimos absolutos.

Ejemplo

Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una parte se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada sea a) máxima b) mínima?

Solución

Supongamos que el trozo que se va a usar para formar el triángulo mide x metros. Entonces la parte que se usará para formar el cuadrado deberá medir $10 - x$ metros. Con esta forma de cortar el alambre, cada lado del triángulo mide $x/3$, y cada lado del cuadrado mide $(10 - x)/4$. La altura del triángulo será, luego de aplicar el teorema de Pitágoras, $h = \sqrt{3}x^2/6$.

El área del cuadrado será

$$A_c = \frac{10 - x}{4} = \frac{100 - 20x + x^2}{16},$$

y el área del triángulo será

$$A_t = \frac{\frac{x}{2} \frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{36}.$$

Por lo anterior, el área total será

$$A = \frac{100 - 20x + x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}x^2}{36}.$$

Derivando obtenemos

$$\frac{dA}{dx} = \frac{x - 10}{8} + \frac{\sqrt{3}x}{18},$$

que al igualar a cero y resolver nos da

$$x = \frac{\frac{5}{4}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}\right)},$$

$$x \approx 5.68,$$

y en ese punto el área vale

$$A(5.68) \approx 2.7 \text{ m}^2.$$

La segunda derivada es

$$\frac{d^2A}{dx^2} \approx 0.22 > 0.$$

Esto indica que el punto crítico que hallamos es un mínimo. O sea que el área mínima es aquella en la que la varilla para el triángulo mide 2.7 m y la varilla para el cuadrado mide 7.3 m.

Para hallar el máximo, recordemos que este problema está definido únicamente para $0 \leq x \leq 10$. En los extremos de este intervalo la función tiene los valores

$$A(0) = 6.25,$$

$$A(10) = 4.75.$$

Entonces, el máximo está en $x = 0$, o sea que el área máxima es aquella en la cual no hay triángulo, sólo hay cuadrado.

Ejemplo

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en un círculo de radio r .

Solución

Para un círculo de radio r centrado en el origen, tenemos la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Como el rectángulo está inscrito, los vértices coinciden con cuatro puntos sobre la circunferencia. Para simplificar el problema, supondremos que los vértices son simétricos respecto a los ejes y el origen, esto es, que los vértices tienen las coordenadas

$$v_1 = (x_1, y_1), \quad v_2 = (x_1, -y_1), \quad v_3 = (-x_1, y_1), \quad v_4 = (-x_1, -y_1).$$

Con esto, el área de tal rectángulo es

$$A = (2x_1)(2y_1) = 4x_1y_1.$$

Por otra parte, de la ecuación para la circunferencia obtenemos una expresión para y_1 en función de x_1

$$y_1 = \sqrt{r^2 - x_1^2},$$

con lo cual

$$A = 4x_1\sqrt{r^2 - x_1^2}.$$

Derivando

$$\frac{dA}{dx} = 4\sqrt{r^2 - x_1^2} + \frac{2x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}(-2x) = 4\sqrt{r^2 - x_1^2} - 4\frac{x_1^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}.$$

Igualando a cero obtenemos

$$\sqrt{r^2 - x_1^2} = \frac{x_1^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}},$$

$$r^2 - x_1^2 = x_1^2,$$

$$x_1^2 = r^2/2,$$

$$x_1 = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

O sea que un rectángulo cuyo lado mida $2r/\sqrt{2}$ es el de mayor área. Conviene hacer notar que tal rectángulo, es un cuadrado.

Ejercicios

- Hallar el punto de la recta $y = 2x - 3$ más cercano al origen. R: (1.2,-0.6)
- Encontrar los puntos sobre la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que están más próximos al punto (2,0). R: $(1, \pm\sqrt{5})$
- Encontrar las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima que pueda inscribirse en un círculo de radio r . [Indicación: Colocar el círculo en un plano cartesiano con el centro en el origen y los lados iguales del triángulo simétricamente respecto al eje y ; colocar el lado diferente hacia arriba; expresar la base y la altura del triángulo en términos del radio y de las coordenadas de cada punto]
R: equilátero de lado $\sqrt{3}r$
- Hallar el área del rectángulo más grande que se pueda inscribir en un triángulo rectángulo con catetos cuyas longitudes son de 3 cm y 4 cm respectivamente, si dos de los lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos. R: 3 cm^2
- Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r . Encontrar el volumen más grande posible de ese cilindro. R: $V_{max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$
- Entre 0°C y 30°C , el volumen V (en cm^3) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426 T + 0.0085043 T^2 - 0.0000679 T^3$$

Encontrar la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima. [Indicación: La densidad es el cociente de la masa entre el volumen] R: 3.96°C

7. El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial Discovery desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el despegue en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieron en $t = 126$ s, se expresa mediante

$$v(t) = 0.001302 t^3 - 0.09029 t^2 + 23.61 t - 3.083$$

(en ft/s). Con este modelo, estimar los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares. [Indicación: No olvidar que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo] R: $a_{max} = 62.9$, $a_{min} = 21.5$

8. La resistencia de una viga de madera es proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Encontrar el ancho de la viga más resistente que se puede sacar de un tronco de 16 cm de diámetro.
R: ancho: 9.23 m, grosor: 13.06 cm
9. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. (Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo). Si el perímetro de la ventana es de 10 m, encontrar las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.
R: ancho: 1.95 m, altura: 0.97 m
10. Si se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encontrar el volumen máximo posible de la caja. R: 4000 cm^3
11. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de $32\,000 \text{ cm}^3$. Encontrar las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado. R: largo: 40 cm, ancho: 20 cm
12. a) Demostrar que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es un cuadrado. b) Demostrar que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.
13. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3 . El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta \$100 por metro cuadrado. El material para los costados, \$60 por metro cuadrado. Encontrar las dimensiones que deben usarse para tener el más barato de esos recipientes. R: largo: 3.3 m, ancho: 1.65 m, altura: 1.83 m
14. Se va a fabricar una lata cilíndrica con la tapa superior abierta. Para un volumen dado V , ¿cuánto debe medir el radio R a fin de que se use el mínimo de material? R: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$
15. Se quiere fabricar un tanque compuesto de un cilindro y dos semiesferas a los lados y que tenga capacidad para 1000 litros. ¿Cuánto deben medir el largo de el cilindro y el radio tanto del cilindro como de la esfera a fin de que se gaste el mínimo de material? R: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, $h = 0$
16. Un obrero debe fabricar un canal abierto en forma de prisma trapezoidal, de capacidad máxima. El fondo y los costados del canal deben medir 10 cm y los costados deben estar igualmente inclinados respecto al fondo. ¿Cuál debe ser el ancho del canal en la parte superior? R: 20 cm
17. En los extremos de cierta calle de un pueblo, que mide 2 km, hay dos fiestas con música que emiten ruido a volúmenes diferentes V_1 y V_2 , con $V_2 = 4V_1$. Si la intensidad del sonido varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia, encontrar el punto entre las dos fiestas en que el escándalo será menor.
R: 0.77 km, medido desde V_1
18. Juana está a 4 km de la playa en un bote y se dirige a su pueblo, que está a 12 km en línea recta desde el punto más cercano a la costa (llamado A). Ella rema a 4 km/h y camina a 10 km/h. ¿A dónde debe llegar en el bote para hacer el menor tiempo hasta su pueblo? R: a 1.75 km de A
19. Un móvil sin fricción está fijo a una pared mediante un resorte. Se empuja al móvil 10 cm desde su posición de equilibrio y se le deja oscilar durante 4 segundos. Durante ese intervalo la posición está dada por

$$x(t) = 10 \cos(\pi t).$$

a) ¿Cuál es la velocidad máxima del móvil? ¿Qué aceleración tiene en ese momento?

$$\text{R: } v = 10\pi \text{ cm/s, } a = 0$$

b) ¿Cuál es su aceleración máxima? ¿Qué velocidad tiene en ese momento?

$$\text{R: } a = 10\pi^2 \text{ cm/s}^2, v = 0$$

20. Una señal está dada por la función

$$v(t) = 2 \operatorname{sen} t + \cos(2t), \quad 0 \leq t \leq 7.$$

a) ¿Cuál es el voltaje máximo en ese intervalo de tiempo?

$$\text{R: } v = 1.5 \text{ V}$$

b) ¿Cuánto vale el voltaje mínimo y cuándo se alcanza?

$$\text{R: } v = -3 \text{ V, } t = \frac{3\pi}{2} \text{ s}$$

4.8. Cálculo de límites indeterminados

Algunos límites indeterminados pueden calcularse por medio de la *regla de L'Hôpital*, la cual establece que cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots \quad (4.3)$$

que se interrumpirá cuando alguna de las derivadas deje de ser cero. Esta regla es muy útil para calcular límites, no sólo de la forma $\frac{0}{0}$, sino también de las formas $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , $\infty - \infty$, realizando el álgebra necesaria.

Ejemplo

Hallar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2x - 1}{3x}.$$

Solución

Por la regla de L'hôpital tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo

Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}.$$

Solución

Por la regla de L'hôpital, aplicada dos veces, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} 2x} = \frac{e^x + e^{-x}}{4 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo

Encontrar el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Solución

Para poder aplicar la regla de L'hôpital tenemos que convertir a la forma $\frac{0}{0}$, esto se consigue con

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Ejemplo

Hallar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x.$$

Solución

Para aplicar la regla de L'hôpital hacemos $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$, esto es

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0.$$

Ejemplo

Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x - \pi)(1 + 3x)^{1/2x}.$$

Solución

Para calcular límites de este tipo, primero se sacan logaritmos y después se calcula el límite, entonces hacemos

$$y = (1 + 3x)^{1/2x},$$

y sacando logaritmos

$$\ln y = \frac{1}{2x} \ln(1 + 3x).$$

Entonces calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por lo anterior, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \frac{3}{2}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = e^{3/2}.$$

Ejercicios

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$ R: $\frac{1}{2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ R: $\frac{1}{40}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$ R: $\frac{3}{13}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-2x-1}$ R: 0
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x}$ R: $-\frac{1}{2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ R: $\frac{1}{6}$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{2 + \operatorname{sec} x}{3 \operatorname{tg} x}$ R: $\frac{1}{3}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x}$ R: ∞
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$ R: ∞
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}$ R: 2
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-3^x}{5-5^x}$ R: $\frac{3}{5}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ R: 0
13. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \operatorname{sen} x$ R: 0
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x}\right)$ R: 1
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x}\right)$ R: 1
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ R: 0
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$ R: e^5
18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$ R: 1
19. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$ R: e
20. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos 2x)^{\operatorname{csc} 3x}$ R: $\frac{1}{3}$

Tablas

Identidades trigonométricas

1. $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$
2. $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$
3. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x$
4. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
5. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
6. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
7. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
8. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Identidades hiperbólicas

1. $\cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta = 1$
2. $\operatorname{sech}^2 \theta = 1 - \operatorname{tgh}^2 \theta$
3. $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \pm \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \beta$
4. $\operatorname{senh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{senh} \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \operatorname{senh} \beta$
5. $\operatorname{tgh}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tgh} \alpha \pm \operatorname{tgh} \beta}{1 \mp \operatorname{tgh} \alpha \operatorname{tgh} \beta}$
6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
7. $\operatorname{tgh}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$
8. $\operatorname{ctgh}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$
9. $\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$
10. $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$

Identidades logarítmicas

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(x^n) = n \ln x$
4. $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln x$
5. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Identidades exponenciales

1. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
2. $(e^x)^y = e^{xy}$
3. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
4. $\sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{x}{n}}$
5. $a^x = e^{x \ln a}$

Derivadas

1. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
3. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
4. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x$
5. $\frac{d}{dx} \operatorname{cos} x = -\operatorname{sen} x$
6. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \operatorname{sec}^2 x$
7. $\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\operatorname{csc}^2 x$
8. $\frac{d}{dx} \operatorname{sec} x = \operatorname{sec} x \operatorname{tg} x$
9. $\frac{d}{dx} \operatorname{csc} x = -\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x$
10. $\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \operatorname{cosh} x$
11. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosh} x = \operatorname{senh} x$
12. $\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$

$$13. \frac{d}{dx} \operatorname{ctgh} x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$14. \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \operatorname{tg} x$$

$$15. \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \operatorname{ctg} x$$

$$16. \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$17. \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$18. \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$19. \frac{d}{dx} \operatorname{arcctg} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$20. \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$21. \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Bibliografía

- AYRES, F. Y E. MENDELSON *Cálculo*. Cuarta edición. McGraw Hill. México, 2001.
- DEMIDOVICH, B. *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Mir. Moscú, 1973.
- KRASNOV, M. ET AL. *Curso de matemáticas superiores*. Segunda edición. URSS. Moscú, 2003.
- LARSON, R. ET AL. *Cálculo*. Octava edición. McGraw Hill. México, 2006.
- PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*. Mir. Moscú, 1977.
- SPIVAK, M. *Calculus*. Segunda edición. Reverté. México, 1992.
- STEWART, J. *Cálculo de una variable*. Cuarta Edición. Thompson. México, 2002.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo con geometría analítica*. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1989.
- THOMAS, G. B. *Cálculo de una variable*. Undécima edición. Pearson - Addison Wesley. México, 2006.

Esta obra se terminó de imprimir
en el mes de marzo del 2010,
en el Taller de Impresión de la
Universidad Autónoma de la Ciudad de México,
con un tiraje de 2,500 ejemplares.

(reseña contraportada)

El cálculo diferencial, herramienta matemática ideada por Newton para describir el movimiento, es actualmente un instrumento invaluable para estudiantes de ingeniería. La caracterización de cualquier sistema mediante un modelo matemático expresado en forma de una función, permite analizar la relación entre sus variables y su pronóstico de cambios en forma precisa.

Métodos operativos de cálculo diferencial en Ingeniería tiene el objetivo de proveer al estudiante de elementos suficientes para que aprenda a calcular la evolución de un sistema en términos prácticos. Al inicio del texto, se retoma y desarrolla el concepto de función, describiendo sus propiedades básicas para, desde ahí, avanzar hacia una comprensión más natural de los límites y del tema central del cálculo diferencial: la derivada. Finalmente, se ejemplifican las aplicaciones de la derivada y se incluye un apartado con las fórmulas de uso más frecuente.

A lo largo del material se presentan gráficos que permiten visualizar los contenidos planteados. Asimismo, se ofrecen abundantes ejemplos y ejercicios que, además de permitir al estudiante evaluar su aprendizaje, van encaminados a guiarle en las primeras fases de modelación matemática para problemas reales de ingeniería.

(semblanza autor en contraportada)

Fausto Cervantes Ortiz es Físico, Matemático y Maestro en Astronomía por la UNAM. Ha publicado diversos textos universitarios para la enseñanza de la Matemática, e impartido cátedra a ingenieros y científicos de distintas especialidades. Actualmente se desempeña como profesor-investigador de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.