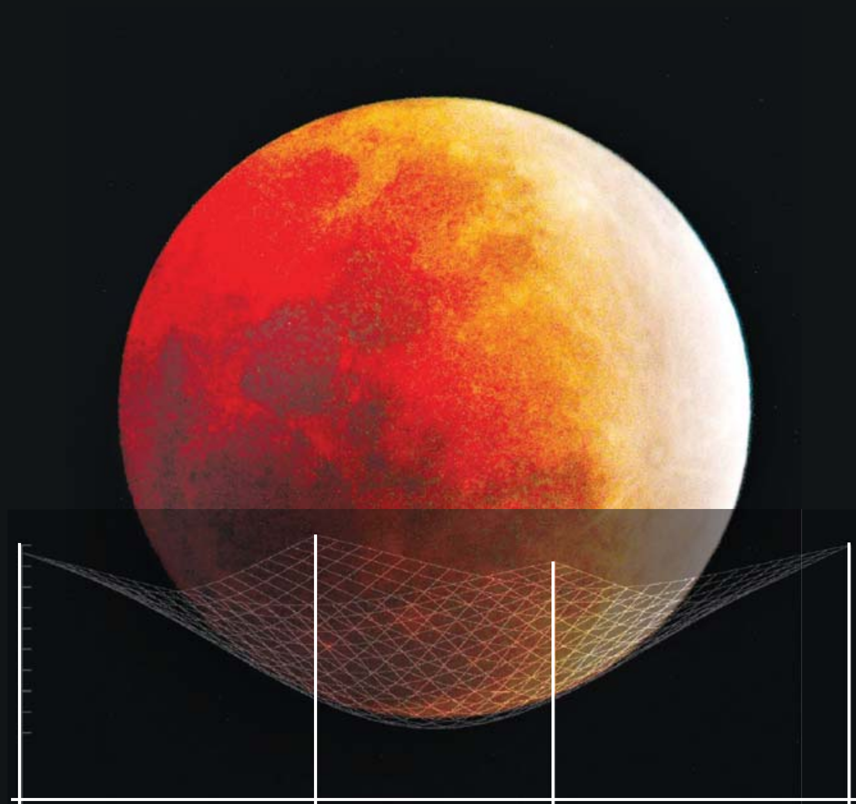
Métodos operativos de cálculo vectorial

Fausto Cervantes Ortiz



UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

Métodos operativos de cálculo vectorial

Fausto Cervantes Ortiz

Métodos operativos de cálculo vectorial

Fausto Cervantes Ortiz

Academia de Matemáticas / Colegio de Ciencia y Tecnología
Ciclo Básico / Ingenierías / Cálculo Vectorial
COORDINACIÓN ACADÉMICA

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

materiales
educativos

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Esther Orozco Orozco
RECTORA

Facundo González Bárcenas
COORDINADOR ACADÉMICO

Carlos Ruano Cavazos
COORDINADOR DEL COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

D.R. Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Av. División del Norte 906, Col. Narvarte Poniente,
Delegación Benito Juárez, C.P. 03020, México, D.F.

ISBN:

Academia de Matemáticas, Colegio de Ciencia y Tecnología, Ciclo Básico,
Coordinación Académica, UACM

Fotografía de la portada:

La Luna oscurecida por la sombra de la Tierra durante un eclipse total de Luna. El color rojizo se percibe a causa del efecto de dispersión de la luz provocado por la atmósfera de nuestro planeta.

Imagen tomada de www.wikipedia.org

• Materiales Educativos: matsedusuacm@gmail.com
• Responsable de la edición: Ana Beatriz Alonso

• Diseño de la portada: Marco Kim. Diagramas del texto elaborados por el autor.

Hecho e impreso en México / *Printed in Mexico*

La Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, en su Exposición de motivos, establece:

> "7. Contribuir al desarrollo cultural, profesional y personal de los estudiantes:
>
> (...) El empeño de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México deberá ser que todos los estudiantes que a ella ingresen concluyan con éxito sus estudios. Para ello deberá construir los sistemas y servicios que éstos necesiten para alcanzar este propósito de acuerdo con su condición de vida y preparación previa. (...)." [1]

De igual manera, en su Título I, Capítulo II, Artículo 6, Fracción IV, dice:

> "Concebida como una institución de servicio, la Universidad brindará a los estudiantes los apoyos académicos necesarios para que tengan éxito en sus estudios. (...)." [2]

Atendiendo a este mandato, los profesores - investigadores de la UACM preparan materiales educativos como herramienta de aprendizaje para los estudiantes de los cursos correspondientes, respondiendo así al principio de nuestra casa de estudios de proporcionarles los soportes necesarios para su avance a lo largo de la licenciatura.

Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

---

[1] *Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México*, publicada en la *Gaceta Oficial del Distrito Federal* el 5 de enero de 2005, reproducida en el Taller de Impresión de la UACM, p. 14.

[2] *Ídem.*, p. 18.

Introducción

Este libro pretende servir como una guía para reforzar los contenidos del curso presencial de cálculo vectorial. Está dirigido al estudiante de ingeniería que se encuentra familiarizado con los conceptos fundamentales de esta disciplina, de modo tal que el texto se concentra en plasmar sus fórmulas y procedimientos de manera concisa, explicando las condiciones en que deben ser utilizados para abordar la solución de problemas específicos.

El temario incluido ha sido organizado previendo que el estudiante avance naturalmente en la comprensión y el dominio de los métodos básicos del cálculo vectorial, a través del trabajo con rectas, curvas y superficies en el espacio, y de los conceptos de diferenciabilidad e integrabilidad para campos escalares y vectoriales. Estos conocimientos le aportarán las herramientas necesarias para analizar, interpretar y resolver fenómenos de interés científico y tecnológico.

Paralelamente, este material ha centrado su atención en apoyar el avance del curso mediante la inclusión de gráficos y ejemplos que ilustran la información planteada, así como de una amplia oferta de ejercicios con sus respectivas soluciones al final de cada sección. Con lo anterior se busca que el estudiante pueda poner en práctica los conocimientos adquiridos dándole significado y sentido a su aprendizaje.

El autor desea agradecer a todas aquellas personas que ayudaron a que este libro viera la luz. En particular se agradece a los profesores Verónica Pérez González, Hugo Villaseñor Hernández, Isaí Moreno Roque, Erik Hernández Hernández (UACM-SLT) y Gerardo Sánchez Licea (FC-UNAM) quienes revisaron el manuscrito, aportando comentarios y sugerencias muy útiles. Asimismo, se agradece el apoyo editorial brindado por Ana Beatriz Alonso Osorio. Sin embargo, las erratas que subsistan serán la entera responsabilidad del autor, quien agradecerá le sean señaladas para su corrección en futuras ediciones.

Se espera que este material sea de utilidad a los estudiantes de ingeniería de la UACM, para quienes ha sido escrito. El autor agradecerá cualquier observación sobre su contenido a la siguiente dirección electrónica: `fausto.cervantes@uacm.edu.mx`, o personalmente, en el cubículo E-256 del Plantel San Lorenzo Tezonco de la UACM.

Nada humano me es ajeno

Fausto Cervantes Ortiz
San Lorenzo Tezonco, D. F.
Octubre de 2009.

Índice

Capítulo 1

Vectores

Un *vector* es una herramienta matemática que tiene como propiedades una magnitud y una dirección. En este sentido es diferente de otras cantidades que sólo constan de magnitud, a las que llamamos *escalares*. Para caracterizar a un vector es necesario especificar un escalar que nos dé su magnitud y un ángulo que nos dé su dirección. Gráficamente los vectores se representan por medio de flechas cuyas longitudes son proporcionales a sus respectivas magnitudes. La cola de la flecha se llama *punto inicial* del vector y la punta es *el punto final*.

Resulta cómodo referir los vectores a un sistema de coordenadas cartesiano, por lo cual la magnitud de un vector se mide de acuerdo al sistema de unidades que se usa en dicho sistema, mientras que para la dirección se mide el ángulo que hay entre el vector y la parte positiva del eje de las abscisas o eje x, habiendo ubicado el punto inicial en el origen del sistema. Esto se ilustra en la figura 1.1.

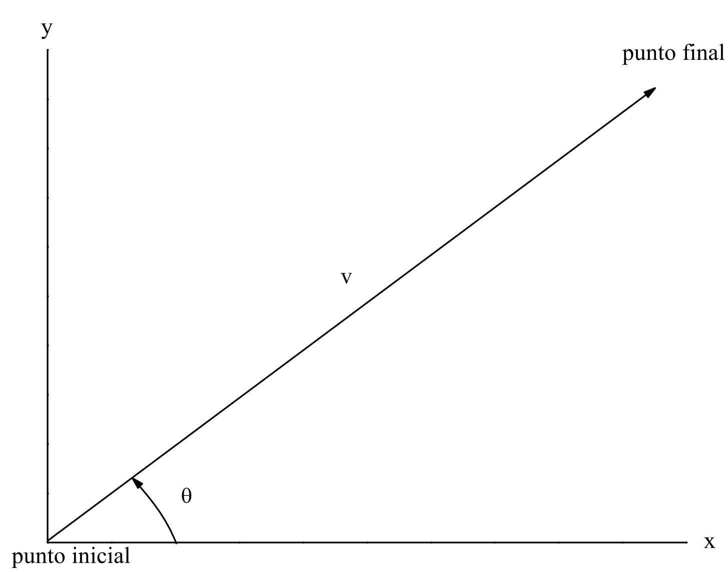


Figura 1.1: Vector en el plano xy

Para distinguir los vectores de las cantidades que no lo son, se colocará encima una flechita. Especificar un vector requiere dar una magnitud y un ángulo, lo que se expresa como

$$\vec{v} = v\angle\theta,$$

siendo v la magnitud del vector (a veces llamada *módulo*, y simbolizada como $|\vec{v}|$) y θ el ángulo que da su dirección. Es importante notar que el ángulo no es único, sino que se puede especificar de formas diferentes dado que a un ángulo se le pueden sumar (o restar) múltiplos de 360º, por ejemplo, el vector $\vec{v} = 4\angle 45^o$ también se puede representar como $\vec{v} = 4\angle -315^o$, o como $\vec{v} = 4\angle 405^o$, etc.

Para los vectores se definen ciertas operaciones que no coinciden con las operaciones con escalares, sino que se deben realizar en forma geométrica. Para esto es necesario utilizar ciertos conceptos de la trigonometría.

1.1. Suma de vectores

La suma de dos vectores es un nuevo vector que se construye de la siguiente manera: si se ubica al primer vector con el punto inicial en el origen, en el punto final se colocará el punto inicial del segundo vector. El vector *suma* (o vector *resultante*) tendrá como punto inicial el origen y el punto final se coloca en el mismo lugar que el punto final del segundo vector. Esto se muestra en la figura 1.2.

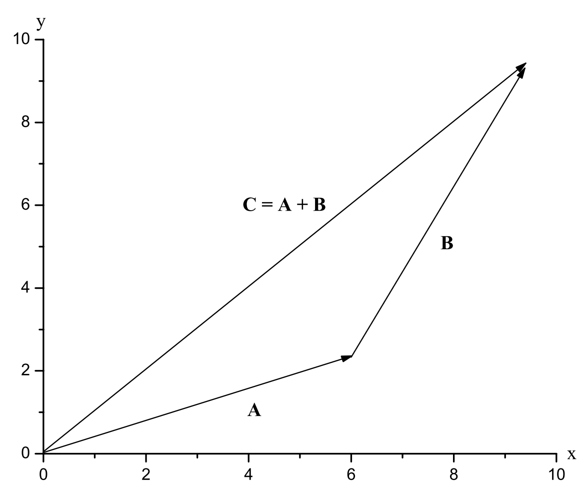


Figura 1.2: Suma de vectores

Para encontrar la magnitud y dirección del vector suma se utilizan las relaciones trigonométricas necesarias.

Ejemplo

Sean los vectores $\vec{a} = 5\angle 30^o$, $\vec{b} = 4\angle 60^o$. Obtener la suma, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Solución

Los vectores tienen la configuración mostrada en la figura 1.3. Las características del vector suma se obtienen como sigue: la magnitud de $\vec{c}$ se obtiene de la ley de los cosenos aplicada al lado $\vec{c}$ del

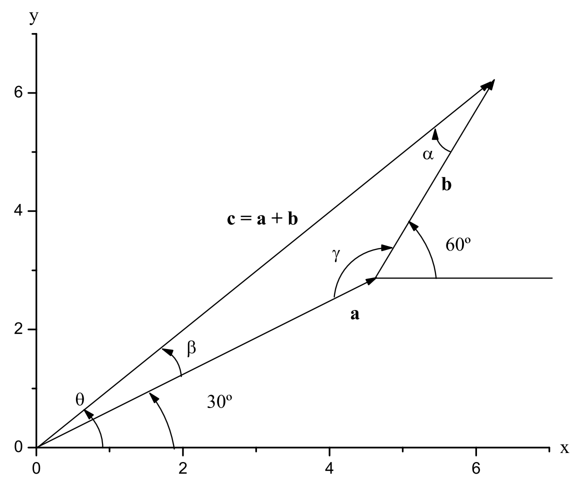


Figura 1.3: Configuración de los vectores y sus ángulos

triángulo dado. Nótese que el ángulo $\theta = 30^{\mathrm{o}} + \alpha$ es el que caracteriza al vector y por lo tanto es el que hay que encontrar finalmente.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

De la figura **??**, vemos que el ángulo γ es la suma de el suplemento de 60^{o} más 30^{o} por ser ángulo correspondiente con el ángulo de $\vec{a}$. Entonces:

$$c = \sqrt{52 + 42 - 2(5)(4)\cos 150^{\mathrm{o}}} = 8.7$$

Para calcular β se usa la ley de los senos, aplicada al ángulo γ y a los lados a y c (que ya se calculó):

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta}{4} = \frac{\operatorname{sen} 150^\circ}{8.7}$$

$$\operatorname{sen}\beta = 0.2299, \ \Rightarrow \ \beta = 13.3^{\mathrm{o}}$$

entonces $\theta = 43.3^{\mathrm{o}}$

$$\vec{c} = 8.7\angle 43.3^{\mathrm{o}}$$

1.2. Multiplicación de un vector por un escalar

Cuando multiplicamos un vector por un escalar, pueden pasar varias cosas, dependiendo del valor de la constante. Sea $\vec{v}$ un vector y k una constante. El vector $\vec{u} = k\vec{v}$ cambiará de la siguiente manera:

Si $k > 1$, el vector se *estira* k unidades en la misma dirección
Si $0 < k < 1$, el vector se *encoge* en la misma dirección
Si $k < -1$, el vector se estira y apunta en la dirección opuesta
Si $-1 < k < 0$, el vector se encoge y apunta en dirección opuesta
Si $k = -1$, el vector no cambia de magnitud, sólo apunta en dirección opuesta
Si $k = 1$, el vector no cambia, queda igual

Ejemplo

Sea $\vec{v} = 6\angle 40^o$, hallar $-0.5\vec{v}$ y $3\vec{v}$.

Solución

Para hallar $-0.5\vec{v}$ multiplicamos por 0.5 magnitud y le sumamos 180^o al ángulo:

$$-\vec{v} = 3\angle 220^o$$

Para $3\vec{v}$ sólo multiplicamos por 3 a la magnitud y dejamos igual al ángulo:

$$3\vec{v} = 18\angle 40^o$$

1.3. Descomposición de vectores

Así como se pueden sumar dos vectores para obtener un tercero, también se puede descomponer un vector en dos (o más) vectores. En particular nos interesará descomponer en vectores que sean paralelos a los ejes coordenados. Para ello usamos las relaciones de la trigonometría entre cada una de las componentes.

Para un vector en el primer cuadrante tendremos una componente en la dirección positiva del eje x y otra en la del eje y, cuyas longitudes son la abscisa y la ordenada del punto final respectivamente. Se calcula la longitud de cada componente, x y y multiplicando la magnitud del vector por el coseno y el seno del ángulo menor con el eje x respectivamente (ver figura 1.4).

Los signos en cada caso se asignan según el sentido en que quede cada componente en los respectivos ejes. Para el primer cuadrante ambas componentes son positivas, para el segundo cuadrante la componente x es negativa y la componente y es positiva, para el tercer cuadrante ambas son negativas y para el cuarto, x es positiva y y es negativa. Todo esto se resume en el diagrama mencionado.

Ejemplo

Encontrar las componentes de los vectores siguientes: $\vec{v} = 7\angle 23^o$, $\vec{w} = 8\angle -35^o$, $\vec{u} = 5\angle 225^o$. Los vectores se muestran en la figura 1.4.

Solución

Las componentes de $\vec{v}$ son: $v_x = 7\cos 30^\circ$, $v_y = 7\,\mathrm{sen}\,30^\circ$

Las de w son: $w_x = 8\cos 35^\circ$, $w_y = -8\,\mathrm{sen}\,35^\circ$

Las de u son: $u_x = -5\cos 45^\circ$, $u_y = -5\,\mathrm{sen}\,45^\circ$.

Nótese que en $\vec{w}$ se usó el valor absoluto del ángulo y en $\vec{u}$ se usó el ángulo más pequeño entre el eje x y el vector.

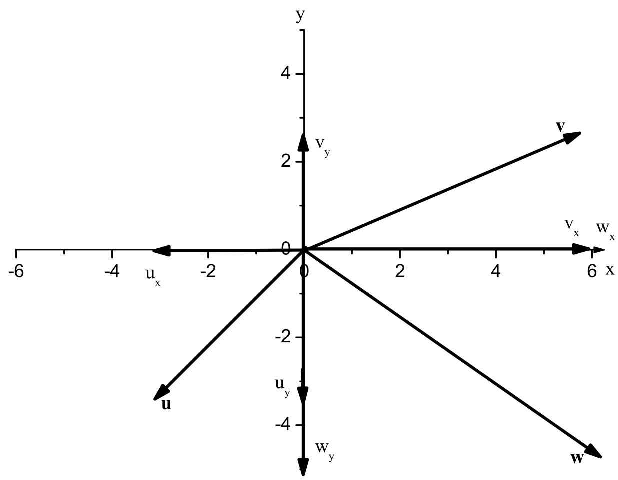


Figura 1.4: Componentes de vectores en $\mathbb{R}^2$

1.4. Vectores unitarios

Un vector unitario es un vector cuya magnitud es uno. Cualquier vector se puede expresar como el producto de un vector unitario en la misma dirección por su magnitud. También se puede obtener un vector unitario en la dirección de un vector dividiéndolo entre su magnitud, a esto se le llama *normalización*. El vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ se designa por $\hat{a}$.

En particular será de gran importancia considerar los vectores unitarios que apuntan en la misma dirección de los ejes de coordenadas. Como estos se usan abundantemente, se les dan símbolos especiales: el vector unitario en la dirección del eje x se designa por $\hat{\imath}$ y el unitario en dirección y se designa por $\hat{\jmath}$. Cualquier vector se puede expresar como una suma de múltiplos de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, para lo cual es necesario obtener la magnitud de sus componentes en cada dirección y multiplicarlas por los unitarios de cada dirección. Cuando se suman múltiplos de vectores se dice que se está haciendo una combinación lineal. Así pues, todo vector $\vec{A}$ se puede expresar como combinación lineal de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$: $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$. Es frecuente que los vectores se expresen también como si fueran coordenadas: $\vec{A} = (A_x, A_y)$, que no es sino una manera alterna de expresar lo mismo que antes.

Ejemplo

Expresar los siguientes vectores con ayuda de los unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$:

$\vec{a} = 8\angle 50^o$, $\vec{b} = 15\angle 150^o$, $\vec{c} = 12\angle 250^o$, $\vec{d} = 9\angle 350^o$.

Los vectores se muestran en la figura 1.5.

Solución

$a_x = 8\cos 50^o = 5.1423, a_y = 8\,\mathrm{sen}\,50^o = 6.1284 \Rightarrow \vec{a} = 5.1423\hat{\imath} + 6.1284\hat{\jmath}$.

$b_x = -15\cos 30^o = -12.9904, b_y = 15\,\mathrm{sen}\,30^o = 7.5 \Rightarrow \vec{b} = -12.9904\hat{\imath} + 7.5\hat{\jmath}$.

$c_x = -12\cos 70^o = -4.1042, c_y = -12\,\mathrm{sen}\,70^o = -11.2763 \Rightarrow \vec{c} = -4.1042\hat{\imath} - 11.2763\hat{\jmath}$.

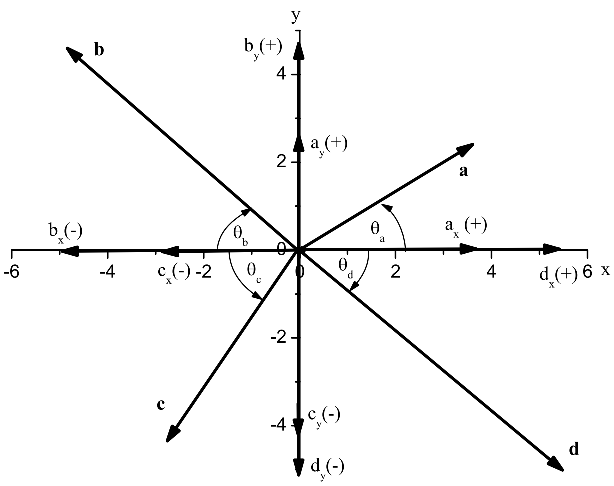


Figura 1.5: Configuración de los vectores

$d_x = 9\cos 10^{\text{o}} = 8.8632, d_y = -9\,\text{sen}\,10^{\text{o}} = -1.5628 \Rightarrow \vec{d} = 8.8632\hat{\imath} - 1.5628\hat{\jmath}$.

El uso de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ nos simplifica enormemente las operaciones de suma y producto por un escalar, puesto que no hay que operar con ángulos. Para la suma sólo se suman los coeficientes de $\hat{\imath}$ y de $\hat{\jmath}$ para cada vector, y para el producto por un escalar se multiplican los coeficientes de cada componente por el escalar.

Ejemplo

Para los vectores $\vec{u} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $\vec{v} = -5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$ realizar las operaciones indicadas:

a) $2\vec{u}$, *b*) $5\vec{v}$, *c*) $-3\vec{u} + 4\vec{v}$

Solución

a) $2\vec{u} = 2(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) = 6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$.

b) $5\vec{v} = 5(-5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}) = -25\hat{\imath} + 40\hat{\jmath}$.

c) $-3\vec{u} + 4\vec{v} = -3(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) + 4(-5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}) = -29\hat{\imath} + 38\hat{\jmath}$.

Para hallar la magnitud de un vector dado como combinación lineal de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, se usa el teorema de Pitágoras: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Para hallar el ángulo que da su dirección se usa la definición de la tangente trigonométrica: $\text{tg}\,\theta = v_y/v_x$.

Ejemplo

Encontrar la magnitud y dirección del vector $\vec{v} = 6\hat{\imath} - 9\hat{\jmath}$

Solución

La magnitud es

$$v = \sqrt{6^2 + (-9)^2} = \sqrt{117} \approx 10.82.$$

La dirección está dada por el ángulo

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-9}{6}\right) = \operatorname{arc\,tg}(-3) \approx -71.6^\circ.$$

El vector $\vec{v}$ se puede escribir como

$$\vec{v} = 10.82\angle - 71.6^\circ.$$

Ejercicios

Encontrar los valores de x, y, z:

1. $(-21, 23) - (x, 6) = (-25, y)$ R: $x = -4, y = 1$
2. $3(133, -0.33, 0) + (-399, 0.99, 0) = (x, y, z)$ R: $x = 0, y = 0, z = 0$
3. $(a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + 0.5(x, y, z)$ R: $x = 2a - 104, y = -4b - 24, z = 26c - 22$
4. $(2, 3, 5) - 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} = (x, y, z)$ R: $x = -2, y = 6, z = 5$
5. $80(0.3, 2, 0) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ R: $x = 24, y = 160, z = 0$
6. $(3, y, 5) + (x, 2, -6) = (2, 3, z)$ R: $x = -1, y = 1, z = 1$
7. Sean $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, -3, 1)$ y $\vec{w} = (3, 2, -1)$. Hallar
   - *a*) $\vec{u} - \vec{w}$ R: $(-2, 0, 4)$
   - *b*) $3\vec{v} + 7\vec{w}$ R: $(27, 5, -4)$
   - *c*) $-\vec{w} + \vec{v}$ R: $(-1, -5, 2)$
   - *d*) $3(\vec{u} - 7\vec{v})$ R: $(-39, 69, -12)$
   - *e*) $-3\vec{v} - 8\vec{w}$ R: $(-30, -7, 5)$
   - *f*) $2\vec{v} - (\vec{u} + \vec{w})$ R: $(0, -10, 0)$
   - *g*) resolver para x: $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$ R: $\vec{x} = (-3/8, 5/8, 3/4)$
   - *h*) resolver para c_1, c_2, c_3: $c_1\vec{u} + c_2\vec{v} + c_3\vec{w} = (6, 14, -2)$ R: $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 3$
8. Resolver para c_1, c_2, c_3
   - *a*) $c_1(2, 7, 8) + c_2(1, -1, 3) + c_3(3, 6, 11) = (0, 0, 0)$ R: $c_1 = -t$, $c_2 = -t$, $c_3 = t$
   - *b*) $c_1(1, 2, -3) + c_2(5, 7, 1) + c_3(6, 9, -2) = (4, 5, 0)$ R: ninguno cumple
9. Los vectores de posición de los puntos P y Q son, respectivamente, $\vec{r}_1 = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{r}_2 = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. Determinar el vector $\overrightarrow{PQ}$ en función de $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ y hallar su magnitud. R: $2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, 7
10. Siendo $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}$, $\vec{B} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, hallar
    - *a*) $2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C}$ R: $11\hat{\imath} - 8\hat{k}$
    - *b*) $||\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}||$ R: 9.64
    - *c*) $||3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C}||$ R: 19.95
11. Dadas dos coordenadas de un vector $\vec{a}$, $x = 4$, $y = -12$, hallar la tercera, sabiendo que $a = 13$. R: $z = \pm 3$

1.5. Producto punto

En los vectores hay dos clases de productos: el *interno* y el *externo*. Para cada uno de ellos se obtienen diferentes cantidades: en el producto interno se obtiene un escalar, mientras que en el producto externo se obtiene un vector; por esta razón también se les llama producto *escalar* y producto *vectorial*, respectivamente. El producto escalar se simboliza con un punto entre los vectores, mientras que el producto vectorial se simboliza con una cruz. Por ello, también se usan los nombres de producto *punto* y producto *cruz* para designarlos.

El producto interno de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define como el número que resulta al efectuar el producto de sus magnitudes por el coseno del menor ángulo entre ellos. En forma simbólica

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta.}$$

Ejemplo

Hallar el producto interno entre los vectores $\vec{p} = 12\angle 28^{\text{o}}$ y $\vec{q} = 8\angle 72^{\text{o}}$.

Solución

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (12)(8)\cos 44^{\text{o}} = 69.06$

Es importante observar lo que sucede con el producto punto entre los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = (1)(1)\cos 90^{\text{o}} = 0$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = (1)(1)\cos 0^{\text{o}} = 1$$

$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = (1)(1)\cos 0^{\text{o}} = 1$$

$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = (1)(1)\cos 90^{\text{o}} = 0.$$

La segunda y la última operaciones nos muestran una propiedad fundamental del producto punto: que es conmutativo.

Para hallar el producto punto de dos vectores dados como combinación lineal de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ se multiplican los coeficientes de $\hat{\imath}$ entre sí y lo mismo con los coeficientes de $\hat{\jmath}$, y se suma todo.

Ejemplo

Hallar el producto punto de los vectores

$$\vec{A} = 6\hat{\imath} - 9\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}.$$

Solución

De la regla dada encontramos que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (6\hat{\imath} - 9\hat{\jmath}) \cdot (4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = (6)(9) + (-9)(2) = 36.$$

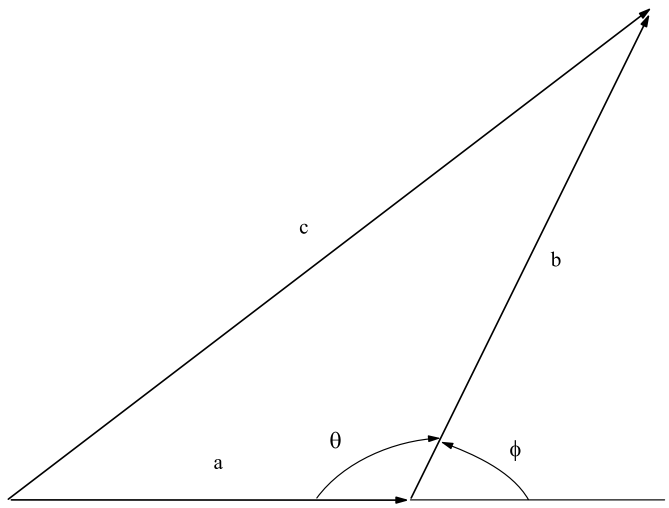


Figura 1.6: Configuración de los vectores

Ejemplo

Demostrar la ley de los cosenos.

Solución

Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, como se muestra en la figura 1.6.

De aquí vemos que

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b},$$

y que al elevar al cuadrado

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$$

pero sabemos que

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi = -ab\cos\theta,$$

tomando los valores numéricos se tiene que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

que es la ley de los cosenos.

La proyección de un vector $\vec{a}$ sobre otro $\vec{b}$ es una generalización de la descomposición de vectores en el plano cartesiano: si se descompone al vector $\vec{a}$ en una componente paralela a $\vec{b}$ y otra componente perpendicular, a la magnitud de la componente paralela se le llama *proyección* de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$. La magnitud de este vector se puede calcular con

$$\boxed{\mathrm{proy}_{\vec{b}}\vec{a} = a\cos\phi = a\cdot\hat{b},} \tag{1.1}$$

y la dirección será la del vector $\vec{b}$.

Ejemplo

Calcular la proyección del vector $\vec{a} = (2, 5, -1)$ sobre el vector $\vec{b} = (3, 5, -2)$.

Solución

El vector unitario en la dirección de $\vec{b}$ es el vector $\vec{b}$ entre su magnitud b, que es

$$b = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2)^2} = 6.16,$$

con lo que

$$\hat{b} = (0.48, 0.81, 0.32),$$

y la magnitud se obtiene haciendo el producto punto indicado

$$\vec{a} \cdot \hat{b} = (2)(0.48) + (5)(0.81) + (-1)(0.32) = 4.69.$$

Entonces

$$\text{proy}_{\vec{b}}\vec{a} = (2.25, 3.8, 1.5).$$

Ejemplo

Demostrar que los siguientes vectores son perpendiculares: $\vec{A} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}, \vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$.

Solución

Si al hacer el producto punto obtenemos cero, es porque los vectores son perpendiculares. El producto punto es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1)(4) + (4)(2) + (3)(-4) = 0$$

lo que nos asegura que los vectores son perpendiculares.

Ejercicios

1. Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. R: 79º
2. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 120º. Sabiendo que $a = 3$, $b = 4$, calcular
   - *a*) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ R: -6
   - *b*) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ R: 9
   - *c*) $\vec{b} \cdot \vec{b}$ R: 16
   - *d*) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ R: 37
   - *e*) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ R: 11
   - *f*) $(\vec{a} - \vec{b})^2$ R: 13
   - *g*) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ R: 153
3. Hallar el valor de a tal que los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ sean perpendiculares. R: $a = 3$
4. Demostrar que los vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$, $\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ forman un triángulo rectángulo.

5. Hallar los ángulos del vector $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ con los ejes coordenados. R: 64.6º, 149º, 73.4º

6. Hallar la proyección del vector $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ según la dirección del vector $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$.
R: $(19/81)(4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k})$

7. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares entre sí y$||\vec{a}|| = 5$, $||\vec{b}|| = 12$. Determinar $||\vec{a} + \vec{b}||$ y $||\vec{a} - \vec{b}||$. R: 13

8. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\phi = 60^o$. Sabiendo que $||\vec{a}|| = 5$ y $||\vec{b}|| = 8$, determinar $||\vec{a}+\vec{b}|| y ||\vec{a}-\vec{b}||$.
R: 11.4 y 7

9. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\phi = 120^o$. Sabiendo que $||\vec{a}|| = 3y||\vec{b}|| = 5$, determinar $||\vec{a} + \vec{b}||$ y $||\vec{a} - \vec{b}||$. R: 4.7 y 7

10. Calcular el producto punto de los siguientes vectores y hallar el ángulo entre ellos:
a) $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}, \vec{B} = 5\hat{\jmath} + \hat{k}$ R: 10, 57º
b) $\vec{A} = \hat{\imath}, \vec{B} = 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ R: 0, 90º
c) $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}, \vec{B} = -2\hat{\jmath}$ R: 4, 58º
d) $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}, \vec{B} = \hat{k}$ R: 0, 90º
e) $\vec{A} = 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}, \vec{B} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ R: 2, 79º

11. Hallar el producto punto de los vectores (2,3,4) y (5,6,-7) y hallar el ángulo entre ellos. R: 0, 90º

12. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\phi = 120^o$, sabiendo que $a = 3$, $b = 4$, calcular:
a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ R: -6
b) $\vec{a}^2$ R: 9
c) $\vec{b}^2$ R: 16
d) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ R: 13
e) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ R: -61
f) $(\vec{a} - \vec{b})^2$ R: 37
g) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ R: 73

13. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares entre sí, el vector $\vec{c}$ forma con ellos ángulos iguales a 60º. Sabiendo que $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$, calcular:
a) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$ R: -62
b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$ R: 162
c) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$ R: 373

14. Determinar los valores de α y β para que los siguientes vectores sean paralelos: $\vec{a} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \beta\hat{k}$ y $\vec{b} = \alpha\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. R: $\alpha = 4$, $\beta = -1$

15. Encontrar los valores de α que hagan que los siguientes vectores sean perpendiculares: $\vec{a} = \alpha\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \alpha\hat{k}$. R: $\alpha = -6$

16. Se dan tres vectores: $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{c} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$. Hallar el vector $\vec{x}$ que satisface las condiciones: $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$. R: $\vec{x} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

17. Calcular la proyección del vector $\vec{a} = (5, 2, 5)$ sobre el eje del vector $\vec{b} = (2, -1, 2)$. R: (4,-2,4)

18. Se dan tres vectores: $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ y $\vec{c} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 12\hat{k}$. Hallar $proy_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.
R: (-12/13,16/13,-48/13)

19. Dados los vectores: $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$ y $\vec{c} = (-1, 1, 4)$. Calcular la magnitud de $\text{proy}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.
R: 5

20. Dados: $\vec{a} = (-2, 1, 1)$, $\vec{b} = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ y $\vec{c} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$. Calcular $\text{proy}_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$. R: (-11/9,-11/9,11/18)

1.6. Producto cruz

El producto externo de dos vectores es un vector cuya magnitud es el producto de las magnitudes de los vectores involucrados por el seno del ángulo más pequeño entre ellos. Su dirección es perpendicular a ambos vectores, lo cual implica que no puede estar en el plano, sino que queda en dirección perpendicular al plano que forman los vectores dados. Esto permite dos direcciones diferentes, por lo cual se establece el siguiente criterio para asignar la apropiada: si hacemos girar un tornillo en el sentido de giro del primer vector al segundo, el tornillo va hacia uno u otro sentido; este sentido es el que se asignará al vector. Por ejemplo si el primer vector está en dirección de $\hat{i}$ y el segundo en dirección de $\hat{j}$, el vector que resulta al hacer el producto cruz va en el sentido en que gira el tornillo, que es hacia afuera, lo que significa que el vector producto sale del papel. Esto se indica gráficamente haciendo un círculo con un punto enmedio, representando la punta de la flecha. Si el vector entrara, se pondría un círculo con una cruz, representando la cola de la flecha. Lo anterior se ilustra en la figura 1.7.

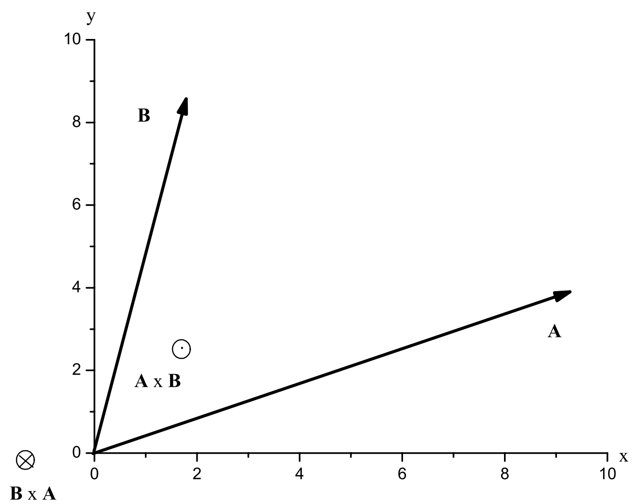


Figura 1.7: Producto cruz

Simbólicamente, el producto cruz se representa así

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen} \theta \hat{n}}$$

siendo $\hat{n}$ el vector unitario en la dirección dada por la *regla del tornillo* descrita antes. También se da la dirección con la llamada *regla de la mano derecha*, que consiste en colocar perpendicularmente los dedos índice, medio y pulgar; si el primer vector está representado con el dedo índice y el segundo con el dedo medio, el producto cruz apuntará hacia donde apunta el dedo pulgar.

Ejemplo

Hallar el producto cruz de los vectores:

$$A = 8\angle -30^{\text{o}}, \quad B = 7\angle 65^{\text{o}}.$$

Solución

De la regla dada encontramos que:

$$A \times B = (8)(6)\,\text{sen}\,95^{\text{o}} = 47.82.$$

El vector apunta hacia afuera del papel.

Es importante tomar nota de lo que pasa con el producto cruz de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. Puesto que el producto punto siempre va perpendicular al plano, es necesario definir un nuevo vector unitario que vaya en dirección perpendicular al plano en que están los vectores $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. Al nuevo vector se le llama $\hat{k}$, y apunta hacia afuera del papel, en una dirección a la que se llama z, y que define un espacio de tres dimensiones. De este modo, el producto cruz de los vectores unitarios nos da los siguientes resultados

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = (1)(1)\,\text{sen}\,0^{\text{o}} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = (1)(1)\,\text{sen}\,90^{\text{o}}\hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{k} = (1)(1)\,\text{sen}\,90^{\text{o}}(-\hat{\jmath}) = -\hat{\jmath}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = (1)(1)\,\text{sen}\,90^{\text{o}}(-\hat{k}) = -\hat{k}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = (1)(1)\,\text{sen}\,0^{\text{o}} = 0$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = (1)(1)\,\text{sen}\,90^{\text{o}}\hat{\imath} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = (1)(1)\,\text{sen}\,90^{\text{o}}\hat{\jmath} = \hat{\jmath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\jmath} = (1)(1)\,\text{sen}\,90^{\text{o}}(-\hat{\imath}) = -\hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = (1)(1)\,\text{sen}\,0^{\text{o}} = 0$$

Nótese que el producto cruz no es conmutativo, sino que al cambiar el orden de los vectores también cambia el signo, por lo que se dice que el producto cruz es *anticonmutativo*. De este modo, es posible efectuar el producto cruz de dos vectores dados como combinación de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ de modo similar a como se hace el producto de dos trinomios, pero haciendo el producto cruz de los vectores unitarios según lo indicado arriba, teniendo cuidado de guardar correctamente el orden de los vectores para preservar los signos. La magnitud del producto cruz es igual al área del paralelogramo que se forma con los vectores involucrados.

Hay una regla fácil de recordar para efectuar el producto cruz, que consiste en utilizar el determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Hallar el producto cruz de los vectores

$$\vec{A} = 6\hat{i} - 9\hat{j}, \quad \vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j}.$$

Solución

De la regla dada encontramos que

$$\vec{A} \times \vec{B} = (6\hat{i} - 9\hat{j}) \times (4\hat{i} + 2\hat{j}) =$$

$$= (6)(9)(\hat{i} \times \hat{i}) + (6)(2)(\hat{i} \times \hat{j}) + (-9)(4)(\hat{j} \times \hat{i}) + (-9)(2)(\hat{j} \times \hat{j}) =$$

$$= 12\hat{k} + 36\hat{k} = 48\hat{k}.$$

También se puede hacer usando el determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}(-9)(0) - (2)(0) - \hat{j}(6)(0) - (4)(0) + \hat{k}(6)(2) - (4)(-9) = 48\hat{k}$$

Ejemplo

Demostrar la ley de los senos.

Solución

Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, como se muestra en la figura 1.8. De aquí vemos que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Si a ambos miembros de esta igualdad los multiplicamos por $\vec{a}\times$, nos da

$$\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c}$$

que al tomar la magnitud nos da

$$ab \operatorname{sen} \theta = ac \operatorname{sen} \beta.$$

Si se multiplica ahora la suma por $b\times$, se obtendrá análogamente

$$ab \operatorname{sen} \theta = bc \operatorname{sen} \alpha$$

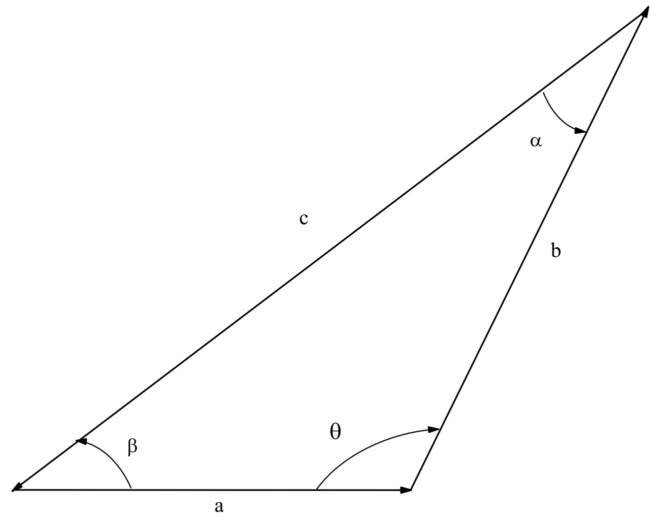


Figura 1.8: Configuración de los vectores

con lo cual podemos escribir la triple igualdad

$$ab \operatorname{sen} \theta = ac \operatorname{sen} \beta = bc \operatorname{sen} \alpha$$

que al dividir entre abc nos da la ley de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{c}.$$

Ejemplo

Demostrar que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Solución

Supongamos que los vectores dados tienen las componentes

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k},$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k},$$

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}.$$

Al hacer el producto cruz entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$ obtenemos

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}(b_y c_z - b_z c_y) + \hat{j}(b_z c_x - b_x c_z) + \hat{k}(b_x c_y - b_y c_x) = \vec{d}$$

y al multiplicar por $\vec{a} \times \vec{d}$ nos da

$$\vec{a} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}(a_y d_z - a_z d_y) + \hat{j}(a_z d_x - a_x d_z) + \hat{k}(a_x d_y - a_y d_x) =$$

$$= \hat{i}[a_y(b_x c_y - b_y c_x) + a_z(b_x c_z - b_z c_x)] +$$

$$+ \hat{j}[a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x)] +$$

$$+ \hat{k}[a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y)] =$$

$$= \hat{i}(a_y b_x c_y - a_y b_y c_x + a_z b_x c_z - a_z b_z c_x) +$$

$$+ \hat{j}(a_z b_y c_z - a_z b_z c_y - a_x b_x c_y + a_x b_y c_x) +$$

$$+ \hat{k}(a_x b_z c_x - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y).$$

Si ahora desarrollamos el segundo miembro de la ecuación inicial, obtendremos

$$\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) =$$

$$(b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})[(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k})] -$$

$$-(c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k})[(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})] =$$

$$= (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - (c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k})(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) =$$

$$= \hat{i}(a_x b_x c_x + a_y b_x c_y + a_z b_x c_z - a_x b_x c_x - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x) +$$

$$+ \hat{j}(a_x b_y c_x + a_y b_y c_y + a_z b_y c_z - a_x b_x c_y - a_y b_y c_y - a_z b_z c_y) +$$

$$+ \hat{k}(a_x b_z c_x + a_y b_z c_y + a_z b_z c_z - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z - a_z b_z c_z) =$$

$$= \hat{i}(a_y b_x c_y + a_z b_x c_z - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x) +$$

$$+ \hat{j}(a_x b_y c_x + a_z b_y c_z - a_x b_x c_y - a_z b_z c_y) +$$

$$+ \hat{k}(a_x b_z c_x + a_y b_z c_y - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z),$$

que es precisamente lo mismo que encontramos en el triple producto cruz dado arriba.

Ejemplo

Encontrar el ángulo entre la diagonal interna de un cubo y una de sus aristas.

Solución

Si hacemos tres lados del cubo (que miden a unidades) coincidan con los ejes de coordenadas, la diagonal estará dada por el vector $\vec{d} = a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k}$, con lo cual podemos calcular el ángulo haciendo el producto punto con cualquiera de los vectores que dan sus aristas vecinas, $a\hat{\imath}$, $a\hat{\jmath}$ o $a\hat{k}$:

$$a\hat{\imath} \cdot \vec{d} = a\hat{\imath} \cdot a(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) = a^2,$$

por otro lado

$$a\hat{\imath} \cdot \vec{d} = ad\cos\theta = \sqrt{3}a^2\cos\theta,$$

igualando estas expresiones se obtiene

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

con lo cual obtenemos $\theta = 54.7^{o}$.

Ejercicios

1. Dados $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 6\hat{k}$, hallar

   a) $\vec{A} \times \vec{B}$ R: $(-14, -13, 11)$

   b) $\vec{B} \times \vec{A}$ R: $(14, 13, -11)$

   c) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$ R: $(22, 26, -22)$

2. Si $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{C} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ hallar

   a) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ R: $(24, 7, -5)$

   b) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ R: $(-5, 15, 15)$

3. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\phi = 30^{o}$. Sabiendo que $a = 6$, $b = 5$, calcular $||\vec{a} \times \vec{b}||$. R: 15

4. Sean $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 2, -4)$. Encontrar

   a) $|\vec{u} + \vec{v}|$ R: 3.46

   b) $|\vec{u}| + |\vec{v}|$ R: 5.16

   c) $|-2\vec{u}| + 2|\vec{u}|$ R: 14.97

   d) $|3\vec{u} - 5\vec{v} + \vec{w}|$ R: 12.17

   e) $\vec{w}/|\vec{w}|$ R: (0.41,0.41,-0.82)

   f) $|w/|w||$ R: 1

5. Resolver para k: $|k\vec{v}| = 3$, $\vec{v} = (1, 2, 4)$. R: $k = 0.65$

6. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son (1,3,2),(2,-1,1) y (1,2,3). R: 5.2

7. Calcular el producto cruz de los siguientes vectores y hallar el ángulo entre ellos:
   a) $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{B} = 5\hat{\jmath} + \hat{k}$ R: $\vec{A} \times \vec{B} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 15\hat{k}$, 57º
   b) $\vec{A} = \hat{\imath}, \vec{B} = 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ R: $\vec{A} \times \vec{B} = 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$, 90º
   c) $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{B} = -2\hat{\jmath}$ R: $\vec{A} \times \vec{B} = -6\hat{k}$, 37.3º
   d) $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$, $\vec{B} = \hat{k}$ R: $\vec{A} \times \vec{B} = 7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, 90º
   e) $\vec{A} = 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ R: $\vec{A} \times \vec{B} = 8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$, 11.4º
8. Hallar el ángulo entre $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 0.5\hat{k}$. R: 51º
9. Sean $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (0, 1, 7)$ y $w = (1, 4, 5)$. Calcular
   a) $\vec{v} \times \vec{w}$ R: (-23,7,-1)
   b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ R: (-20,-67,-9)
   c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ R: (-78,52,-26)
   d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$ R: (0,-56,-392)
   e) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$ R: (24,0,-16)
   f) $(\vec{u} \times \vec{v}) - 2\vec{w}$ R: (-12,44,-36)
10. Para los siguientes pares de vectores hallar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ y el ángulo entre ellos
   a) $\vec{u} = (1, -3, 7)$, $\vec{v} = (8, -2, -2)$ R: 0, (20,58,22), 90º
   b) $\vec{u} = (-3, -1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, -5)$ R: -24, (1,7,-2), 163º
   c) $\vec{u} = (7, 3, 5)$, $\vec{v} = (-8, 4, 2)$ R: -34, (-14,-54,52), 116º
   d) $\vec{u} = (6, 1, 3)$, $\vec{v} = (4, 0, -6)$ R: 6, (-6,48,-4), 83º
   e) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 0, 0)$ R: -1, (0,-1,1), 125.3º
   f) $\vec{u} = (4, 1, 6)$, $\vec{v} = (-3, 0, 2)$ R: 0, (2,-26,3), 90º
   g) $\vec{u} = (-7, 1, 3)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$ R: -32, (1,22,-5), 144.8º
   h) $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (8, 3, 4)$ R: 4, (-3,8,0), 65º
   i) $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 9, 0)$ R: -29, (-45,-5,15), 121.3º
   j) $\vec{u} = (3, -4, 2)$, $\vec{v} = (-2, -3, -7)$ R: -8, (34,17,-17), 100.9º
11. Se da $a = 10$, $b = 2$ y $||\vec{a} \times \vec{b}|| = 72$. Calcular $a \cdot b$. R: ± 30
12. Se da $a = 3$, $b = 26$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Calcular $||\vec{a} \times \vec{b}||$. R: 16
13. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares entre sí. Sabiendo que $a = 1$, $b = 2$, calcular:
   a) $||(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})||$ R: 24
   b) $||(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})||$ R: 60
14. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo $\phi = 120$º. Sabiendo que $a = 1$, $b = 2$, calcular:
   a) $(\vec{a} \times \vec{b})^2$ R: 3
   b) $[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})]^2$ R: 27
   c) $[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2$ R: 300
15. Dados los vectores $\vec{a} = (3, -1, -2)$ y $\vec{b} = (1, 2, -1)$, hallar las coordenadas de los productos vectoriales:
   a) $\vec{a} \times \vec{b}$ R: (5,1,7)
   b) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$ R: (10,2,14)
   c) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$ R: (20,4,28)

16. Se dan los puntos $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (3, 0, -3)$ y $\vec{c} = (5, 2, 6)$. Calcular el área del triángulo *abc*.

    R: 14

17. Se dan los vectores $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$ y $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Calcular $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ y $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

    R: (-7,14,-7), (10,13,19)

18. El vector $\vec{c}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a 30º. Sabiendo que $a = 6$, $b = 3$, $c = 3$, calcular $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. R: 27

Capítulo 2

Rectas y planos

Las superficies más simples son los planos. Las curvas más simples son las rectas. En este capítulo nos ocuparemos ellos, lo que nos servirá para después abordar el estudio de superficies y curvas más complicadas.

2.1. Rectas en el plano

Ya se ha visto que una ecuación de la forma $Ax+By+C=0$ describe una recta de pendiente $-A/B$ y ordenada al origen $-C/B$. De hecho es más frecuente escribirla en la forma $y=mx+b$, llamada *ecuación pendiente ordenada al origen*. Se puede encontrar fácilmente la ecuación de una recta conociendo dos puntos por los que pasa (x_1,y_1) y (x_2,y_2), ya sea encontrando la pendiente con la fórmula para la pendiente o por medio del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Otra forma de describir una recta es usando un vector paralelo a la recta y un punto por el que pasa, como se verá en la siguiente sección.

2.1.1. Ecuación vectorial de una recta

Si se tiene un punto P_0 de una recta, y el vector $\vec{v}$ paralelo a ella (llamado a veces *vector director*), se puede dar su ecuación como

$$\boxed{P = P_0 + t\vec{v},} \tag{2.1}$$

en la que t es cualquier número real. Más explícitamente se puede escribir como

$$\boxed{(x,y) = (x_0,y_0) + t(v_x,v_y).} \tag{2.2}$$

Si tenemos la ecuación de una recta en la forma vectorial, se puede pasar a la forma punto pendiente haciendo $m = v_y/v_x$ y $b = y_0 - mx_0$.

Cuando nos dan dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), podemos construir la ecuación vectorial de la recta que pasa por esos dos puntos tomando alguno de ellos como P_0 y haciendo $\vec{v} = (x_2-x_1)\hat{\imath} + (y_2-y_1)\hat{\jmath}$.

Ejemplo

Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos (2,-1) y (5,7).

Solución

Sea $P_0 = (2, -1)$. El vector director será $\vec{v} = (5-2)\hat{\imath} + (7-(-1))\hat{\jmath} = (3, 8)$.

Entonces la ecuación es

$$(x, y) = (2, -1) + t(3, 8).$$

Para esta misma recta la ecuación pendiente-ordenada al origen la encontramos haciendo

$$m = \frac{8}{3}, \quad b = -1 - (8/3)2 = -19/3$$

con lo que la ecuación nos da

$$y = \frac{8}{3}x - \frac{19}{3}.$$

2.1.2. Ángulos entre rectas

Para dos rectas con ecuaciones dadas en forma pendiente ordenada al origen y pendientes m_1 y m_2, se puede encontrar el ángulo más pequeño θ entre ellas con la fórmula

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|.} \tag{2.3}$$

De esta fórmula se desprende que si dos rectas son paralelas, $m_2 = m_1$; si son perpendiculares, $m_2 = -1/m_1$. La fórmula anterior es un poco difícil de aplicar y más de recordar, pero si se tienen las ecuaciones en forma vectorial es mucho más fácil hallar el ángulo entre las rectas haciendo el producto punto o el producto cruz y despejando el ángulo. Esto se puede representar con las fórmulas siguientes

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 v_2},} \tag{2.4}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{v_1 v_2}.} \tag{2.5}$$

Para dos rectas con ecuaciones vectoriales paralelas, el producto cruz de sus vectores directores da cero, y para rectas perpendiculares el producto punto da cero.

Ejemplo

Encontrar el ángulo que forman el siguiente par de rectas

$$y = 5x - 2, \quad y = -2x + 4$$

Solución

Sustituyendo en la fórmula 2.3

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-2-5}{1+(-2)(5)}\right| = 7/9,$$

con lo cual, $\theta = 37.87^{\text{o}}$.

Ejemplo

Encontrar el ángulo entre las rectas

$$(x, y) = (2, 3) + (3, -1)t, \quad (x, y) = (-1, -1) + (-2, -1)t$$

Solución

Sustituyendo en la ecuación 2.4

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 v_2} = \frac{(3, -1)\cdot(-2, -1)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = -0.7071.$$

Por lo tanto, $\theta = 135^{\text{o}}$.

2.1.3. Distancia de un punto a una recta

Para una recta de la que se tiene su ecuación general $Ax + By + C = 0$, la distancia de un punto (x_1, y_1) hacia ella viene dada por la fórmula

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \tag{2.6}$$

Si se tiene la ecuación de la recta en forma vectorial, se puede encontrar la distancia del punto P_{ext} a la recta encontrando el vector diferencia entre P_0 y P_{ext} , y luego la magnitud de la proyección de él con el vector que va de la recta a P_{ext}, lo que se hace usando el producto punto entre el vector $\vec{v}$ de la recta normalizado y $(P_0 - P_{ext})$. Esto se puede resumir con la siguiente fórmula

$$\boxed{d = |(P_0 - P_{ext}) \cdot \hat{v}|.} \tag{2.7}$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto (2,1) a la recta $y = -2x + 3$

Solución

La recta tiene la forma general

$$2x + y - 3 = 0,$$

con lo cual se tendrá en la fórmula 2.6

$$d = \frac{|(2)(2) + (1)(1) + (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0.89$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto (4,5) a la recta $(x, y) = (2, -1) + t(1, -1)$

Solución

De la fórmula 2.7 tenemos que

$$(P_0 - P_{ext}) = (-2, -6)$$

$$\hat{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\frac{(-2,-6)\cdot(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{(-2+6)}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 5.66$$

Así que, $d = 5.66$.

2.2. Planos

En el plano, una ecuación lineal genera una recta; esta es la línea más simple que se puede generar. En el espacio una ecuación lineal genera superficies planas, que son las superficies más simples que se pueden generar. La analogía entre rectas y planos lleva a relaciones interesantes que sirven para analizar su comportamiento.

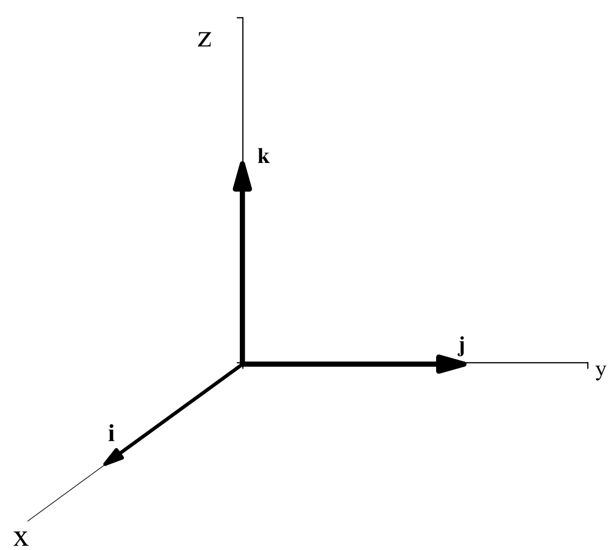


Figura 2.1: Configuración de los vectores unitarios en el espacio

En este punto debemos decir que, aunque el uso de los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$ en las direcciones hacia la derecha, hacia arriba y hacia afuera del papel respectivamente, es perfectamente claro y consistente, convencionalmente se utilizan del modo siguiente: $\hat{\imath}$ hacia afuera del papel, $\hat{\jmath}$ hacia la derecha y $\hat{k}$ hacia arriba, según se muestra en la figura 2.1. A partir de ahora se utilizará esta convención.

2.2.1. Ecuación punto normal de un plano

En el plano, para dar la ecuación de una recta es suficiente conocer un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ y la pendiente m, con lo cual la ecuación es

$$(y - y_0) = m(x - x_0). \tag{2.8}$$

Para un plano en el espacio también se puede hallar su ecuación al tener un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y su inclinación. Para especificar la inclinación de un plano se puede dar un vector $\vec{n}$ que sea perpendicular a él. A este se le llama su vector *normal*.

La ecuación del plano, donde $P = (x, y, z)$ es cualquier punto sobre él, es

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{P}_0 - \vec{P}) = 0,} \tag{2.9}$$

o más explícitamente

$$\boxed{n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0.} \tag{2.10}$$

A ésta se le llama *ecuación punto normal de un plano*. Al desarrollar se obtiene una ecuación de la forma

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{2.11}$$

Toda ecuación de la forma anterior da un plano cuyo vector normal es

$$\vec{n} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}. \tag{2.12}$$

Ejemplo

Dados dos puntos $M_1 = (3, -1, 3)$ y $M_2 = (5, -2, 1)$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 y es perpendicular al vector $(M_1 - M_2)$.

Solución

El vector $(M_1 - M_2)$ es $(-2, 1, 2)$, con lo cual la ecuación es

$$-2(x - 3) + (y + 1) + 2(z - 3) = 0,$$

o bien

$$-2x + y + 2z + 1 = 0.$$

Ejemplo

Encontrar el plano generado por los vectores $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

Solución

Para hallar el vector normal al plano, simplemente calculamos el producto cruz, que nos dará el vector normal del plano buscado

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 23\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

y tomamos cualquiera de los dos vectores dados como P_0 y sustituimos en la fórmula 2.9

$$23(x-2)-7(y-7)-3(z+1)=0,$$

o bien

$$23x-7y-3z=0.$$

Ejercicios

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (2,1,-1) y cuyo vector normal es $\vec{n}=\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+3\hat{k}$.
R: $x-2y+32=0$
2. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y cuyo vector normal es $5\hat{\imath}-3\hat{k}$.
R: $5x-3z=0$
3. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1=(2,-1,3)$ y $M_2=(3,1,2)$ y es paralelo al vector $\vec{a}=(3,-1,4)$. R: $x+2y-z+3=0$
4. Hallar el vector unitario perpendicular al plano formado por $\vec{A}=2\hat{\imath}-6\hat{\jmath}-3\hat{k}$ y $\vec{B}=4\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}$.
R: $(1/7)(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+6\hat{k})$
5. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{A}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+6\hat{k}$ y que pasa por el extremo del vector $\vec{B}=\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-2\hat{k}$. R: $2x+3y+6z-35=0$
6. Hallar la ecuación del plano determinado por el punto y vector normal dados
   a) $(2,6,1)$, $\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+2\hat{k}$ R: $x+4y+2z-28=0$
   b) $(-1,-1,2)$, $-\hat{\imath}+7\hat{\jmath}+6\hat{k}$ R: $-x+7y+6z-6=0$
   c) $(1,0,0)$, $\hat{k}$ R: $z=0$
   d) $(0,0,0)$, $2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+4\hat{k}$ R: $2x+3y+4z=0$
7. Hallar un plano que pase por $(2,-7,6)$ y sea paralelo al plano $5x-2y+z-9=0$.
R: $5x-2y+z-30=0$
8. Encontrar el plano generado por los vectores $\vec{a}=3\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}$ y $\vec{b}=3\hat{\jmath}+4\hat{k}$. R: $7x+12y-9z=0$
9. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (2,1,-1) y cuyo vector normal es $\vec{n}=(1,-2,3)$.
R: $x-2y+z+3=0$
10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y cuyo vector normal es $\vec{n}=(5,0,-3)$.
R: $5x-3z=0$
11. Hallar la ecuación del plano que pasa por dos puntos $M_1=(1,-1,-2)$ y $M_2=(3,1,1)$ y es perpendicular al plano $x-2y+3z-5=0$. R: $4x-y-2z-9=0$
12. Dados dos puntos $M_1=(3,-1,2)$ y $M_2=(4,-2,-1)$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M1$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{M_1M_2}$. R: $x-y-3z+2=0$
13. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1=(3,4,-5)$ y es paralelo a los dos vectores $\vec{a}_1=(3,1,-1)$ y $\vec{a}_2=(1,-2,1)$. R: $x+4y+7z+16=0$
14. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1=(2,-1,3)$ y $M_2=(3,1,2)$ y es paralelo al vector $\vec{a}=(3,-1,-4)$. R: $9x-y+7z-40=0$
15. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1=(3,-1,2)$, $M_2=(4,-1,-1)$ y $M_3=(2,0,2)$.
R: $3x+3y+z-8=0$

16. Determinar las coordenadas de algún vector normal de cada uno de los siguientes planos

   a) $2x - y - 2z + 5 = 0$ R: (2,-1,-2)

   b) $x + 5y - z = 0$ R: (1,5,-1)

   c) $3x - 2y - 7 = 0$ R: (3,-2,0)

   d) $5y - 3z = 0$ R: (0,5,-3)

   e) $x + 2 = 0$ R: (1,0,0)

   f) $y - 3 = 0$ R: (0,1,0)

17. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano $5x - 3y + 2z - 3 = 0$. R: $5x - 3y + 2z = 0$

18. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1 = (3, -2, -7)$ y es paralelo al plano $2x-3z+5 = 0$. R: $2x - 3z - 27 = 0$

19. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$. R: $7x - y - 5z = 0$

20. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (2,-1,1) y es perpendicular a los dos planos: $2x-z+1 = 0$, $y = 0$. R: $x + 2z - 4 = 0$

2.2.2. Ecuación general de un plano

Toda ecuación de la forma $Ax + By + Cz = 0$ genera un plano. Si se tienen tres puntos (no colineales) de coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3), la ecuación del plano que pasa por ellos se puede encontrar con el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.13}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $p = (3, 4, 2)$, $q = (-1, 3, 2)$, $r = (-3, -2, 5)$.

Solución

Sustituyendo en el determinante 2.13

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-2 \\ x+1 & y-3 & z-2 \\ x+3 & y+2 & z-5 \end{vmatrix} = -3x - 16y + 18z - 75 = 0.$$

Nótese que también podría hacerse de otro modo: se restan los puntos $(q - p)$ y $(r - p)$ para usarlos como vectores, hacer el producto cruz obteniendo el vector normal y finalmente sustituir en la ecuación punto normal. Esto es especialmente útil cuando no se tiene a la mano la fórmula del determinante anterior. Se recomienda al lector verificar que se obtiene la misma respuesta.

En general, si se tienen cuatro puntos, éstos estarán contenidos en planos diferentes. Cuatro puntos A, B, C y D son coplanares si y sólo si

$$\boxed{\overline{AD} \cdot (\overline{AB} \times \overline{BC}) = 0.} \tag{2.14}$$

2.2.3. Ángulos entre planos

Análogamente al caso de dos rectas, el ángulo entre dos planos se puede calcular por medio de los vectores normales que los definen, haciendo el producto punto o el producto cruz entre ellos y despejando el ángulo. Para planos paralelos el producto cruz vale cero, mientras que para planos perpendiculares el producto punto vale cero.

Ejemplo

Hallar el menor ángulo entre los planos $-x - y + 3z + 8 = 0$, $-3x + y + 2z - 4 = 0$.

Solución

Los vectores normales a estos planos son

$$\vec{n}_1 = (-1, -1, 3), \quad \vec{n}_2 = (-3, 1, 2)$$

El coseno del ángulo entre ellos es

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{n_1 n_2} = \frac{4}{\sqrt{155}} = 0.3213,$$

así que el ángulo es

$$\theta = \arccos(0.3213) = 71.3^{\text{o}}.$$

Ejercicios

1. Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos dados

   a) (1,2,-1), (2,3,1) y (3,-1,2) R: $9x + y - 5z - 16 = 0$
   b) (-1,1,1), (0,2,3), (1,0,-1) R: $6y - 3z - 3 = 0$
   c) (3,2,1), (2,1,-1), (-1,3,2) R: $x + 9y - 5z - 16 = 0$

2. Verificar que los tres planos $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ tienen un punto en común y calcular sus coordenadas. R: (1,-2-2)

3. Determinar cuáles de los siguientes pares de planos son paralelos o perpendiculares

   a) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$ R: paralelos
   b) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$ R: perpendiculares
   c) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$ R: perpendiculares
   d) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$ R: paralelos

4. Hallar los valores de ℓ y m que hagan que los siguientes pares de ecuaciones determinen planos paralelos

   a) $2x + \ell y + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ R: $\ell = 3$, $m = -4$
   b) $3x - y + \ell z - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$ R: $\ell = 3$, $m = -2/3$
   c) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - \ell z = 0$ R: $\ell = -10/3$, $m = -6/5$

5. Determinar los valores de ℓ que den planos perpendiculares para los siguientes pares de ecuaciones

   a) $3x - 5y + \ell z - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$ R: 6

b) $5x + y + 3z - 2 = 0$, $2x + \ell y - 3z + 1 = 0$ R: -19

c) $7x - 2y - z = 0$, $\ell x + y - 3z - 1 = 0$ R: -1/7

6. Determinar los ángulos formados por la intersección de los siguientes pares de planos

a) $x - 2y + z - 1 = 0$, $x + 2y - z + 3 = 0$ R: 131.8º

b) $3y - z = 0, 2y + z = 0$ R: 45º

c) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$ R: 90º

d) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$ R: 82.3º

e) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$ R: 63.6º

f) $x - 2z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$ R: 8.1º

g) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$ R: 70.9º

2.2.4. Distancia de un punto a un plano

Para hallar la distancia de un punto a un plano hay una fórmula en términos de los coeficientes de la ecuación del plano y las coordenadas del punto, análoga a la de la distancia de un punto a una recta en el plano. Si la ecuación general del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, y el punto tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0), la distancia está dada por

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \tag{2.15}$$

También para tres dimensiones se tiene un método para calcular la distancia de un punto a un plano con los vectores que los definen. La distancia de un punto P_0 a un plano que pasa por Q y con vector normal $\vec{n}$ es

$$\boxed{d = \frac{|(Q - P_0) \cdot \vec{n}|}{n} = |(Q - P_0) \cdot \hat{n}|.} \tag{2.16}$$

La distancia entre dos planos paralelos $Ax + By + Cz = D_1$ y $Ax + By + Cz = D_2$ es

$$\boxed{d = \left| \frac{D_1 - D_2}{A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}} \right|.} \tag{2.17}$$

Ejemplo

Calcular la distancia del plano $2x + y + z = 0$ al punto (1,1,2).

Solución

Sustituyendo en la fórmula 2.15 obtenemos

$$d = \frac{|2(1) + 1(1) + 1(2) + 0|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = 2.04$$

Ejemplo

Calcular la distancia entre los planos paralelos siguientes

$$3x - y - z - 3 = 0, \quad 3x - y - z + 5 = 0.$$

Solución

Para hallar la distancia entre los planos podemos encontrar la distancia entre un punto de uno de los planos y el otro plano. Usaremos aquí la fórmula vectorial, para lo cual hay que construir los vectores indicados.

Tomemos la ecuación para el primer plano y sustituyamos $y = 0$, $z = 0$, lo que nos da $x = 1$, es decir, $P_0 = (1, 0, 0)$. Para el segundo plano tenemos que $\vec{n} = (3, -1, -1)$, y sustituyendo $x = 0$, $y = 0$ obtenemos $z = 5$, o sea que $Q = (0, 0, 5)$. Con la fórmula 2.16 tendremos

$$d = |(Q - P_0) \cdot \hat{n}| = \frac{|(-1, 0, 5) \cdot (3, -1, -1)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = 2.41$$

Ejercicios

Calcular la distancia entre los planos paralelos en cada uno de los siguientes casos

1. $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$ R: 2
2. $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$ R: 3.5
3. $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$ R: 6.5
4. $16x + 12y - 15z + 50 = 0$, $16x + 12y - 15z + 25 = 0$ R: 1
5. $30x - 32y + 24z - 75 = 0$, $15x - 16y + 12z - 25 = 0$ R: 0.5
6. $6x - 18y - 9z - 28 = 0$, $4x - 12y - 6z - 7 = 0$ R: 5/6

2.3. Rectas en el espacio

La recta en el espacio será un poco más difícil de tratar, puesto que en el espacio se trata de la intersección de dos planos. Sin embargo, nuevamente los vectores vienen en nuestra ayuda para simplificar las cosas.

2.3.1. Ecuación vectorial de una recta

Para describir una recta en el espacio la ecuación vectorial nos sirve igual que en dos dimensiones, con la única diferencia de que ahora el punto P_0 tiene tres coordenadas y el vector $\vec{v}$ ahora tiene tres componentes. La ecuación es pues

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_x, v_y, v_z).} \tag{2.18}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (5,-3,8) y (3,2,0).

Solución

Para hallar las componentes del vector $\vec{v}$, simplemente calculamos la diferencia entre los puntos dados

$$\vec{v} = (5 - 3, -3 - 2, 8 - 0) = (2, -5, 8)$$

y tomamos como P_0 cualquiera de los puntos, obteniendo

$$(x, y, z) = (3, 2, 0) + (2, -5, 8)t.$$

2.3.2. Ecuaciones paramétricas de una recta

Al descomponer la ecuación vectorial de una recta se obtienen las tres ecuaciones escalares, llamadas *ecuaciones paramétricas* de la recta

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_x, \\ y &= y_0 + tv_y, \\ z &= z_0 + tv_z. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ejemplo

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (1,2,3) y (-3,-2,-1)

Solución

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + (1 - (-3), 2 - (-2), 3 - (-1))t = (1, 2, 3) + (4, 4, 4)t.$$

Descomponiendo

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 3 + 4t.$$

Ejercicios

1. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los dos puntos dados

   a) (1,-2,1), (3,1,-1) R: $(x, y, z) = (1, -2, 1) + (2, 3, -2)t$

   b) (3,-1,0), (1,0,-3) R: $(x, y, z) = (3, -1, 0) + (2, -1, 3)t$

   c) (5,3,8), (2,9,-7) R: $(x, y, z) = (5, 3, 8) + (3, -6, 15)t$

2. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (-1, -1, -1) y es paralela al vector $\hat{j}$.
   R: $(x, y, z) = -(1, 1, 1) + (0, 1, 0)t$

3. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (1,-1,-3) y es paralela:

   a) al vector $\vec{v} = (2, -3, 4)$ R: $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$

   b) a la recta $x = 2t + 1$, $y = 5t - 2$, $z = 1$ R: $x = 2t + 1$, $y = 5t - 1$, $z = -3$

   c) a la recta $x = 3t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 5t + 2$ R: $x = 3t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 5t - 3$

4. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos dados

   a) (3,-1,2), (2,1,1) R: $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$

   b) (1,1,-2), (3,-1,0) R: $x = t + 3$, $y = -t + 1$, $z = t$

   c) (0,0,1), (0,1,-2) R: $x = 0$, $y = t$, $z = -3t + 1$

5. Encontrar las ecuaciones de las rectas con las características dadas

a) Pasa por el punto $P(3,-4,-1)$ y es paralela al vector $\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$
R: $(x,y,x)=(3,-4,-1)+t(1,1,1)$

b) Pasa por $P(1,2,-1)$ y $Q(-1,0,1)$ R: $(x,y,x)=(1,2,-1)+t(2,2,-2)$

c) Pasa por $P(-2,0,3)$ y $Q(3,5,-2)$ R: $(x,y,x)=(-2,0,3)+t(5,5,-5)$

d) Pasa por $P(1,2,0)$ y $Q(1,1,-1)$ R: $(x,y,x)=(1,2,0)+t(0,-1,-1)$

e) Pasa por el origen y es paralela al vector $2\hat{\jmath}+\hat{k}$ R: $(x,y,x)=(0,0,0)+t(0,2,1)$

f) Pasa por el punto (3,-2,1) y es paralela a la recta $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=3t$
R: $(x,y,x)=(3,-2,1)+t(2,-1,3)$

g) Pasa por (1,1,1) y es paralela al eje z R: $(x,y,x)=(1,1,1)+t(0,0,1)$

h) Pasa por (2,4,5) y es perpendicular al plano $3x+7y-5z=21$
R: $(x,y,x)=(2,4,5)+t(3,7,-5)$

i) Pasa por (0,-7,0) y es perpendicular al plano $x+2y+2z=13$
R: $(x,y,x)=(0,-7,0)+t(1,2,2)$

j) Pasa por (2,3,0) y es perpendicular a los vectores $\vec{u}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+3\hat{k}$ y $\vec{v}=3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+5\hat{k}$
R: $(x,y,x)=(2,3,0)+t(-2,4,-2)$

2.3.3. La recta como intersección de planos

Así como un sistema de dos ecuaciones en dos variables nos da un par de rectas que pueden o no intersecarse; un sistema de tres ecuaciones en tres variables nos da tres planos, con las siguientes posibilidades

a) tres planos que se intersecan dos a dos

b) tres planos coincidentes

c) intersección de los tres en una recta

d) intersección común en sólo un punto

e) todos paralelos

f) dos paralelos y uno interseca a ambos

Aunque éstas no son todas las combinaciones posibles, nos sirven para darnos una idea de los diferentes casos que puede haber al generar tres planos en un espacio tridimensional. Esto se ve en las figura 2.2.

Para hallar la ecuación de la recta que resulta de la intersección de dos planos, se utiliza eliminación, lo cual nos dará como resultado la ecuación vectorial; o bien, las ecuaciones paramétricas de la recta o de un plano.

Ejemplo

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta donde intersecan los planos $x-2y+z-8=0$, $3x-y-z-2=0$.

Solución

Para resolver el sistema tomamos la matriz aumentada del sistema y diagonalizamos

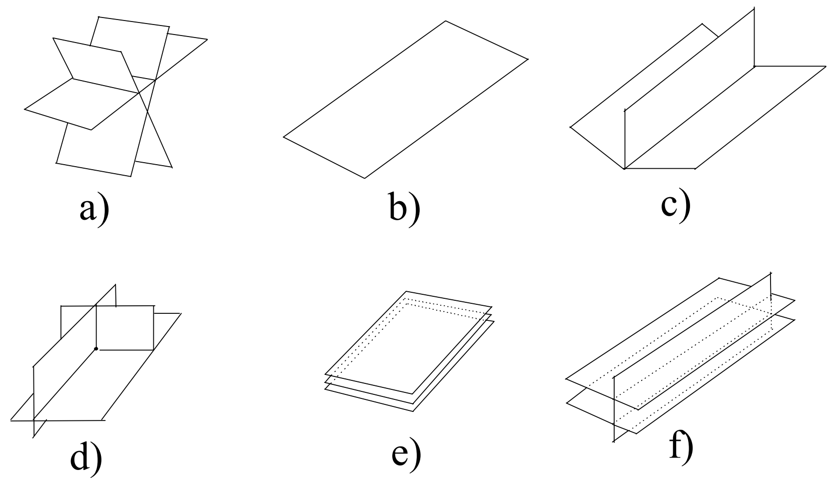


Figura 2.2: Diferentes posibilidades de intersección de planos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_2-3R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -4 & 26 \end{pmatrix} \overset{5R_1+2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 92 \\ 0 & 10 & -8 & 52 \end{pmatrix} \overset{\frac{R_1}{5}-\frac{R_2}{10}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 & 92/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 52/5 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da la ecuación vectorial siguiente, haciendo $z = t$

$$(x, y, z) = (92/5, 52/5, 0) + (3/5, 4/5, 1)t,$$

o las ecuaciones paramétricas

$$x = 92/5 + 3t/5,$$

$$y = 52/5 + 4t/5,$$

$$z = t.$$

Ejercicios

1. Encontrar las ecuaciones de las rectas de intersección de los planos dados

   a) $x + y + z = 1$, $x + y = 2$ R: $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(-1, 1, 0)$

   b) $3x - 6y - 2z = 3$, $2x + y - 2z = 2$ R: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(14, 2, 15)$

   c) $x - 2y + 4z = 3$, $x + y - 2z = 5$ R: $(x, y, z) = (13/3, 2/3, 0) + t(0, 2, 1)$

   d) $5x - 2y = 11$, $4y - 5z = -17$ R: $(x, y, z) = (-17/4, -124/8, 0) + t(10, 25, 0)$

e) Encontrar el plano que pasa por $P_0(2, 1, -1)$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $2x + y - z = 3$, $x + 2y + z = 2$ R: $x - y + z = 0$

f) Encontrar el plano que pasa por los puntos $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $4x - y + 2z = 7$ R: $x - 6y - z = -14$

2.3.4. Ecuaciones simétricas de una recta

Si se toman las ecuaciones paramétricas y se elimina a t, se obtienen las ecuaciones simétricas

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.} \tag{2.20}$$

Estas ecuaciones, tomadas dos a dos, nos dan los planos de intersección. Notemos que por una recta pasan infinidad de planos, por lo cual, si bien un par de planos que se intersecan nos determina una sola recta, una recta no determina sólo un par de planos. Entre la infinidad de planos que una recta puede determinar, las ecuaciones simétricas nos dan los más simples, pues sus ecuaciones sólo dependen de dos variables.

Ejemplo

Encontrar las ecuaciones simétricas para la recta dada por las ecuaciones paramétricas y de ahí un par de planos que se intersecan en esa recta

$$x = 92/5 + 3t/5,$$

$$y = 52/5 + 4t/5,$$

$$z = t.$$

Solución

Despejamos t de las ecuaciones dadas

$$t = \frac{x - 92/5}{3/5}$$

$$t = \frac{y - 52/5}{4/5}$$

$$t = z$$

igualando las tres ecuaciones obtenemos

$$\frac{x - 92/5}{3/5} = \frac{y - 52/5}{4/5} = z$$

Para los planos tomamos la primera y tercera expresiones y la segunda y tercera por separado

$$\frac{x-92/5}{3/5}=z, \quad \frac{y-52/5}{4/5}=z$$

De donde obtenemos

$$5x-3z-92=0, \quad 5y-4z-52=0.$$

Ejercicios

1. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (2,0,-3) y es paralela

   a) al vector $\vec{a}=$ (2,-3,5) R: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$

   b) a la recta $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ R: $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$

2. Hallar las ecuaciones simétricas de las rectas siguientes

   a) $x-2y+3z-4=0$, $3x+2y-5z-4=0$ R: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$

   b) $5x+y+z=0$, $2x+3y-2z+5=0$ R: $\frac{x}{-13/15}=\frac{y+25/13}{12/13}=\frac{z}{1}$

   c) $x-2y+3z+1=0$, $2x+y-4z-8=0$ R: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$

3. Hallar las ecuaciones paramétricas de las rectas siguientes

   a) $2x+3y-z-4=0$, $3x-5y+2y+1=0$ R: $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t-2$

   b) $x+2y-z-6=0$, $2x-y+z+1=0$ R: $x=-t+1$, $y=3t+2$, $z=-19t-2$

4. Hallar la ecuación de la recta formada por la intersección del plano $3x-y-7z+9=0$ con el plano que pasa por el eje x y el punto (3,2,-5). R:

5. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ y

   a) por el punto (4,-2,-3) R: $23x-2y+21z-33=0$

   b) es paralelo al eje x R: $x+z-18=0$

   c) es paralelo al eje y R: $x+z-3=0$

   d) es paralelo al eje z R: $x-y+15=0$

6. Determinar para qué valores de a y b los planos $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$

   a) tienen un punto en común R: $a\neq 7$

   b) pasan por una recta R: $a=7$, $b=3$

   c) se cortan en tres rectas paralelas diferentes R: $a=7$, $b\neq 3$

7. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a los planos $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ y se corta con las rectas $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.
   R: $x=8t-3$, $y=-3t-1$, $z=-4t+2$

8. Por los puntos $M_1=(-6,6,-5)$ y $M_2=(12,-6,1)$ se ha trazado una recta. Hallar los puntos de intersección de esta recta con los planos coordenados.
   R: (9,-4,0), (3,0,-2), (0,2,-3)

9. Hallar las ecuaciones vectoriales de las rectas donde intersecan los pares de planos dados

a) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$ R: $(x, y, z) = (2, -1, 0) + (1/2, 7/4, 1)t$

b) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z = 0$ R: $(x, y, z) = (-5/13, 12/13, 1)t$

c) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$ R: $(x, y, z) = (3, 2, 0) + (1, 2, 1)t$

d) $2x + 3y - z - 4 = 0$, $3x - 5y + 2z + 1 = 0$ R: $(x, y, z) = (17/19, 14/19, 0) + (-1/19, 7/19, 1)t$

e) $x + 2y - z - 6 = 0$, $2x - y + z + 1 = 0$ R: $(x, y, z) = (4/5, 13/5, 0) + (-1/5, 3/5, 1)t$

2.3.5. Ángulos entre rectas

El procedimiento para hallar el ángulo entre dos rectas en el espacio es el mismo que para rectas en el plano: se encuentra el producto punto o el producto cruz entre sus vectores directores y se despeja el ángulo. Si las rectas son paralelas el producto cruz da cero y si son perpendiculares el producto punto da cero.

Ejemplo

Hallar los valores de A y B para los que el plano $Ax + By + 3z - 5 = 0$ es perpendicular a la recta $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$.

Solución

Para que la recta sea perpendicular al plano, también será paralela a su vector normal, que es

$$\vec{n} = (A, B, 3),$$

el vector director de la recta es

$$\vec{v} = (2, -3, -2),$$

para que sean paralelos es necesario que $\vec{n}$ y $\vec{v}$ sean proporcionales. Sus componentes z están a la razón $r = -3/2$ de manera que se requiere que las otras estén a la misma razón, con lo cual

$$A = 2r = -3$$

$$B = -3r = 9/2.$$

Ejercicios

1. Hallar el ángulo entre las rectas: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$. R: 60º
2. Hallar el ángulo formado por las rectas: $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$; $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$. R: 45º
3. Hallar el valor de m para que la recta $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ sea paralela al plano $x - 3y + 6z + 7 = 0$. R: -3
4. Hallar el valor de C para que la recta $3x - 2y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + 4z + 1 = 0$ sea paralela al plano $2x - y + Cz - 2 = 0$. R: -2
5. Hallar los valores de A y D para los que la recta $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$, está contenida en el plano $Ax + 2y - 4z + D = 0$. R: -3, -23
6. Hallar los valores de n y C para los que la recta $\frac{x-2}{n} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ es perpendicular al plano $3x - 2y + Cz + 1 = 0$. R: 6, 3/2

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,-3) y es paralelo a las rectas:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

R: $9x+11y+5z-16=0$

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x=3t+1$, $y=2t+3$, $z=-t-2$ y es paralelo a la recta $2x-y+z-3=0$, $x+2y-z-5=0$. R: $13x-14y+11z+51=0$

9. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ y es perpendicular al plano $3x+2y-z-5=0$.

R: $x-8y-13z+9=0$

10. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto (3,-2,4), es paralela al plano $3x-2y-3z-7=0$ y se corta con la recta $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+1}{2}$. R: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$

11. Hallar el ángulo más pequeño entre los siguientes pares de rectas

a) $x=3t-2$, $y=0$, $z=-t+3$; $x=2t-1$, $y=0$, $z=t-3$ R: 45º

b) $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$; $x=3t-7$, $y=-2t+4$, $z=3t+4$ R: 16.8º

c) $x=2t-3$, $y=3t-2$, $z=-4t+6$; $x=t+5$, $y=-4t-1$, $z=t-4$ R: 52.2º

d) $x=t+1$, $y=2t-9$, $z=-t-12$; $x=3-4t$, $y=5+3t$, $z=-2+12t$ R: 71.7º

e) $x=5-2t$, $y=-3+2t$, $z=5-t$; $x=2+2t$, $y=1-2t$, $z=3+t$ R: 0º

2.3.6. Intersección de rectas

Cuando se tienen dos rectas que se intersecan en un punto, podemos encontrar las coordenadas del punto de intersección al despejar alguna de las variables en una de las ecuaciones simétricas de una recta, y sustituyéndola en una ecuación simétrica de la recta que involucre a las mismas variables. Esto nos dará una coordenada, y el resto de ellas se encuentran con ayuda de las otras ecuaciones simétricas de cualquiera de las dos rectas. Un error muy frecuente entre los alumnos es suponer que se obtienen valores iguales de las coordenadas al sustituir valores iguales del parámetro variable t en las ecuaciones paramétricas; esto se debe evitar a toda costa.

Ejemplo

Demostrar que las rectas $(x,y,z)=(4,2,-3)+(2,-3,-5/2)t$, $(x,y,z)=(-1,5,-4)+(-9,9,4)t$ se intersecan y hallar el punto de intersección.

Solución

Las ecuaciones paramétricas de las rectas son

$$x=4+2t, \quad y=2-3t, \quad z=-3-5t/2$$

$$x=-1-9t, \quad y=5+9t, \quad z=-4+4t$$

De donde se obtienen las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{-5/2},$$

$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z+4}{4},$$

de la primera recta tomamos las dos primeras expresiones, así también para la segunda

$$-3(x-4) = 2(y-2)$$
$$9(x+1) = -9(y-5)$$

y después resolvemos el sistema

$$3x + 2y = 16$$
$$x + y = 4$$

lo que nos da las soluciones

$$x = 8, \quad y = -4,$$

y el valor de z lo hallamos de alguna de las igualdades que la involucran, por ejemplo la última

$$\frac{y-5}{9} = \frac{z+4}{4}$$
$$z = 4y/9 - 56 = -8,$$

o sea que el punto de intersección es (8,-4,-8). Obsérvese que si igualamos las ecuaciones paramétricas para x, obtenemos que

$$x = 4t + 2 = -1 - 9t,$$

lo que al despejar nos da t = -3/13. Pero cuando sustituimos esto en y para la primera recta obtenemos

$$y = 2 - 3(-3/13) = 35/13$$

mientras que para la segunda obtenemos

$$y = 5 + 9(-3/13) = 38/13$$

lo que claramente muestra lo erróneo de igualar los valores de t para hallar intersecciones de rectas.

También es importante que, antes de calcular las coordenadas de una intersección, se debe verificar que efectivamente haya intersección. Una pista sobre esto se tiene al verificar que las rectas son *coplanares*. Las rectas $\vec{P}_1 = (x_1, y_1, z_1) + t(u_1, v_1, w_1)$ y $\vec{P}_2 = (x_2, y_2, z_2) + t(u_2, v_2, w_2)$ son coplanares si

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & x_1 - x_2 \\ v_1 & v_2 & y_1 - y_2 \\ w_1 & w_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.21}$$

Es importante establecer que si dos rectas no son coplanares, no se intersecan; aunque si dos rectas son coplanares, no necesariamente se intersecan: pueden ser coplanares y no intersecarse, en cuyo caso se trata de rectas paralelas.

Ejercicios

Determinar el punto de intersección de las siguientes rectas, en caso de que exista

1. $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 3, 4)$ y $(x, y, z) = (2, 4, -1) + s(1, -2, -4)$ R: no coplanares
2. $(x, y, z) = (0, 2, 1) + t(1, -1, 1)$ y $(x, y, z) = (2, 3, 6) + s(2, 1, 5)$ R: (0,2,1)
3. $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(1, 1, -1)$ y $(x, y, z) = (1, 1, 2) + s(-4, 2, -2)$ R: (–1,2,1)
4. $(x, y, z) = (0, 3, -2) + t(1, -3, -1)$ y $(x, y, z) = (1, 4, -1) + s(1, 1, 1)$ R: (0,3,–2)
5. $(x, y, z) = (-1, 3, 7) + t(2, -1, 1)$ y $(x, y, z) = (1, 3, -2) + s(-6, 3, -3)$ R: rectas paralelas

2.3.7. Distancia de un punto a una recta

Para hallar la distancia de un punto a una recta en el espacio, se utiliza el vector $\hat{v}$ que define la dirección de la recta y el vector que resulta al restar las coordenadas del punto P_0 al punto P_{ext}. Como el producto cruz nos da la proyección del vector $(P_{ext} - P_0)$ sobre la perpendicular a $\hat{v}$, al calcular la magnitud de tal proyección tendremos la distancia buscada. Esto se puede resumir como la fórmula

$$\boxed{d = |(P_{ext} - P_0) \times \hat{v}|} \tag{2.22}$$

Ejemplo

Calcular la distancia de la recta $x = 4 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -3 - 5t/2$ al punto (2,2,2).

Solución

Para la recta se tiene $P_0 = (4, 2, -3)$ y después de dividir a $\vec{v}$ entre su magnitud obtenemos $\hat{v} =$ (0.45,0.68,-0.57), con lo cual aplicamos la fórmula

$$d = |(P_{ext} - P_0) \times \hat{v}| = d = |(-2, 0, 5) \times (0.45, 0.68, -0.57)| = | -3.4\hat{\imath} + 1.11\hat{\jmath} + 1.36\hat{k}| = 3.82.$$

Distancia de un punto S a una recta que pasa por P y es paralela a $\vec{v}$

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \vec{v}|}{\vec{v}}.} \tag{2.23}$$

Ejercicios

1. Demostrar que las rectas $x + 1 = 4t$, $y - 3 = t$, $z - 1 = 0$; $x + 13 = 12t$, $y - 1 = 6t$, $z - 2 = 3t$, se intersecan. Hallar el punto de intersección. R: (-17,-1,1)
2. Calcular la distancia del punto (1,-1,-2) a la recta $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$. R: 7
3. Calcular la distancia d del punto (2,3,-1) a las rectas siguientes
   a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$ R: 21
   b) $x = t - 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$ R: 6
   c) $2x - 2y + z + 3 = 0$, $3x - 2y + 2z + 17 = 0$ R: 15
4. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas dadas en cada caso

a) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$ R: 13

b) $x=2t-4$, $y=-t+4$, $z=-2t-1$; $x=4t-5$, $y=-3+5$, $z=-5t+5$ R: 3

c) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$, $x=6t+9$, $y=-2t$, $z=-t+2$ R: 7

5. Verificar que las rectas $2x+2y-z-10=0$, $x-y-z-22=0$; $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ son paralelas y calcular la distancia entre ellas. R: 25

6. Calcular las distancias de la recta $x=2t-1$, $y=3t+4$, $z=6t-8$ al origen de coordenadas y al punto (1,1,1). R: 7.2 y 6.7

2.3.8. Intersección entre rectas y planos

Si se tienen un plano y una recta en el espacio, puede suceder que la recta sea paralela al plano o esté contenida en él; pero lo más probable es que esté fuera del plano y lo atraviese en un punto. Para hallar la intersección se despejan dos variables de las ecuaciones simétricas, dejándolas como función de la tercera únicamente, y se sustituye en la ecuación del plano. Esto nos da una coordenada, y las otras dos se obtienen al sustituir en los despejes hechos anteriormente. Si acaso la recta es paralela al plano, no encontraremos solución a las ecuaciones planteadas. Para verificar que en efecto hay paralelismo se calcula el producto entre el vector normal del plano y el vector director de la recta. Si la recta está contenida en el plano, al resolver obtendremos infinitas soluciones, que simplemente nos darán otra ecuación para la recta.

Ejemplo

Hallar el punto donde se intersecan la recta $x-4=5t$, $y+2=t$, $z-4=-t$ y el plano $3x-y+7z+8=0$.

Solución

Las ecuaciones simétricas de la recta son

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1},$$

de ellas despejamos a y en función de z y a x en función de z, y obtenemos

$$x=-5z+24, \quad y=-z+2,$$

sustituyendo en la ecuación del plano tenemos que

$$3(-5z+24)-(-z+2)+7z+8=0$$

$$z=78/7, \quad x=-222/7, \quad y=-64/7.$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x=3t+1$, $y=2t+3$, $z=-t-2$ y es paralelo a la recta $2x-y+z-3=0$, $x+2y-z-5=0$.

Solución

Para esto vamos a hallar el vector director de las rectas involucradas. La primera recta tiene como vector director a $\vec{v}_1=(3,2,-1)$. Para la segunda recta lo encontramos haciendo el producto cruz de los vectores normales de los planos, $\vec{n}_1=(2,-1,1)$ y $\vec{n}_2=(1,2,-1)$

$$\vec{v}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k} = (-1, 3, 5).$$

Con estos podemos encontrar el vector normal al plano buscado, haciendo el producto cruz

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 13\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} + 11\hat{k} = (13, -14, 11).$$

Para el punto P_0 hacemos $t = 0$, lo que nos da $P_0 = (1, 3, -2)$, con esto la ecuación del plano es

$$13(x-1) - 14(y-3) + 11(z+2) = 13x - 14y + 11z + 51 = 0.$$

Ejercicios

1. Hallar el punto de intersección de la recta y el plano dados
   - *a*) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$ R: (2,-3,6)
   - *b*) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, $x - 2y + z - 15 = 0$ R: es paralela
   - *c*) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$ R: está contenida en el plano
2. Hallar el punto donde se intersecan la recta y el plano dados en cada caso
   - *a*) $x = 1 + t$, $y = -1 - 2t$, $z = 6t$; $2x + 3y + z - 1 = 0$ R: (2,3,-6)
   - *b*) $x = -3 + 3t$, $y = 2 - t$, $z = -1 - 5t$; $x - 2y + z - 15 = 0$ R: es paralela
   - *c*) $x = -2 - 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 3 + 2t$; $x + 2y - 2z + 6 = 0$ R: (-2,1,3)
3. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x + y - z - 3 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ con los planos coordenados.
   R: (2,-1,0), (4/3,0,-1/3), (0,2,-1)
4. Encontrar los valores de D para los que la recta $2x + 3y - z + D = 0$, $3x - 2y + 2z - 6 = 0$ corta
   - *a*) al eje x R: -4
   - *b*) al eje y R: 9
   - *c*) al eje z R: 3
5. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ y por el punto (2,-2,1). R: $4x + 6y + 5z - 1 = 0$
6. Hallar la ecuación del plano que pasa por las dos rectas paralelas: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.
   R: $6x - 20y - 11z + 1 = 0$
7. Demostrar que la recta: $x = 0$, $y = t$, $z = t$, está en el plano $6x + 4y - 4z = 0$, es paralela a el plano $5x - 3y + 3z = 1$ y está debajo de él, es paralela al plano $6x + 2y - 2z = 3$ y está arriba de él.
8. Demostrar que la recta $x - 4 = 2t$, $y = -t$, $z + 1 = -4t$ es paralela al plano $3x + 2y + z - 7 = 0$.
9. Por los puntos $M_1 = (-6, 6, -5)$ y $M_2 = (12, -6, 1)$ pasa una recta. Hallar los puntos en que esta recta interseca a los planos coordenados. R: (9,-4,0), (3,0,-2), (0,2,-3)
10. Demostrar que la recta $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ es paralela al plano $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

11. Demostrar que la recta donde se intersecan los planos $5x-3y+2z-5=0$, $2x-y-z-1=0$ está contenida en el plano $4x-3y+7z-7=0$.

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ y es paralelo al vector $\vec{v}=(2,-1,-2)$. R: $5x+5z-8=0$

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $5x-2y-z-3=0$, $x+z-3=0$, $x+3y-2z+5=0$ y es paralelo al vector $\vec{v}=(7,9,17)$.
R: $s(5x-2y-z-3)+t(x+3y-2z+5)=0$

14. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x-2y+z-3=0$, $x-2z=0$ y es perpendicular al plano $x-2y+z+5=0$. R: $11x-2y-15z-3=0$

15. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $5x-y-2z-3=0$, $3x-2y-5z+2=0$ y es perpendicular al plano $x+19y-7z-11=0$. R: $s(5x-y-2z-3)+t(3x-2y-5z+2)=0$

16. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (2,-3,-5) y es perpendicular al plano $6x-3y-5z+2=0$. R: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$

17. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,-1,-1) y es perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-30}=\frac{z+2}{4}$. R: $2x-3y+4z-1=0$

18. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,-2,1) y es perpendicular a la recta $x-2y+z-3=0$, $x+y-z+2=0$. R: $x+2y+2z=0$

Capítulo 3

Superficies de segundo orden

Las ecuaciones de segundo orden en dos variables definen superficies llamadas *cuádricas*, que es importante estudiar para conocer sus propiedades geométricas básicas.

En las ecuaciones canónicas dadas se supondrá que los puntos notables (centro, vértice, etc.) están centrados en el origen de coordenadas. Para los casos en que dichos puntos no estén ubicados en el origen, simplemente debemos realizar las traslaciones necesarias. Esto se hace al restar cada coordenada a la variable correspondiente, es decir, hay que sustituir (x, y, z) por $(x-h, y-k, z-\ell)$, donde (h, k, ℓ) son las coordenadas del punto notable trasladado.

3.1. Esferas

La ecuación de una esfera centrada en el origen y cuyo radio es a, es la siguiente

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = a^2.} \tag{3.1}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la esfera centrada en el punto (1,-1,3) y de radio 3.

Solución

En la ecuación 3.1 hacemos $a = 3$, con lo cual obtendríamos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

Pero como el centro no está en el origen, sino en el punto (1,-1,3), la ecuación es

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Ejemplo

Dibujar la esfera cuya ecuación es $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 = 125$.

Solución

dividiendo entre 5 la ecuación dada obtenemos la ecuación en la forma 3.1

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25,$$

lo cual indica que $a = 5$. La esfera es la de la figura 3.1.

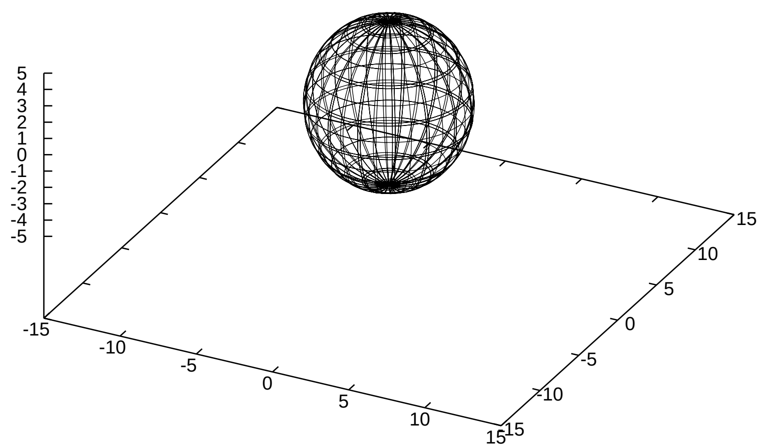


Figura 3.1: Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

Ejercicios

Trazar las esferas

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
3. $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$
4. $3x^2 + 3y^2 + 3(z+1)^2 = 27$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 7$ (Indicación: completar cuadrados)

3.2. Cilindros

La ecuación de un cilindro circular cuyo eje coincide con en el eje z y cuyo radio es a, es la siguiente

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2.} \tag{3.2}$$

Obsérvese que no aparece la variable z. Si el cilindro tuviera su eje sobre el eje y por ejemplo, en la ecuación no aparecería la variable y. Siempre que no aparece una variable en la ecuación de segundo orden, tendremos un cilindro. Esto nos permite tener cilindros no circulares.

Si la ecuación es la que define una parábola en el plano xy, la ecuación en el espacio nos definirá un *cilindro parabólico*; y así por el estilo para cada cónica.

La extensión de la ecuación dada en la variable que no aparece es de $-\infty$ hasta $+\infty$, a menos que se especifique lo contrario. Esto es, tendremos cilindros de longitud infinita, a menos que especifiquemos el inicio y el fin de los mismos.

Ejemplo

Hallar la ecuación del cilindro elíptico con semiejes 3 y 5 en direcciones x y y, respectivamente, y cuyo eje es el eje z.

Solución

Como el eje del cilindro está a lo largo del eje z, esta variable no debe aparecer en la ecuación. La ecuación de la elipse de semiejes 3 y 5 es

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

que es la ecuación buscada. En la figura 3.2 se muestra el cilindro en cuestión.

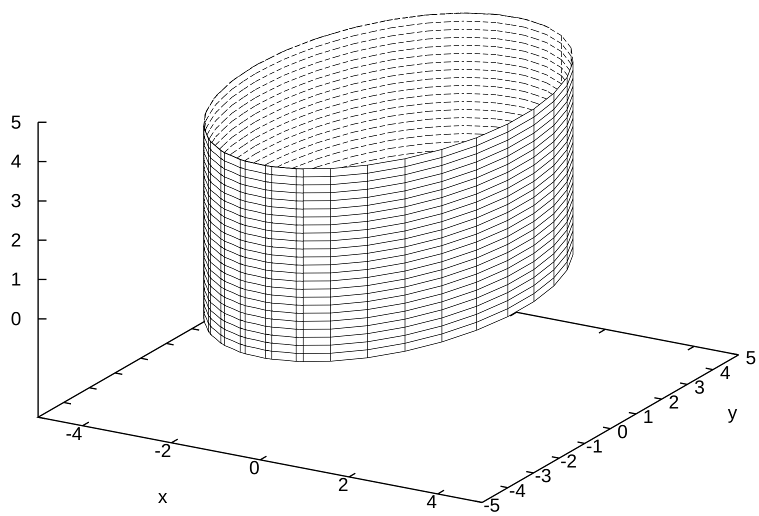


Figura 3.2: Cilindro $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Ejemplo

Dibujar el cilindro cuya ecuación es

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1,$$

para el intervalo $0 \leq z \leq 5$

Solución

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola sobre el plano xy. Por tanto, se trata de un cilindro hiperbólico con eje paralelo al eje de las z (puesto que tal variable no aparece en la ecuación dada). La

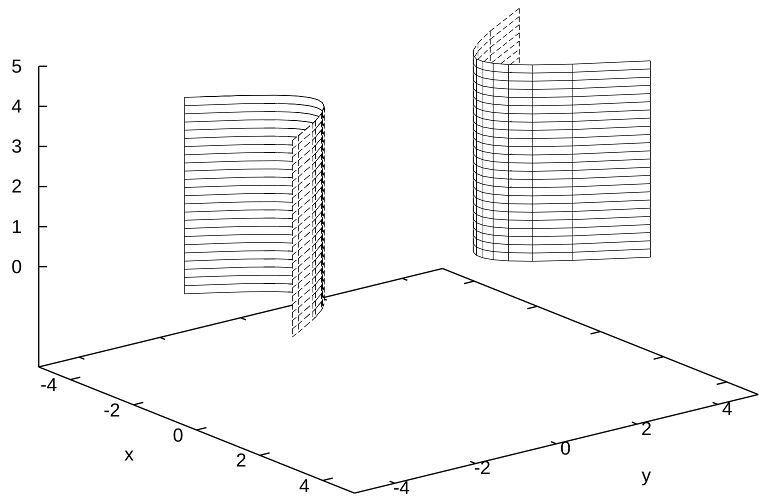


Figura 3.3: Cilindro $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$

desigualdad para z nos da los valores máximo y mínimo que adquirirá esta variable, por lo que la extensión del cilindro no será infinita en esta dirección. El cilindro en cuestión es el de la figura 3.3.

Ejercicios

Trazar los cilindros

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $x^2 + z^2 = 4$
3. $z = y^2 - 1$
4. $x = y^2$
5. $x^2 + 4z^2 = 16$
6. $4x^2 + y^2 = 36$
7. $z^2 - y^2 = 1$
8. $yz = 1$
9. $y^2 - z^2 = 4$
10. $16x^2 + 4y^2 = 1$
11. $x = 4 - y^2$
12. $x^2 + z^2 = 1$
13. $z^2 + 4y^2 = 9$
14. $x^2 - 4y^2 = 1$

15. $z = 1 - x^2$
16. $yz = 1$

3.3. Conos

La ecuación de un cono paralelo al eje z, con vértice en el origen y cuyo radio en $z = 1$ es a, es la siguiente

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2 z^2.} \tag{3.3}$$

Podemos tener conos *elípticos*, en cuyo caso la ecuación es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,} \tag{3.4}$$

con a y b los semiejes en $z = 1$.

Ejemplo

Hallar la ecuación del cono circular que pasa por el punto (-1,0,-1).

Solución

Como en $z = -1$ el radio es $r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$, la ecuación es

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

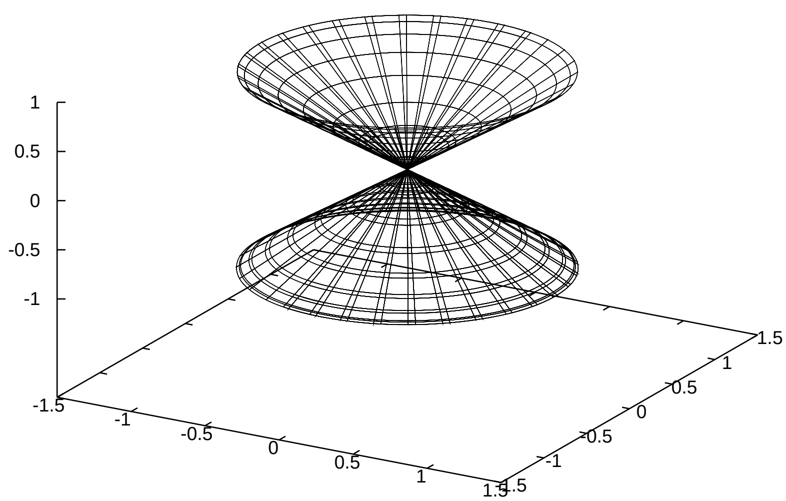


Figura 3.4: Cono $x^2 + y^2 = z^2$

La figura 3.4 muestra el cono.

Ejemplo

Dibujar el cono definido por las relaciones $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

Solución

El cono en cuestión es elíptico y tiene semiejes $a = 2$ y $b = 5$ en $z = 1$. Vemos que se extiende desde $z = 0$ hasta $z = 1$. La figura 3.5 muestra el cono.

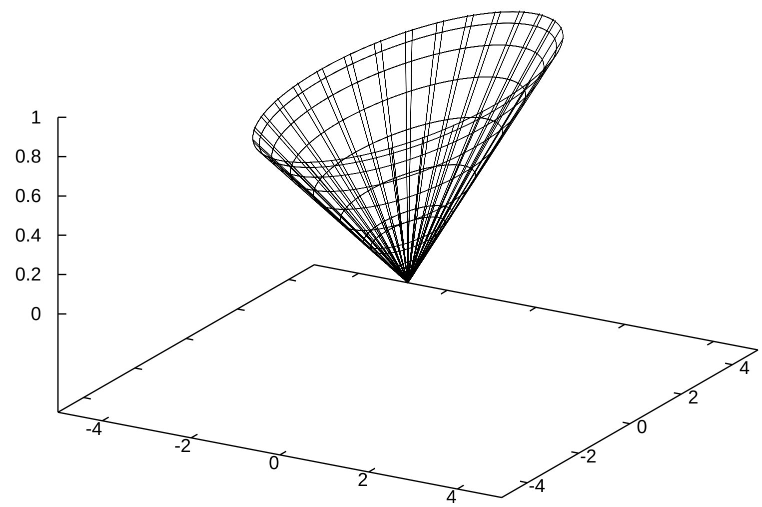


Figura 3.5: Cono $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$

Ejercicios

Trazar los conos

1. $x^2 + y^2 = z^2$
2. $y^2 + z^2 = x^2$
3. $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$
4. $9x^2 + 4y^2 = 36z^2$
5. $4x^2 + 4y^2 = z^2$
6. $16y^2 + 9z^2 = 4x^2$
7. $4x^2 + 9z^2 = y^2$
8. $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$
9. $x^2 + y^2 = z^2$
10. $x^2 + z^2 = y^2$

3.4. Elipsoides

La ecuación de un elipsoide con vértice en el origen y semiejes a, b y c, es la siguiente

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.} \tag{3.5}$$

Si el valor de dos de los semiejes de un elipsoide coincide, se le llama *esferoide*. Cuando el tercer semieje es menor a los dos valores iguales, es un esferoide *oblato*. En caso de que el tercer semieje sea mayor que los dos iguales, es un esferoide *prolato*.

Ejemplo

Graficar el elipsoide que tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Solución

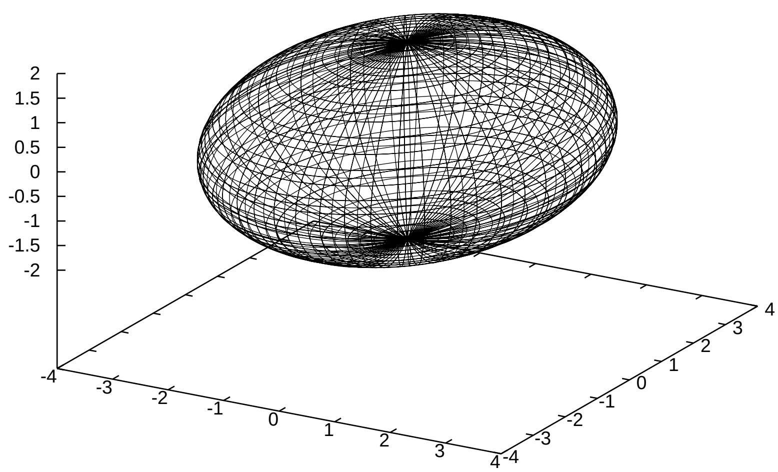


Figura 3.6: Elipsoide $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$

El elipsoide tiene como semiejes 3, 4, y 2 en las direcciones x, y y z, respectivamente. La figura 3.6 muestra el elipsoide.

Ejemplo Dibujar el elipsoide cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Solución

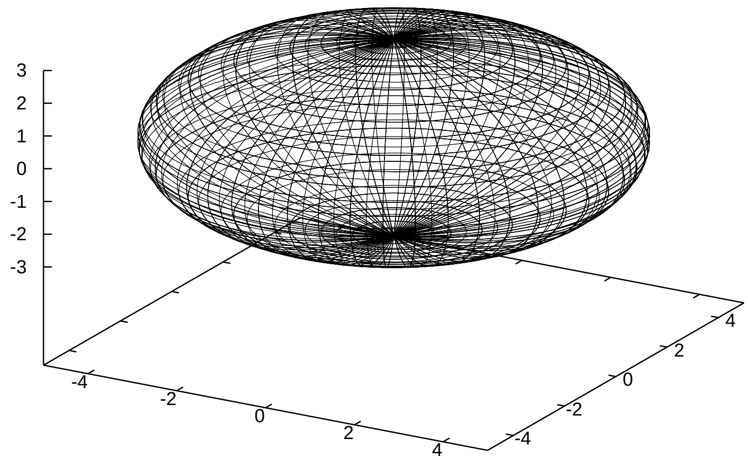


Figura 3.7: Elipsoide $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

El elipsoide tiene $a = b = 5$ y $c = 3 < a = b$, por lo cual vemos que se trata de un esferoide oblato. La figura 3.7 muestra el esferoide.

Ejercicios

Trazar los elipsoides

1. $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$
2. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$
3. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
4. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$
5. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$
6. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$
7. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
8. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$
9. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
10. $25x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 9$

3.5. Paraboloides

La ecuación de un paraboloide circular con eje paralelo al eje z, con vértice en el origen y cuyo radio en $z = 1$ es a, es la siguiente

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2 z.} \tag{3.6}$$

Podemos tener paraboloides *elípticos*, en cuyo caso la ecuación es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,} \tag{3.7}$$

siendo a y b los semiejes en $z = 1$.

También se pueden tener paraboloides *hiperbólicos*. En este caso la ecuación es de la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.} \tag{3.8}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del paraboloide circular con vértice en el origen y cuyo radio en $z = -1$ es 1.

Solución

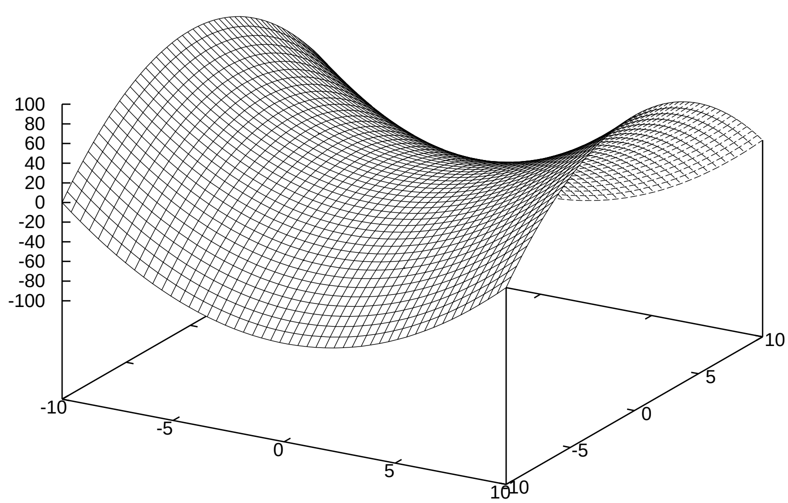


Figura 3.8: Paraboloide $z = -(x^2 + y^2)$

Como tenemos que en $z = -1$ el radio vale 1, la ecuación es $x^2 + y^2 = -z$, o bien

$$z = -(x^2 + y^2).$$

La figura 3.8 muestra el paraboloide.

Ejemplo

Dibujar el paraboloide cuya ecuación es

$$z = -\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}\right).$$

Solución

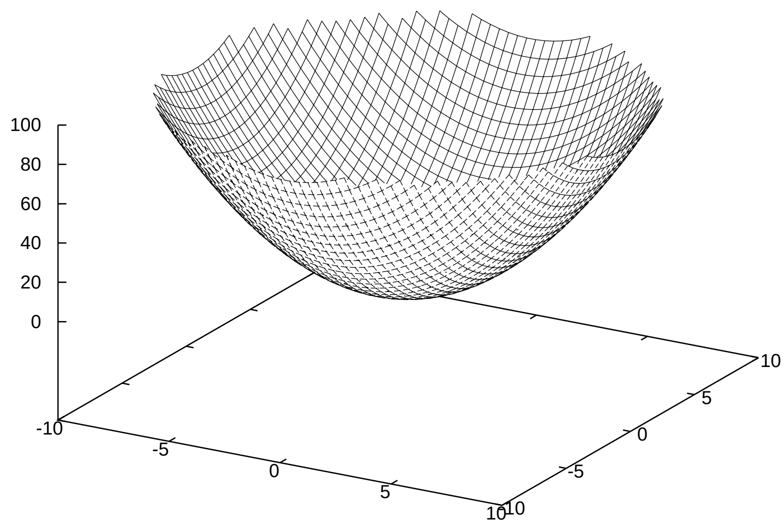


Figura 3.9: Paraboloide $z = \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}\right)$

Se trata de un paraboloide elíptico con semiejes en $z = -1$, $a = 3$, $b = 5$. La figura 3.9 muestra el paraboloide.

Ejercicios

Trazar los paraboloides

1. $z = x^2 + 4y^2$
2. $z = x^2 + 9y^2$
3. $z = 8 - x^2 - y^2$
4. $z = 18 - x^2 - 9y^2$
5. $x = 4 - 4y^2 - z^2$
6. $y = 1 - x^2 - z^2$
7. $y = -(x^2 + z^2)$
8. $z = x^2 + y^2 + 1$
9. $x^2 + z^2 = y$

10. $z = -(x^2 + y^2)$
11. $z = 4x^2 + y^2 - 4$
12. $x^2 + y^2 = z$
13. $z = -(x^2 + y^2)$
14. $y = -(x^2 + y^2)$

3.6. Hiperboloides

La ecuación de un hiperboloide elíptico de una hoja paralelo al eje z, con centro en el origen y cuyos semiejes en $z = 0$ son a y b, es la siguiente

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.} \tag{3.9}$$

El hiperboloide puede tener dos hojas, en cuyo caso la ecuación es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \tag{3.10}$$

Si $a = b$, el hiperboloide es circular.

Ejemplo

Hallar la ecuación del hiperboloide de una hoja con semiejes $a = 5$, $b = 4$ y que pasa por el punto (0,5,3)

Solución

Como pasa por el punto (0,5,3), debe cumplir que

$$\frac{0}{25} + \frac{25}{16} - \frac{9}{c^2} = 1,$$

que despejando nos da $c = 4$. Por lo tanto, la ecuación es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

La figura 3.10 muestra al hiperboloide.

Ejemplo

Dibujar el hiperboloide cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = -1.$$

Solución

El hiperboloide es circular, tiene dos hojas, y en $z = \pm\sqrt{2}$ las circunferencias tienen radio $a = 3$. La figura 3.11 muestra al hiperboloide.

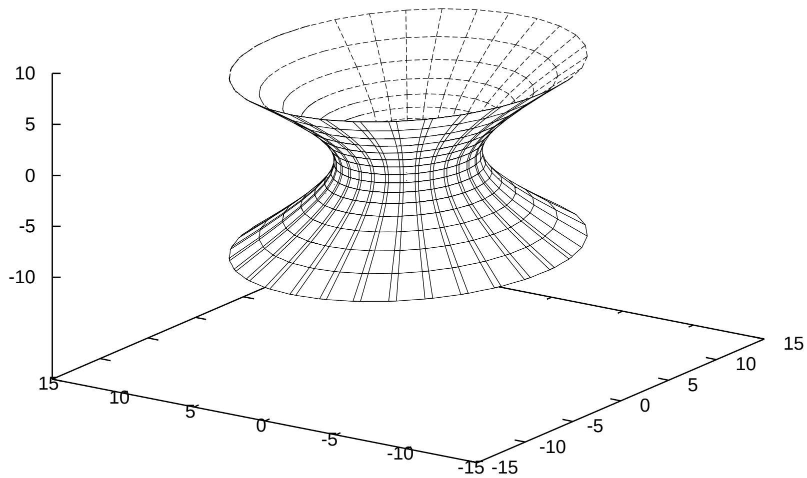


Figura 3.10: Hiperboloide $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$

Ejercicios

Trazar los hiperboloides

1. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
2. $y^2 + z^2 - x^2 = 1$
3. $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$
5. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
6. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$
7. $x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$
8. $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$
9. $y^2 - x^2 = z$
10. $x^2 - y^2 = z$
11. $z = 1 + y^2 - x^2$
12. $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$
13. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
14. $z^2 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
15. $z = x^2 - y^2 - 1$
16. $x^2 + y^2 - 16z^2 = 16$

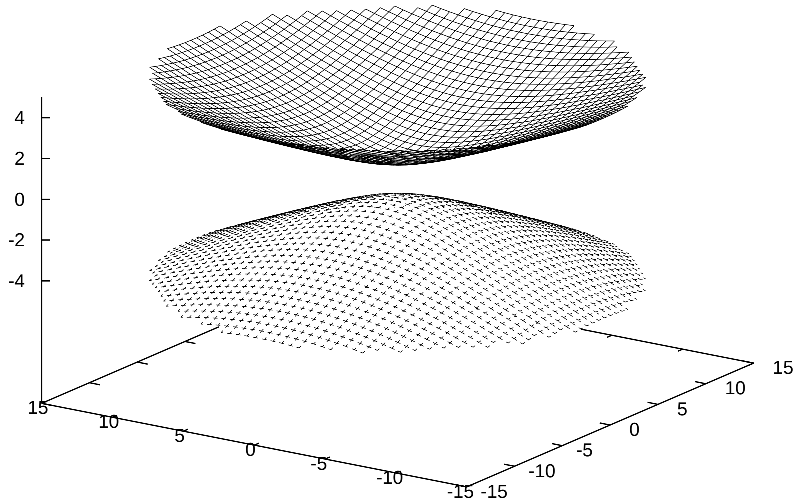


Figura 3.11: Hiperboloide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = -1$

17. $y^2 - x^2 - z^2 = 1$
18. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$
19. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$
20. $4z^2 - x^2 - y^2 = 4$
21. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
22. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$
23. $y^2 - x^2 - z^2 = 1$
24. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

Capítulo 4

Funciones con valores vectoriales

Un vector $\vec{r}(t) = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k}$, cuyas componentes r_i son funciones de una variable t, define una función vectorial de variable escalar. Esto es, para definir una función vectorial, hacen falta tres funciones escalares $r_x(t)$, $r_y(t)$ y $r_z(t)$.

4.1. Gráfica de una función vectorial

La representación geométrica de una función vectorial consta de todos los puntos que toca el extremo del vector $\vec{r}(t)$ conforme varía t. A veces a la gráfica de tal función se le llama *hodógrafo*.

Ejemplo

Graficar la función

$$\vec{r}(t) = e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\hat{\imath} + e^{-0.2t}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\hat{\jmath} + t\ \hat{k}, \quad 0 \le t \le 20.$$

Solución

La función dada se puede graficar calculando un conjunto de valores para las componentes $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, que nos darán las coordenadas de cada uno de los puntos finales de los vectores. Podemos formar una tabla como la siguiente

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
x	1.0000	-0.0016	-0.6703	0.0033	0.4493	-0.0037	-0.3012	0.0035	0.2019	-0.1353
y	0.0000	0.8187	-0.0027	-0.5488	0.0036	0.3679	-0.0036	-0.2466	0.0032	-0.0027
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10

t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	0.0024	0.0907	-0.0019	-0.0608	0.0015	0.0407	-0.0011	-0.0273	0.0009	0.0183
y	-0.1108	0.0022	0.0742	-0.0017	-0.0498	0.0013	0.0334	-0.0010	-0.0224	0.0007
z	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Ubicando esos puntos y uniendo obtenemos una gráfica como la de la figura 4.1.

Las funciones con valores vectoriales se pueden expresar también en forma de ecuaciones paramétricas, en forma análoga a como se hizo con las ecuaciones de una recta. Así, la función vectorial

$$\vec{r}(t) = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k}$$

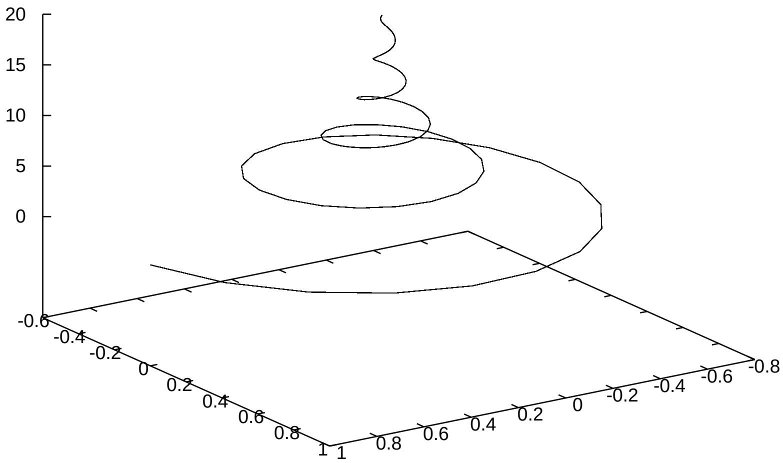


Figura 4.1: Función vectorial en el espacio

se puede escribir en forma paramétrica como

$$\begin{aligned} x &= r_x(t), \\ y &= r_y(t), \\ z &= r_z(t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Las funciones vectoriales (o paramétricas) son muy fáciles de dibujar usando algún programa computacional.

Ejercicios

Graficar las siguientes funciones

1. $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} - t^2\hat{j} + \hat{k}$
2. $\vec{r}(t) = t\ \hat{i} + t^2\hat{j} + t^2\hat{k}$
3. $\vec{r}(t) = t\ \hat{i} + \frac{1}{3}t^2\hat{j} + \frac{1}{9}t^3\hat{k}$
4. $\vec{r}(t) = 2\hat{i} + t^2\hat{j} - t^2\hat{k}$
5. $\vec{r}(t) = \frac{t^2+1}{(t+1)^2}\ \hat{i} + \frac{2t}{(t+1)^2}\ \hat{j}$
6. $\vec{r}(t) = \cos t\hat{i} + \operatorname{sen} t\hat{j} + t\ \hat{k}$
7. $\vec{r}(t) = \cos t\ \hat{i} + \operatorname{sen}^2 t\ \hat{j} + \cos t\ \hat{k}$
8. $\vec{r}(t) = t\cos(\omega t)\ \hat{i} + t\operatorname{sen}(\omega t)\ \hat{j} + \ln t\ \hat{k}$
9. $\vec{r}(t) = e^{-t}\cos(e^t)\ \hat{i} + e^{-t}\operatorname{sen}(e^t)\ \hat{j} - e^t\ \hat{k}$
10. $\vec{r}(t) = e^{\operatorname{sen} t}\cos t\ \hat{i} - t\cos(t^2)\ \hat{j} + \hat{k}$

4.2. Límites y continuidad

La función $\vec{r}(t)$ tiene como límite cuando t tiende a t_0 al vector $\vec{\ell}$ si y sólo si se cumple que

$$\lim_{t\to t_0} r_x(t) = \ell_x, \quad \lim_{t\to t_0} r_y(t) = \ell_y, \quad \lim_{t\to t_0} r_z(t) = \ell_z. \tag{4.2}$$

Esto es, el límite de una función vectorial consta de los límites de cada una de las funciones escalares que la componen. También sucede que las reglas para los límites de funciones reales sirven para funciones vectoriales cambiando escalares por vectores cuando esto es posible. En particular se tienen las siguientes reglas para $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ funciones vectoriales, y $c(t)$ función escalar

$$\lim_{t\to t_0}[c(t)\vec{a}(t)] = \lim_{t\to t_0} c(t) \lim_{t\to t_0} \vec{a}(t), \tag{4.3}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)] = \lim_{t\to t_0} \vec{a}(t) \cdot \lim_{t\to t_0} \vec{b}(t), \tag{4.4}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)] = \lim_{t\to t_0} \vec{a}(t) \times \lim_{t\to t_0} \vec{b}(t). \tag{4.5}$$

Ejemplo

Encontrar el límite siguiente

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\ \hat{\imath} + \cos t\ \hat{\jmath} + t\ \hat{k}.$$

Solución

Sabemos de cálculo diferencial que $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, también $\lim_{t\to 0} \cos t = 1$ y $\lim_{t\to 0} t = 0$, así que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\ \hat{\imath} + \cos t\ \hat{\jmath} + t\ \hat{k} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}.$$

Ejercicios

Calcular $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)$, con los $\vec{r}(t)$ y t_0 indicados en cada caso.

1. $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $t_0 = 1$ R: $\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$
2. $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$, $t_0 = 2$ R: $2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$
3. $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \frac{1}{3}t^2\hat{\jmath} + \frac{1}{9}t^3\hat{k}$, $t_0 = 5$ R: $5\hat{\imath} + 25/3\ \hat{\jmath} + 125/9\ \hat{k}$
4. $\vec{r}(t) = 2\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} - t^2\hat{k}$, $t_0 = -1$ R: $2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$
5. $\vec{r}(t) = \frac{t^2+1}{(t+1)^2}\hat{\imath} + \frac{2t}{(t+1)^2}\hat{\jmath}$, $t_0 = 0$ R: $\hat{\imath}$
6. $\vec{r}(t) = \cos t\ \hat{\imath} + \operatorname{sen} t\ \hat{\jmath} + t\ \hat{k}$, $t_0 = \pi/2$ R: $\hat{\jmath} + \pi/2\ \hat{k}$
7. $\vec{r}(t) = \cos t\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}^2 t\ \hat{\jmath} + \cos t\ \hat{k}$, $t_0 = \pi$ R: $-\hat{\imath} - \hat{k}$
8. $\vec{r}(t) = t\cos t\ \hat{\imath} + t\operatorname{sen} t\ \hat{\jmath} + \ln t\ \hat{k}$, $t_0 = \pi/2$ R: $\pi/2\ \hat{\jmath} + \ln(\pi/2)\ \hat{k}$
9. $\vec{r}(t) = e^{-t}\cos(e^t)\hat{\imath} + e^{-t}\operatorname{sen}(e^t)\hat{\jmath} - e^t k$, $t_0 = 0$ R: $\cos 1\ \hat{\imath} + \operatorname{sen} 1\ \hat{\jmath} - \hat{k}$
10. $\vec{r}(t) = e^{\operatorname{sen} t}\cos t\hat{\imath} - t\cos(t^2)\hat{\jmath} + \hat{k}$, $t_0 = 0$ R: $\hat{\imath} + \hat{k}$

4.3. Derivadas

La derivada de una función vectorial se define como

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \tag{4.6}$$

en caso de que dicho límite exista.

Dada la función vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \tag{4.7}$$

su derivada está dada por

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}, \tag{4.8}$$

o sea que para derivar una función vectorial debemos derivar cada componente con las reglas de derivación conocidas para las funciones reales.

Algunas reglas importantes en la derivación de funciones vectoriales son

$$\frac{d}{dt}[c\vec{r}(t)] = c\frac{d\vec{r}}{dt}, \quad c \text{ constante} \tag{4.9}$$

$$\frac{d}{dt}[c(t)\vec{r}(t)] = c(t)\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{dc}{dt}\vec{r} \tag{4.10}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)] = \vec{a}(t)\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} \tag{4.11}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)] = \vec{a}(t)\times\frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} \tag{4.12}$$

Ejemplo

Derivar la función

$$\vec{r}(t) = a\cos t\ \hat{\imath} + b\,\mathrm{sen}\,t\ \hat{\jmath} + t\ \hat{k}.$$

Solución

Derivando cada componente tenemos que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\,\mathrm{sen}\,t\hat{\imath} + b\cos t\hat{\jmath} + \hat{k}.$$

Ejemplo

Derivar la función

$$\vec{\ell}(t) = \vec{r}\times\vec{p},$$

donde

$$\vec{r}(t) = t\ \hat{\imath} + t^2\ \hat{\jmath} + t^3\ \hat{k}, \quad \vec{p}(t) = \frac{t^2}{2}\ \hat{\imath} + \frac{t^3}{3}\ \hat{\jmath} + \frac{t^4}{4}\ \hat{k}.$$

Solución

Tenemos que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k},$$

entonces

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} =$$

$$= \left(t\ \hat{\imath} + t^2\ \hat{\jmath} + t^3\ \hat{k}\right) \times \left(t\ \hat{\imath} + t^2\ \hat{\jmath} + t^3\ \hat{k}\right) + \left(\hat{\imath} + 2t\ \hat{\jmath} + 3t\ \hat{k}\right) \times \left(\frac{t^2}{2}\hat{\imath} + \frac{t^3}{3}\hat{\jmath} + \frac{t^4}{4}\hat{k}\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2}\hat{\imath} + \frac{t^3}{3}\hat{\jmath} + \frac{t^4}{4}\hat{k},$$

puesto que el primer producto cruz es cero, al ser iguales los factores.

Análogamente a las funciones escalares, la diferencial de una función vectorial es

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt. \tag{4.13}$$

Ejercicios

Hallar la derivada de cada función

1. $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath} + \hat{k}$ R: $2t\ \hat{\imath} - 2t\ \hat{\jmath}$
2. $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$ R: $\hat{\imath} + 2t\ \hat{\jmath} + 2t\ \hat{k}$
3. $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \frac{1}{3}t^2\hat{\jmath} + \frac{1}{9}t^3\hat{k}$ R: $\hat{\imath} + 2/3\ \hat{\jmath} + t^2/3\ \hat{k}$
4. $\vec{r}(t) = 2\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} - t^2\hat{k}$ R: $2t\ \hat{\jmath} - 2t\ \hat{k}$
5. $\vec{r}(t) = \frac{t^2+1}{(t+1)^2}\hat{\imath} + \frac{2t}{(t+1)^2}\hat{\jmath}$ R: $\frac{2t-2}{(t+1)^3}\ \hat{\imath} + \frac{2-2t}{(t+1)^3}\ \hat{\jmath}$
6. $\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \operatorname{sen} t\hat{\jmath} + t\hat{k}$ R: $-\operatorname{sen} t\ \hat{\imath} + 2\operatorname{sen} t\cos t\ \hat{\jmath} - \operatorname{sen} t\ \hat{k}$
7. $\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \operatorname{sen}^2 t\hat{\jmath} + \cos t\hat{k}$ R: $[\cos(\omega t) - \omega t\operatorname{sen}(\omega t)]\hat{\imath} + [\operatorname{sen}(\omega t) + \omega t\cos(\omega t)]\hat{\jmath} + \frac{\hat{k}}{t}$
8. $\vec{r}(t) = t\cos(\omega t)\hat{\imath} + t\operatorname{sen}(\omega t)\hat{\jmath} + \ln t\hat{k}$ R: $[-e^{-t}\cos(e^t) - \operatorname{sen}(e^t)]\hat{\imath} + e^{-t}[\cos(e^t) - \operatorname{sen}(e^t)]\hat{\jmath} - e^t\hat{k}$
9. $\vec{r}(t) = e^{-t}\cos(e^t)\hat{\imath} + e^{-t}\operatorname{sen}(e^t)\hat{\jmath} - e^t k$ R: $e^{\operatorname{sen} t}[\cos^2 t - \operatorname{sen} t]\hat{\imath} + [2t^2\operatorname{sen}(t^2) - \cos(t^2)]\hat{\jmath}$
10. $\vec{r}(t) = e^{\operatorname{sen} t}\hat{\imath} - \ln(\cos t)\hat{\jmath} + \operatorname{sen}(e^t)\hat{k}$ R: $\cos t e^{\operatorname{sen} t}\hat{\imath} + \operatorname{tg} t\ \hat{\jmath} + e^t\cos(e^t)\hat{k}$

4.4. Integrales

La integral indefinida $\vec{F}(t)$ de una función vectorial $\vec{r}(t)$ es aquella que cumple

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{r}(t).$$

Esto se escribe

$$\int \vec{r}(t)\ dt = \vec{R}(t) + \vec{C}, \tag{4.14}$$

donde $\vec{C}$ es un vector constante. Análogamente a lo que sucede con la derivada, la integral de una función vectorial consta de las integrales de cada una de las componentes, por lo que los métodos de integración para funciones reales son los que se usarán para cada componente de las funciones vectoriales.

Las siguientes reglas son válidas para funciones vectoriales

$$\int c\vec{r}(t)\ dt = c\int \vec{r}(t)\ dt, \quad c \text{ constante} \tag{4.15}$$

$$\int \vec{c}\cdot\vec{r}(t)\ dt = \vec{c}\cdot\int \vec{r}(t)\ dt, \quad \vec{c} \text{ constante} \tag{4.16}$$

$$\int \vec{c}\times\vec{r}(t)\ dt = \vec{c}\times\int \vec{r}(t)\ dt, \quad \vec{c} \text{ constante} \tag{4.17}$$

Ejemplo

Calcular la integral

$$\vec{v} = \int (\hat{\imath}\cos t + \hat{\jmath}e^{-t} + \hat{k})\ dt.$$

Solución

Integrando cada componente, encontramos que el valor de la integral es

$$\vec{v} = \hat{\imath}\operatorname{sen} t - \hat{\jmath}e^{-t} + \hat{k}\ t + \vec{c}.$$

Ejercicios

Integrar las funciones siguientes

1. $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} - t^2\hat{\jmath} + \hat{k}$ R: $t^3/3\ \hat{\imath} - t^3/3\ \hat{\jmath} + t\ \hat{k}$
2. $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$ R: $t^2/2\ \hat{\imath} + t^3/3\ \hat{\jmath} + t^3/3\ \hat{k}$
3. $\vec{r}(t) = te^t\hat{\imath} + \operatorname{sen}^2 t\hat{\jmath} - \frac{1}{1+t^2}\hat{k}$ R: $e^t(t-1)\hat{\imath} + [t/2 - \operatorname{sen} 2t/4]\hat{\jmath} - \operatorname{arc\,tg} t\ \hat{k}$
4. $\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\hat{\imath} + \frac{1}{5-t}\hat{\jmath} + \frac{1}{2t}\hat{k}$ R: $\ln t\ \hat{\imath} - \ln(5-5)\ \hat{\jmath} + \ln 2t\ \hat{k}$

5. $\vec{r}(t) = \frac{t}{1+t^2}\hat{\imath} + te^{t^2}\hat{\jmath} + \cos t\hat{k}$ R: $\ln(1+t^2)/2\ \hat{\imath} + e^{t^2}/2\ \hat{\jmath} + \operatorname{sen} t\hat{k}$
6. $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\hat{\imath} - t\operatorname{sen} t\hat{\jmath} + 2^t\hat{k}$ R: $t^3/6\ \hat{\imath} + (t\cos t - \operatorname{sen} t)\hat{\jmath} + 2^t/\ln 2\ \hat{k}$
7. $\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \operatorname{sen} t\hat{\jmath} + t\hat{k}$ R: $\operatorname{sen} t\ \hat{\imath} - \cos t\ \hat{\jmath} + t^2/2\ \hat{k}$
8. $\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \operatorname{sen}^2 t\hat{\jmath} + \cos t\hat{k}$ R: $\operatorname{sen} t\ \hat{\imath} + \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\hat{\jmath} + \operatorname{sen} t\ \hat{k}$
9. $\vec{r}(t) = t\cos t\ \hat{\imath} + t\operatorname{sen} t\ \hat{\jmath} + \ln t\hat{k}$ R: $(\cos t + t\operatorname{sen} t)\hat{\imath} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\hat{\jmath} + x(\ln x - 1)\hat{k}$
10. $\vec{r}(t) = e^{\operatorname{sen} t}\cos t\hat{\imath} - t\cos(t^2)\hat{\jmath} + \hat{k}$ R: $e^{\operatorname{sen} t}\hat{\imath} - \operatorname{sen}(t^2)/2\ \hat{\jmath} + t\ \hat{k}$

4.5. Longitud de arco de una función vectorial

La longitud de arco de una curva descrita por una función vectorial (o bien, por una función paramétrica), se calcula por medio de la fórmula

$$\boxed{L = \int_a^b \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\ dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt.} \tag{4.18}$$

Ejemplo

Calcular la longitud de la hélice circular descrita por

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\ \hat{\imath} + 2\operatorname{sen} t\ \hat{\jmath} + 3t\ \hat{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución

La derivada de la función es

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2\operatorname{sen} t\ \hat{\imath} + 2\cos t\ \hat{\jmath} + 3t\ \hat{k},$$

mientras que su magnitud es

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 9} = \sqrt{13}.$$

De lo anterior, la longitud de la curva es

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{13}\ dt = \sqrt{13}\ t\ \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{13}.$$

Ejercicios

Calcular la longitud de cada curva $\vec{r}(t)$ dada entre los valores de t indicados

1. $\vec{r}(t) = 2\cos t\ \hat{\imath} + 2\operatorname{sen} t\ \hat{\jmath} + \sqrt{5}t\ \hat{k}$, $0 \le t \le \pi$ R: 3π
2. $\vec{r}(t) = 6\operatorname{sen} 2t\ \hat{\imath} + 6\cos 2t\ \hat{\jmath} + 5t\ \hat{k}$, $0 \le t \le \pi$ R: 13π
3. $\vec{r}(t) = t\ \hat{\imath} + \frac{2}{3}t^{3/2}\hat{k}$, $0 \le t \le 8$ R: $52/3$
4. $\vec{r}(t) = 4\cos t\ \hat{\imath} + 4\operatorname{sen} t\ \hat{\jmath} + 3t\ \hat{k}$, $0 \le t \le \pi/2$ R: $5\pi/2$
5. $\vec{r}(t) = (2+t)\hat{\imath} - (t+1)\hat{\jmath} + t\ \hat{k}$, $0 \le t \le 3$ R: $3\sqrt{3}$

6. $\vec{r}(t) = \cos^3 t\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}^3 t\ \hat{k}$, $0 \le t \le \pi/2$ R: $3/2$
7. $\vec{r}(t) = 6t^3\hat{\imath} - 2t^3\hat{\jmath} - 3t^3\hat{k}$, $1 \le t \le 2$ R: 21
8. $\vec{r}(t) = t\cos t\ \hat{\imath} + t\operatorname{sen} t\hat{\jmath} + (2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\hat{k}$, $0 \le t \le \pi$ R: $\pi^2/2 + \pi$
9. $\vec{r}(t) = (t\operatorname{sen} t + \cos t)\hat{\imath} + (t\cos t - \operatorname{sen} t)\hat{\jmath}$, $\sqrt{2} \le t \le 2$ R: $\sqrt{3} - 1/4$
10. $\vec{r}(t) = e^t\cos t\ \hat{\imath} + e^t\operatorname{sen} t\ \hat{\jmath} + e^t k$, $-\ln 4 \le t \le 0$ R: $3\sqrt{3}/4$

Capítulo 5

Funciones de varias variables

Cuando una función depende de varias variables independientes, a cada conjunto de valores de ellas corresponde un valor de la variable dependiente. Una función puede depender de cualquier número de variables, pero para nuestros fines será suficiente con estudiar las funciones de dos variables, y a veces algunas de tres.

5.1. Funciones de dos variables

Una función de dos variables tiene como dominio un conjunto de pares de valores de las variables independientes. Frecuentemente, tal dominio se puede representar como una región del plano cartesiano. Para encontrar dominios de funciones de dos variables se deben tomar en cuenta hechos similares a aquellos de las funciones de una variable: que no haya ceros en los denominadores, que no haya números negativos dentro de raíces cuadradas, etc. El recorrido (a veces llamado rango) de una función de varias variables es el conjunto de valores reales que adquiere la función para cada punto del dominio.

Al relacionar cada punto del dominio con su correspondiente valor del recorrido tenemos un punto en el espacio tridimensional. El conjunto de todos estos puntos en el espacio tridimensional puede describir una superficie en el espacio. Esta superficie nos da la representación gráfica de la función. Debe notarse que a cada punto del dominio sólo le corresponde uno del recorrido (si no, no sería una función), por lo cual no puede haber superficies cerradas como las que se estudiaron en el capítulo de superficies de segundo orden.

Una manera de darse una idea de la forma gráfica de una función de dos variables consiste en fijar valores constantes para una de las variables y observar la forma de la ecuación de las curvas que quedan, llamadas *isocontornos*. Por ejemplo, si se fija como constante el valor de z, las curvas que se obtienen (llamadas a veces *curvas de nivel*) nos dan contornos de la función en diferentes alturas, que podemos proyectar sobre el plano xy o bien tratar de ubicar en el espacio tridimensional y, con ellos, bosquejar las gráficas tridimensionales.

Ejemplo

Encontrar el dominio y el recorrido de la siguiente función, encontrar sus curvas de nivel y bosquejar la gráfica.

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Solución

El dominio de la función consta del conjunto de parejas (x, y) que satisfacen la desigualdad

$$x^2 + y^2 > 0,$$

dado que sólo para estos valores tiene sentido la expresión en el argumento del logaritmo. Como se puede ver fácilmente, esto se cumple para todos los valores en $\mathbb{R}^2$, exceptuando el origen. El recorrido consta de todos los valores que toma el logaritmo natural, es decir, $\mathbb{R}$.

Para las curvas de nivel podemos tomar $z = cte$, lo que nos indica curvas de la forma $\ln(x^2+y^2) = cte$, o bien $x^2 + y^2 = k$, es decir, círculos con centro en el origen y radio $\sqrt{k} = \sqrt{e^{cte}}$, que al graficar en el espacio tridimensional tienen el aspecto mostrado en la figura 5.1.

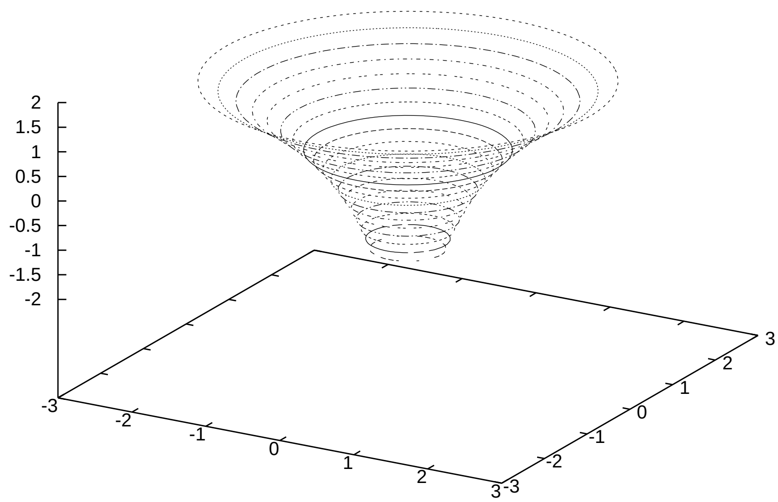


Figura 5.1: Curvas de nivel de la función $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

También se puede construir la gráfica de la función si se toma como constante el valor de x o de y, en cuyo caso se tendrán como isocontornos curvas logarítmicas. Al graficar tales curvas se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 5.2.

Aunque los isocontornos nos ayudan a visualizar *grosso modo* la forma de una función, en la práctica es mucho más común recurrir a programas de graficación por computadora para obtener la gráfica de una función. De hecho, frecuentemente es más eficiente graficar y de ahí obtener información sobre la función.

Ejercicios

Hallar los dominios, curvas de nivel y bosquejar las gráficas para las funciones siguientes

1. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) | \ y = x\}$
2. $f(x, y) = \sqrt{xy}$ R: Los cuadrantes primero y tercero del plano xy
3. $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

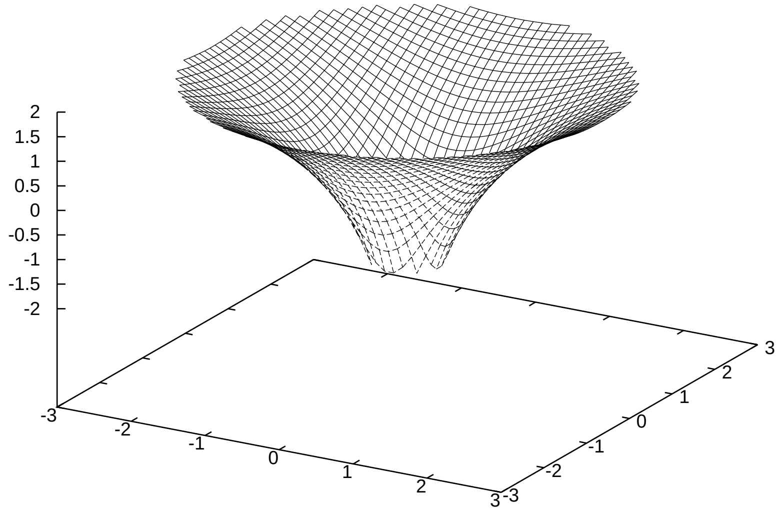


Figura 5.2: Isocontornos de la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

4. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$ R: $\mathbb{R} - \{(x,y)|y = \pm x\}$
5. $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$ R: $\{(x,y)|\ 4x^2 + 9y^2 \geq 36\}$
6. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ R: $\{(x,y)|\ |y| < |x|\}$
7. $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen}(x+y)$ R: $\{(x,y)||x+y| \leq 1\}$
8. $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ R: $\mathbb{R}^2$
9. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ R: $\mathbb{R}^2$
10. $f(x,y) = 6 - x - 2y$ R: $\mathbb{R}^2$
11. $f(x,y) = |x| + |y|$ R: $\mathbb{R}^2$
12. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+4y^2}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
13. $f(x,y) = c\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$ R: $\{(x,y)|\ x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$
14. $f(x,y) = x - y$ R: $\mathbb{R}^2$
15. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ R: $\mathbb{R}^2$
16. $f(x,y) = xy$ R: $\mathbb{R}^2$
17. $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ R:$\mathbb{R}^2 - \{(x,y)|\ y = 0\}$
18. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(x,y)|\ y = -x\}$
19. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
20. $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
21. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$ R: $\mathbb{R}^2$

22. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+4y^2}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

23. $f(x,y) = xe^{-y}$ R: $\mathbb{R}^2$

5.2. Funciones de tres variables

Las funciones de tres variables no se pueden representar geométricamente. Sin embargo, es posible tener una idea de su comportamiento por medio de las *superficies de nivel*, que son el análogo tridimensional de las curvas de nivel. El dominio de estas funciones es un volumen en el espacio tridimensional, mientras que su recorrido es un intervalo de números reales. En el caso de un mayor número de variables, se tendrían *hipersuperficies de nivel*.

Ejemplo

Encontrar el dominio y las superficies de nivel de la función

$$f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$$

Solución

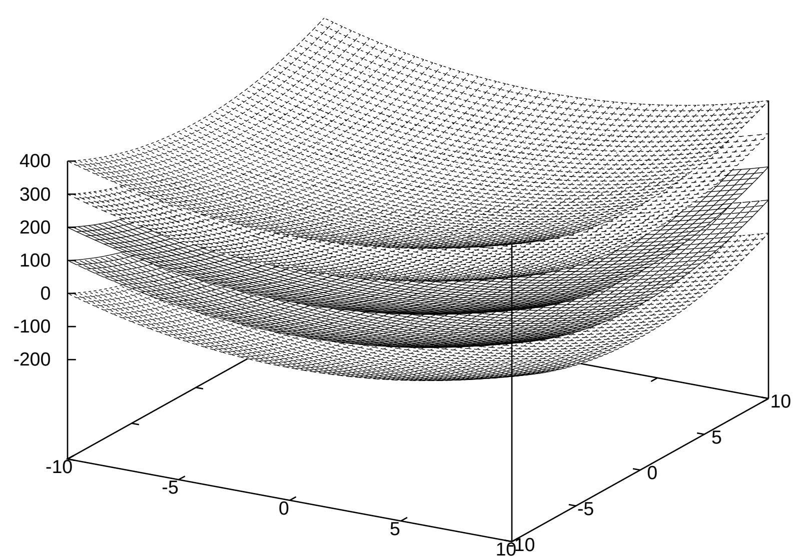


Figura 5.3: Superficies de nivel

Observemos que al fijar el valor de $f(x,y,z) = k$ se obtiene la ecuación

$$z = x^2 + y^2 + k,$$

que nos describe una familia de paraboloides de revolución, donde la k sólo desplaza sobre el eje z a cada uno de los paraboloides. Esto se muestra en la figura 5.3.

Ejercicios

Hallar el dominio de la función dada y describir las superficies de nivel de la gráfica.

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ R: $\mathbb{R}^3$ esferas centradas en el origen
2. $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ R: $\mathbb{R}^3$ planos que pasan por el origen
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ R: $\mathbb{R}^3$ cilindros de revolución cuyo eje coincide con el eje z
4. $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z^2}$ R: $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^2 - \{z = 0\}$, conos elípicos
5. $f(x,y,z) = |x| + |y| + |z|$
   R: $\mathbb{R}^3$ octaedros regulares cuyos vértices están situados sobre los ejes de referencia

5.3. Límites

Los límites de funciones de varias variables son particularmente difíciles de calcular, salvo casos muy simples. Para calcular un límite, la primera regla es sustituir los valores de x y y en la función correspondiente. Si esto no nos da el límite buscado haremos algún truco algebraico, como factorizar las expresiones involucradas, hacer un cambio de variable, etc., de manera similar a lo que se hace al calcular límites de funciones de una variable. Un cambio de variable que suele ser útil es la transformación a coordenadas polares.

Ejemplo

Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

Solución

Susituyendo los valores correspondientes encontramos

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y-x}{x^2+y^2} = \frac{2-1}{1^2+2^2} = \frac{1}{5}.$$

Ejemplo

Encontrar

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

Solución

Susituyendo los valores correspondientes encontramos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo cual intentamos otro camino. Factorizando el denominador encontramos

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo

Hallar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Solución

Susituyendo los valores correspondientes encontramos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, así que vamos a racionalizar. Multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador encontramos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{y} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0.$$

Análogamente a lo que sucede en una variable cuando calculamos los límites por la izquierda y por la derecha y no coinciden, es posible mostrar que un límite de una función de dos variables no existe si, al acercarnos por diferentes trayectorias, encontramos límites diferentes. Esto se hace eligiendo las curvas de esas trayectorias y sustituyendo sus ecuaciones en la función correspondiente.

Ejemplo

Calcular el siguiente límite, o explicar por qué no existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Solución

Si nos acercamos a través de la trayectoria $y = x^2$ encontramos que el límite es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1,$$

mientras que si nos acercamos por la trayectoria $y = x$ encontramos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(2x^4)}{x^4 + 4x^4} = \frac{4}{5}.$$

Como los límites hallados no coinciden, concluimos que el límite en cuestión no existe.

Ejemplo

Calcular el siguiente límite (o explicar por qué no existe)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

Solución

Usando la transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ obtenemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0.$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite, o explicar por qué no existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Solución

Usando la transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ obtenemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos^2\theta = \cos^2\theta.$$

Como el valor de $\cos^3\theta$ es variable, concluimos que no existe el límite.

Ejercicios

Calcular los límites indicados, o explicar por qué no existen

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} x^2+xy$ R: 2.
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ R: no existe
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$ R: 0
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$ R: 1/4
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)}$ R: 0
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ R: no existe
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+e^y}$ R: 0
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$ R: 1/4
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ R: 0
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$ R: no existe
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^4+y^4}$ R: 0
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$ R: no existe
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(xy+1)^2}{(x+1)^2+(y-1)^2}$ R: 0
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \operatorname{sen} x}{x}$ R: 1
15. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x\operatorname{sen} y}{x^2+1}$ R: 0
16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ R: no existe

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$ R: 1/4

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$ R: 0

19. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$ R: -1

20. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ R: 0

5.4. Continuidad

Una función es continua en un punto (x_0, y_0) donde se cumpla que

- $f(x, y)$ está definida en (x_0, y_0)
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ existe
- $\lim\,(x, y) \to (x_0, y_0) f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Si una función es continua en todo su dominio, sólo se dice que es una función continua. Para encontrar las regiones de continuidad de una función, frecuentemente es suficiente con encontrar aquellas donde la función está definida.

Ejemplo

Encontrar las regiones de continuidad de la función

$$f(x, y) = \ln(1 + xy)$$

Solución

La función está definida en

$$1 + xy > 0,$$

o sea

$$xy > -1.$$

Esto significa que

$$y > -\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x > 0,$$

y

$$y < -\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x < 0.$$

Por último, si $x = 0$ o $y = 0$, la función sí está definida, pues allí se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = f(0, 0) = 0.$$

La figura 5.4 muestra la región donde la función es continua.

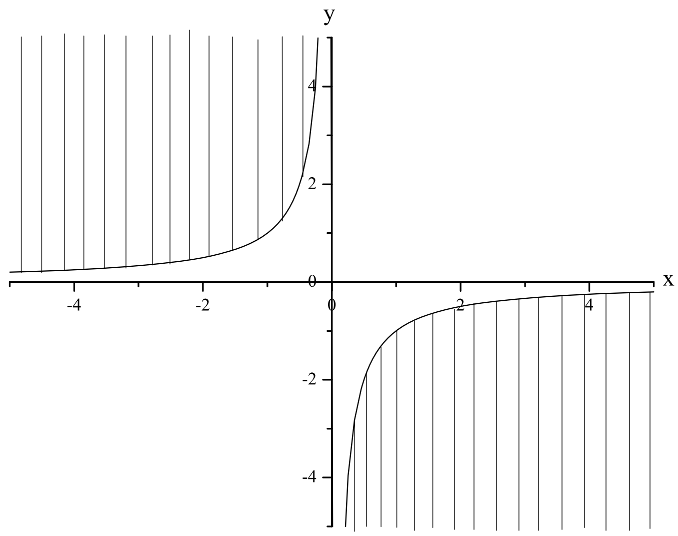


Figura 5.4: Regiones de continuidad de la función $f(x,y) = \ln(1+xy)$

Ejercicios

Hallar las regiones de continuidad de las funciones

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$ R: $\mathbb{R}^2$
2. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ R: $\mathbb{R}^2$
3. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(x,y)|\ y=x\}$
4. $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$ R: $\mathbb{R}^2 - (x,y)|\ x=0$ ó $y=0\}$
5. $f(x,y) = \frac{x+y}{2+\cos x}$ R: $\mathbb{R}^2$
6. $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$ R: $\mathbb{R}^2$
7. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$ R: $\mathbb{R}^2 - \{(x,y)|\ x=1,\ x=2\}$
8. Sea la función dada por $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ ¿Cómo hay que definir $f(0,0)$ para convertir f en una función continua en todo el plano xy? R: $f(0,0) = 1$.
9. Sea la función dada por $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}$, $(x \neq y)$ ¿Cómo hay que definir f sobre la recta $y=x$ contenida en el plano x-y para convertirla en una función continua en todo el plano xy?
R: $f(x,y) = x^2+xy+y^2,\ (y=x)$
10. Dar el dominio de la función $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$. Redefinir el dominio de f para que sea continua $a)$ en (1,1), $b)$ en todo el plano $x-y$. R: $\{x \mid x^2 \neq y^2\}$, $a)$ $f(1,1) = \frac{1}{2}$, $b)$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2-y^2} & \text{si } x \neq y \\ \frac{1}{x+y} & \text{si } x = y \end{cases}$

Capítulo 6

Derivadas parciales

En este capítulo se estudian las derivadas de las funciones de varias variables, mismas que tienen propiedades más generales que las de una sola variable, estudiadas en los cursos de cálculo diferencial, por lo que sus derivadas también tienen propiedades que no poseen las de funciones de una variable.

6.1. Derivación parcial

Una función de varias variables puede derivarse con respecto a cada una de tales variables, considerando a las otras variables como constantes. A estas se les llama *derivadas parciales*. La definición de derivada parcial es un límite similar al que define a las derivadas de funciones de una sola variable, por ejemplo, la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \tag{6.1}$$

mientras que la derivada parcial con respecto a y se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}. \tag{6.2}$$

Las reglas de derivación que se estudiaron en el cálculo diferencial de una variable nos sirven igualmente para las funciones de varias variables, simplemente considerando que las otras variables son constantes. Como se ve en las ecuaciones anteriores, la notación para la derivada de una función $f(x_1, x_2, x_3, ...)$ con respecto a una variable x_i es $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, aunque en algunos libros se utiliza también la notación f_{x_i}. En este libro se preferirá la primera notación para evitar confusión con las componentes de un vector en la segunda notación.

Ejemplo

Sea $f(x, y) = \frac{xe^y}{y^2}$. Encontrar las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución

La función dada se compone de varias funciones. Tenemos un cociente de dos funciones, xe^y y y^2. A su vez xe^y es el producto de x y e^y. Siguiendo las reglas de derivación para cada una de las funciones que intervienen en esta composición, tendremos las derivadas como se expone a continuación.

Derivada con respecto a x:

Puesto que el denominador no involucra a x, simplemente tendremos que derivar el numerador, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial (xe^y)}{\partial x}}{y^2} = \frac{e^y}{y^2}.$$

Derivada con respecto a y:

Aquí sí se tienen tanto al numerador como al denominador como funciones de y, por lo cual la derivada se trata como un cociente, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial (xe^y)}{\partial y}(y^2) - \frac{\partial (y^2)}{\partial y}(xe^y)}{(y^2)^2} = \frac{xy^2e^y - 2xye^y}{y^4} = \frac{xe^y(y^2-2y)}{y^4} = \frac{xe^y(y^2-2)}{y^3}.$$

Las derivadas parciales de una función de varias variables serán también funciones de las mismas variables que la función original. Esto quiere decir que se pueden volver a derivar con respecto a cualquiera de las variables involucradas. Por ejemplo, la derivada parcial con respecto a x de $f(x, y)$ se puede volver a derivar con respecto a x, lo que se indica como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{6.3}$$

o bien, se puede derivar ahora con respecto a y. La notación para indicar esto es

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{6.4}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = \frac{xe^y}{y^2}$. Encontrar todas las segundas derivadas parciales.

Solución

En el ejemplo anterior ya se calcularon las primeras derivadas, habiéndose obtenido

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^y}{y^2}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xe^y(y-2)}{y^3}.$$

Ahora derivaremos con respecto a x la derivada $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^y}{y^2}$, obteniendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

y con respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{y^2e^y - 2ye^y}{y^4} = e^y\left(\frac{y-2}{y^3}\right).$$

Tomando ahora la derivada $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xe^y(y-2)}{y^3}$ y derivando con respecto a x tendremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{e^y(y-2)}{y^3},$$

y con respecto a y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x[e^y(y-2)+e^y]y^3-(3y^2)xe^y(y-2)}{y^6} = xe^y\frac{(y-1)y^3-3(y-2)y^2}{y^6} = xe^y\frac{y^2-4y+6}{y^4}.$$

Ejercicios

En los ejercicios 1 al 10, obtener todas las derivadas parciales de las funciones dadas.

1. $f(x,y) = x-y+2$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-1$
2. $f(x,y) = xy+x^2$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=y+2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x$
3. $f(x,y,z) = x^3y^4z^5$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^4z^5$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3z^5$, $\frac{\partial f}{\partial z}=5x^3y^4z^4$
4. $f(x,y,z) = \frac{yz}{y+z}$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{z^2}{(y+z)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{y^2}{(y+z)^2}$
5. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$
6. $f(x,y,z) = \ln(1+e^{xyz})$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{yze^{xyz}}{1+e^{xyz}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{xze^{xyz}}{1+e^{xyz}}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{xye^{xyz}}{1+e^{xyz}}$
7. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\sqrt{y})$, $\left(\frac{\pi}{3},4\right)$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{y}\cos(x\sqrt{y})$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\cos(x\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$
8. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
9. $f(x,y,z) = x^{(y\ln z)}$, $(e,2,e)$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=y\ln z x^{(y\ln z-1)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\ln x\ln z x^{y\ln z}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{y\ln x}{z}x^{y\ln z}$
10. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$ R: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2}{x\sqrt{x^4+y^4}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{x\sqrt{x^4+y^4}}$

En los ejercicios 11 al 15, encontrar todas las segundas derivadas parciales de la función dada.

11. $f(x,y) = x^2(1+y^2)$ R: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(1+y^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2$
12. $f(x,y) = x^2+y^2$ R: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$
13. $f(x,y) = \sqrt{3x^2+y^2}$ R: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{3y^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-3xy}{(3x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{3x^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}}$
14. $f(x,y) = xe^y-ye^x$ R: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-ye^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^y-e^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=xe^y$
15. $f(x,y,z) = x^3y^3z^3$ R: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy^3z^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x^3yz^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6x^3y^3z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=9x^2y^2z^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=9x^2y^3z^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=9x^3y^2z^2$,

6.2. Funciones homogéneas

Se dice que una función de dos variables es *homogénea* de grado k si se cumple que

$$\boxed{f(tx,ty)=t^kf(x,y)} \tag{6.5}$$

para toda $t>0$.

Las funciones homogéneas cumplen con el teorema de Euler, que establece que

$$\boxed{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf(x,y).} \tag{6.6}$$

El teorema de Euler se generaliza fácilmente a una función de cualquier número de variables. Si se tiene $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ homogénea de grado k, se cumple que

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n\frac{\partial}{\partial x_n} = kf(x,y). \tag{6.7}$$

Ejemplo

Comprobar que $f(x,y) = x^5 e^{y/x} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$ es una función homogénea, y que cumple con el teorema de Euler.

Solución

Calculando $f(tx, ty)$ encontramos que

$$f(tx,ty) = (tx)^5 e^{ty/tx} \operatorname{sen}\left(\frac{ty}{tx}\right) = t^5 x^5 e^{y/x} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) = t^5 f(x,y),$$

lo que muestra que se trata de una función homogénea de grado 5. Derivando encontramos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 e^{y/x} \operatorname{sen}(y/x) - x^3 y e^{y/x} \operatorname{sen}(y/x) - x^3 y e^{y/x} \cos(y/x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 e^{y/x} \operatorname{sen}(y/x) + x^4 e^{y/x} \cos(y/x),$$

de manera que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^5 e^{y/x} \operatorname{sen}(y/x) - x^4 y e^{y/x} \operatorname{sen}(y/x) - x^4 y e^{y/x} \cos(y/x) + x^4 y e^{y/x} \operatorname{sen}(y/x) +$$

$$+x^4 y e^{y/x} \cos(y/x) = 5x^5 e^{y/x} \operatorname{sen}(y/x) = 5f(x,y),$$

lo cual comprueba que se cumple el teorema para el caso $k = 5$.

Ejercicios

Comprobar que cada una de las siguientes funciones es homogénea, y cumple el teorema de Euler.

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$
2. $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x \operatorname{sen}(y/x)}{y \cos(x/y)}$
4. $f(x,y) = \ln\left(\frac{x^3}{y^3}\right)$
5. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2y-3y}}$

6.3. Derivación de funciones compuestas

Si se tiene una función de varias variables, las cuales a su vez son funciones de otras variables, es necesario usar la *regla de la cadena* para derivar. La aplicación de la regla de la cadena ya no es tan simple aquí como cuando se tienen funciones de una sola variable.

Si en $z = f(x, y)$ se tiene que a su vez x y y son funciones de s y t, por ejemplo $x = \phi(s, t)$ y $y = \psi(s, t)$, la regla para encontrar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ es

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s}, \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{6.9}$$

A veces, para hacer estos cálculos se utilizan matrices en la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

También es frecuente usar un *diagrama de arborescencia* como el de la figura 6.1. En tal diagrama se ubican las ramificaciones que contienen a la variable con respecto a la cual hay que derivar, y siguiendo las líneas desde z hasta s para derivar cada función que aparezca con respecto a cada variable que le siga, obtendremos un término de la regla buscada. Sumando todos los términos que aparezcan tendremos las reglas enunciadas anteriormente.

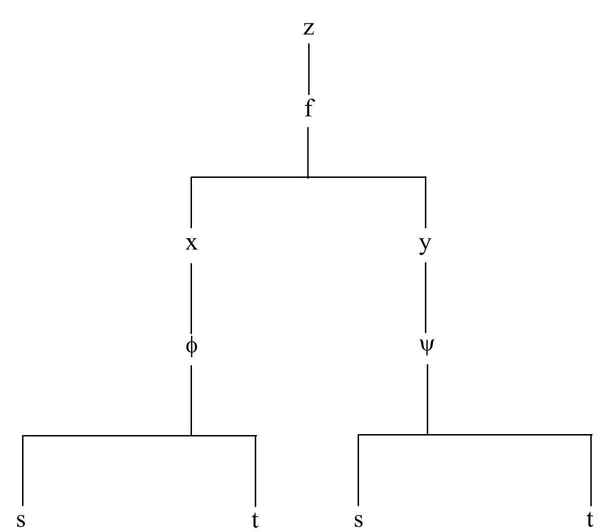


Figura 6.1: Diagrama de arborescencia para calcular derivadas de funciones compuestas

Ejemplo

Sea $z = \ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2 + y$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución

Tenemos que $z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$, por lo cual la regla para hallar las derivadas es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Al realizar los cálculos indicados obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{2u}{u^2+v}\right)\left(e^{x+y^2}\right) + \left(\frac{1}{u^2+v}\right)(2x) = \frac{2e^{2x+2y^2}+2x}{e^{2x+2y^2}+x^2+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{2u}{u^2+v}\right)\left(2ye^{x+y^2}\right) + \left(\frac{1}{u^2+v}\right)(1) = \frac{4ye^{2x^2+2y}+1}{e^{2x+2y^2}+x^2+y}$$

Todo esto se puede generalizar a cualquier número de variables.

Ejemplo

Supóngase que tenemos $z = f(u, v, w)$, $u = \phi(r, s)$, $v = \psi(s, t)$, $w = \xi(r, s, t)$. Enunciar la regla de la cadena para encontrar $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Solución

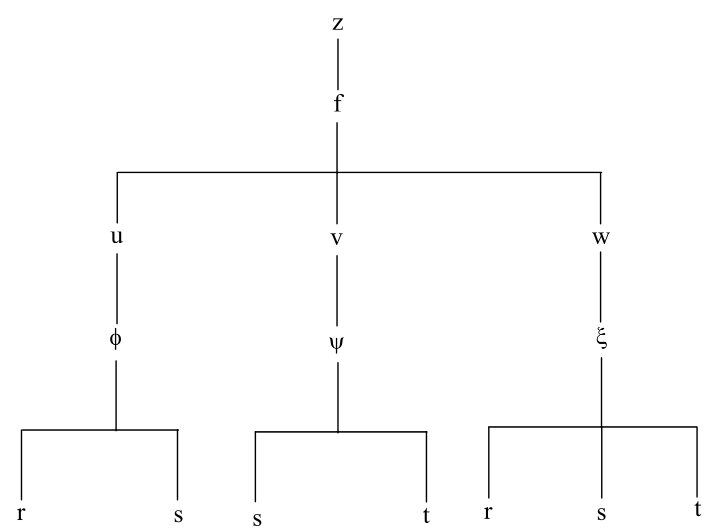


Figura 6.2: Cálculo de derivadas de funciones compuestas

Como se puede ver en la figura 6.2, hay dos ramas que contienen a r. Entonces siguiendo cada rama encontramos la derivada como

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \xi}{\partial r}.$$

Para s hay tres ramas, por lo que siguiendo cada una de ellas obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \xi}{\partial s}.$$

Finalmente, siguiendo las dos rama que contienen a t obtenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Ejercicios

Escribir una fórmula para la regla de la cadena de cada derivada solicitada.

1. $\frac{dz}{dt}$ para $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ R: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dh}{dt}$
2. $\frac{dz}{dt}$ para $z = f(u,v,w)$, $u = g(t)$, $v = h(t)$, $w = k(t)$ R: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dk}{dt}$
3. $\frac{\partial y}{\partial r}$ y $\frac{\partial y}{\partial s}$ para $y = f(u)$, $u = g(r,s)$ R: $\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{df}{du}\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{df}{du}\frac{\partial g}{\partial s}$
4. $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $w = g(u)$, $u = h(s,t)$ R: $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dg}{du}\frac{\partial h}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dg}{du}\frac{\partial h}{\partial t}$
5. $\frac{\partial z}{\partial t}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$ para $z = f(x,y)$, $x = g(t,s)$, $y = h(t,s)$ R: $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial s}$
6. $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$ para $w = h(x,y,z)$, $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = k(u,v)$
   R: $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial k}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial k}{\partial v}$
7. $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ para $w = f(r,s,t)$, $r = g(x,y)$, $s = h(x,y)$, $t = k(x,y)$
   R: $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial k}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial k}{\partial y}$
8. $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$ para $w = g(x,y)$, $x = h(u,v)$, $y = k(u,v)$
   R: $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial v}$
9. $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ para $w = g(u,v)$, $u = h(x,y)$, $v = k(x,y)$
   R: $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial k}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial k}{\partial y}$
10. $\frac{\partial w}{\partial p}$ y $\frac{\partial w}{\partial q}$ para $w = f(x,y,z,v)$, $x = g(p,q)$, $y = h(p,q)$, $z = j(p,q)$, $v = k(p,q)$
    R: $\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial j}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial k}{\partial p}$, $\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial j}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial k}{\partial q}$

Expresar dw/dt como función de t usando la regla de la cadena. Expresar w en términos de t y derivar. Comparar y evaluar la derivada en el valor de t proporcionado.

1. $w = x^2 + y^2$, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t = \pi$ R: 0
2. $w = x^2 + y^2$, $x = \cos t + \operatorname{sen} t$, $y = \cos t - \operatorname{sen} t$, $T = 0$ R: 0
3. $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$, $z = \frac{1}{t}$, $t = 3$ R: 1
4. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 4\sqrt{t}$, $t = 3$ R: $\frac{16}{49}$
5. $w = 2ye^x - \ln z$, $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = \operatorname{arc\,tg} t$, $z = e^t$, $t = 1$ R: $\pi + 1$
6. $w = z - \operatorname{sen} xy$, $x = t$, $y = \ln t$, $z = e^{t-1}$, $t = 1$ R: 3

Expresar las parciales con respecto a cada variable como funciones de tales variables, usando la regla de la cadena y expresando la función directamente en términos de las variables antes de derivar. Evaluar cada derivada en el punto dado.

1. $z = 4e^x \ln y$, $x = \ln(u \cos v)$, $y = u \operatorname{sen} v$, $(u,v) = 2, \pi/4$
   R: $z_u = \sqrt{2}(\ln 2 + 2)$, $z_v = -2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$

2. $z = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right)$, $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $(u,v) = (1.3, \pi/6)$ R: $z_u = 0$, $z_v = -1$
3. $w = xy + yz + xz$, $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$, $(u,v) = (1/2, 1)$ R: $w_u = 3$, $w_v = -3/2$
4. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = ue^v \operatorname{sen} u$, $y = ue^v \cos u$, $z = ue^v$, $(u,v) = (-2, 0)$
   R: $w_u = -2$, $w_v = 2$
5. $u = \frac{p-q}{q-r}$, $p = x + y + z$, $q = x - y + z$, $r = x + y - z$, $(x,y,z) = (\sqrt{3}, 2, 1)$
   R: $u_x = 0$, $u_y = 1$, $u_z = -2$
6. $u = e^{qr} \operatorname{arc\,sen} p$, $p = \operatorname{sen} x$, $q = z^2 \ln y$, $r = 1/z$, $(x,y,z) = (\pi/4, 1/2, -1/2)$
   R: $u_x = \sqrt{2}$, $u_y = -\frac{\pi}{18}$, $u_z = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\ln 2$

6.4. Derivación implícita

En muchas ocasiones no se tiene explícitamente a z como una función de x y y, sino que se tiene una ecuación que involucra a x, y y z, la cual define implícitamente a z como función de las otras variables. Si en tal ecuación no se puede despejar a z, necesitamos derivar en forma implícita si queremos hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. Para estos casos, lo más simple es llevar la ecuación a la forma

$$F(x,y,z) = C, \tag{6.11}$$

con C una constante, y usar las fórmulas

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.} \tag{6.12}$$

Ejemplo

Dada la ecuación

$$e^{2z+xy} = \operatorname{sen}(3x + y - z),$$

calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Solución

La ecuación se puede reescribir como

$$e^{2z+xy} - \operatorname{sen}(3x + y - z) = 0 = F(x,y,z).$$

Calculemos las derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ye^{2z+xy} - 3\cos(3x + y - z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2e^{2z+xy} + \cos(3x + y - z),$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ye^{2z+xy} - 3\cos(3x + y - z)}{2e^{2z+xy} + \cos(3x + y - z)}.$$

También es frecuente que un sistema de ecuaciones defina varias funciones en función de otras varias variables. En tales casos es necesario especificar cuáles son las variables independientes y cuáles las dependientes. Esto se hace agregando subíndices a las derivadas con la variable independiente que se está considerando constante. Por ejemplo, si se tienen las variables x, y, z y w, la notación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y,$$

significa que z y w son funciones de x y y, mientras que la notación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w,$$

indica que z y y son funciones de x y w. La derivada implícita en un sistema se calcula derivando cada ecuación con respecto a la variable necesaria y resolviendo el sistema resultante para la derivada requerida.

Ejemplo

Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & x^2 + xy - y^2 \\ v & = & 2xy + y^2 \end{array}\right.$$

calcular $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v$ y $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y$.

Solución

Derivando ambas ecuaciones con respecto a u, considerando a v como constante, obtenemos el sistema

$$1 = 2x\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v y + x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v - 2y\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v,$$
$$0 = 2x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v + 2y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v.$$

Resolviendo este sistema por el método de determinantes obtenemos

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = \frac{x+y}{2x^2 + 2xy + 3y^2}.$$

Para la otra derivada, ahora derivamos el sistema original considerando a y como constante, lo que nos da

$$1 = 2x\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y + y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y,$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_y = 2y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y.$$

Despejando la derivada en la primera ecuación encontramos

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y = \frac{1}{2x+y}.$$

Ejercicios

Para cada ecuación encontrar en forma implícita las derivadas z_x y z_y y evaluarlas en los puntos indicados.

1. $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, (1,1,1) R: $z_x = \frac{1}{4}$, $z_y = -\frac{3}{4}$
2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$, (2,3,6) R: $z_x = -\frac{1}{144}$, $z_y = -\frac{1}{324}$
3. $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z) + \operatorname{sen}(x+z) = 0$, (π, π, π) R:$z_x = -1$, $z_y = -1$
4. $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0$, (1,ln 2,ln 3) R: $z_x = -\frac{4}{3\ln 2}$, $z_y = -\frac{2}{3}$
5. $xy + xz^3 - 2yz = 0$, (1,1,1) R: $z_x = -2$, $z_y = 1$
6. $e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} z + xyz = 0$, $(1, -\pi, \pi)$ R: $z_x = -\frac{e+\pi^2}{e^{-\pi}+\pi}$, $zy = \frac{\pi}{\pi+e^{-\pi}}$
7. $\frac{xy+z}{x^2+y^2+z^2} = 1$, $(1, 1, -1)$ R: $z_x = 0$, $z_y = 1$
8. $xz + y\ln x - x^2 + 4 = 0$ (1,-1,-3) R: $z_x = 6$, $z_y = 0$
9. Expresar v_x en términos de u y v, si las ecuaciones $x = v\ln u$ y $y = u\ln v$ definen a u y v como funciones de las variables independientes x y y, y si v_x existe. [Indicación: Derivar ambas ecuaciones con respecto a x y despejar v_x eliminando u_x.] R: $v_x = \frac{\ln v}{\ln u \ln v - 1}$
10. Determinar $\partial x/\partial u$ y $\partial y/\partial u$ si las ecuaciones $u = x^2 - y^2$ y $v = x^2 - y$ definen a x y y como funciones de las variables independientes u y v, y las derivadas parciales existen. Hacer $s = x^2 + y^2$ y determinar $\partial s/\partial u$. R: $x_u = \frac{1}{2y(1+2x)}$, $y_u = \frac{x}{y(1+2x)}$

6.5. El operador nabla

En muchas ocasiones intervienen en el cálculo combinaciones de derivadas parciales que se pueden usar en forma abreviada usando el operador *nabla*, definido como

$$\boxed{\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.} \tag{6.13}$$

Para fines operativos, este operador se trata como un vector, lo que implica que se pueden hacer con él operaciones de suma, producto por un escalar, producto punto y producto cruz, entre otras. La gran utilidad de este operador se verá adelante.

6.6. Gradiente

El *gradiente* de una función de varias variables es un vector que indica la dirección en que la derivada tiene el máximo valor posible para un punto dado. Sus componentes son

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}. \tag{6.14}$$

El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel de una función de dos variables, así como a las superficies de nivel en el caso de tres variables. Se puede calcular aplicando el operador nabla a la función

$$\boxed{\text{grad } f = \nabla f.} \tag{6.15}$$

Ejemplo

Obtener el gradiente de la función $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ y evaluarlo en el punto (1,1). Encontrar la curva de nivel que pasa por ese punto y graficar la curva y el vector.

Solución

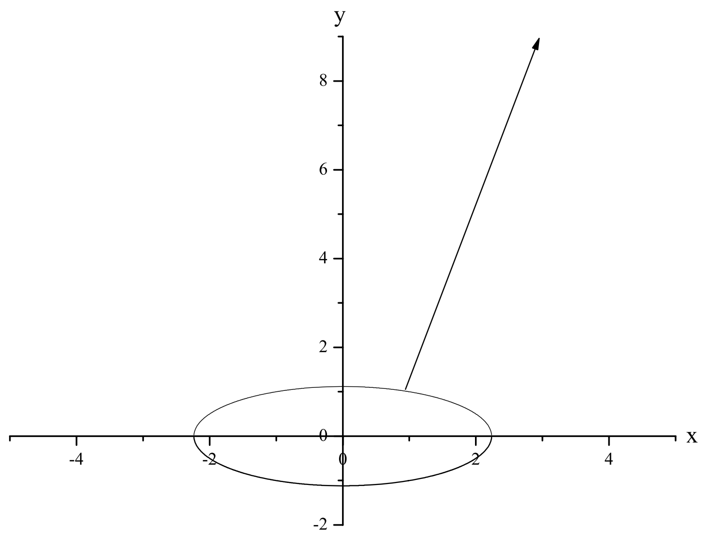


Figura 6.3: Gradiente de una función

Derivando la función obtenemos que

$$\nabla f = 2x\hat{\imath} + 8y\hat{\jmath},$$

que evaluando en el punto indicado nos da

$$\nabla f|_{(1,1)} = 2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}.$$

La curva de nivel que pasa por ese punto es $x^2 + 4y^2 = 5$, una elipse. La figura 6.3 muestra que el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel.

Ejercicios

Determinar el gradiente de cada función en el punto especificado. Encontrar la curva de nivel que pasa por el punto (en caso de que exista) y graficar.

1. $f(x,y) = y - x$, (2,1) R: $-\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, (1,1) R: $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
3. $f(x,y) = y - x^2$, (-1,0) R: $2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
4. $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$, $(\sqrt{2}, 1)$ R: $\sqrt{2}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$

5. $f(x,y) = 5xy^2 - 4x^3y$, (1,2) R: $-4\hat{\imath} + 16\hat{\jmath}$
6. $f(x,y) = y \ln x$, (e,e) R: $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
7. $f(x,y) = y - x$, (2,1) R: $-\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
8. $f(x,y) = y - x^2$, (-1,0) R: $2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
9. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z \ln x$, (1,1,1) R: $3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$
10. $f(x,y,z) = xy^2z^3$, (3,-2,1) R: $4\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 36\hat{k}$
11. $f(x,y,z) = xy + yz^2 + xz^3$, (1,0,-1) R: $-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$
12. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z \ln x$, (1,1,1) R: $3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$
13. $f(x,y,z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + \operatorname{arc\,tg} xz$, (1,1,1) R: $-\frac{11}{2}\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\hat{k}$
14. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \ln(xyz)$, (-1,2,-2) R: $-\frac{26}{27}\hat{\imath} + \frac{23}{54}\hat{\jmath} - \frac{23}{54}\hat{k}$
15. $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z + (y+1)\operatorname{arc\,sen} x$, (0,0,$\pi$/6) R: $\frac{2+\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath} - \frac{1}{2}\hat{k}$

6.7. Derivada direccional

Anteriormente se dijo que la derivada parcial con respecto a una variable nos da la pendiente de la recta tangente a la superficie en la dirección del eje correspondiente. Si queremos calcular la derivada en otra dirección, por ejemplo la del vector $\vec{v}$, primero tenemos que calcular el gradiente, y después calcular el producto punto por el vector unitario en la dirección dada. Esto es

$$\boxed{D_{\vec{v}}f = \nabla f \cdot \hat{v}.} \tag{6.16}$$

Lo anterior es válido para funciones tanto de dos como de tres variables.

Ejemplo

Encontrar la derivada de $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ en la dirección del vector $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$, y evaluarla en el punto (2,0).

Solución

Primero calculamos el gradiente de f, lo que nos da

$$\nabla f = (e^y - y\operatorname{sen}(xy))\hat{\imath} + (xe^y - x\operatorname{sen}(xy))\hat{\jmath}.$$

Ahora obtenemos el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$

$$\hat{v} = \frac{3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}.$$

Haciendo el producto punto obtenemos

$$D_{\vec{v}}f = 3(e^y - y\operatorname{sen}(xy)) - 4(xe^y - x\operatorname{sen}(xy)),$$

que al evaluar en el punto indicado nos da

$$D_{\vec{v}}f|_{(3,-4)} = -1.$$

Ejercicios

Encontrar el valor de la derivada de cada función en el punto P_0 y en la dirección del vector $\vec{v}$ dado.

1. $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $P_0 = (3,4)$, $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ — R: $\frac{7}{2}$
2. $f(x,y) = x/y$, $P_0 = (6,-2)$, $\vec{v} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ — R: $-\frac{4}{\sqrt{10}}$
3. $f(x,y) = 2xy - 3y^2$, $P_0 = (5,5)$, $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ — R: -4
4. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, $P_0 = (-1,1)$, $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ — R: $-\frac{20}{3}$
5. $f(x,y) = x^2 e^y$, $P_0 = (2,0)$, $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ — R: $\frac{8}{\sqrt{2}}$
6. $f(x,y) = e^{-x}\operatorname{sen} y$, $P_0 = (0,\pi/3)$, $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ — R: $\frac{3-2\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}$
7. $f(x,y) = x - \frac{y^2}{x} + \sqrt{3}\operatorname{arcsec}(2xy)$, $P_0 = (1,1)$, $\vec{v} = 12\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ — R: $\frac{120+2\sqrt{15}}{65}$
8. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \sqrt{3}\operatorname{arc\,sen}\frac{xy}{2}$, $P_0 = (1,1)$, $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ — R: $\frac{1}{4\sqrt{13}}$
9. $f(x,y,z) = z^3 - x^2 y$, $P_0 = (1,6,2)$, $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k}$ — R: $\frac{104}{13}$
10. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $P_0 = (1,-1,2)$, $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ — R: 3
11. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$, $P_0 = (1,1,1)$, $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ — R: 0
12. $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z}$, $P_0 = (4,1,1)$, $\vec{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ — R: $-\frac{9}{2\sqrt{14}}$
13. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P_0 = (1,2,-2)$, $\vec{v} = -6\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ — R: $\frac{4}{9}$
14. $f(x,y,z) = 3e^x \cos(yz)$, $P_0 = (0,0,0)$, $\vec{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$ — R: 2
15. $f(x,y,z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$, $P_0 = (1,0,1/2)$, $\vec{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ — R: 2
16. $f(x,y,z) = x\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z}$, $P_0 = (1,2,-2)$, $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ — R: $\frac{\pi-5}{56}$

6.8. Planos tangentes y rectas normales

En una función de dos variables, más que la recta tangente, nos interesa el plano tangente. Para el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, la ecuación del plano tangente es

$$\boxed{z - z_0 = \nabla f|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0, y - y_0).} \tag{6.17}$$

La recta normal a la superficie en el punto P_0 tiene como vector director al vector normal al plano tangente, por lo que su ecuación es

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}_0 + t\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \hat{\imath} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \hat{\jmath} - \hat{k} \right).} \tag{6.18}$$

En caso de que la función esté dada en forma implícita, en la forma $F(x,y,z) = 0$, tendremos la ecuación del plano en la forma

$$\boxed{\nabla F|_{P_0} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.} \tag{6.19}$$

mientras que la ecuación de la recta será

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}_0 + t\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{P_0}\hat{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{P_0}\hat{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{P_0}\hat{k}\right).} \tag{6.20}$$

Ejemplo

Dar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en el punto (1,1).

Solución

El valor de z_0 se calcula sustituyendo en la función, lo que nos da $z_0 = 3$, mientras que el gradiente de la función es

$$\nabla f = 2x\hat{i} + 4y\hat{j},$$

que al evaluar en el punto indicado nos da

$$\nabla f|_{(1,1)} = 2\hat{i} + 2j.$$

Ahora hacemos el producto punto indicado

$$(2\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (x-1, y-1) = 2(x-1) + 4(y-1) = 2x + 4y - 6,$$

por lo cual, la ecuación del plano es

$$z - 3 = 2x + 4y - 6,$$

o bien

$$2x + 4y - z - 3 = 0.$$

La figura 6.4 muestra el plano tangente a la superficie.

Para obtener la ecuación de la recta normal, observamos que el vector normal al plano tangente es $\vec{n} = (2, 4, -1)$, por lo cual la ecuación de la recta será

$$(x, y, z) = (1, 1, 3) + t(2, 4, -1),$$

lo que nos dará las ecuaciones paramétricas

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 3 - t,$$

y las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

Ejercicios

En los ejercicios siguientes, determinar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie representativa de la función dada en los puntos indicados.

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$, (2,1) R: $4x - 2y - z - 3 = 0$, $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$
2. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, (1,1) R: $x + y + z - 2 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$

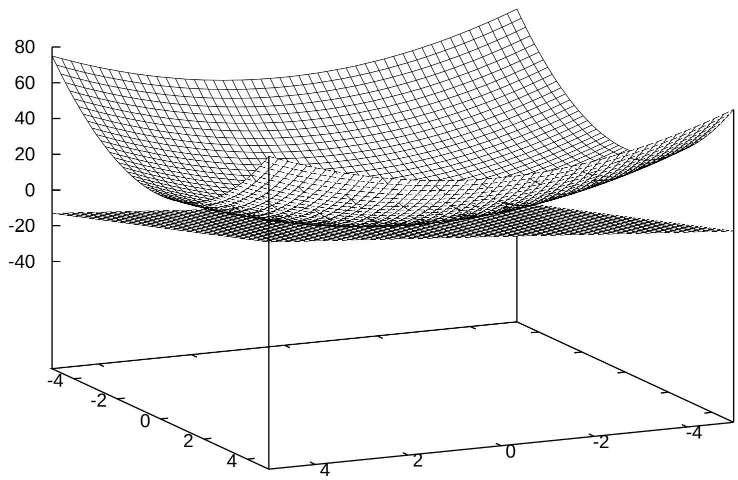


Figura 6.4: Plano tangente a una superficie

3. $f(x,y)=\cos\left(\frac{x}{y}\right)$, $(\pi,4)$ R: $z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x-\pi}{4}+\frac{\pi}{16}(y-4)\right)$, $\frac{x-\pi}{-1/4\sqrt{2}}=\frac{y-4}{\pi/16\sqrt{2}}=\frac{z-1/\sqrt{2}}{-1}$
4. $f(x,y)=e^{xy}$, (2,0) R: $2y-z+1=0$, $\vec{P}=(2,0,1)+t(0,2,-1)$
5. $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, (1,2) R: $z=\frac{2}{5}+\frac{3x}{25}-\frac{4y}{25}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1/5}{-25}$
6. $f(x,y)=ye^{-x^2}$, (0,1) R: $y-z=0$, $\vec{P}=(0,1,1)+t(0,1,-1)$
7. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, (1,-2) R: $z=\frac{2}{5}+\frac{3x}{25}-\frac{4y}{25}$, $\vec{P}=(1,-2,\ln 5)+t(2,-4,-5)$
8. $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, (0,2) R: $x-z=0$, $\vec{P}=(0,2,0)+t(1,0,-1)$
9. $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$, (-1,1) R: $z=-\frac{\pi}{4}-\frac{x+y}{2}$, $\vec{P}=(-1,1,-\pi/4)+t(1,1,2)$
10. $f(x,y)=\sqrt{1+x^3y^2}$, (2,1) R: $2x+y-z-\frac{11}{3}=0$, $\vec{P}=(2,1,3)+t(2,8/3,-1)$
11. $z-\ln(x^2+y^2)=0$, $P_0=(1,0,0)$ R: $2x-z=2$, $\vec{P}=\vec{P}_0+t(2,0,-1)$
12. $x^2+y^2+z^2=3$, $P_0=(1,1,1)$ R: $x+y+z=3$, $\vec{P}=\vec{P}_0+t(2,2,2)$
13. $2z-x^2=0$, $P_0=(2,0,2)$ R: $2x-z-2=0$, $\vec{P}=\vec{P}_0+t(-4,0,2)$
14. $\cos\pi x-x^2y+e^{xz}+yz=4$, $P_0=(0,1,2)$ R: $2x+2y+z-4=0$, $\vec{P}=\vec{P}_0+t(2,2,1)$
15. $x+y+z=1$, $P_0=(0,1,0)$ R: $x+y+z-1=0$, $\vec{P}=\vec{P}_0+t(1,1,1)$

6.9. Diferenciales

La diferencial de una función de dos variables se calcula como

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy, \tag{6.21}$$

que para tres variables se convierte en

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}\ dy + \frac{\partial f}{\partial z}\ dz. \tag{6.22}$$

Si definimos el vector $d\vec{r}$ como

$$d\vec{r} = \hat{\imath}\ dx + \hat{\jmath}\ dy + \hat{k}\ dz, \tag{6.23}$$

la diferencial se puede escribir como

$$\boxed{df = \nabla f \cdot d\vec{r}.} \tag{6.24}$$

Esto se puede generalizar a cualquier número de variables.

6.10. Puntos críticos y extremos

Para calcular máximos y mínimos de las funciones de dos variables, necesitamos primero localizar puntos críticos; esto se logra igualando a cero las derivadas parciales y resolviendo el sistema resultante. Una vez que se tienen puntos críticos, calculamos el *hessiano*, que se define por medio del determinante

$$H = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \end{vmatrix} \tag{6.25}$$

y se usan los criterios dados en la tabla siguiente para clasificarlos como *máximos*, *mínimos* y *puntos silla*. Un punto silla es un punto crítico que en unas direcciones es máximo mientras que en otras es un mínimo.

Criterio para máximos, mínimos y puntos silla

Sea $A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$

Signo de H	Signo de A	Tipo de punto crítico
$+$	$+$	mínimo
$+$	$-$	máximo
$-$	cualquiera	punto silla

Obsérvese que si $H = 0$ o $A = 0$ (aunque $H \neq 0$), no funcionan los criterios y hay que usar otros métodos para decidir la naturaleza de los puntos críticos.

Ejemplo

Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = e^{x/2}(x^2+y^2)$, y clasificarlos usando el criterio del hessiano.

Solución

Al derivar por primera vez encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{x/2}(x^2+y^2) + 2xe^{x/2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x/2}.$$

Igualando a cero estas derivadas y resolviendo, encontramos los puntos críticos (0,0) y (-4,0). Las segundas derivadas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{4}e^{x/2}(x^2+y^2) + 2xe^{x/2} + 2e^{x/2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ye^{x/2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ye^{x/2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{x/2}.$$

Al evaluar las derivadas en el punto crítico (0,0) encontramos que

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

y puesto que $A > 0$, el criterio del hessiano nos dice que hay un mínimo local.

Evaluando en (-4,0) encontramos que

$$H = \begin{vmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{vmatrix} = -4e^{-4} < 0,$$

lo que permite establecer que el punto crítico es un punto silla. La figura 6.5 muestra la gráfica de la función.

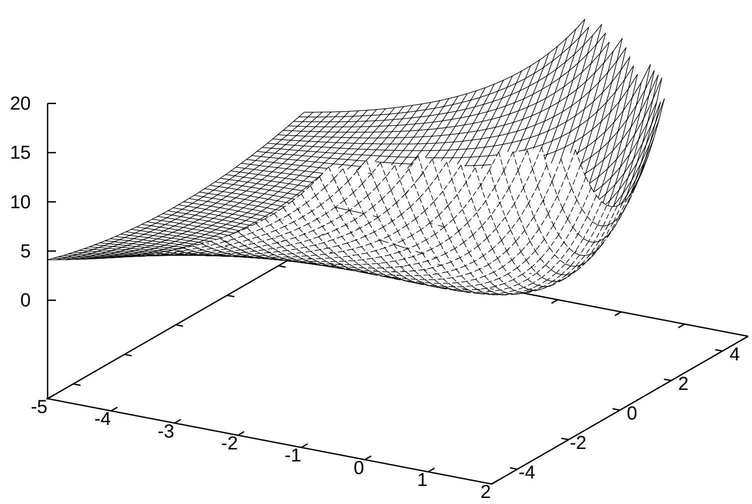


Figura 6.5: Función con un mínimo local y un punto silla

Ejemplo

Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$, y clasificarlos

Solución

Al derivar por primera vez encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x.$$

Igualando a cero estas derivadas y resolviendo, encontramos los puntos críticos (-1,-1), (1,1) y (0,0). Las segundas derivadas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2.$$

Al evaluar el hessiano en el punto crítico (-1,-1) encontramos que

$$H = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$$

y como $A > 0$, el criterio del hessiano nos dice que hay un mínimo local.

Ahora evaluamos el hessiano en el punto crítico (1,1), encontrando que

$$H = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$$

y nuevamente $A > 0$, así que el criterio del hessiano nos dice que hay otro mínimo local.

Al evaluar el hessiano en el punto crítico (0,0) encontramos que

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

pero como $A = 0$, el criterio del hessiano no nos sirve. Para decidir sobre la naturaleza del punto crítico (0,0), analicemos el comportamiento en las vecindades de ese punto. Notando que $f(0,0) = 0$, veamos que pasa en los alrededores.

$$f(0.1, 0) = 0.0001 > f(0,0),$$

$$f(0, 0.1) = 0.0001 > f(0,0),$$

$$f(-0.1, 0) = 0.0001 > f(0,0),$$

$$f(0, -0.1) = 0.0001 > f(0,0).$$

De la evaluación anterior, podría parecer que hay un mínimo local en (0,0). Sin embargo, razonando cuidadosamente, debemos notar que siendo la función continua, no puede haber tres mínimos locales tan cerca sin la presencia de algún máximo o punto silla. Y efectivamente, si calculamos ahora en otro punto cercano

$$f(0.1, 0.1) = 0.0002 - 0.04 = -0.3998 < f(0,0),$$

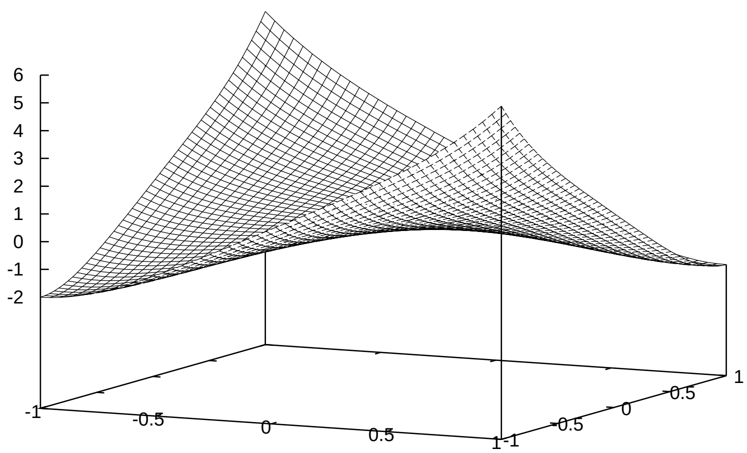


Figura 6.6: Función con dos mínimos locales y un punto silla

vemos un comportamiento diferente, que se repite en el punto $(-0.1, -0.1)$. Esto indica que el punto (0,0) es en realidad un punto silla. Esta conclusión (y las anteriores, referentes a los dos mínimos locales), se pudo adelantar al visualizar la gráfica de la función, que se observa en la figura 6.6.

Lo anterior nos permite ver la graficación de funciones como un método burdo, pero útil, para decidir la naturaleza de los puntos críticos de una función.

Ejercicios

Hallar los puntos críticos de cada función y clasificarlos por medio del criterio del hessiano, donde sea posible.

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$ — R: (-3,3), mínimo
2. $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$ — R: $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, máximo
3. $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$ — R: (-2,1), punto silla
4. $f(x,y) = 5xy - 7x^2 + 3x + 2y + 5$ — R: $\left(\frac{6}{5}, \frac{69}{25}\right)$, punto silla
5. $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$ — R: (2,1), punto silla
6. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$ — R: (1,2), punto silla
7. $f(x,y) = x^2 + 2xy$ — R: (0,0), punto silla
8. $f(x,y) = x^3 - 2xy - y^3 + 6$ — R: (0,0), punto silla; $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
9. $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 3xy - 5x + 2y$ — R: (2,-1), mínimo
10. $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$ — R: (0,0), mínimo; (1,-1), punto silla

11. $f(x,y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$ R: (0,0), punto silla; $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right)$, máximo
12. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$
R: (0,0) y (-2,2), puntos silla; (0,2), mínimo; (-2,0), máximo
13. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$ R: (0,0), punto silla; (-1,-1) y (1,1), máximos
14. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$ R: (0,0), máximo
15. $f(x,y) = y \operatorname{sen} x$ R: $(n\pi, 0)$, puntos silla
16. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$ R: $(2, -1)$, mínimo
17. $f(x,y) = xy - x + y$ R: $(-1, 1)$, punto silla
18. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ R: (0,0) punto singular; (1,1), mínimo
19. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$ R: $(-4, 2)$, máximo
20. $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$ R: $(0, n\pi)$ (con n entero), puntos singulares
21. $f(x,y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$
R:$(0,a)$, (a cualquier real), puntos singulares; $\left(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, máximo; $\left(\pm 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, mínimo
22. $f(x,y) = xe^{-x^3+y^3}$ R: $(3^{-1/3}, 0)$, punto singular
23. $f(x,y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$
R: (-1,-1), (1,-1), (-1,1), puntos singulares; (-3,-3), máximo
24. $f(x,y,z) = xy + x^2 z - x^2 - y - z^2$ R: $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$, punto singular
25. Mostrar que la función definida por $f(x,y,z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ tiene un mínimo relativo en el punto (1,1,1).
26. Identificar y clasificar los puntos estacionarios de la función $z = g(x,y)$ que cumple la ecuación $e^{2zx-x^2} - 3e^{2zy+y^2} = 2$. R: $(\sqrt{\ln 3}, -\sqrt{\ln 3})$, mínimo; $(-\sqrt{\ln 3}, \sqrt{\ln 3})$, máximo
27. Hallar los valores extremos de $f(x,y) = xye^{-x^2-y^4}$.
R: (0,0), punto silla; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, máximos; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, mínimos

6.11. Extremos de una función definida sobre un dominio restringido

Si el dominio de una función de dos variables no es $\mathbb{R}^2$, sino una región acotada, el análisis para encontrar máximos y mínimos es diferente. En este caso no es necesario calcular el hessiano, sino sólo localizar los puntos críticos en la región dada, y después examinar la frontera del dominio para encontrar puntos críticos de las funciones de una variable involucradas. Una vez que se tienen todos los puntos críticos, simplemente se evalúa la función original en cada uno de ellos y se comparan los valores obtenidos.

Ejemplo

Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 6$.

Solución

Primero encontraremos los puntos críticos, calculando las primeras derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(4-x-y) + xy^2(-1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2(4-x-y) - x^2y.$$

Igualando a cero y resolviendo, encontramos puntos críticos en (0,0) y (2,1).

Ahora analizaremos las rectas que forman la frontera del dominio examinado. En la recta $x = 0$ tenemos que $f(0, y) = 0$, o sea que no hay valores máximos o mínimos locales. Esto mismo pasa en la recta $y = 0$. Por úlimo, en la recta $x + y = 6$, la función se vuelve $f(x, x) = x^2(6-x)(4-x-(6-x) = -12x^2 + 2x^3$. Derivando esta úlima función encontramos $f'(x) = -24x + 2x^3$, que al igualar a cero y resolver nos da el punto crítico (4,2).

Los valores de la función en estos puntos son

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(2,1) &= (2)^2(1)(4-2-1) = 4, \\ f(4,2) &= (4)^2(2)(4-4-2) = -64. \end{aligned}$$

De los valores anteriores concluimos que el punto (2,1) es el máximo absoluto, mientras que el punto (4,2) es el mínimo absoluto.

Ejercicios

Encontrar los extremos absolutos de las funciones dadas en los dominios indicados.

1. $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en la región triangular encerrada por las rectas $x = 0$, $y = 2$ y $y = 2x$ en el primer cuadrante R: M (0,0), m (1,2)
2. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la región encerrada por las rectas $x = 0$, $y = 4$ y $y = x$ R: M (0,4) y (4,4), m (0,0)
3. $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la región encerrada por $x = 0$, $y = 0$ y $y + 2x = 2$ en el primer cuadrante R: M (0,2), m (0,0)
4. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ en la región $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 3$ R: M (5,3), m (9/2,-3) y (5,-5/2)
5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ en la región $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 1$ R: M (0,-3), m (4,-2)
6. $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ en la región $1 \le x \le 3$, $-\pi/4 \le y \le \pi/4$ R: M (1,π/4), m (3,-π/4)
7. $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ en la región del primer cuadrante encerrada por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$ R: M (2,0), m (1,$\pm\pi$/4) y (3,$\pm\pi$/4)
8. $f(x, y) = x - x^2 + y^2$ sobre el rectángulo $[1, 2] \times [0, 1]$. R: M (1,1), m (2,0)
9. $f(x, y) = x + 2y$ sobre el disco $x^2 + y^2 \le 1$. R: M $(\sqrt{1/5}, \sqrt{4/5})$, m $(-\sqrt{1/5}, -\sqrt{4/5})$
10. $f(x, y) = xy - x^3y^2$ sobre el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. R: M $(1/\sqrt{3}, 1)$, m (0,0) y (1,1)
11. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ sobre el triángulo de vértices en (0,0), (1,0) y (0,1). R: M (1/3,1/3), m(1,1)
12. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ sobre la región triangular encerrada por los ejes coordenados y la recta $x + y = 2\pi$. R: M $(3\pi/2, \pi)$, $(\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 2\pi)$, m $(\pi/2, \pi)$, $(3\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$

6.12. Multiplicadores de Lagrange

Muchos problemas de determinación de valores máximos y mínimos se presentan en situaciones donde las variables no son independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante restricciones adicionales. En tales casos los máximos y mínimos se determinan haciendo

$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g,} \tag{6.26}$$

donde f es la función a maximizar y g es la ecuación que relaciona las variables para la restricción dada. Entonces procedemos a resolver el sistema determinado por las ecuaciones 6.26 y la restricción, para hallar puntos críticos. Tales puntos se evalúan y comparan para establecer su carácter de máximos o mínimos.

Ejemplo

Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2y$, sujetos a la restricción $x^2+2y^2 = 6$.

Solución

Los gradientes de las funciones son

$$\nabla f = 2xy\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}, \quad \nabla g = 2x\hat{\imath} + 4y\hat{\jmath},$$

que al multiplicar por λ e igualar nos da el par de ecuaciones

$$2xy = \lambda(2x), \quad x^2 = \lambda(4y).$$

Para resolver este sistema despejamos λ en las dos ecuaciones e igualamos, obteniendo

$$x^2 = 4y^2,$$

cantidad que sustituimos en la restricción

$$4y^2 + 2y^2 = 6y^2 = 6,$$

con lo que obtenemos los valores solución $x = \pm 2$, $y = \pm 2$, lo que nos señala cuatro puntos en los cuales evaluar la función. Al hacerlo obtenemos

$$\begin{aligned} f(-2,-1) &= (-2)^2(-1) = -4, \\ f(-2,1) &= (-2)^2(1) = 4, \\ f(2,-1) &= (2)^2(-1) = -4, \\ f(2,1) &= (2)^2(1) = 4. \end{aligned}$$

Lo anterior nos muestra que tenemos máximos en los puntos (-2,1) y (2,1); y mínimos en (-2,-1) y (2,-1).

El método anterior se puede generalizar a un número de restricciones mayor simplemente haciendo

$$\boxed{\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \lambda_3 \nabla g_3 + ...} \tag{6.27}$$

y procediendo en forma análoga.

Ejemplo

Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x,y,z) = 3x - y - 3z$, sujetos a las restricciones $x + y - z = 0$ y $x^2 + 2z^2 = 1$.

Solución

Los gradientes de las funciones son

$$\nabla f = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}, \quad \nabla g_1 = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}, \quad \nabla g_2 = 2x\hat{\imath} + 4z\hat{\jmath}.$$

Para resolver, introducimos λ_1 y λ_2, e igualamos en la forma

$$\nabla f = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2,$$

que al igualar componente a componente nos da las igualdades

$$3 = \lambda_1 + 2x\lambda_2, \quad -1 = \lambda_1 + 0\lambda_2, \quad -3 = -\lambda_1 + 4z\lambda_2,$$

de donde obtenemos, al eliminar λ_1 y λ_2,

$$z = -\frac{x}{2}.$$

Sustituyendo esto en la segunda restricción obtenemos

$$x^2 + 2\left(\frac{-x}{2}\right) = 1,$$

que al sustituir en la primera restrición nos da los siguientes puntos críticos

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Ahora evaluamos la función para localizar los máximos y mínimos

$$f(P_1) = 3\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + 3\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{6}},$$

$$f(P_2) = -3\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - 3\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{8}{\sqrt{6}}.$$

Así pues, el punto P_1 es un máximo, y P_2 es un mínimo.

Ejercicios

1. Encontrar los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$, donde $f(x,y) = xy$ alcanza sus valores extremos. R: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$
2. Hallar el valor máximo de $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$ sobre la recta $x + 3y = 10$. R: 39
3. Hallar los puntos sobre la curva $xy^2 = 54$ más cercanos al origen. R: $(3, \pm 3\sqrt{2})$
4. Calcular las dimensiones de la lata cilíndrica circular recta y cerrada con menor superficie cuyo volumen sea de 16 π cm^3. R: $r = 2$ cm, $h = 4$ cm
5. Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ con lados paralelos a los ejes coordenados. R: $l = 4\sqrt{2}$, $h = 3\sqrt{2}$

6. Encontrar los valores máximos y mínimos de $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeta a la restricción $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$. R: m $f(0,0) = 0$, M $f(2,4) = 20$

7. La temperatura en un punto (x,y) de una placa de metal es $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga camina sobre la placa alrededor de una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima

   encontradas por la hormiga?

   R: mín 0º, Máx 125º

8. Calcular la distancia entre el origen y el plano de ecuación $x + 2y + 2z = 3$ R: 1

9. Encontrar la distancia entre el punto (2,1,-2) y los puntos más cercanos y los más lejanos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. R: máximo: 4, mínimo: 2

10. Determinar los valores de a, b y c tales que el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   pase por el punto (1,2,1) y que su volumen, $V = 4\pi\frac{abc}{3}$ sea mínimo.

   R: $a = \pm\sqrt{3}$, $b = \pm 2\sqrt{3}$, $c = \pm\sqrt{3}$

11. Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x,y,z) = x$ sobre la curva de intersección entre el plano $z = x + y$ y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$. R: máximo: 2, mínimo: -2

12. Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x,y,z) = 4 - z$ sobre la elipse que resulta de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ y el plano $x + y + z = 1$. R: máximo: 7, mínimo: -1

6.13. Teorema de Taylor

Así como en cálculo de una variable se pueden aproximar funciones alrededor de un punto a través de polinomios, en dos variables se puede generalizar esto aproximando usando polinomios de dos variables por medio de la fórmula

Polinomio de Taylor de grado n alrededor del punto (x_0, y_0)

$$\boxed{P(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{(i-j)!j!}\left.\frac{\partial^i f(x,y)}{\partial x^{i-j}\partial y^j}\right|_{(x_0,y_0)} (x-x_0)^{i-j}(y-y_0)^j.} \tag{6.28}$$

Ejemplo

Encontrar una aproximación de tercer orden de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ alrededor del punto (1,2).

Solución

Calculemos las derivadas hasta de tercer orden y evaluemos la función y sus derivadas

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}, \quad f(1,2) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^3}{(x^2+y^3)^{3/2}}, \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,2)} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-3xy^2}{2(x^2+y^3)^{3/2}}, \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(1,2)} = -\frac{2}{9}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{12x^2y+3y^4}{4(x^2+y^3)^{3/2}}, \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,2)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\frac{3xy^3}{(x^2+y^3)^{5/2}}, \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(1,2)} = -\frac{8}{81}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{6x^2y^2-3y^5}{2(x^2+y^3)^{5/2}}, \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right|_{(1,2)} = -\frac{12}{81}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{15xy^4-12x^3y}{4(x^2+y^3)^{5/2}}, \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right|_{(1,2)} = \frac{58}{81}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{-3y^6-60x^2y^3+24x^4}{8(x^2+y^3)^{5/2}}, \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{(1,2)} = -\frac{27}{81}$$

De lo anterior encontramos la aproximación

$$f(x,y) \approx 3 + \frac{1}{3}(x-1) + 2(y-2) + \frac{4}{27}(x-1)^2 - \frac{2}{9}(x-1)(y-2) + \frac{1}{3}(y-2)^2 -$$

$$-\frac{8}{81}(x-1)^3 - \frac{12}{81}(x-1)^2(y-2) + \frac{58}{81}(x-1)(y-2)^2 - \frac{27}{81}(y-2)^3.$$

La figura 6.7 muestra la función y su aproximación de orden 1. Nótese que ya a este orden la aproximación es de gran precisión para puntos cercanos al (1,2).

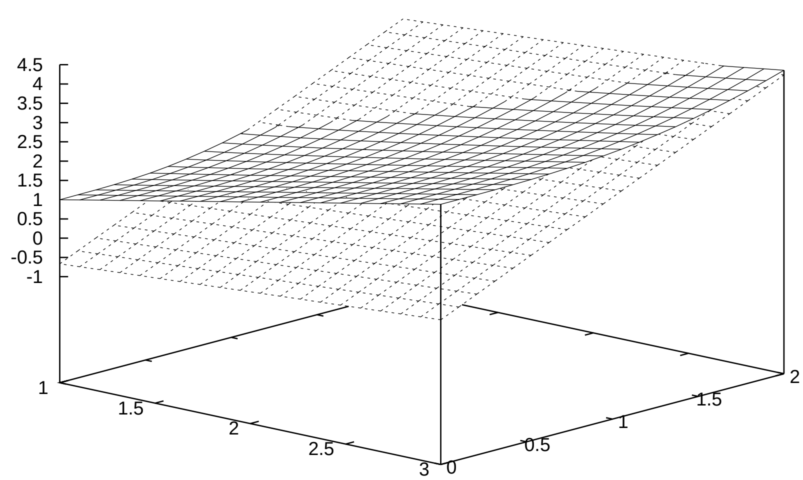


Figura 6.7: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$ y $P(x,y) = \frac{x}{3} + 2y - \frac{4}{3}$

Ejercicios

Aproximar cada función con un polinomio de grado 3 alrededor del origen.

1. $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ R: 1
2. $f(x,y) = y \operatorname{sen} x$ R: xy
3. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$ R: x^2+y^2
4. $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$ R: $x - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2}$
5. $f(x,y) = xe^y$ R: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$
6. $f(x,y) = e^x \cos y$ R: $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2}$
7. $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y}$ R: $1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3$
8. $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ R: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$
9. $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$ R: $1 + x + y + x^2 + y^2 + x^3 + +x^2y + xy^2 + y^3$
10. $f(x,y) = \ln(2x+y+1)$ R: $2x + y - 2x^2 - 2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + 4x^2y + 2xy^2 + \frac{y^3}{3}$

Capítulo 7

Integrales múltiples

En este capítulo se estudian las integrales de funciones de dos y tres variables.

7.1. Integrales dobles

Así como en cálculo de una variable se puede llegar al concepto de integral al calcular el área bajo una curva, en dos variables la integral doble se encuentra al calcular el volumen bajo una superficie.

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\ dA = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j)\ \Delta A_{ij}.} \tag{7.1}$$

El cálculo de una integral doble representando un volumen se puede realizar en forma inmediata si se conoce la fórmula para el volumen en cuestión. Por otro lado, si se tienen funciones que se sabe son simétricas con respecto a algún eje de simetría, en las que la función es impar en el dominio dado, la integral nos da cero de inmediato. Para esto tenemos que saber clasificar correctamente las funciones a integrar. Si no sucede alguna de las opciones anteriores (que es lo más seguro), tendremos que evaluar la integral paso a paso.

La forma de calcular las integrales dobles es por medio de una *integral iterada*. Esto consiste, de forma análoga a lo que se hace con las derivadas parciales, en suponer constante una de las variables e integrar con respecto a la otra. Después de la integración nos queda una función de sólo una variable, la que integramos con respecto a esa variable.

Para poder evaluar una integral iterada, es necesario saber calcular los límites adecuadamente. Esto es muy fácil en el caso de un dominio rectangular, pero en otros casos puede no ser tan sencillo. Para determinar correctamente los límites de integración se recomienda graficar la región antes de proceder, pues una buena elección del orden de integración puede simplificar mucho las cosas.

Una forma de determinar los límites de integración partiendo de la gráfica es recorrer con flechas paralelas al eje de la variable con respecto al cual se está integrando. La curva donde inicia la flecha y aquella donde termina son los límites de integración. Después observamos desde qué valor y hasta qué valor hubo flechas que recorrieran la región de integración, lo que nos dará los otros límites. Nótese que en una integral iterada los límites de integración de la primera integral pueden ser funciones de la otra variable, pero en la segunda integral necesariamente deben ser constantes numéricas.

Ejemplo

Evaluar la integral

$$I = \iint_A xy\; dA,$$

donde A es la región triangular cuyos vértices son (0,0), (1,0) y (1,1).

Solución

La región a integrar se muestra en la figura 7.1. Si elegimos integrar primero con respecto a y, los límites entre los cuales hay que integrar son 0 y x, pues vemos que la carrera de y es desde el eje x, hasta la recta $y = x$. Después de esto, notamos que las flechas que muestran la carrera de y van desde $x = 0$ hasta $x = 1$, por lo que ésos tendrán que ser los límites de integración.

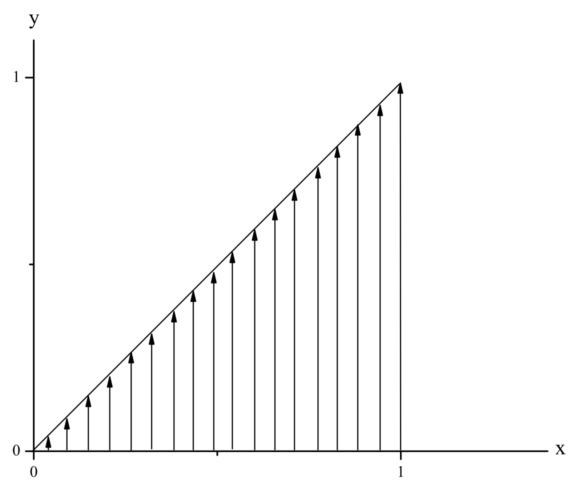


Figura 7.1: Dominio de integración

La integral doble original es equivalente a la integral iterada

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\; dy \right)\; dx,$$

después de realizar la primera integración obtenemos

$$I = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\; dx = \frac{x^4}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Si hubiésemos tomado el otro orden al realizar la integral, los límites habrían sido $x = y$ (puesto que en esa curva comienzan las flechas que dan la carrera de x) y $x = 1$, mientras que para y los límites habrían sido 0 y 1, dado que entre esos límites están las flechas que recorren la región de integración. Entonces tendríamos la integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 xy\; dx \right)\; dy,$$

que después de integrar la primera vez nos da

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x^2y}{2}\right)\Bigg|_{x=y}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{(1-y^2)y}{2}\,dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Ejercicios

Evaluar la integral doble indicada sin utilizar el método iterativo

1. $\iint_R dA$, donde R es el rectángulo $[-1,3]\times[-4,3]$. R: 20
2. $\iint_T (x+y)\,dA$, donde T es el paralelogramo de vértices en (2,2), (1,-1), (-2,-2) y (-1,1). R: 0
3. $\iint_{x^2+y^2\le 1}(4x^2y^3 - x + 5)\,dA$ R: 5π
4. $\iint_{|x|+|y|\le 1}(a - \sqrt{x^2+y^2})\,dA$ R: $\frac{\pi a^3}{3}$
5. $\iint_T (1-x-y)\,dA$, donde T es el triángulo de vértices en (0,0), (1,0) y (0,1). R: $\frac{1}{6}$

Evaluar por iteración las integrales dobles indicadas.

1. $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$, donde R es el rectángulo $[0,a]\times[0,b]$. R: $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$
2. $\iint_S (\operatorname{sen} x + \cos y)\,dA$, donde S es el cuadrado $[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$. R: π
3. $\iint_R xy^2\,dA$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$. R: $\frac{3}{56}$
4. $\iint_D \ln x\,dA$, donde D es la región del primer cuadrante limitada por la recta $2x+2y=5$ y la hipérbola $xy=1$. R: $\frac{33}{8}\ln 2 - \frac{45}{16}$
5. $\iint_R \frac{x}{y}e^y\,dA$, donde T es la región definida por $0\le x\le 1$, $x^2\le y\le x$. R: $\frac{e-2}{2}$

Integrar $f(x,y)$ sobre la región dada.

1. $f(x,y) = \frac{x}{y}$ sobre la región del primer cuadrante acotada por las rectas $y=x$, $y=2x$, $x=1$, $x=2$ R: $\frac{3}{2}\ln 2$
2. $f(x,y) = x^2+y^2$ sobre la región triangular con vértices (0,0), (1,0) y (0,1) R: $\frac{1}{6}$
3. $f(x,y) = y - \sqrt{x}$ sobre la región triangular cortada desde el primer cuadrante del plano xy por la recta $x+y=1$ R: $-\frac{1}{10}$
4. $f(x,y) = y - 2x^2$ sobre la región acotada por el cuadrado $|x|+|y|=1$ R: $-\frac{2}{3}$
5. $f(x,y) = xy$ sobre la región acotada por las rectas $y=x$, $y=2x$ y $x+y=2$ R: $\frac{13}{81}$

Trazar la región de integración y evaluar cada integral.

1. $\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)\,dy\,dx$ R: 16
2. $\int_{-1}^0\int_{-1}^1 (x+y+1)\,dx\,dy$ R: 1
3. $\int_0^\pi\int_0^x x\operatorname{sen} y\,dy\,dx$ R: $2+\frac{\pi}{2}$
4. $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$ R: $8\ln 8$
5. $\int_0^1\int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\,dx\,dy$ R: $e-2$
6. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^{\sec y} 3\cos y\,dx\,dy$ R: 2π

7. $\int_0^{1/16}\int_{y^{1/4}}^{1/2}\cos(16\pi x^5)\ dx\,dy$ R: $\frac{1}{80\pi}$
8. $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\ dx\,dy$ R: 2
9. $\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\ dy\,dx$ R: 2
10. $\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}\ dx\,dy$ R: $\frac{e-2}{2}$

En los siguientes ejercicios, trazar la región de integración, invertir el orden de integración y evaluar.

1. $\int_0^1\int_2^{4-2x}\ dy\,dx$ R: 1
2. $\int_0^{\ln 2}\int_{e^x}^2\ dx\,dy$ R: $2\ln 2-1$
3. $\int_0^{3/2}\int_0^{9-4x^2} 16x\ dy\,dx$ R: 81
4. $\int_0^2\int_0^{4-y^2} y\ dx\,dy$ R: 4
5. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\ dx\,dy$ R: 2
6. $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\ dy\,dx$ R: 32
7. $\int_0^2\int_x^2 2y^2\operatorname{sen} xy\ dy\,dx$ R: $4-\operatorname{sen} 4$
8. $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\,dx$ R: $\frac{1}{4}(e^8-1)$
9. $\int_0^3\int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\ dy\,dx$ R: $e-1$
10. $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{1}{y^4+1}\ dy\,dx$ R: $\frac{1}{4}\ln 17$

7.2. Integrales dobles en coordenadas polares

Si la región de integración tiene simetría circular, conviene cambiar a coordenadas polares para simplificar la integración. La transformación necesaria, además de involucrar un cambio de coordenadas, también conlleva un cambio en el elemento diferencial involucrado, como en las integrales de funciones de una variable. En este caso el elemento diferencial se convierte de $dx\ dy$ a $r\ dr\ d\theta$, con lo que la integral se transforma en

$$\iint_R f(x,y)\ dx\ dy=\iint_{R'} f(r,\theta)\ r\ dr\ d\theta, \tag{7.2}$$

donde se ha usado $x=r\ \cos\theta$, $y=r\ \operatorname{sen}\theta$.

Ejemplo

Evaluar la integral

$$\iint_A \frac{y^2}{x^2}\ dA,$$

donde A es la porción del anillo definido por $a^2\le x^2+y^2\le b^2$, situada en el primer cuadrante, abajo de la recta $y=x$.

Solución

Usando la fórmula para el cambio de variables citada anteriormente, la integral se transforma en

$$\iint_A \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta}\, dA = \iint_A \operatorname{tg}^2 \theta\, dA.$$

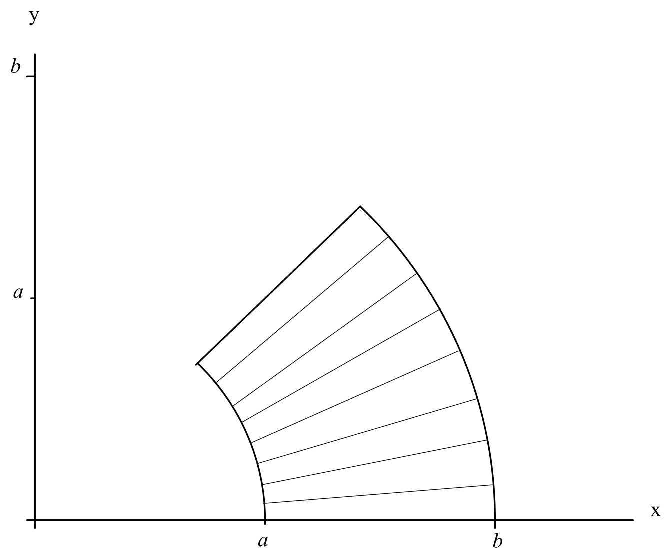


Figura 7.2: Región de integración

Para determinar los límites de integración, hacemos un pequeño bosquejo de la región de integración que, como vemos en la figura 7.2, es una sección circular que barre θ desde 0 hasta $\pi/4$, y en la que r va de a hasta b. Entonces la integral se transforma en

$$\int_0^{\pi/4} \int_a^b \operatorname{tg}^2 \theta\ r\ dr\ d\theta.$$

Al evaluar la primera integral se obtiene

$$\int_0^{\pi/4} \left.\frac{r^2}{2}\right|_a^b \operatorname{tg}^2 \theta\ d\theta = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \int_0^{\pi/4} (\sec^2 \theta - 1)\ d\theta,$$

que al integrar la segunda vez nos da

$$\iint_A \frac{y^2}{x^2}\ dA = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\operatorname{tg} \theta - \theta)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(1 - \pi/4).$$

Ejercicios

Cambiar cada integral por una equivalente en coordenadas polares y evaluar.

1. $\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}}\ dy\, dx$ R: $\frac{\pi}{2}$
2. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\ dy\, dx$ R: π
3. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\ dx\, dy$ R: $\frac{\pi}{8}$
4. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\ dy\, dx$ R: $\frac{\pi}{2}$

5. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$ R: πa^2

6. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\ dx\,dy$ R: $\frac{\pi}{2}$

7. $\int_0^6\int_0^y x\ dx\,dy$ R: 36

8. $\int_0^2\int_0^x y\ dy\,dx$ R: $\frac{4}{3}$

9. $\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\,dx$ R: $(1-\ln 2)\pi$

10. $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\ dx\,dy$ R: $4\pi-\pi^2$

11. $\int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\,dy$ R: $(2\ln 2-1)\frac{\pi}{2}$

12. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\ dy\,dx$ R: $\frac{\pi}{4}(1-1/e)$

13. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x-y}{x^2+y^2}\ dy\,dx$ R: $\frac{\pi}{2}+1$

14. $\int_0^2\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}} xy^2\ dx\,dy$ R: $\frac{2}{3}$

15. $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\ dx\,dy$ R: $\pi(\ln 4-1)$

16. $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\ dy\,dx$ R: π

17. Evaluar $\iint_S (x+y)\ dA$, donde S es la región situada en el primer cuadrante, en el interior del disco definido por $x^2+y^2\le a^2$ y bajo la recta $y=\sqrt{3}x$. R: $1.366a^2$

18. Calcular $\iint_S x\ dA$, donde S designa el sector circular definido por $x^2+y^2\le 2$, $x\ge 1$. R: $2/3$

19. Calcular $\iint_T (x^2+y^2)\ dA$, donde T es la región delimitada por el triángulo de vértices (0,0), (1,0) y (1,1). R: $1/3$

20. Calcular $\iint_{x^2+y^2\le 1}\ln(x^2+y^2)\ dA$ R: diverge

7.3. Transformaciones generales en la integral doble

Para algunos dominios de integración el cambio a coordenadas polares no funciona, pero puede haber otros cambios de variables que simplifiquen la integración. En tales casos, además de cambiar a las nuevas variables, también se tiene que cambiar el elemento diferencial.

El nuevo elemento será $J\ du\ dv$, siendo u y v las nuevas variables y J el *jacobiano* de la transformación, definido como

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{7.3}$$

con lo que la integral queda como

$$\iint_A f(x,y)\ dx\ dy=\iint_{A'} f(u,v)\ J\ du\ dv. \tag{7.4}$$

Ejemplo

Evaluar

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \frac{2x-y}{2}\, dx\, dy,$$

usando la transformación $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$.

Solución

El dominio de integración es el rectángulo mostrado en la figura 7.3 *a)*.

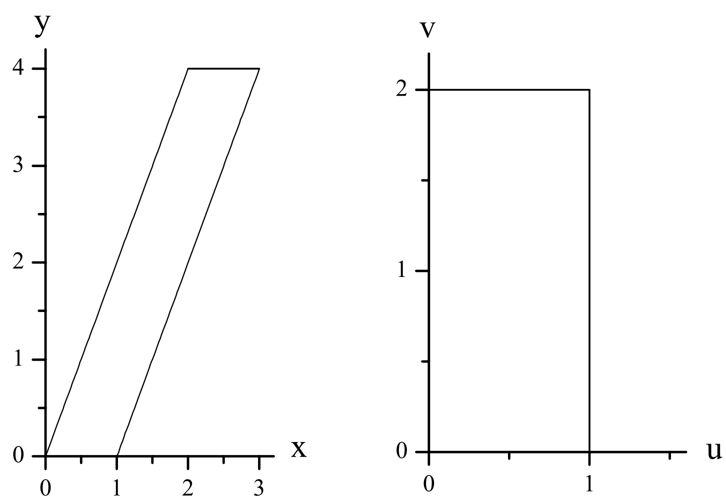


Figura 7.3: Transformación para una integral doble

Resolviendo x y y del sistema de ecuaciones dado por el cambio de variables, obtenemos $x = u+v$ y $y = 2v$, de donde el jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} = 1 & \frac{\partial x}{\partial v} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} = 0 & \frac{\partial y}{\partial v} = 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable a los límites de integración como sigue:

1. Para la recta $x = y/2$, el cambio de variables nos da $u + v = v$, es decir, $u = 0$
2. Para la recta $x = y/2 + 1$ obtenemos $u + v = v + 1$, o sea, $u = 1$
3. Para la recta $y = 0$ obtenemos $2v = 0$, esto es, $v = 0$
4. Para la recta $y = 4$ obtenemos $2v = 4$, o sea, $v = 2$

Como resultado de esta transformación obtenemos un rectángulo en el plano uv, según se muestra en la figura 7.3 *b)*. Con lo anterior, la integral se convierte en

$$\int_0^2 \int_0^1 u\ 2\ du\ dv = \int_0^2 u^2 \Big|_0^1\ dv = \int_0^2 1\ dv = 2.$$

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x-y}(y-2x)^2\ dy\ dx.$$

Solución

El dominio de integración es la región triangular que se muestra en la figura 7.4 a). *a)*.

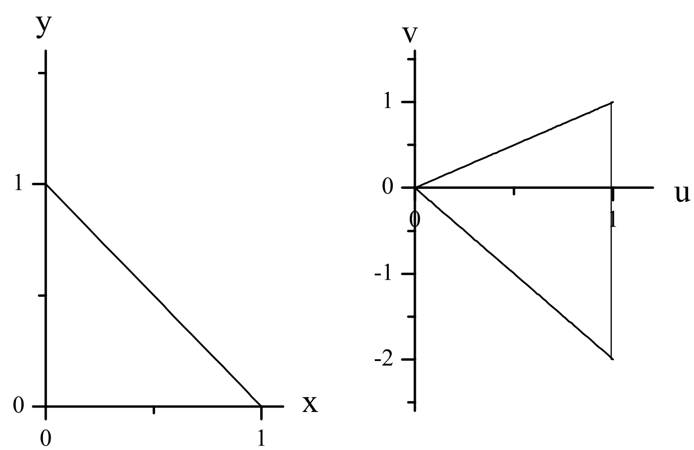


Figura 7.4: Transformación para otra integral doble

Para esta integral, el integrando sugiere la transformación $u = x - y$, $v = y - 2x$. Obsérvese que no se tomaron potencias o raíces, para que sólo haya funciones de primer grado al momento de manipular los límites de integración y al calcular el jacobiano. Resolviendo para x y y obtenemos $x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}$, $y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}$, con lo cual el jacobiano nos da

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Sustituyendo en los límites de integración encontramos que

$y = 0$ se transforma en $v = -2u$,

$y = 1 - x$ se transforma en $u = 1$,

$x = 0$ se transforma en $u = v$.

Lo anterior nos da como dominio de integración en el plano uv la región triangular mostrada en la figura 7.4 b). Con esto, la integral se transforma en

$$\int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2} v^2 \, \frac{1}{3} \, dv \, du = \int_0^1 u^{1/2} \, \frac{u^3}{9}\bigg|_{-2u}^{u} \, du = \int_0^1 u^{1/2} u^3 \, du =$$

$$\int_0^1 u^{7/2} \, du = \frac{2}{9} u^{9/2}\bigg|_0^1 = \frac{2}{9}.$$

Ejercicios

Utilizar las sustituciones sugeridas para calcular cada integral

1. $\int\int_R (2x^2 - xy - y^2) \, dx \, dy$, con R la región del primer cuadrante encerrada por las rectas $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$ y $y = x + 1$

   Transformación sugerida: $u = x - y$, $v = 2x + y$ R: 33/4

2. $\int\int_R (3x^2 + 14xy + 8y^2) \, dx \, dy$, con R la región del primer cuadrante encerrada por las rectas $y = -(3/2)x + 1$, $y = -(3/2)x + 3$, $y = -(1/4)x$ y $y = -(1/4)x + 1$

   Transformación sugerida: $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$ R: 64/5

3. $\int\int_R 2(x - y) \, dx \, dy$, con R la región cuyas fronteras son $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ y $y = x + 1$

   Transformación sugerida: $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ R: –3

4. $\int\int_R (x + y)^3 \, dx \, dy$, con R el paralelogramo con vértices (1,0), (3,1), (2,2), (0,1).

   Transformación sugerida: $u = x + y$, $v = x - 2y$ R: –255/4

5. $\int\int_R (x - y)^2 \operatorname{sen}^2(x + y) \, dx \, dy$, con R el paralelogramo con vértices (π,0), $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, (0,π).

   Transformación sugerida: $u = x - y$, $v = x + y$ R: $\pi^4/3$

6. $\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} \sqrt{x}(y - x)^2 \, dy \, dx$

   Transformación sugerida: $x = u$, $y = u + v$ R: 452/945

7. $\int\int_R (y - x) \, dx \, dy$, con R el paralelogramo cuyos lados son las rectas $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ y $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

   Transformación sugerida: $u = y - x$, $v = y + \frac{1}{3}x$ R: –8

8. $\int\int_R (x - 3y) \, dx \, dy$, con R el triángulo cuyos vértices son (0,0), (2,1) y (1,2).

   Transformación sugerida: $x = 2u + v$, $y = u + 2v$ R: –3

9. $\int\int_R (4x + 8y) \, dx \, dy$, con R el paralelogramo de vértices en (–1,3), (1,–3), (3,–1) y (1,5).

   Transformación sugerida: $x = \frac{1}{4}(u + v)$, $y = \frac{1}{4}(v - 3u)$ R: 24

10. $\int\int_R x^2 \, dx \, dy$, con R la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

    Transformación sugerida: $x = 2u$, $y = 3v$ R: 6π

7.4. Integrales triples

La integral triple de una función de tres variables se construye en forma análoga a la integral doble. En este caso no hay ya una interpretación geométrica como en la integral doble, aunque se le pueden dar diversas interpretaciones físicas que ayudan a comprender este concepto. En nuestro caso la trataremos únicamente como una generalización. Se define la integral triple por medio del límite

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\ dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_j,z_k)\ \Delta V_{ijk}.} \qquad (7.5)$$

La evaluación de una integral triple se puede hacer también por medio de una integral iterada. Nuevamente se recomienda realizar un bosquejo de la región para poder determinar los límites de integración correctamente.

Ejemplo

Para el volumen V del tetraedro cuyos vértices son (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1), evaluar la integral

$$\iiint_V y\ dV.$$

Solución

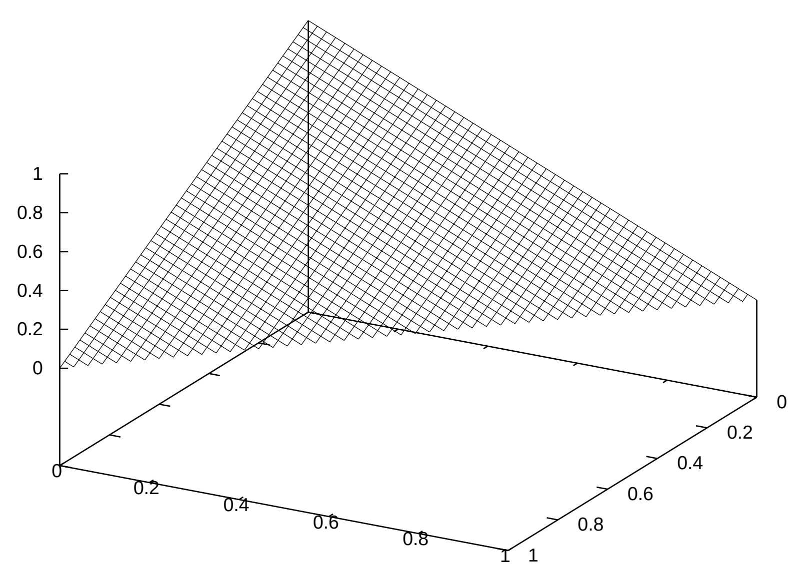


Figura 7.5: El plano $x + y + z = 1$ limita superiormente al tetraedro

La figura 7.5 muestra el plano bajo el que se encuentra el volumen de integración. Si decidimos integrar primero con respecto a z, el límite inferior es cero, mientras que el límite superior es el plano superior del tetraedro. La ecuación de dicho plano es $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$, por lo que la integración va desde $z=0$ hasta $z=1-x-y$.

Después de integrar con respecto a z integramos con respecto a y, lo que nos lleva a integrar dentro del triángulo limitado por los ejes x y y y la recta $y=-x+1$, por lo que los límites de integración serán $y=0$ y $y=1-x$.

Finalmente, para integrar con respecto a x ya sólo nos queda un intervalo sobre ese eje, que va de 0 a 1, así que los límites son $x=0$ y $x=1$.

La integral iterada es

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} y\ dz\right)\ dy\right)\ dx.$$

Realizando los cálculos necesarios obtenemos

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x}(1-x-y)y\ dy\right)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{6}(1-x)^3\ dx = -\frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Ejercicios

Evaluar la integral triple dada. En algunos casos el álgebra y una elección adecuada del orden de integración pueden facilitar mucho los cálculos.

1. $\iiint_R (1+2x-3y)\ dV$, donde R es el paralelepípedo rectangular definido por $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$, $-c\le z\le c$. R: $8abc$
2. $\iiint_R x\ dV$, donde R es el tetraedro encerrado entre los planos de referencia y el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ R: $\frac{1}{24}a^2bc$
3. $\iiint_R (x^2+y^2)\ dV$, donde R es el cubo definido por $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$. R: $\frac{2}{3}$
4. $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\ dV$, donde R es el cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ R: 1
5. $\iiint_R yz^2e^{-xyz}\ dV$, donde R es el cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. R: $e-\frac{5}{2}$
6. $\iiint_R y\ dV$, donde R es el cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ R: 1
7. $\iiint_R \frac{1}{(x+y+z)^3}\ dV$, donde R es la región limitada por los seis planos $z=1$, $z=2$, $y=0$, $y=z$, $x=0$ y $x=y+z$. R: $\frac{3}{16}\ln 2$
8. $\iiint_R \cos x\cos y\cos z\ dV$, donde R es el tetraedro definido por $x,y,z\ge 0$, $x+y+z\le\pi$. R: $\frac{\pi}{8}$

Evaluar las integrales siguientes

1. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\ dz\,dy\,dx$ R: 1
2. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2}\ dz\,dx\,dy$ R: -6
3. $\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xyz}\ dx\,dy\,dz$ R: 1
4. $\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y}\ dz\,dy\,dx$ R: $\frac{3}{2}$
5. $\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y\operatorname{sen} z\ dx\,dy\,dz$ R: $\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1)$
6. $\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x+y+z)\ dy\,dx\,dz$ R: 0
7. $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\ dz\,dy\,dx$ R: 18

8. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} \, dz\, dx\, dy$ R: $\frac{16}{3}$

9. $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} \, dz\, dy\, dx$ R: $\frac{7}{6}$

10. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x \, dz\, dy\, dx$ R: $\frac{1}{12}$

11. $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y+z) \, dx\, dy\, dz$ R: 0

12. $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln x \ln y \ln z \, dz\, dx\, dy$ R: 1

13. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln \sec y} \int_{-\infty}^{2z} e^x \, dx\, dz\, dy$ R: $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

14. $\int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{y}{z+1} \, dx\, dy\, dz$ R: $8 \ln 2$

7.5. Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Para dominios donde hay simetría cilíndrica, las integrales triples se calculan por medio de

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\ dV = \iiint_{V'} f(r,\theta,z)\ r\ dr\ d\theta\ dz} \tag{7.6}$$

donde $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $z = z$ y $dV = r\ dr\ r\theta\ dz$. La figura 7.6 muestra el significado de cada variable.

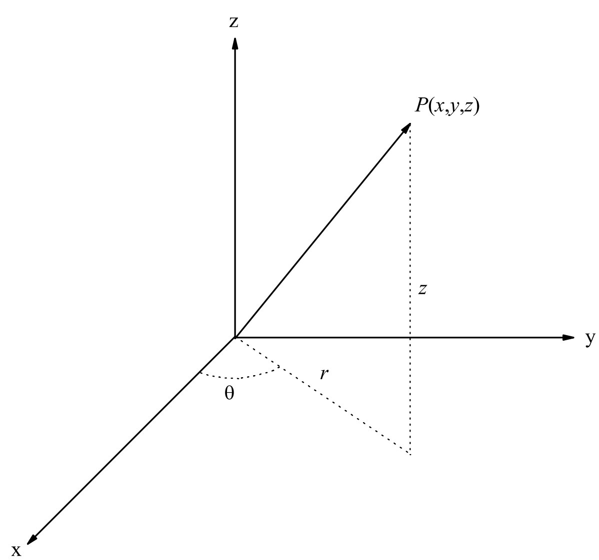


Figura 7.6: Las coordenadas cilíndricas

Ejemplo

Calcular

$$\iiint_V x^2\ dV,$$

donde V está limitado por el cilindro $x^2+y^2=9$, sobre el plano $z=0$ y bajo el cono $z^2=4x^2+4y^2$

Solución

En coordenadas polares, el cilindro $x^2+y^2=9$ tiene la ecuación $r=3$. El cono $z^2=4x^2+4y^2$ es equivalente a $z^2=4r^2$, o bien, $z=2r$ (es positivo porque está sobre el plano $z=0$). Entonces la integral es equivalente a

$$\iiint_V r^2\cos^2\theta\ r\ dr\ d\theta\ dz = \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{2r} r^3\cos^2\theta\ dz\ d\theta\ dr =$$

$$= \int_0^3\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\ z\Big|_0^{2r} d\theta\ dr = \int_0^3\int_0^{2\pi} 2r^4\cos^2\theta\ d\theta\ dr =$$

$$= \int_0^3 r^4\left[\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} dr = 2\pi\int_0^3 r^4\ dr = 2\pi\ \frac{r^5}{5}\Big|_0^3 = \frac{486}{5}.$$

Ejercicios

Evaluar cada integral

1. $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} r\ dz\,dr\,d\theta$ — R: $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$
2. $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} r\ dz\,dr\,d\theta$ — R: $-\frac{7\pi}{6}(4\sqrt{7}-25)$
3. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta/2\pi}\int_0^{3+24r^2} r\ dz\,dr\,d\theta$ — R: $\frac{17\pi}{5}$
4. $\int_0^{\pi}\int_0^{\theta/\pi}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} zr\ dz\,dr\,d\theta$ — R: $\frac{37\pi}{15}$
5. $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3r\ dz\,dr\,d\theta$ — R: $\pi(6\sqrt{2}-8)$
6. $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}(r^2\operatorname{sen}^2\theta+z^2)r\ dz\,dr\,d\theta$ — R: $\frac{\pi}{3}$
7. $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} r^3\ dr\,dz\,d\theta$ — R: $\frac{3\pi}{10}$
8. $\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 4r\ dr\,d\theta\,dz$ — R: 12π
9. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}(r^2\cos^2\theta+z^2)r\ d\theta\,dr\,dz$ — R: $\frac{\pi}{3}$
10. $\int_0^2\int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi}(r\operatorname{sen}\theta+1)r\ d\theta\,dz\,dr$ — R: 8π

7.6. Integrales triples en coordenadas esféricas

En dominios donde existe simetría esférica, las integrales triples se calculan usando

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\ dV = \iiint_{V'} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi} \tag{7.7}$$

donde $x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, $z=\rho\cos\phi$ y $dV=\rho^2\operatorname{sen}\phi$. La figura 7.7 muestra el significado de cada variable.

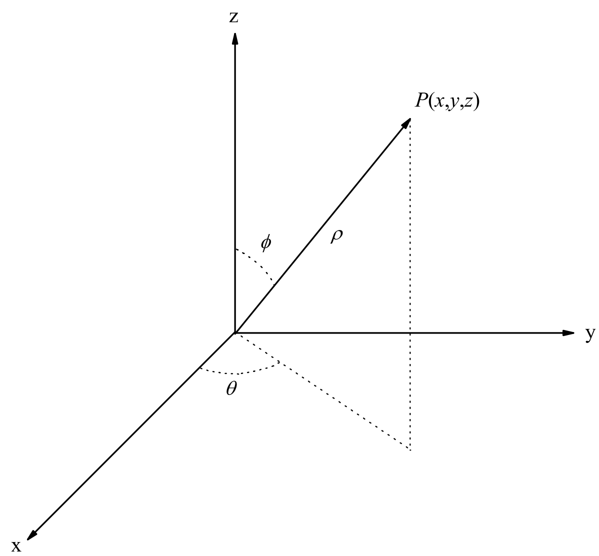


Figura 7.7: Las coordenadas esféricas

Ejemplo

Calcular

$$\iiint_V xyz\ dV,$$

donde V está entre las esferas $\rho = 2$ y $\rho = 4$, y sobre el cono $\phi = \pi/3$.

Solución

La integral en cuestión es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_2^4 (\rho\cos\theta\cos\phi)(\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)(\rho\cos\theta)\ \rho^2\ d\rho\ d\theta\ d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_2^4 \rho^5\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^3\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \left.\frac{\rho^6}{6}\right|_2^4 \cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^3\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta =$$

$$672\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^3\phi\cos\phi\ d\phi\ d\theta = 672\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ \left.\frac{\operatorname{sen}^4\phi}{4}\right|_0^{\pi/3}\ d\theta =$$

$$= \frac{189}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\ d\theta = \frac{189}{4}\operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Ejercicios

Evaluar cada integral

1. $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\phi}\rho^2\operatorname{sen}\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta$ R: π^2

2. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$ R: 2π
3. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$ R: $\frac{\pi}{3}$
4. $\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^1 5\rho^3 \operatorname{sen}^3\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$ R: $\frac{5\pi}{2}$
5. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^2 3\rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$ R: 5π
6. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$ R: $\frac{\pi}{4}$
7. $\int_0^2\int_{-\pi}^0\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen} 2\phi \; d\phi\, d\theta\, d\rho$ R: 2π
8. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\phi}^{2\csc\phi}\int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\theta\, d\rho\, d\phi$ R: $\frac{28\pi}{3\sqrt{3}}$
9. $\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} 12\rho \operatorname{sen}^3\phi \; d\phi\, d\theta\, d\rho$ R: $\frac{\pi}{2}(8-5\sqrt{2})$
10. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\csc\phi}^2 5\rho^4 \operatorname{sen}^3\phi \; d\rho\, d\theta\, d\phi$ R: $11\sqrt{3}\pi$

Capítulo 8

Campos vectoriales

Un campo vectorial es una función que asigna un vector a cada punto de su dominio, esto es, se trata de una función vectorial de variable vectorial. El dominio de un campo vectorial puede ser una línea, una superficie, una región del espacio con cierto volumen, etc. Esta clase de funciones se utiliza extensamente en la física y la ingeniería, por lo que será importante su estudio.

8.1. Representación gráfica

Como se expresó anteriormente, en un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ a cada punto (x, y, z) del dominio corresponde un vector $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$, así que para representar un campo vectorial, debemos ubicar los puntos de su dominio, y ahí colocaremos el punto inicial del vector que le corresponde. Esto se ve claramente en los ejemplos. Por supuesto que podemos tener campos vectoriales sólo en un plano, lo que se representa como $\vec{F}(x, y) = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$ si el campo está en el plano xy (o alguno paralelo). Resultan evidentes las modificaciones que hay que hacer para otros planos.

Ejemplo

Bosquejar el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Solución

Para bosquejar el campo, elegimos una serie de puntos en el espacio, y evaluamos la función para obtener las componentes del vector. La siguiente tabla muestra los resultados de evaluar la función para valores de x y y enteros entre -2 y 2.

x	y	F_x	F_y
-2	-2	-0.7071	-0.7071
-2	-1	-0.8944	-0.4472
-2	0	-1	0
-2	1	-0.8944	0.4472
-2	2	-0.7071	0.7071
-1	-2	-0.4472	-0.8944
-1	-1	-0.7071	-0.7071
-1	0	-1	0
-1	1	-0.7071	0.7071
-1	2	-0.4472	0.8944
0	-2	0	-1
0	-1	0	-1
0	0		
0	1	0	1
0	2	0	1
1	-2	0.4472	-0.8944
1	-1	0.7071	-0.7071
1	0	1	0
1	1	0.7071	0.7071
1	2	0.4472	0.8944
2	-2	0.7071	-0.7071
2	-1	0.8944	-0.4472
2	0	1	0
2	1	0.8944	0.4472
2	2	0.7071	0.7071

Con la tabla anterior podemos dibujar el campo vectorial, ubicando primero los puntos de coordenadas (x, y) en el plano y, después, colocando ahí los vectores cuyas componentes (F_x, F_y) calculamos en la misma tabla. El resultado de esto se muestra en la figura 8.1.

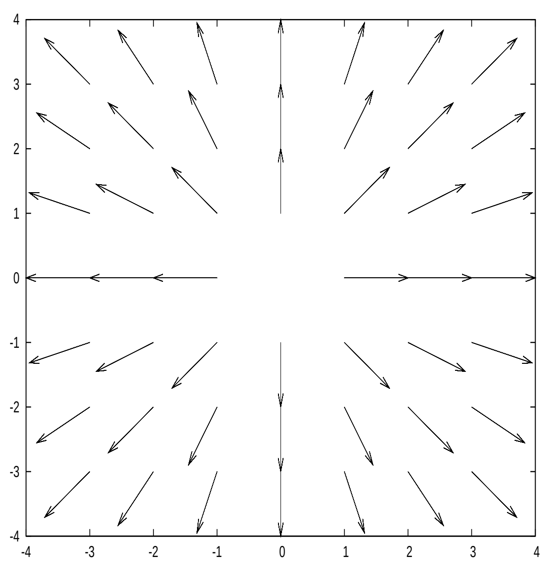


Figura 8.1: Campo vectorial en el plano

Ejemplo

Bosquejar el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z)=\frac{-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Solución

En este caso no damos la tabla necesaria, pero el resultado se muestra en la figura 8.2. Nótese que para obtener esta gráfica es necesaria una tabla con unos 500 renglones de 6 columnas cada uno.

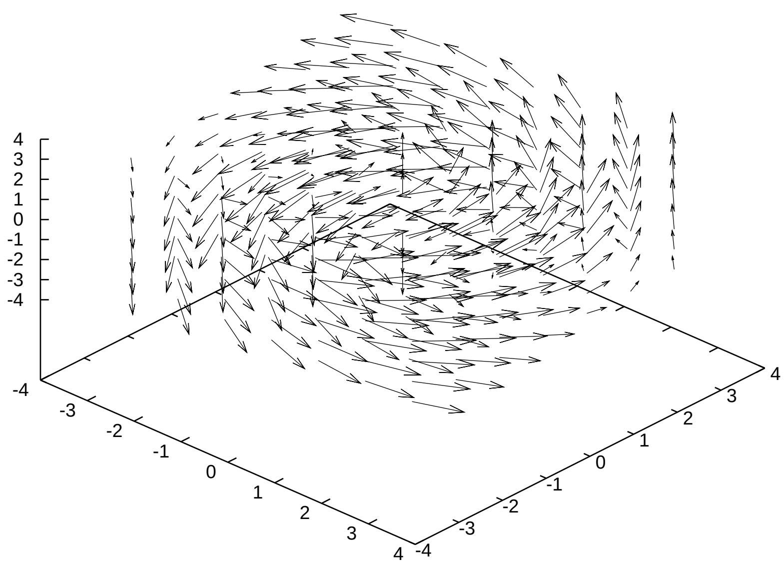


Figura 8.2: Campo vectorial en el espacio

En el caso de los campos vectoriales se ve más claro que en cualquier otro caso la imperiosa necesidad de utilizar algún programa de graficación para representarlos visualmente.

En contraste con los campos vectoriales, si a cada punto de un dominio se le asigna un escalar, se habla de un campo escalar. Las funciones de varias variables estudiadas en el capítulo 5 son campos escalares. Es posible obtener un campo vectorial a partir de un campo escalar aplicándole el operador nabla al mismo; esto es, el gradiente de una función de varias variables es un campo vectorial.

Ejercicios

Bosquejar los siguientes campos vectoriales. Preferentemente utilizar un programa de graficación.

1. $\vec{F}=yz\hat{\imath}+xz\hat{\jmath}+xy\hat{k}$
2. $\vec{F}=y\operatorname{sen}z\hat{\imath}+x\operatorname{sen}z\hat{\jmath}+xy\cos z\hat{k}$
3. $\vec{F}=y\hat{\imath}+(x+z)\hat{\jmath}-y\hat{k}$

4. $\vec{F} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$
5. $\vec{F} = (y+z)\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$
6. $\vec{F} = e^x \cos y\hat{\imath} - e^x \operatorname{sen} y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
7. $\vec{F} = 2x\hat{\imath} + 3y\hat{\jmath} + 4z\hat{k}$
8. $\vec{F} = (y+z)\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$
9. $\vec{F} = e^{y+2z}(\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + 2x\hat{k})$
10. $\vec{F} = \ln z\hat{\imath} + \operatorname{sen}(x+y)\hat{\jmath} + \frac{x}{y^2+z^2}\hat{k}$
11. $\vec{F} = (y+z)\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$
12. $\vec{F} = (x^2+y^2+z^2)\hat{\imath} + \frac{x}{y+z}\hat{\jmath} + (x+y+z)\hat{k}$

8.2. Divergencia de un campo vectorial

Cuando tratamos con las derivadas de un campo vectorial, nos encontramos con una amplia gama de posibilidades para las mismas. En los campos vectoriales, las que se tomarán como derivadas estarán relacionadas específicamente con el vector nabla. Existen dos posibilidades para aplicar a un campo vectorial el operador nabla: producto punto y producto cruz.

Si tomamos el producto $\nabla \cdot \vec{F}$, obtenemos un campo escalar al que llamamos *divergencia* del campo vectorial. Esto es, si se tiene $\vec{F}(x,y,z) = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$, la divergencia de $\vec{F}$ viene dada por

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{8.1}$$

Este campo escalar tiene como motivación para su definición algunos campos vectoriales usuales en física, como lo son: las velocidades de un fluido, las fuerzas gravitacionales y electrostáticas, etc. Este campo mide la rapidez con que disminuye la densidad en un punto.

Ejemplo

Encontrar la divergencia de el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Solución

La divergencia es

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$$

$$= \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{(x^2+y^2+z^2)-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Ejercicios

Hallar la divergencia de los siguientes campos vectoriales.

1. $\vec{F} = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xy\hat{k}$ R: 0
2. $\vec{F} = e^x \cos y\hat{\imath} - e^x \operatorname{sen} y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ R: 1
3. $\vec{F} = y\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} - y\hat{k}$ R: 0
4. $\vec{F} = 2x\hat{\imath} + 3y\hat{\jmath} + 4z\hat{k}$ R: 9
5. $\vec{F} = (y+z)\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$ R: 0
6. $\vec{F} = y \operatorname{sen} z\hat{\imath} + x \operatorname{sen} z\hat{\jmath} + xy \cos z\hat{k}$ R: $-xy \operatorname{sen} z$
7. $\vec{F} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ R: 0
8. $\vec{F} = e^{y+2z}(\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + 2x\hat{k})$ R: $5xe^{y+2z}$
9. $\vec{F} = (y+z)\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$ R: 0
10. $\vec{F} = (x^2+z)\hat{\imath} + y \operatorname{sen} z\hat{\jmath} + e^{3z}\hat{k}$ R: $2x + \operatorname{sen} x + 3e^{3z}$
11. $\vec{F} = \ln z\hat{\imath} + \operatorname{sen}(x+y)\hat{\jmath} + \frac{x}{y^2+z^2}\hat{k}$ R: $\cos(x+y) - \frac{2xy}{(y^2+z^2)^2}$
12. $\vec{F} = (x^2+y^2+z^2)\hat{\imath} + \frac{x}{y+z}\hat{\jmath} + (x+y+z)\hat{k}$ R: $1 + 2x - \frac{x}{(y+z)^2}$

8.3. Rotacional de un campo vectorial

Si se aplica el vector nabla a un campo vectorial usando el producto cruz, se obtiene un nuevo campo vectorial denominado *rotacional*, esto es, si tenemos el campo $\vec{F}(x,y,z) = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$, su rotacional es

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right). \qquad (8.2)$$

Ejemplo

Calcular el rotacional del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Solución

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{vmatrix} =$$

$$\hat{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) +$$

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=$$

$$=-\hat{\imath}\left(\frac{(x+y)z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)-\hat{\jmath}\left(\frac{(x+y)z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\hat{k}\left(\frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

Ejercicios

Encontrar el rotacional de los siguientes campos vectoriales y realizar un bosquejo gráfico.

1. $\vec{F}=yz\hat{\imath}+xz\hat{\jmath}+xy\hat{k}$ R: $\vec{0}$
2. $\vec{F}=(y+z)\hat{\imath}+z\hat{\jmath}+(x+y)\hat{k}$ R: $-\hat{k}$
3. $\vec{F}=y\operatorname{sen}z\hat{\imath}+x\operatorname{sen}z\hat{\jmath}+xy\cos z\hat{k}$ R: $\vec{0}$
4. $\vec{F}=y\hat{\imath}+(x+z)\hat{\jmath}-y\hat{k}$ R: $-2\hat{\imath}$
5. $\vec{F}=e^x\cos y\hat{\imath}-e^x\operatorname{sen}y\hat{\jmath}+z\hat{k}$ R: $\vec{0}$
6. $\vec{F}=-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}$ R: $2\hat{k}$
7. $\vec{F}=e^{y+2z}(\hat{\imath}+x\hat{\jmath}+2x\hat{k})$ R: $\vec{0}$
8. $\vec{F}=(x^2+z)\hat{\imath}+y\operatorname{sen}z\hat{\jmath}+e^{3z}\hat{k}$ R: $\hat{\jmath}+z\cos x\hat{k}$
9. $\vec{F}=2x\hat{\imath}+3y\hat{\jmath}+4z\hat{k}$ R: $\vec{0}$
10. $\vec{F}=\ln z\hat{\imath}+\operatorname{sen}(x+y)\hat{\jmath}+\frac{x}{y^2+z^2}\hat{k}$ R: $-\frac{2xy}{(y^2+z^2)^2}\hat{\imath}+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y^2+z^2}\right)\hat{\jmath}+\cos(x+y)\hat{k}$
11. $\vec{F}=(y+z)\hat{\imath}+(x+z)\hat{\jmath}+(x+y)\hat{k}$ R: $\vec{0}$
12. $\vec{F}=(x^2+y^2+z^2)\hat{\imath}+\frac{x}{y+z}\hat{\jmath}+(x+y+z)\hat{k}$ R: $\left(1+\frac{x}{(y+z)^2}\right)\hat{\imath}+(2z-1)\hat{\jmath}+\left(\frac{1}{y+z}-2y\right)\hat{k}$

8.4. Campos conservativos

Se llama conservativo a un campo vectorial que cumple lo siguiente

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z},\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\quad \text{y}\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}, \tag{8.3}$$

lo cual se verifica si

$$\boxed{\nabla\times\vec{F}=\vec{0}} \tag{8.4}$$

Si para un campo $\vec{F}$ existe un campo escalar f tal que $\vec{F}=\nabla f$, se dice que f es una función potencial de $\vec{F}$ o, simplemente, que f es potencial de $\vec{F}$. Si $\vec{F}$ es conservativo, siempre existe un potencial.

Ejemplo

Sea $\vec{F}=(e^x\cos y+yz)\hat{\imath}+(xz-e^x\operatorname{sen}y)\hat{\jmath}+(xy+z)\hat{k}$. Mostrar que es conservativo y encontrar un potencial para el mismo.

Solución

Primero calculemos el rotacional de este campo vectorial

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x\cos y + yz & xz - e^x \operatorname{sen} y & xy+z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(x-x)-\hat{\jmath}(y-y)+\hat{k}(z-e^x\operatorname{sen} y+e^x\operatorname{sen} y-z) = \vec{0}.$$

Ahora, para determinar la función potencial, buscaremos una función que cumpla

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x\cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x\operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z,$$

lo cual se consigue integrando cada función con respecto a la variable de integración adecuada

$$f_1 = \int (e^x\cos y + yz)\ dx = e^x\cos y + xyz + C_1,$$

$$f_2 = \int (xz - e^x\operatorname{sen} y)\ dy = xyz + e^x\cos y + C_2,$$

$$f_3 = \int (xy + z)\ dz = xyz + \frac{z^2}{2} + C_3.$$

Unificando (no sumando) estas tres funciones, encontramos que

$$f(x,y,z) = e^x\cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C.$$

Ejercicios

Encontrar los campos que sean conservativos y hallar sus potenciales.

1. $\vec{F} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ R: no conservativo
2. $\vec{F} = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xy\hat{k}$ R: xyz
3. $\vec{F} = y\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} - y\hat{k}$ R: no conservativo
4. $\vec{F} = (y+z)\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$ R: $xy + yz + xz$
5. $\vec{F} = (y+z)\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$ R: no conservativo
6. $\vec{F} = e^x\cos y\hat{\imath} - e^x\operatorname{sen} y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ R: $e^x\cos y + \frac{z^2}{2}$
7. $\vec{F} = (x^2+z)\hat{\imath} + y\operatorname{sen} z\hat{\jmath} + e^{3z}\hat{k}$ R: no conservativo
8. $\vec{F} = 2x\hat{\imath} + 3y\hat{\jmath} + 4z\hat{k}$ R: $x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2z^2$
9. $\vec{F} = \ln z\hat{\imath} + \operatorname{sen}(x+y)\hat{\jmath} + \frac{x}{y^2+z^2}\hat{k}$ R: no conservativo
10. $\vec{F} = e^{y+2z}(\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + 2x\hat{k})$ R: xe^{y+2z}
11. $\vec{F} = (x^2+y^2+z^2)\hat{\imath} + \frac{x}{y+z}\hat{\jmath} + (x+y+z)\hat{k}$ R: no conservativo
12. $\vec{F} = y\operatorname{sen} z\hat{\imath} + x\operatorname{sen} z\hat{\jmath} + xy\cos z\hat{k}$ R: $xy\operatorname{sen} z$

Capítulo 9

Integrales curvilíneas y de superficie

En este capítulo estudiaremos integrales curvilíneas y de superficie sobre campos escalares y vectoriales, y las relaciones que guardan con las integrales múltiples. Tales relaciones nos permitirán pasar las integrales de una a otra forma, para calcularlas en aquella que sea la más directa posible.

9.1. Integrales curvilíneas en campos escalares

Cuando se tiene una función vectorial de una variable escalar, como ya vimos, se tiene una curva en el plano (o en el espacio). Es posible definir una integral sobre una curva en el plano para una función de varias variables llamada *integral curvilínea*, a veces también llamada *integral de línea*.

$$\boxed{\int_C f(x,y)\ d\ell = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx,} \tag{9.1}$$

donde se usó $d\ell = \sqrt{1+(dy/dx)^2}$. La definición anterior tiene como caso especial (cuando $f(x,y)=1$) a la longitud de arco.

Cuando la curva C se puede parametrizar en la forma $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$, la integral curvilínea se calcula con

$$\boxed{\int_C f(x,y)\ d\ell = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt,} \tag{9.2}$$

en donde habrá que escribir $f(x,y)$ como función de t, y calcular una integral en una sola variable. Frecuentemente el punto de inicio y el punto final en la curva coinciden, es decir, la curva de integración es *cerrada*. En tales casos se utiliza para la integral la notación

$$\boxed{\oint_C f(x,y)\ dx.} \tag{9.3}$$

Ejemplo

Sea C la trayectoria $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, con $0 \le t \le \pi$; y sea $f(x,y) = x^2+y^2$. Evaluar la integral de línea $\int_C f(x,y)\ d\ell$.

Solución

La trayectoria de integración es una semicircunferencia, misma que se puede expresar en la forma $y = \sqrt{1-x^2}$. La derivada de la misma es $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Con lo anterior y la fórmula 9.1, la integral es

$$\int_C f(x,y)\ d\ell = \int_{-1}^{1} (x^2 + (1-x^2))\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\ dx,$$

que al simplificar y evaluar nos da

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arc\,sen} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Esta integral se puede evaluar también con ayuda de la fórmula 9.2 de la siguiente forma:

La derivada con respecto al tiempo de la trayectoria es

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-\operatorname{sen} t, \cos t),$$

lo que implica que su magnitud es

$$||\frac{d\vec{r}(t)}{dt}|| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1.$$

Por otro lado, la función $f(x,y)$, en términos de t es

$$f(t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Sustituyendo esto en la fórmula 9.2 tenemos que

$$\int_C f(x,y)\ d\ell = \int_0^{\pi} 1\ dt = t \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

En el caso de que la función en cuestion esté dada en coordenadas polares, es decir, en la forma $f(r,\theta)$, la integral de línea se escribe en la forma

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r,\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\ d\theta} \tag{9.4}$$

Ejemplo

Expresado en coordenadas polares, el ejercicio del ejemplo anterior tiene la trayectoria $C\colon r(\theta) = 1$, con $0 \le \theta \le \pi$ y $f(r,\theta) = (r\cos^{\theta})^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2$. Evaluar la integral de línea $\int_C f(x,y)\ d\ell$.

Solución

Para usar la fórmula 9.2 necesitamos la derivada con respecto a θ de la trayectoria, que es

$$\frac{dr}{d\theta} = 0.$$

Sustituyendo esto y los datos anteriores en la fórmula 9.3 tenemos que

$$\int_C f(x,y)\ d\ell = \int_0^{\pi} 1^2\sqrt{1^2+0^2}\ d\theta \int_0^{\pi} d\theta = \theta\,\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Si se tiene una curva en el espacio y una función de tres variables, la generalización de lo anterior es muy simple en el caso de que se pueda parametrizar la curva de integración, pues sólo se agrega la parametrización de la componente z, quedando la integral en la forma

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\ d\ell = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt,} \qquad (9.5)$$

por lo que es conveniente tratar de expresar las trayectorias en forma vectorial siempre que sea posible.

Ejemplo

Encontrar la integral curvilínea de la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z$ sobre la curva $\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \operatorname{sen} t\hat{\jmath} + t\hat{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución

La derivada de la trayectoria es

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\operatorname{sen} t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + \hat{k},$$

cuya magnitud será

$$\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

La función en términos de t es

$$f(x,y,z) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2t = 1 + 2t.$$

Sustituyendo en la fórmula, la integral curvilínea es

$$\int_C f(x,y,z)\ d\ell = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}[t+t^2]\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}(2\pi + 4\pi^2).$$

Ejercicios

Calcular la integral curvilínea correspondiente a cada función y curva dadas.

1. $\int_C \frac{x^3}{y}\ d\ell$, C: $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 2$ R: $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$
2. $\int_C \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}\ d\ell$, C: $y = \frac{x^2}{2}$, de $(1, 1/2)$ a $(0,0)$ R: $-\frac{11}{20}$
3. $\int_C (x+y)\ d\ell$, C: $x^2+y^2 = 4$, de $(2,0)$ a $(0,2)$ R: 8

4. $\int_C (x^2 - y)\, d\ell$, C: $x^2 + y^2 = 4$, de $(0,2)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ R: $2\sqrt{2} - \pi$

5. $\int_C (x + y)\, d\ell$, donde C es $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 0$, desde (0,1,0) hasta (1,0,0) R: $\sqrt{2}$

6. $\int_C (x - y + z - 2)\, d\ell$, donde C es $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 1$, desde (0,1,1) hasta (1,0,1) R: $-\sqrt{3}$

7. $\int_C (xy + y + z)\, d\ell$, donde C es $x = 2t$, $y = t$, $z = 2 - 2t$, $0 \le t \le 1$ R: 8

8. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, d\ell$, donde C es $x = 4\cos t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\, t$, $z = 3t$, $-2\pi \le t \le 2\pi$ R: $16\sqrt{13}\pi$

9. $\int_C (x + y + z)\, d\ell$, donde C es el segmento de recta que va de (1,2,3) hasta (0,-1,1) R: $3\sqrt{14}$

10. $\int_C \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}\, d\ell$, donde C es $x = t$, $y = t$, $z = t$, $1 \le t \le \infty$ R: 1

11. $\int_C (x + \sqrt{y} - z^2)\, d\ell$, donde C es la trayectoria que va por $x = t$, $y = t^2$, $z = 0$, desde (0,0,0) hasta (1,1,0) y por $x = 1$, $y = 1$, $z = t$, desde (1,1,0) hasta (1,1,1) R: $\frac{5\sqrt{5}+9}{6}$

12. $\int_C (x + \sqrt{y} - z^2)\, d\ell$, donde C es la trayectoria que va por $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, desde (0,0,0) hasta (0,0,1), por $x = 0$, $y = t$, $z = 1$, desde (0,0,1) hasta (0,1,1) y por $x = t$, $y = 1$, $z = 1$ desde (0,1,1) hasta (1,1,1) R: $-\frac{1}{6}$

9.2. Integrales curvilíneas de campos vectoriales

En el caso en que se tiene una trayectoria, pero el integrando es un campo vectorial, la integral de línea correspondiente se calcula con

$$\boxed{\int_C \vec{F}(x,y) \cdot\ d\vec{\ell} = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} F_x\ dx + F_y\ dy.} \tag{9.6}$$

Otra forma de calcular la integral curvilínea de una función vectorial es

$$\boxed{\int_C \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\ dt.} \tag{9.7}$$

Cuando C es una curva cerrada, se escribe

$$\boxed{\oint_C \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{\ell},} \tag{9.8}$$

y aunque no se dan los puntos de inicio o final, sí es importante establecer el sentido en que se recorre la curva de integración. Se toma como positivo el sentido opuesto al de avance de las manecillas del reloj.

Ejemplo

Calcular la integral curvilínea del campo $\vec{F}(x,y) = xy\hat{\imath} + x^2y^2\hat{\jmath}$ sobre la curva C, dada por $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 2$.

Solución

La integral se puede calcular con la fórmula 9.6, haciendo $y = x^2/2$ en el primer término de la integral, y $x^2 = 2y$ en el segundo término, obteniendo

$$\int_{(0,0)}^{(2,2)} xy\ dx + x^2y^2\ dy = \int_{(0,0)}^{(2,2)} x\left(\frac{x^2}{2}\right)\ dx + y(2y^2)\ dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{2}\ dx + \int_0^2 2y^3\ dy = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 + \left.\frac{y^4}{2}\right|_0^2 = 2 + 8 = 10.$$

La integral inicial se puede dividir en dos integrales porque en cada término tenemos sólo una variable.

Otra forma de calcular la integral, usando la fórmula 9.7, utiliza la parametrización siguiente para la curva C: $r(t) = (t, t^2/2)$, cuya derivada es $d\vec{r}/dt = (1, t)$, de donde el campo vectorial se vuelve $\vec{F}(t) = (t^3/2, t^6/4)$. Haciendo el producto punto correspondiente e integrando obtenemos

$$\int_0^2 \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^7}{4}\right)\ dt = \left.\frac{t^4}{8}\right|_0^2 + \left.\frac{t^8}{32}\right|_0^2 = 2 + 8 = 10.$$

Al igual que en las integrales curvilíneas sobre campos escalares, la generalización de esta integral para tres variables es simple si usamos una parametrización, quedando como

$$\boxed{\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\ dt.} \tag{9.9}$$

Ejemplo

Sea $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, con $0 \le t \le 2\pi$; y sea $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Calcular la integral de línea $\int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{\ell}$.

Solución

La derivada es

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1),$$

y la función es ahora

$$\vec{F}(t) = \operatorname{sen} t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + t\hat{k},$$

que al hacer el producto con la derivada anterior nos da

$$\vec{F}(t)\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (\operatorname{sen} t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + t\hat{k})\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) = \operatorname{sen} t\cos t - \cos t\operatorname{sen} t + t = t.$$

Finalmente, al sustituir en la fórmula 9.9, la integral es

$$\int_{\vec{r}(t)} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} t\ dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

Ejercicios

Calcular la integral curvilínea del campo vectorial dado, a lo largo de la curva indicada.

1. $\vec{F}(x,y) = xy\hat{\imath} - x^2\hat{\jmath}$; $y = x^2$, de (0,0) a (1,1). R: $-\frac{1}{4}$
2. $\vec{F}(x,y) = \cos x\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$; $y = \operatorname{sen} x$, de (0,0) a $(\pi, 0)$. R: 0
3. $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} - x\hat{k}$; el segmento de recta que une a los puntos (0,0,0) y (1,1,1). R: $\frac{1}{3}$
4. $\vec{F}(x,y,z) = z\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + 2x\hat{k}$; la curva de ecuaciones $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, de (0,0,0) a (1,1,1). R: $\frac{2}{5}$
5. $\vec{F}(x,y,z) = (x-z)\hat{\imath} + (y-z)\hat{\jmath} - (x+y)\hat{k}$; la línea poligonal que va sucesivamente de (0,0,0) a (1,0,0), a (1,1,0) y a (1,1,1). R: -1
6. Evaluar $\int_C xy\ dx + (x+y)\ dy$ a lo largo de la curva $y = x^2$ desde (-1,1) hasta (2,4) R: $\frac{191}{12}$
7. Evaluar $\int_C (x-y)\ dx + (x+y)\ dy$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo con vértices en (0,0), (1,0) y (0,1) R: 1
8. Evaluar $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ para el campo vectorial $\vec{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ desde (1,0) hasta (0,1) R: $-\frac{\pi}{2}$
9. Evaluar $\oint_C x^2y^2\ dx + x^3y\ dy$, donde C designa al cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1), orientado en sentido antihorario. R: $\frac{1}{6}$
10. Evaluar
$$\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2 + y^2}$$
donde C designa
a) el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, orientado en sentido antihorario R: 1
b) el cuadrado de vértices (-1,-1), (-1,1), (1,1) y (1,-1), orientado en sentido horario R: 0
c) la frontera orientada en sentido antihorario de la región definida por $1 \le x^2 + y^2 \le 2$, $y \ge 0$ R: $\frac{1}{2}$

9.3. Integrales curvilíneas en campos conservativos

Para un campo conservativo, es decir, uno para el que que $\vec{F} = \nabla f$, se cumple que

$$\boxed{\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \nabla f\cdot\ d\vec{\ell} = f(B) - f(A).} \tag{9.10}$$

Esto quiere decir que para campos conservativos no importa cuál sea la trayectoria de integración, sino sólo los puntos inicial y final. Este hecho tiene gran utilidad en muchas aplicaciones. En particular, cuando se tiene la integral curvilínea de un campo conservativo sobre una curva cerrada, el valor es siempre cero.

Ejemplo

Calcular la integral del campo $\vec{F}(x,y,z) = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xy\hat{k}$ sobre la recta que une a los puntos $A = (-1,3,9)$ y $B = (1,6,-4)$.

Solución

Para poder aplicar la fórmula 9.10 necesitamos primero ver si el campo dado es conservativo. Para esto obtenemos el rotacional de $\vec{F}$, lo que nos da

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \hat{\imath}(x-x) - \hat{\jmath}(y-y) + \hat{k}(z-z) = \vec{0}.$$

Por lo tanto, el campo es conservativo, así que existe una función f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Para determinar la función f procedemos como se explicó en el capítulo 8, obteniendo

$$\int yz\ dx = yzx, \quad \int xz\ dy = xzy, \quad \int xy\ dz = xyz,$$

de donde concluimos que $f(x,y,z) = xyz$ es un potencial para $\vec{F}$. Entonces, según la fórmula 9.10 tenemos que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(1,6,-4) - f(-1,3,9) = (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) = 3.$$

El cálculo de la integral de línea se puede llevar a cabo también por medio de la fórmula 9.9, viendo que la ecuación de la recta que une los puntos dados es

$$\vec{r}(t) = (-1,3,9) + t(2,3,-13) = (2t-1)\hat{\imath} + (3t+3)\hat{\jmath} + (-13t+9)\hat{k},$$

y su derivada es simplemente

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 13\hat{k}.$$

Con lo anterior, tenemos que el campo se escribe como función de t en la forma

$$\vec{F}(t) = (-39t^2 - 12t + 27)\hat{\imath} + (-26t^2 + 31t - 9)\hat{\jmath} + (6t^2 + 3t - 3)\hat{k},$$

con lo que al hacer el producto punto indicado por la fórmula nos da

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 (-234t^2 + 30t + 66)\ dt = \left[-\frac{234}{3}t^3 + 15t^2 + 66t\right]_0^1 = 3.$$

Ejercicios

Demostrar que los campos dados son conservativos y calcular las integrales

1. $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\ dx + 2y\ dy + 2z\ dz$ R: 49
2. $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz$ R: -2
3. $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\ dx + (x^2 - z^2)\ dy - 2yz\ dz$ R: -16
4. $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,\pi/4)} y^2\ dx + 2xy\ dy - \frac{2}{1+z^2}\ dz$ R: 25
5. $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \operatorname{sen} y \cos x\ dx + \cos y \operatorname{sen} x\ dy + \ dz$ R: 1

Evaluar
a) $\oint_C x\, dy$ *b)* $\oint_C y\, dx$
para la curva cerrada C dada, en el sentido antihorario.

1. El círculo $x^2 + y^2 = a^2$ R: 0
2. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ R: 0
3. La frontera del semidisco $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$ R: 0
4. El cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1) R: 0
5. El triángulo de vértices (0,0), (a,0) y (0,b) R: 0
6. Con base en los resultados hallados en los ejercicios precedentes, ¿qué valor se esperaría encontrar para
   a) $\oint_C x\, dy$ *b)* $\oint_C y\, dx$
   donde C designa una curva cerrada simple cualquiera del plano xy? R: 0

9.4. Superficies parametrizadas

Anteriormente vimos que una función de dos variables puede representar una superficie en el espacio. También vimos que las superficies cuádricas se pueden representar por medio de ecuaciones de segundo grado en tres variables. Una manera alterna de representar superficies es por medio de una parametrización; esto es análogo a la representación de curvas por medio de ecuaciones paramétricas; sólo que, en el caso de las superficies, se tendrán dos parámetros en lugar de uno. Una forma de describir la superficie es a través de la función vectorial

$$\vec{r}(u,v) = r_x(u,v)\hat{\imath} + r_y(u,v)\hat{\jmath} + r_z(u,v)\hat{k}. \tag{9.11}$$

Por supuesto que esta ecuación vectorial se puede reescribir como el sistema de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = r_x(u,v) \\ y = r_y(u,v) \\ z = r_z(u,v), \end{cases} \tag{9.12}$$

siendo u y v los parámetros. Para graficar esta superficie, necesitamos dar valores a u y v, y calcular el vector correspondiente. En cada punto final del vector encontrado colocaremos un punto de la superficie.

Ejemplo

Graficar la superficie

$$\vec{r}(u,v) = 2\cos u \cos v\hat{\imath} + 3\cos u \,\mathrm{sen}\, v\hat{\jmath} + \mathrm{sen}\, u\hat{k},\ 0 \le u \le \pi/2,\ 0 \le v \le \pi/2.$$

Solución

En la siguiente tabla se dan los valores que adquiere la función

u	v	x	y	z
0	0	2	0	0
0	$\pi/8$	1.8477	1.1480	0
0	$\pi/4$	1.4142	2.1213	0
0	$3\pi/8$	0.7653	2.7716	0
0	$\pi/2$	0	3	0
$\pi/8$	0	1.8477	0	0.3826
$\pi/8$	$\pi/8$	1.7071	1.0606	0.3826
$\pi/8$	$\pi/4$	1.3065	1.9598	0.3826
$\pi/8$	$3\pi/8$	0.70710677	2.5606	0.3826
$\pi/8$	$\pi/2$	0	2.7716	0.3826
$\pi/4$	0	1.4142	0	0.7071
$\pi/4$	$\pi/8$	1.3065	0.8117	0.7071
$\pi/4$	$\pi/4$	1	1.5	0.7071
$\pi/4$	$3\pi/8$	0.5411	1.9598	0.7071
$\pi/4$	$\pi/2$	0	2.1213	0.7071
$3\pi/8$	0	0.7653	0	0.9238
$3\pi/8$	$\pi/8$	0.7071	0.4393	0.9238
$3\pi/8$	$\pi/4$	0.5411	0.8117	0.9238
$3\pi/8$	$3\pi/8$	0.2928	1.0606	0.9238
$3\pi/8$	$\pi/2$	0	1.1480	0.9238
$\pi/2$	0	0	0	1
$\pi/2$	$\pi/8$	0	0	1
$\pi/2$	$\pi/4$	0	0	1
$\pi/2$	$3\pi/8$	0	0	1
$\pi/2$	$\pi/2$	0	0	1

Y la figura 9.1 muestra la gráfica de tales puntos, unidos por una malla que permite visualizar la forma de la superficie. En la práctica, por supuesto, es más fácil utilizar algún programa de graficación para representar las superficies parametrizadas.

Para la superficies parametrizadas, se define *suavidad* con ayuda de las derivadas parciales siguientes

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial r_x}{\partial u}\hat{\imath} + \frac{\partial r_y}{\partial u}\hat{\jmath} + \frac{\partial r_z}{\partial u}\hat{k}, \tag{9.13}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial r_x}{\partial v}\hat{\imath} + \frac{\partial r_y}{\partial v}\hat{\jmath} + \frac{\partial r_z}{\partial v}\hat{k}. \tag{9.14}$$

Se dice pues que la superficie $\vec{r}(u,v)$ es suave si las derivadas $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ son continuas y si además el producto cruz

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \tag{9.15}$$

no se anula en el dominio de los parámetros u y v. El que una superficie sea suave quiere decir que en su gráfica no hay *dobleces*, *puntas*,*esquinas*, etc.

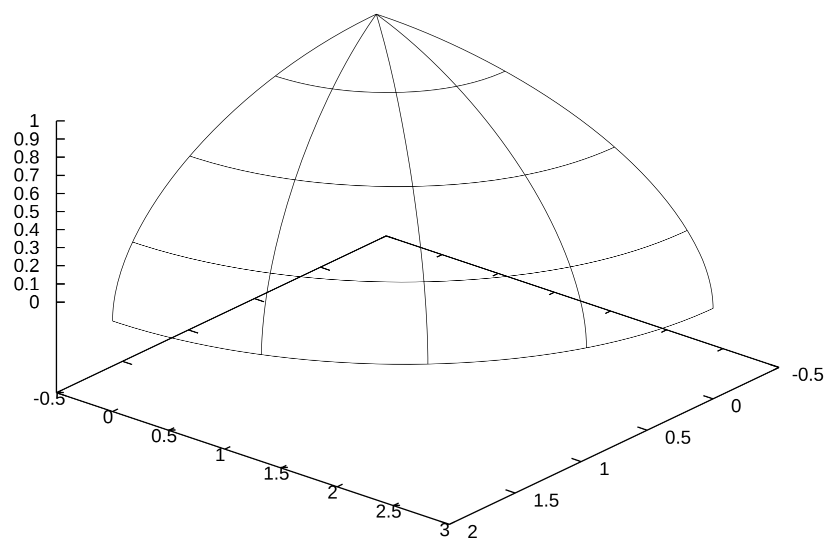


Figura 9.1: Superficie parametrizada

Ejemplo

¿Es suave la superficie siguiente?

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\hat{\imath} + u \operatorname{sen} v\hat{\jmath} + u\hat{k},\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

Solución

Las derivadas parciales nos dan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = u\cos v\hat{\imath} + u\operatorname{sen} v\hat{\jmath} + u\hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -u\operatorname{sen} v\hat{\imath} + u\cos v\hat{\jmath} + 0\hat{k},$$

mientras que el producto cruz nos da

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 1 \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\imath}u\cos v - \hat{\jmath}u\operatorname{sen} v + u\hat{k}.$$

Como vemos, el producto cruz se anula cuando $u = 0$, por lo que concluimos que la superficie no es suave. De hecho, la superficie en cuestión es un cono, que como sabemos, tiene una punta. Sin embargo, si se modificara el dominio de u, por ejemplo a $1 \le u \le 2$, se tendría una superficie suave, pero el cono quedaría truncado.

Ejercicios

Graficar las siguientes superficies. ¿Son suaves?

1. $\vec{r}(u,v) = u\hat{\imath} + 2v\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ R: suave

2. $\vec{r}(u,v) = \hat{\imath} - 2v\hat{\jmath} + u\hat{k}$ R: suave
3. $\vec{r}(u,v) = 2u\hat{\imath} - 3v\hat{\jmath} + uv\hat{k}$ R: suave
4. $\vec{r}(u,v) = u\cos v\hat{\imath} + u\,\mathrm{sen}\,v\hat{\jmath} + u\hat{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$ R: no suave
5. $\vec{r}(u,v) = \mathrm{sen}\,u\cos v\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v\hat{\jmath} + \cos u\hat{k}$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$ R: no suave
6. $\vec{r}(u,v) = 3\,\mathrm{sen}\,2u\hat{\imath} + 6\,\mathrm{sen}^2\,u\hat{\jmath} + v\hat{k}$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 5$ R: no suave
7. $\vec{r}(u,v) = \cos u\cosh v\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,u\cosh v\hat{\jmath} + \mathrm{senh}\,v\hat{k}$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$ R: suave
8. $\vec{r}(u,v) = u\cos v\hat{\imath} + u\,\mathrm{sen}\,v\hat{\jmath} + v\hat{k}$ R: suave
9. $\vec{r}(u,v) = (2+\cos u)\cos v\hat{\imath} + (2+\cos u)\,\mathrm{sen}\,v\hat{\jmath} + \mathrm{sen}\,u\hat{k}$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$ R: suave
10. $\vec{r}(u,v) = \mathrm{senh}\,u\cos v\hat{\imath} + \cosh u\,\mathrm{sen}\,v\hat{\jmath} + \cos u\hat{k}$ R: suave

9.5. Integrales de superficie en campos escalares

Si se tiene una función escalar $f(x,y,z)$ en el espacio y una superficie S dada por la ecuación $g(x,y,z) = cte$, cuya sombra sobre el plano xy es la región R, la integral de superficie de f sobre S es

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\ d\sigma = \iint_R f(x,y,z)\frac{\|\nabla g\|}{\|\nabla g\cdot\hat{k}\|}\ dA.} \tag{9.16}$$

Si para alguna superficie su sombra se proyecta mejor sobre algún otro plano de coordenadas, en lugar de $\hat{k}$ se tomará el vector unitario perpendicular a dicho plano.

Otra forma de calcular la integral de superficie consiste en expresar la superficie $g(x,y,z) = cte$ en forma paramétrica, con lo cual la integral se calcula por medio de

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\ d\sigma = \iint_D f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\|\ du\ dv.} \tag{9.17}$$

En particular, el área de una superficie se calcula usando $f(u,v) = 1$, esto es

$$A(S) = \iint_S \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\| du\ dv. \tag{9.18}$$

Si adicionalmente se tiene que $z = h(x,y)$, la integral se calcula por medio de

$$\iint_S f(x,y,z)\ dS = \iint_D f[x,y,h(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\ dx\ dy \tag{9.19}$$

Ejemplo

Calcular la integral de superficie de la función $f(x,y,z) = xyz$ sobre la sección de la esfera de radio unitario que queda en el primer octante.

Solución

Podemos utilizar la fórmula 9.16, usando la región $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, que es la sombra de la superficie sobre el plano xy, para lo cual necesitamos los siguientes cálculos

$$\nabla g = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}, \quad |\nabla g| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2,$$

$$\nabla g \cdot \hat{k} = 2z, \quad |\nabla g \cdot \hat{k}| = |2z| = 2z,$$

puesto que $x^2+y^2+z^2=1$ y $z \geq 0$, con lo que la integral es

$$\iint_S f(x,y,z)\ d\sigma = \iint_R xyz \cdot \frac{1}{2z}\ dx\ dy = \iint_S \frac{xy}{2}\ dx\ dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dx\ dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\theta \operatorname{sen}\theta\ r\ dr\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 \cos\theta\operatorname{sen}\theta\ d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\ d\theta = \frac{1}{8}\left.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.$$

También podemos utilizar la fórmula 9.17 si expresamos la semiesfera en forma paramétrica como

$$\vec{r}(u,v) = (\cos u\cos v, \cos u\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u), \quad 0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq \pi/2,$$

con lo cual obtenemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-\operatorname{sen} u\cos v, -\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, \cos u), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-\cos u\operatorname{sen} v, \cos u\cos v, 0),$$

entonces

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-\cos^2 u\cos v, -\cos^2 u\operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u\cos u), \quad \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\| = \cos u.$$

De lo anterior, la integral se transforma en

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\cos u\cos v)(\cos u\operatorname{sen} v)(\operatorname{sen} u)\cos u\ du\ dv = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\cos^3 u\operatorname{sen} u\cos v\operatorname{sen} v\ du\ dv =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left.\frac{\cos^4 u}{4}\right|_0^{\pi/2}\cos v\operatorname{sen} v\ dv = -\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{\cos^2 v}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.$$

Por último, calculemos la integral usando la fórmula 9.19, habida cuenta de que la superficie usada se puede expresar como $z = h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Para ello calculamos

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{y}{1-x^2-y^2},$$

y luego

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Con lo anterior, la integral se transforma en

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dx\ dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\ r\ dr\ d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 \cos\theta\operatorname{sen}\theta\ d\theta = \frac{1}{4}\left.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.$$

Ejercicios

Integrar la función dada sobre la superficie correspondiente

1. $f(x,y,z) = x$ sobre el cilindro parabólico $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 3$ R: $4(17\sqrt{17}-1)$
2. $f(x,y,z) = z$ sobre el cilindro $y^2+z^2 = 4$, $z \ge 0$, $1 \le x \le 4$ R: 24
3. $f(x,y,z) = x^2$ sobre la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ R: $\frac{2}{3}$
4. $f(x,y,z) = z^2$ sobre el hemisferio $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \ge 0$ R: $\frac{\pi}{3}$
5. $f(x,y,z) = z$ sobre la porción del plano $x+y+z = 4$ encima del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, en el plano xy R: $3\sqrt{3}$
6. $f(x,y,z) = z - x$ sobre el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$ R: π
7. $f(x,y,z) = x+y+z$ sobre el cubo del primer octante cortado por los planos $x = a$, $y = a$, $z = a$ R: 49
8. $f(x,y,z) = y+z$ sobre la cuña del primer octante acotada por los planos coordenados y los planos $x = 2$ y $y+z = 1$ R: $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$
9. $f(x,y,z) = xyz$ sobre el paralelepípedo $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ R: -16
10. $f(x,y,z) = xyz$ sobre el paralelepípedo acotado por los planos $x = \pm a$, $y = \pm b$ y $z = \pm c$ R: 0
11. $f(x,y,z) = x+y+z$ sobre la porción del plano $2x+2y+z = 2$ en el primer octante R: 1
12. $f(x,y,z) = x\sqrt{y^2+4}$ sobre el cilindro parabólico $y^2+4z = 16$ cortada por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$ R: $\frac{13}{48}$

9.6. Integrales de superficie en campos vectoriales

Cuando se tiene una función vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ en el espacio y una superficie S dada por la ecuación $g(x,y,z) = cte$, cuya sombra sobre el plano xy es la región R, la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre S es

$$\boxed{\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{\sigma} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}\ d\sigma = \iint_R \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}\frac{\|\nabla g\|}{\|\nabla g\cdot\hat{k}\|}\ dA.} \qquad (9.20)$$

El vector unitario normal se puede calcular con

$$\hat{n} = \frac{\pm\nabla g}{\|\nabla g\|}, \qquad (9.21)$$

donde el signo se toma dependiendo de la orientación que se haya elegido para la superficie. Con esto, la integral de superficie queda como

$$\boxed{\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{\sigma} = \pm \iint_R \vec{F}(x,y,z)\cdot \frac{\nabla g}{\|\nabla g\cdot \hat{k}\|}\ dA.} \tag{9.22}$$

Al igual que en las integrales de superficie sobre campos escalares, si para alguna superficie la sombra se proyecta mejor sobre algún otro plano de coordenadas, en lugar de $\hat{k}$ se tomará el vector unitario perpendicular a dicho plano.

Ejemplo

Encontrar la integral de superficie del campo $\vec{F}(x,y,z) = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ sobre la superficie S dada por el cubo unitario en el primer octante.

Solución

En este caso S consta de 6 superficies (planos) diferentes. Identificamos a cada uno de ellos en la forma siguiente: S_1 es $x=0$, S_2 es $x=1$, S_3 es $y=0$, S_4 es $y=1$, S_5 es $z=0$ y S_6 es $z=1$.

Para S_1 y S_2 la sombra de las superficies se proyecta mejor sobre el plano yz, con lo que el vector normal es $\hat{n}_1 = -\hat{\imath}$ para S_1 y es $\hat{n}_2 = \hat{\imath}$ para S_2. Análogamente, se tiene para las otras superficies que $\hat{n}_3 = -\hat{\jmath}$, $\hat{n}_4 = \hat{\jmath}$, $\hat{n}_5 = -\hat{k}$ y $\hat{n}_6 = \hat{k}$. Asimismo, los gradientes son los vectores unitarios perpendiculares a cada uno de los planos de coordenadas. Usando la fórmula 9.22 escribimos la integral como

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}\ d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_1\ d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_2\ d\sigma + \iint_{S_3} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_3\ d\sigma +$$

$$+ \iint_{S_4} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_4\ d\sigma + \iint_{S_5} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_5\ d\sigma + \iint_{S_6} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_6\ d\sigma.$$

Calculando cada una de ellas tenemos

$$\iint_{S_1} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_1\ d\sigma = \iint_{S_1} (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k})\cdot(-\hat{\imath})\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\hat{\imath}|}\ dA =$$

$$= -\int_0^1\int_0^1 x^2\ dy\ dz = 0.$$

$$\iint_{S_2} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_2\ d\sigma = \iint_{S_1} (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k})\cdot(\hat{\imath})\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\hat{\imath}|}\ dA =$$

$$= -\int_0^1\int_0^1 x^2\ dy\ dz = x^2 = 1.$$

$$\iint_{S_3} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_3\ d\sigma = \iint_{S_1} (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k})\cdot(-\hat{\jmath})\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\hat{\jmath}|}\ dA =$$

$$= -\int_0^1\int_0^1 x^2\ dx\ dz = -\int_0^1 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\ dz = -\frac{1}{3}.$$

$$\iint_{S_4} \vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}_4\ d\sigma = \iint_{S_1} (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k})\cdot(\hat{\jmath})\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\hat{\jmath}|}\ dA =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 \; dx \; dz = \int_0^1 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \; dz = \frac{1}{3}.$$

$$\iint_{S_5} \vec{F}(x,y,z) \cdot \hat{n}_5 \; d\sigma = \iint_{S_1} (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}) \cdot (-\hat{k}) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \hat{k}|} \; dA =$$

$$= -\int_0^1 \int_0^1 z^2 \; dx \; dy = 0.$$

$$\iint_{S_6} \vec{F}(x,y,z) \cdot \hat{n}_6 \; d\sigma = \iint_{S_1} (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}) \cdot (\hat{k}) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \hat{k}|} \; dA =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 \; dy \; dz = z^2 = 1.$$

Finalmente, sólo sumamos los valores de cada una de las integrales anteriores, para obtener que

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \hat{n} \; d\sigma = 2.$$

Ejercicios

Encontrar el flujo de $\vec{F}$ hacia afuera y a través de la frontera de la región D

1. $\vec{F} = x\hat{\imath} + z\hat{\jmath}$
   D: el tetraedro limitado por los planos de referencia y el plano $x + 2y + 3z = 6$. R: 22
2. $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
   D: la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. R: $2\pi a^3$
3. $\vec{F} = y\hat{\imath} + z\hat{k}$
   D: la superficie cónica definida por $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. R: $\frac{2}{3}\pi$
4. $\vec{F} = (y - x)\hat{\imath} + (z - y)\hat{\jmath} + (y - x)\hat{k}$
   D : el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$ R:-16
5. $\vec{F} = y\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} - z\hat{k}$
   D : la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ R: -8π
6. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$
   D : la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ R: $16\pi^2$
7. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} - 2xy\hat{\jmath} + 3xz\hat{k}$
   D : la región del primer octante cortada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ R: 3π
8. $\vec{F} = (6x^2 + 2xy)\hat{\imath} + (2y + x^2z)\hat{\jmath} + 4x^2y^3\hat{k}$
   D : la región del primer octante cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$ R: 24π
9. $\vec{F} = 2xz\hat{\imath} - xy\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$
   D : la cuña del primer octante cortada por el plano $y + z = 4$ y el cilindro elíptico $4x^2 + y^2 = 16$ R: $-\frac{40}{3}$
10. $\vec{F} = x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}$
    D : la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ R: $\frac{12}{5}a^5\pi$
11. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$
    a) D : el cubo del primer octante cortado por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ R: 3
    b) D : el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$ R: 0
    c) D : la región del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = 1$ R: 4π

9.7. Relaciones entre las integrales

Las integrales curvilíneas y de superficie en campos vectoriales están relacionadas entre sí, así como con las integrales múltiples, en los casos en que las curvas, superficies o volúmenes de integración son cerradas. Tales relaciones se enuncian con el nombre del matemático que demostró cada una de ellas.

9.7.1. Teorema de Green

En una región del plano xy, digamos R, que esté encerrada por una curva cerrada, digamos C, se cumple que

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k}\ dA.} \tag{9.23}$$

El enunciado matemático anterior se llama *forma tangencial* del teorema de Green. A la integral de línea que ahí aparece, a veces se le llama *circulación* del campo vectorial.

Lo anterior se puede escribir también como

$$\boxed{\oint_C F_x\ dx + F_y\ dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)\ dx\ dy,} \tag{9.24}$$

que muestra en forma explícita los cálculos que se deben realizar para hallar cada miembro de la igualdad.

Una forma alterna de enunciar el teorema de Green (*forma normal*) es

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\ d\ell = \iint_R \nabla \cdot \vec{F}\ dA.} \tag{9.25}$$

A la integral de línea que aparece aquí, a veces se le llama *flujo* del campo vectorial.

La ecuación anterior también se puede escribir como

$$\boxed{\oint_C F_x\ dy - F_y\ dx = \iint_R \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)\ dx\ dy,} \tag{9.26}$$

que indica en forma explícita los cálculos que hay que realizar.

Ejemplo

Comprobar el teorema de Green para el campo $xy^2\hat{\imath} + x^3\hat{\jmath}$, siendo C el rectángulo con vértices (0,0), (2,0), (2,3) y (0,3).

Solución

Para evaluar el primer miembro de la ecuación 9.24, dividimos el rectángulo C en cuatro curvas C_1: $y = 0$, C_2: $x = 2$, C_3: $y = 3$ y C_4: $x = 0$. Con esto se tiene que

$$\oint_C F_x\ dx + F_y\ dy = \int_{C_1} (xy^2\ dx + x^3\ dy) + \int_{C_2} (xy^2\ dx + x^3\ dy + \int_{C_3} (xy^2\ dx + x^3\ dy) + \int_{C_4} (xy^2\ dx + x^3\ dy).$$

Para evaluar cada integral tomamos las curvas correspondientes para expresar la función en términos de la variable de integración correspondiente, obteniendo

$$\int_{C_1} (xy^2\ dx + x^3\ dy) = \int_0^2 x(0)^2\ dx + \int x^3\ d(0) = 0.$$

$$\int_{C_2} (xy^2\ dx + x^3\ dy) = \int (2)y^2\ d(2) + \int_0^3 (2)^3\ dy = 0 + 8(3) = 24.$$

$$\int_{C_3} (xy^2\ dx + x^3\ dy) = \int_2^0 x(3)^2\ dx + \int x^3\ d(3) = \left.\frac{9}{2}x^2\right|_0^2 = -18.$$

$$\int_{C_4} (xy^2\ dx + x^3\ dy) = \int (0)y^2\ d(0) + \int_3^0 (0)^3\ dy = 0.$$

Sumando obtenemos

$$\int_C (xy^2\ dx + x^3\ dy) = 6.$$

Para evaluar el segundo miembro de la ecuación 9.24, calculamos las derivadas parciales correspondientes

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2xy,$$

con lo que la integral se vuelve

$$\int_0^3 \int_0^2 (3x^2 - 2xy)\ dx\ dy = \int_0^3 \left.(x^3 - x^2 y)\right|_0^2\ dy =$$

$$\int_0^3 (8 - 4y)\ dy = \left.8y - 2y^2\right|_0^3 = 24 - 18 = 6.$$

También podemos verificar el teorema en su forma normal, mediante la ecuación 9.26. Usando las mismas curvas C_i que antes, tenemos para el primer miembro

$$\oint_C F_x\ dy - F_y\ dx = \int x(0)^2\ d(0) - \int_0^2 x^3\ dx + \int_0^3 (2)y^2\ dy - \int (2)^3\ d(2) +$$

$$+ \int x(3)^2\ d(3) - \int_2^0 x^3\ dx + \int_3^0 (0)y^2\ dy - \int (0)^3\ d(0) =$$

$$= -\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 + \left.\frac{2}{3}y^3\right|_0^3 - \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = -4 + 18 + 4 = 18,$$

mientras que para el segundo miembro, tenemos que

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\ dx\ dy = \int_0^2 \int_0^3 (y^2 - 0)\ dx\ dy = \int_0^3 \left.y^2 x\right|_0^2\ dy = 2\int_0^3 y^2\ dy = \left.\frac{2}{3}y\right|_0^3 = 18.$$

Obsérvese que los valores de las integrales obtenidas en ambas formas del teorema de Green son diferentes. Sin embargo, la igualdad entre los miembros de cada ecuación sí se comprueba en ambos casos. Esto es de gran utilidad para evaluar en forma más sencilla integrales que sean más o menos difíciles de calcular en una u otra forma.

Ejercicios

Calcular la circulación en sentido contrario a las manecillas del reloj y el flujo hacia afuera para cada campo $\vec{F}$ y curva C dados

1. $\vec{F} = y^2\hat{\imath} + (x+y)^2\hat{\jmath}$, C el contorno del triángulo de vértices $A(a,0)$, $B(a,a)$, $C(0,a)$. R: $\frac{2}{3}a^3$, $\frac{4}{3}a^3$
2. $\vec{F} = x(y-1)\hat{\imath} + x^2\hat{\imath}$, C el contorno de la figura limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 9$. R: 0, $\frac{792}{5}$
3. $\vec{F} = (2x-3y)\hat{\imath} + (x-y)\hat{\jmath}$, C la circunferencia unitaria $x^2+y^2 = 1$, en sentido positivo. R: 4π, π
4. $\vec{F} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$, $C: \quad \vec{r}(t) = a\cos t\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}\,t\hat{\jmath}$, $0 \le t \le 2\pi$ R: $2\pi a^2$, 0
5. $\vec{F} = y\hat{\imath}$, $C: \quad \vec{r}(t) = a\cos t\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}\,t\hat{\jmath}$, $0 \le t \le 2\pi$ R: π, 0
6. $\vec{F} = 2x\hat{\imath} - 3y\hat{\jmath}$, $C: \quad \vec{r}(t) = a\cos t\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}\,t\hat{\jmath}$, $0 \le t \le 2\pi$ R: 0, $-\pi a^2$
7. $\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + xy^2\hat{\jmath}$, $C: \quad \vec{r}(t) = a\cos t\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}\,t\hat{\jmath}$, $0 \le t \le 2\pi$ R: 0, 0
8. $\vec{F} = (x-y)\hat{\imath} + (y-x)\hat{\jmath}$, C el cuadrado acotado por $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ R: 0, 2
9. $\vec{F} = (x^2+4y)\hat{\imath} + (x+y^2)\hat{\jmath}$, C el cuadrado acotado por $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ R: -3, 2
10. $\vec{F} = (y^2-x^2)\hat{\imath} + (x^2+y^2)\hat{\jmath}$, C el triángulo acotado por $x=3$, $y=0$, $y=x$ R: 9, -9
11. $\vec{F} = (x+e^x\,\mathrm{sen}\,y)\hat{\imath} + (x+e^x\cos y)\hat{\jmath}$, C el lazo derecho de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ R: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$
12. $\vec{F} = xy\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath}$, C la región acotada por $y = x^2$ y $y = x$ en el primer cuadrante R: $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{12}$

9.7.2. Teorema de Stokes

En una superficie S en el espacio limitada por una curva cerrada C, se cumple que

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{\sigma}.} \tag{9.27}$$

Esto establece una equivalencia entre una integral curvilínea en el espacio y una de superficie.

Ejemplo

Verificar el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^2-y)\hat{\imath} + 4z\hat{\jmath} + x^2\hat{k}$ sobre la sección del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ cortada por el plano $z = 2$.

Solución

Para calcular la integral curvilínea, parametrizamos la curva donde se cruzan ambas superficies de la siguiente forma

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\hat{\imath} + 2\,\mathrm{sen}\,t\hat{\jmath} + 2\hat{k},$$

con lo que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2\,\mathrm{sen}\,t\hat{\imath} + 2\cos t\hat{\jmath} + 0\hat{k}.$$

El campo en función de t se escribe como

$$\vec{F}(t) = (4\cos^2 t - 2\,\mathrm{sen}\,t)\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 4\cos^2 t\hat{k},$$

con lo que el producto punto nos da

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -8\cos^2 t \operatorname{sen} t + 4\operatorname{sen}^2 t + 16\cos t.$$

Con todo lo anterior, la integral es

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} (-8\cos^2 t \operatorname{sen} t + 4\operatorname{sen}^2 t + 16\cos t)\ dt =$$

$$= \left(\frac{8}{3}\cos^3 t + 2\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) + 16\operatorname{sen} t - \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Para evaluar la integral de superficie, calculamos

$$\nabla g = -2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}, \quad \nabla g \cdot \hat{k} = 2z = 4,$$

y

$$\nabla \times \vec{F} = 4\hat{\imath} - 2x\hat{\jmath} + k.$$

Con lo anterior tendremos que la integral es

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4, -2x, 1) \cdot \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}, 1\right)\ dy\ dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-2x + xy + 1)\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2r\cos\theta + r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 1)\ r\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{r^4}{4}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{16}{3}\cos\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2\right)\ d\theta = \left(-\frac{16}{3}\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta + 2\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Ejercicios

Calcular la circulación de cada campo $\vec{F}$ alrededor de la curva C en sentido antihorario, viendo desde arriba la curva

1. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$, C es la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy R: 4π
2. $\vec{F} = 2y\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$, C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano xy R: 9π
3. $\vec{F} = y\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + x^2\hat{k}$, C la frontera del triángulo cortado del plano $x + y + z = 1$ por el primer octante R: $-\frac{5}{6}$
4. $\vec{F} = (y^2 + z^2)\hat{\imath} + (x^2 + z^2)\hat{\jmath} + (x^2 + y^2)\hat{k}$, C es la frontera del triángulo cortado del plano $x + y + z = 1$ por el primer octante R: 0
5. $\vec{F} = (y^2 + z^2)\hat{\imath} + (x^2 + y^2)\hat{\jmath} + (x^2 + y^2)\hat{k}$ C es el cuadrado acotado por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$ en el plano xy R: -16
6. $\vec{F} = x^2y^3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + z\hat{k}$, C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$ R: -8π

Calcular la integral de superficie del rotacional de cada campo dado, sobre la superficie indicada

1. $\vec{F} = 2z\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} + 5y\hat{k}$, $S : \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\hat{\imath} + (r\operatorname{sen}\theta)\hat{\jmath} + (4 - r^2)\hat{k}$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$ R: -12π
2. $\vec{F} = (y - z)\hat{\imath} + (z - x)\hat{\jmath} + (x + z)\hat{k}$, $S : \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\hat{\imath} + (r\operatorname{sen}\theta)\hat{\jmath} + (9 - r^2)\hat{k}$, $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$ R: -18π
3. $\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + 2y^3z\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$, $S : \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\hat{\imath} + (r\operatorname{sen}\theta)\hat{\jmath} + r\hat{k}$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ R: $-\frac{\pi}{4}$
4. $\vec{F} = (x - y)\hat{\imath} + (y - z)\hat{\jmath} + (z - x)\hat{k}$, $S : \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\hat{\imath} + (r\operatorname{sen}\theta)\hat{\jmath} + (5 - r)\hat{k}$, $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le 2\pi$ R: 25π
5. $\vec{F} = 3y\hat{\imath} + (5-2x)\hat{\jmath} + (z^2-2)\hat{k}$, $S : \vec{r}(\phi,\theta) = (\sqrt{3}\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\hat{\imath} + (\sqrt{3}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)\hat{\jmath} + (\sqrt{3}\cos\phi)\hat{k}$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$ R: -12π
6. $\vec{F} = y^2\hat{\imath} + z^2\hat{\jmath} + x\hat{k}$, $S : \vec{r}(\phi,\theta) = (2\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\hat{\imath} + (2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)\hat{\jmath} + (2\cos\phi)\hat{k}$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$ R: 0

9.7.3. Teorema de Gauss

En un volumen V encerrado por una superficie S se cumple que

$$\boxed{\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{F})\ dV.} \tag{9.28}$$

En Rusia y regiones aledañas es conocido como teorema de Ostrogradski, quien lo demostró en forma independiente.

Ejemplo

Calcular la integral de superficie del campo $\vec{F} = 3y^2z^3\hat{\imath} + 9x^2yz^2\hat{\jmath} - 4xy^2\hat{k}$ sobre la superficie dada por el cubo suyas caras tienen las ecuaciones $(\pm1, \pm1, \pm1)$.

Solución

Por la ecuación 9.28 sabemos que la integral de superficie de $\vec{F}$ es equivalente a la integral de volumen

$$\iiint_V (\nabla\cdot\vec{F})\ dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 9x^2z^2\ dz\ dy\ dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 3x^2z^3\Big|_{-1}^{1}\ dy\ dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 6x^2\ dy\ dx = \int_{-1}^{1} 6x^2y\Big|_{-1}^{1}\ dx = \int_{-1}^{1} 12x^2\ dx = 8.$$

Para que se aprecie la cantidad de trabajo ahorrado, calculemos la integral de superficie.

En primer lugar, es necesario dividir el cubo en 6 superficies, S_1: $x = 1$, S_2: $x = -1$, S_3: $y = 1$, S_4: $y = -1$, S_5: $z = 1$, S_6: $z = -1$.

Para cada una de ellas, el vector normal es, $\hat{n}_1 = \hat{\imath}$, $\hat{n}_2 = \hat{-i}$, $\hat{n}_3 = \hat{\jmath}$, $\hat{n}_4 = \hat{-j}$, $\hat{n}_5 = \hat{k}$, $\hat{n}_6 = \hat{-k}$.

Asimismo, en cada caso el elemento de superficie $d\sigma$ es igual al elemento de área dA, dado que la proyección de los planos es igual a los planos mismos. En caso de que no ocurriera así, sería necesario calcular cada vez el elemento de superficie.

Con esto, la integral de superficie es

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 3y^2z^3\ dy\ dz - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 3y^2z^3\ dy\ dz + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 9x^2(1)z^2\ dx\ dz -$$

$$- \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 9x^2(-1)z^2\ dx\ dz + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-4xy)\ dy\ dx - \int_{-1}^{1}(-4xy)\ dy\ dx =$$

$$= 18\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2z^2\ dx\ dz = 18\int_{-1}^{1} z^2\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1}\ dz = 12\int_{-1}^{1} z^2\ dz = 12\ \frac{z^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = 8.$$

Ejercicios

Usar el teorema de la divergencia para encontrar el flujo de $\vec{F}$ hacia afuera y a través de la frontera de la región D

1. $\vec{F} = (y-x)\hat{\imath} + (z-y)\hat{\jmath} + (y-x)\hat{k}$
   D : el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$ R: -16
2. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$
   a) D : el cubo del primer octante cortado por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ R: 3
   b) D : el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$ R: 0
   c) D : la región del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = 1$ R: 4π
3. $\vec{F} = y\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} - z\hat{k}$
   D : la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ R: -8π
4. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$
   D : la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ R: $16\pi^2$
5. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} - 2xy\hat{\jmath} + 3xz\hat{k}$
   D : la región del primer octante cortada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ R: 3π
6. $\vec{F} = (6x^2 + 2xy)\hat{\imath} + (2y + x^2z)\hat{\jmath} + 4x^2y^3\hat{k}$
   D : la región del primer octante cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$ R: 24π
7. $\vec{F} = 2xz\hat{\imath} - xy\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$
   D : la cuña del primer octante cortada por el plano $y + z = 4$ y el cilindro elíptico $4x^2 + y^2 = 16$ R: $-\frac{40}{3}$
8. $\vec{F} = x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}$
   D : la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ R: $\frac{12}{5}a^5\pi$
9. $\vec{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})$
   D : la región $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ R: 12π
10. $\vec{F} = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
    D : la región $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ R: 45π
11. $\vec{F} = (5x^3 + 12xy^2)\hat{\imath} + (y^3 + e^y \operatorname{sen} z)\hat{\jmath} + (5z^3 + e^y \cos z)\hat{k}$
    D : la región entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ R: $12\pi(4\sqrt{2} - 1)$
12. $\vec{F} = \ln(x^2 + y^2)\hat{\imath} - \left(\frac{2z}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)\hat{\jmath} + z\sqrt{x^2 + y^2}\hat{k}$
    D : el cilindro hueco $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $-1 \leq z \leq 2$ R: $\pi(14 - 6\ln 2$

Bibliografía

ADAMS, R. A. *Calcul différentiel et intégral dans l'espace.* Addison Wesley. Montreal, 1989.

Introducción a las matemáticas superiores. Tomo II. 2a ed. Universidad de Ciencia y Tecnología de China. Hefei, 1996.

DEMIDOVICH, B. *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Mir. Moscú, 1973.

KAPLAN, W. *Advanced Calculus.* 5th ed. Addison Wesley. Boston, 2003.

KRASNOV, M. ET AL. *Curso de matemáticas superiores.* 2a ed. URSS. Moscú, 2003.

LARSON, R. ET AL. *Cálculo.* Octava edición. Mc Graw Hill. México, 2006.

PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral.* Mir. Moscú, 1977.

STEWART, J. *Cálculo de una variable.* 4a ed. Thompson. México, 2002.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo con geometría analítica.* 2a ed. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1989.

THOMAS, G. B. *Cálculo de una variable.* 11a ed. Pearson. México, 2006.

Esta obra se terminó de imprimir
en el mes de julio del 2010,
en el Taller de Impresión de la
Universidad Autónoma de la Ciudad de México,
con un tiraje de 2,500 ejemplares.

El cálculo vectorial es una rama de las matemáticas que analiza funciones multivariables y que, al contar con características particulares, requiere de un curso especial para su estudio. De acuerdo a esta necesidad, *Métodos operativos de cálculo vectorial* describe los conceptos básicos de este análisis con énfasis en los procedimientos, subrayando así su uso como herramienta matemática indispensable para la solución de problemas en ingeniería.

El contenido abarca los siguientes temas: vectores, rectas y planos en el espacio tridimensional, superficies cuadráticas, funciones vectoriales, funciones de varias variables, derivadas parciales, integrales múltiples, campos vectoriales e integrales curvilíneas y de superficie.

En todos los apartados se han insertado gráficos que apoyan al texto ante el nivel de abstracción propio de esta disciplina. De igual forma, se incluyen ejemplos y ejercicios a fin de que el aprendizaje pueda ser vinculado significativamente al terreno profesional del ingeniero en formación.

Fausto Cervantes Ortiz es matemático, físico y maestro en astronomía por la UNAM. Ha publicado diversos textos para la enseñanza de la matemática e impartido cátedra a ingenieros y científicos de distintas especialidades. Actualmente se desempeña como profesor-investigador de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México .

UACM
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

materiales
educativos