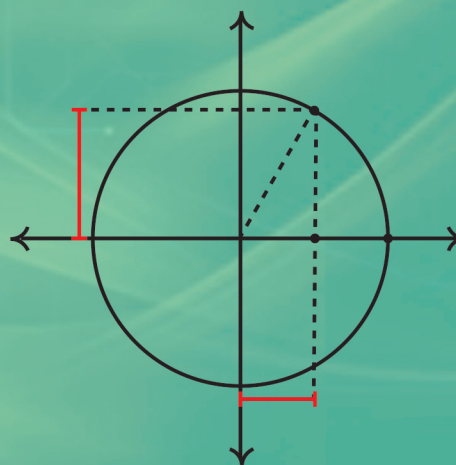
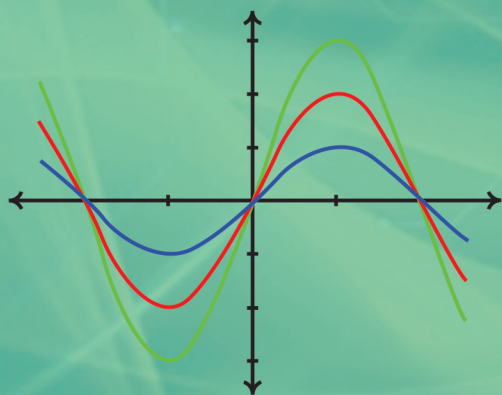
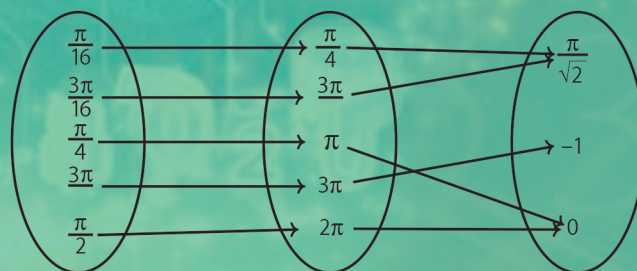
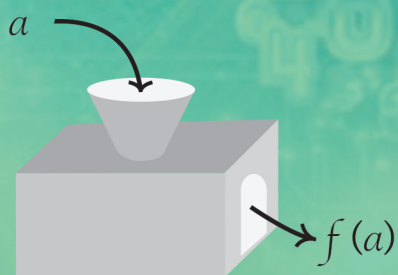


Precálculo

Sael Cruz Cabello



Precálculo

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Dr. Galdino Morán López
Rector

Lic. Marissa Reyes Godínez
Coordinadora de Difusión Cultural y Extensión Universitaria

Dra. Leticia Romero Chumacero
Coordinadora Académica

M. en I. Luis René Sagredo Hernández
Coordinador del Colegio de Ciencia y Tecnología

Eduardo Mosches Nitkin
Responsable de la Biblioteca del Estudiante

Precálculo

Sael Cruz Cabello

FICHA CATALOGRÁFICA E-S/N

Cruz Cabello, Sael

Precálculo / Sael Cruz Cabello. — México : Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2019

viii, 224 p. : il. ; 28 cm.

ISBN 978-607-9465-86-5

1.Cálculo — Problemas y ejercicios. — 2. Funciones (Matemáticas). — I. t.

LC QA331.3

Dewey 512.119

Precálculo

primera edición, 2019

© Sael Cruz Cabello

D.R. © Universidad Autónoma de la Ciudad de México

García Diego 168, col. Doctores,
del. Cuauhtémoc, c. p. 06720, México, D F

ISBN: 978-607-9465-86-5

Biblioteca del Estudiante: [http://portal.uacm.edu.mx/Estudiantes/
BibliotecadelEstudiante/tabid/276/Default.aspx](http://portal.uacm.edu.mx/Estudiantes/BibliotecadelEstudiante/tabid/276/Default.aspx)

Material educativo universitario de distribución gratuita para estudiantes de la UACM. Prohibida su venta

Hecho e impreso en México

Índice general

Introducción	vii
1. Conjuntos	1
1.1. Definición de conjuntos	1
1.1.1. Conjunto como una lista	1
1.1.2. Números naturales y números enteros	2
1.1.3. Conjuntos como elementos con una propiedad	3
1.1.4. Números racionales y números reales	6
1.1.5. Resumen	9
1.1.6. Ejercicios de la sección	10
1.2. Igualdad de conjuntos	11
1.2.1. Subconjuntos	11
1.2.2. Igualdad entre conjuntos	12
1.2.3. Ejercicios de la sección	13
1.3. Operaciones con conjuntos	14
1.3.1. Unión de conjuntos	14
1.3.2. Intersección de conjuntos	14
1.3.3. Diferencia de conjuntos	15
1.3.4. Diagramas de Venn	16
1.3.5. Ejercicios de la sección	19
1.4. Intervalos	21
1.4.1. Ejercicios de la sección	25
1.5. Ejercicios del capítulo	27
2. Funciones y sus gráficas	31
2.1. Funciones	31
2.1.1. Definición y ejemplos	31
2.1.2. Dominio natural de una función	36

2.1.3.	Igualdad de funciones	37
2.1.4.	Función valor absoluto y función mayor entero	37
2.1.5.	Más ejemplos	39
2.1.6.	Ejercicios de la sección	40
2.2.	Tabulación y graficación	42
2.2.1.	Graficación	43
2.2.2.	Tabulación	49
2.2.3.	Gráficas de $ x $ y $[x]$	51
2.2.4.	Ejercicios de la sección	53
2.3.	Mover una gráfica	55
2.3.1.	Ejercicios de la sección	61
2.4.	Otras características importantes de una función	64
2.4.1.	Funciones crecientes y funciones decrecientes	64
2.4.2.	Funciones pares y funciones impares	70
2.4.3.	Ejercicios de la sección	76
2.5.	Ejercicios del capítulo	80
3.	Rango y preimagen	87
3.1.	La imagen de un conjunto	87
3.1.1.	Ejercicios de la sección	92
3.2.	Rango de una función: conjuntista y geoméricamente	94
3.2.1.	Ejercicios de la sección	97
3.3.	La preimagen de un punto	98
3.3.1.	Ejercicios de la sección	102
3.4.	La preimagen de un conjunto	103
3.4.1.	Ejercicios de la sección	106
3.5.	Funciones inyectivas y suprayectivas	108
3.5.1.	Funciones inyectivas	108
3.5.2.	Funciones suprayectivas	110
3.5.3.	Ejercicios de la sección	112
3.6.	Ejercicios del capítulo	113
4.	Funciones de la forma $f(x) = mx + b$	117
4.1.	Gráfica de funciones del tipo $f(x) = mx + b$	117
4.1.1.	Ejercicios de la sección	125
4.2.	Otro enfoque	126
4.2.1.	Ejercicios de la sección	130
4.3.	Aplicaciones	131

4.3.1.	¿Qué es un modelo matemático?	131
4.3.2.	Tres modelos matemáticos sencillos	132
4.3.3.	Ejercicios de la sección	136
4.4.	Ejercicios del capítulo	138
5.	Funciones seno y coseno	145
5.1.	Medidas de ángulos en radianes	145
5.1.1.	Ángulos positivos y negativos	148
5.1.2.	Ejercicios de la sección	149
5.2.	Funciones seno y coseno	150
5.2.1.	Dominio y rango de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$	152
5.2.2.	Comparación de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ con la definición mediante triángulos rectángulos	152
5.2.3.	Evaluación de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para algunos valores de t	153
5.2.4.	La periodicidad de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$	157
5.2.5.	La identidad $\text{cos}^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$	158
5.2.6.	Ejercicios de la sección	160
5.3.	Análisis de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$	161
5.3.1.	Gráficas de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$	161
5.3.2.	$f(x) = a \text{sen}(bx + h) + k$	163
5.3.3.	Intervalos donde $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ son funciones inyectivas	167
5.3.4.	Ejercicios de la sección	167
5.4.	Ejercicios del capítulo	168
6.	Construyendo nuevas funciones	173
6.1.	Operaciones con funciones que se pueden hacer con números	173
6.1.1.	Multiplicación por una constante	173
6.1.2.	Suma y resta de funciones	177
6.1.3.	Multiplicación y división de funciones	180
6.1.4.	Resumen	183
6.1.5.	Ejercicios de la sección	184
6.2.	Composición de funciones	187
6.2.1.	Ejercicios de la sección	192
6.3.	Funciones inversas	194
6.3.1.	Gráfica de la función inversa	198
6.3.2.	Cálculo de funciones inversas	200
6.3.3.	Ejercicios de la sección	202
6.4.	Ejercicios del capítulo	203

A. Apéndice: ecuaciones y desigualdades	209
A.1. ¿Qué es una ecuación?	209
A.2. ¿Qué significa resolver una ecuación?	210
A.3. Resolución de ecuaciones lineales	211
A.3.1. Ejercicios de la sección	214
A.4. Resolución de ecuaciones cuadráticas	214
A.4.1. Ejercicios de la sección	217
A.5. ¿Qué es una desigualdad?	217
A.6. ¿Qué significa resolver una desigualdad?	217
A.7. Resolución de desigualdades lineales	218
A.7.1. Ejercicios de la sección	220
A.8. Desigualdades con valor absoluto	221
A.8.1. Ejercicios de la sección	222
A.9. Desigualdades cuadráticas	223
A.9.1. Ejercicios de la sección	224
Índice alfabético	227

Introducción

Este texto tiene como objetivo servir como auxiliar en el proceso de enseñanza-aprendizaje correspondiente al Programa de Integración de las carreras del Colegio de ciencia y tecnología de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, aunque su enfoque general me permite esperar que sea útil también en otros cursos preparatorios de otras instituciones, o como una introducción a temas básicos del Cálculo diferencial.

El contenido del libro, más que tratar de cubrir las deficiencias que pueda tener el estudiante para enfrentar un curso completo de Cálculo diferencial, trata de familiarizar al lector con el concepto central de la materia: la función real de variable real. Para lograr esto, se le da prioridad a los ejemplos concretos, desarrollando algunos conceptos adicionales a partir de éstos.

Del lector se espera alguna familiaridad con las ideas del álgebra y la geometría analítica, aunque ciertamente no un dominio completo, puesto que uno de los objetivos secundarios del libro es precisamente robustecer dicho dominio. Espero que las ideas aquí presentadas sean una motivación más para subsanar las carencias que puedan aparecer en el camino.

Como en (casi) cualquier libro de matemáticas, los ejercicios son parte fundamental del texto: si bien resolverlos todos no garantiza un dominio absoluto de la materia, el no intentarlos asegura que más adelante habrá problemas de comprensión. Las listas de problemas al final de cada sección consisten de ejercicios fuertemente relacionados con los contenidos de la misma, mientras que los correspondientes al final de cada capítulo son más generales e integradores de los distintos conceptos estudiados a lo largo de éste, por lo que es posible que no se tengan todos los elementos para resolverlos hasta terminar de leerlo todo (¡también puede suceder que ni aún así se pueda prescindir de una pequeña investigación exterior!).

Evidentemente, no espero que el lector se sirva únicamente de este texto. Al contrario, se le invita a que busque entre otros libros sobre la materia varios que le permitan tener distintos enfoques. Aunque esta tarea puede ser ardua, las recompensas serán gratas. El tener algunos compañeros de lectura con los cuales compartir avances, dudas y demás, hará la lectura más

amable y la comprensión de los conceptos mucho más rica. Los estudiantes de la UACM no deben dudar en dirigirse a su profesor para aclarar cualquier duda, directa o indirectamente relacionada con los temas aquí tratados.

Agradezco a los estudiantes de los cursos del Taller de Matemáticas del Programa de Integración de la UACM, por haberme dado la idea original para escribir este libro. Agradezco también a Juan Carlos Aguilar, profesor de la UACM, por su valiosa lectura y minuciosa detección de errores en una primera versión de esta obra. También agradezco enormemente al Dr. Francisco Marmolejo por su invaluable ayuda en la elaboración de los dibujos que acompañan el texto, así como por sus atinados comentarios y sugerencias. Finalmente, agradezco al Instituto de Matemáticas de la UNAM por las facilidades prestadas durante mi estancia (agosto 2014-julio 2015), y a la UACM por el año sabático que permitió la elaboración de este material.

Cualquier sugerencia o comentario sobre este trabajo será enormemente agradecido, y puede ser enviado al correo electrónico *sacl.cruz@uacm.edu.mx*.

Capítulo 1

Conjuntos

Casi todas las matemáticas que se estudian están basadas en la noción de conjunto y sus propiedades más elementales. El estudio de las funciones, que constituye la columna vertebral de este libro, no es la excepción. Por eso es que este primer capítulo está dedicado a definir este término y establecer el lenguaje que nos guiará (en gran parte) a lo largo del curso.

1.1. Definición de conjuntos

En esta sección daremos una definición un tanto informal de conjunto. Inmediatamente después, ilustramos este concepto con varios ejemplos y las maneras más comunes de construir conjuntos.

Definición 1. Un *conjunto* es una colección de objetos (llamados *elementos*) vista como un todo.

Nuestra definición oculta una trampa: simplemente estamos evitando definir “conjunto” usando la palabra “colección”. Aquí lo importante no es la palabra que usemos, sino lo que queremos decir: un conjunto está formado por distintos objetos, que llamaremos elementos.

1.1.1. Conjunto como una lista

Hay varias maneras de representar conjuntos. La que es tal vez la más sencilla es encerrando entre llaves “{}” a los elementos del conjunto. Por ejemplo, al escribir $A = \{1, 2, 3\}$ estamos

diciendo que el conjunto A consiste de tres elementos: los números 1, 2 y 3. Si se tiene que $B = \{1\}$, se entiende que el único elemento del conjunto B es el número 1.

El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío, y se representa por el símbolo \emptyset . Muchas veces sorprende que “la lista sin elementos” constituya un conjunto, pero no hay ninguna contradicción en considerarlo así, y sí muchas ventajas que se apreciarán más adelante, cuando estudiemos las operaciones de conjuntos.

Por el momento sólo hagamos hincapié en la diferencia entre \emptyset y $\{\emptyset\}$. El primer conjunto es el conjunto vacío, y por lo tanto no tiene elementos. El segundo conjunto tiene un elemento: el conjunto vacío. El hecho de que los elementos de cierto conjunto sean a su vez conjuntos por sí mismos puede resultar enredado, pero viéndolo bien no hay nada de raro en ello: pensemos, para concretar ideas, en una caja de tubos de galletas: sus elementos son los tubos de galletas, que a su vez tienen por elementos a las galletas mismas. Observa que las galletas no son elementos de la caja, sólo los tubos lo son.

Si un elemento forma parte de un conjunto diremos que “pertenece” a él; en caso contrario, diremos que “no pertenece” al conjunto. Estas ideas las representaremos por los símbolos \in y \notin , respectivamente. De acuerdo a esto, en los ejemplos anteriores tenemos que $1 \in A$ (que se lee 1 pertenece a A o 1 es elemento de A o 1 está en A), $2 \in A$ pero $2 \notin B$ (que se lee 2 no pertenece a B o 2 no es elemento de B o 2 no está en B), $4 \notin A$. Ningún elemento pertenece a \emptyset , dado que es un conjunto sin elementos.

Ahora bien, si un conjunto tiene muchos elementos puede ser incómodo (o imposible) describirlo escribiéndolos todos. Pensemos por ejemplo en el conjunto C que consiste de todos los números enteros del uno al cien. Una manera práctica de describir a C es la siguiente:

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}.$$

Así, usaremos los puntos suspensivos para indicar que una lista de elementos continúa hasta donde se indique. Es importante incluir suficientes elementos al principio de dicha lista para que no haya duda sobre los elementos siguientes. Por ejemplo, si $D = \{2, 4, \dots, 64\}$, puede haber la duda de si la lista avanza de 2 en 2 o si cada elemento es el doble del anterior. En el primer caso, $D = \{2, 4, 6, 8, \dots, 62, 64\}$, mientras que en el segundo $D = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Esta ambigüedad se evita si escribimos al menos un elemento más en la lista original.

1.1.2. Números naturales y números enteros

En algunas ocasiones los puntos suspensivos indican que falta por enlistar una infinidad de elementos del conjunto. Nuestro primer ejemplo de este uso será muy importante a lo largo

del curso, se trata del conjunto de números naturales, $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, que representaremos por el símbolo \mathbb{N} . Observa que, a diferencia de los ejemplos anteriores, aquí no aparecen elementos después de los puntos suspensivos, lo que indica que la lista no termina y continúa de manera infinita.

Otro ejemplo, no menos importante, es el conjunto de números enteros (denotados por \mathbb{Z}), que consiste de los números naturales y sus correspondientes inversos aditivos; es decir, los números que al sumarlos con algún natural dan como resultado cero. Tenemos entonces que $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Los primeros puntos suspensivos indican que antes del -3 está el -4 y antes el -5 , etcétera. Los segundos puntos suspensivos indican, al igual que en el caso de \mathbb{N} , que después del 3 aparece el 4, luego el 5, etcétera.

Comprender estos dos ejemplos junto con los números racionales y los números reales que aparecerán más adelante, será fundamental para entender el resto del curso. Por su importancia, escribimos a continuación la definición de estos dos ejemplos básicos:

Definición 2. Los números naturales son los elementos del conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Los números enteros son los elementos del conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

1.1.3. Conjuntos como elementos con una propiedad

Una forma muy útil de definir conjuntos a partir de otros más grandes es por medio de una propiedad que deben cumplir sus elementos. Pensemos por ejemplo en todos los mexicanos que nacieron antes del 31 de diciembre de 2000, incluyendo este día. Estamos partiendo de un conjunto grande (el de todos los mexicanos) para definir uno más pequeño (el de todas las personas que además de ser mexicanas, nacieron en el siglo XX).

Para ilustrarla, consideremos el conjunto A cuyos elementos son todos los números naturales (ver sección anterior) tales que al dividirlos entre 2 dan residuo cero (es decir, los números que al dividirlos entre 2 dan una división “exacta”). Aunque se puede elaborar una lista con los elementos de A , en principio el conjunto no está descrito así, sino como los números naturales que cumplen una cierta propiedad (en este caso, que su residuo al dividirlos entre 2 sea cero). Para determinar si un número natural es o no elemento de A , hay que hacer la división entre 2 y observar el residuo: si es cero, el número será un elemento de A ; si no es cero, el número en cuestión no será elemento de A .

Por ejemplo, $10 \in A$ porque al hacer la división $10/2$ se obtiene 5 de cociente y 0 de residuo. $23 \notin A$ porque al hacer la división $23/2$ se obtiene 11 de cociente y 1 de residuo. Un caso que a veces confunde es 0. ¿ $0 \in A$ o $0 \notin A$? En otras palabras, ¿cuál es el residuo al dividir 0 entre 2? Dado que el residuo es cero (pues “no sobra” nada al hacer la división), se tiene que $0 \in A$.

Ahora bien, dado que esta manera de definir conjuntos será muy usada, será conveniente tener una manera de escribirla brevemente. En general, la forma de describir un conjunto B definido por medio de una regla P es la siguiente:

$$B = \{x \in U \mid x \text{ cumple } P\},$$

donde el símbolo “ \mid ” se lee “tal que”. Así, la expresión de arriba se lee: B es el conjunto de los x en U (o de los elementos de U) tales que x cumple la propiedad P . En el caso particular del conjunto A descrito arriba, podemos escribir

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ da residuo cero al dividir entre } 2\}.$$

En este caso, la propiedad P es “dejar residuo cero al dividir entre 2”. Veamos otros ejemplos que nos permitan familiarizarnos más con esta forma de describir conjuntos.

Residuo 3 al dividir entre 4

Sea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ da residuo 3 al dividir entre } 4\}$, donde el residuo es, como antes, lo que “sobra” de la división al dividir entre 4. Para entender mejor quién es el conjunto B , haremos una lista con los elementos de este conjunto. Observemos que 1 y 2 dan residuo 1 y 2, respectivamente, al dividir entre 4, de manera que $1, 2 \notin B$. Al dividir 3 entre 4 el residuo es 3, de modo que $3 \in B$. Al dividir 4 entre 4 el residuo es cero y por lo tanto $4 \notin B$. De la misma manera, podemos observar que $5, 6, 8 \notin B$ pero $7 \in B$. Continuando de esta manera observamos que el conjunto B , escrito como una lista de elementos es: $B = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots\}$.

Para poder hablar más generalmente de los residuos, será útil el concepto de *divisor* de un número, que a su vez nos permitirá dar más ejemplos sobre conjuntos definidos por medio de una propiedad.

Definición 3. Decimos que un número natural a es *divisor* de un número natural b si al dividir b entre a el residuo es cero. Dicho de otra manera, a es divisor de b si existe un tercer número natural c tal que $ac = b$.

Por ejemplo, 3 es divisor de 12 porque la división de $12/3$ da residuo cero, o equivalentemente, porque $3(4) = 12$. Por otro lado, 3 no es divisor de 11 porque la división $11/3$ da residuo

distinto de cero (de hecho el residuo es 2), o equivalentemente, porque no existe un número natural n con la propiedad de que $3n = 11$.

Observa que 1 es divisor de cualquier número n (ya que $1(n) = n$), y que un número n siempre es divisor de sí mismo (porque $n(1) = n$). Así, cualquier número natural distinto de 1 tiene al menos dos divisores (en el caso particular de 1 los dos divisores mencionados arriba son en realidad el mismo). Sin embargo, hay números naturales con más de dos divisores, por ejemplo 4, que tiene por divisores a 1, 2, 4. El número 36 tiene varios divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. El número 11 tiene sólo dos divisores: 1, 11.

Números primos Nuestro siguiente ejemplo de conjunto definido por medio de una propiedad involucra el concepto de número primo, que se define como sigue:

Definición 4. Un número natural mayor a 1 es *primo* si sólo tiene dos divisores: 1 y él mismo.

De acuerdo a esta definición, se tiene que 2, 11 son números primos (porque estos números tienen exactamente dos divisores) mientras que 1, 4, 36 no lo son (puesto que estos números no son mayores a 1 (en el caso de 1) o tienen más de dos divisores (en el caso de 4 y 36)).

Con ayuda del concepto de número primo, podemos definir el conjunto

$$P = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ es primo} \}.$$

De acuerdo a los ejemplos ya vistos, se tiene que $2, 11 \in P$ pero $1, 4, 36 \notin P$

La importancia de este ejemplo radica en que no es posible definir al conjunto P por medio de una lista. Los primeros elementos de P son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Observa que en este caso los puntos suspensivos no indican la manera de escoger el siguiente elemento de la lista, por eso decimos que no es posible definir a P como el conjunto de elementos de una lista.

En cualquier caso, siempre es necesario que sea posible determinar si un elemento pertenece o no a un conjunto. En términos prácticos esto puede resultar complicado, pero siempre debe ser posible. Un ejemplo en el que esto no es así es el siguiente:

Sea A el conjunto de los diez mejores modelos de automóvil en el mundo. Redactada así, es difícil saber si un modelo particular cumple o no con esa condición, y por lo tanto no es claro si ese modelo particular pertenece o no al conjunto A . El problema estriba en el uso de la palabra “mejores”. ¿Qué quiere decir? Cada quien entiende este adjetivo de manera distinta. Habrá quien lo considere como sinónimo de veloz, pero habrá quien prefiera entenderlo como lujoso, y no faltará el que lo vea como económico. Con esta confusión es imposible trabajar.

Comparemos con el siguiente caso: el conjunto B consiste de los modelos de automóvil que pueden correr a más de 150km/h . Está claro qué hay que hacer para saber si un modelo

particular pertenece o no a B . Puede ser que esa información no esté a nuestro alcance, y hacer el experimento para saber si un modelo pertenece o no a B requerirá recursos que sin duda pueden ser mejor empleados. Sin embargo, la diferencia de fondo con el caso del conjunto A definido arriba es dramática. Allá no estaba clara la manera de averiguar si un modelo de automóvil pertenecía o no al conjunto A . En el caso de B siempre es posible determinar si un modelo pertenece o no al conjunto.

Para evitar este tipo de problemas, usaremos siempre reglas de pertenencia que determinen siempre, para un elemento particular, si pertenece o no al conjunto que se esté definiendo. Observa sin embargo que hay reglas imposibles de cumplir, como por ejemplo $x^2 < 0$ (dado que un número elevado al cuadrado siempre es positivo). Este tipo de reglas imposibles de cumplir dan lugar al conjunto vacío: el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 0\}$ es vacío, pues no existe ningún número natural que elevado al cuadrado sea negativo; es decir, $A = \emptyset$.

1.1.4. Números racionales y números reales

Con ayuda de lo visto en la sección anterior, es posible definir el conjunto de los números racionales, conocidos informalmente como “fracciones”. Después, definimos el conjunto de números reales, que será la base en la que se trabajarán casi todas las funciones que se estudien posteriormente.

Definición 5. El conjunto de los números racionales, denotado por el símbolo \mathbb{Q} , consiste de todos los números de la forma p/q , donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y además $q \neq 0$. En la notación de la sección anterior, se tiene:

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}.$$

Usaremos indistintamente las notaciones a/b y $\frac{a}{b}$, de modo que ambas significan exactamente lo mismo de ahora en adelante.

Los siguientes son ejemplos de números racionales: $\frac{1}{7}$, $-\frac{3}{8}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{11}{17}$, $\frac{201}{1001}$. Una observación fundamental es que es posible ver a cualquier número entero como un número racional, simplemente dividiéndolo entre 1. Por ejemplo: $2 = 2/1$, $-4 = -4/1$, $0 = 0/1$, etc.

Nota que si quisiéramos ordenar a los números racionales de acuerdo a su tamaño, ocurre algo sorprendente: hay una infinidad de elementos entre cualesquiera dos de ellos. Por ejemplo, entre 0 y 1 está el $1/2$, entre 0 y $1/2$ está $1/4$, entre $1/4$ y 0 está $1/8$, etc. Esta propiedad hace que sea complicado describir a \mathbb{Q} por medio de una lista. Así, \mathbb{Q} es otro ejemplo de conjunto

que es muy conveniente describir por medio de una propiedad más que como una lista de elementos.

Otra característica que será útil de los números racionales es la siguiente:

Observación 1. A cada número racional p/q le corresponde una expansión decimal, que se obtiene haciendo la división de enteros p/q , dicha expansión puede ser finita o infinita periódica.

Con expansión decimal finita, se quiere decir que la división termina en algún punto, como en el caso de $1/4$, que tiene expansión decimal 0.25 . Con expansión decimal infinita periódica, se quiere decir que es posible que la división no termine nunca, pero se repiten siempre los mismos números, como en el caso de $1/3$, que es igual a $0.33333 \dots$; o el de $43/198$, que da $0.2171717171717 \dots$

Existe un conjunto de números que contiene a los naturales, a los enteros y a los racionales, y es el conjunto de los números reales. Definirlos con todo cuidado es tarea difícil que rebasa el alcance de este libro, sin embargo, damos la siguiente definición que debe ser suficiente en un primer acercamiento al Cálculo.

Definición 6. El conjunto de los números reales, denotado por \mathbb{R} , consiste de todos los números que se pueden escribir en forma decimal; es decir, en la forma

$$s a_1 a_2 \dots a_n . b_1 b_2 \dots b_k \dots,$$

donde $s = \pm 1$, y cada a_i y cada b_i es un dígito en $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Los siguientes son ejemplos de números reales: 1.5 , $-4.333333 \dots$, 2.22 , 3.1416 , $1.01001000100001 \dots$ donde, en el último caso, el número de ceros entre dos 1 es $1, 2, 3, \dots$

Notemos que a la derecha del punto puede haber una infinidad de b_i (distintas de 0). Esto es, la expansión decimal de un número real puede ser infinita y no periódica (a diferencia de lo que ocurría con los números racionales, donde toda expansión decimal infinita tenía que ser periódica).

Observemos también que todo número racional es un número real. Esto es una consecuencia de la observación (1), que dice que a todo número racional le corresponde una expansión decimal (con ciertas características adicionales).

Al igual que sucede con los números racionales, entre dos números reales (distintos) siempre habrá una infinidad de números reales. En particular, el punto medio entre ellos siempre será un número real distinto de los dos originales. Ver A.7 en el apéndice.

Tal vez en este momento sea un poco misteriosa para el lector la necesidad de construir este más amplio conjunto de números. Después de todo, cualquier medición directa de cualquier objeto físico tendrá necesariamente un nivel de precisión determinado, de manera que nunca se obtendrá así un número que sea real pero no racional. Sin embargo, al hacer medidas indirectas sí encuentra uno que aparecen números reales no racionales. El ejemplo más simple de esto sea tal vez la diagonal del cuadrado de lado 1, que mide $\sqrt{2}$, como se puede comprobar usando el teorema de Pitágoras.

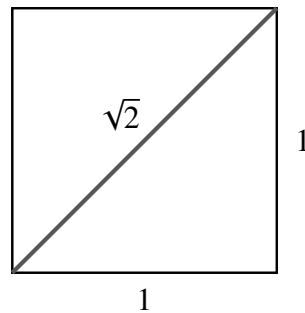


Figura 1.1: $\sqrt{2}$

Otro ejemplo muy socorrido para ilustrar la necesidad de utilizar los números reales (más que simplemente \mathbb{Q}), aparece al calcular el perímetro de un círculo y dividirlo entre su diámetro, obteniendo la famosa constante π . De acuerdo a la ilustración de abajo, se tiene que $\frac{P}{d} = \pi$.

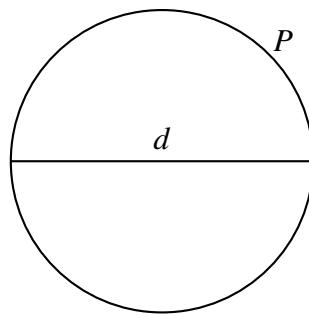


Figura 1.2: $\pi = \frac{P}{d}$

Como habrá imaginado el lector, estos ejemplos son buenos porque tanto $\sqrt{2}$ como π son

números reales que no son racionales. Probar estas afirmaciones resulta poco ilustrativo por el momento (y muy difícil, en el caso de π), así que el lector tendrá que confiar en nosotros.

Intuitivamente, identificamos a los números reales con la recta numérica:

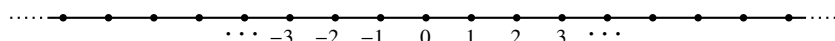


Figura 1.3: La recta real

Observa que el conjunto \mathbb{Z} deja huecos en la recta numérica; es decir, hay puntos en la recta a los que no les corresponde ningún número entero. Un ejemplo de esto lo da el punto medio entre 0 y 1. Aunque no es tan obvio como el caso de \mathbb{Z} , \mathbb{Q} también deja huecos: uno de ellos está en $\sqrt{2} = 1.4142\dots$, justamente porque $\sqrt{2}$ no es un número racional. En general, habrá un hueco por cada número real que no sea racional. A diferencia de todos estos conjuntos, \mathbb{R} llena completamente la recta, de manera que, geoméricamente, identificaremos a los números reales con la recta numérica.

Otra razón de suma importancia para trabajar en \mathbb{R} más que en \mathbb{Q} es que en este conjunto más pequeño, la idea de límite, que es central en el Cálculo Diferencial e Integral, carecería de sentido. Esto está relacionado con el hecho de que los números reales tienen la propiedad del supremo, de la que carecen los números racionales. Por el momento el lector puede hacer caso omiso de esta propiedad, pero será importante hacer hincapié en ella en un curso de cálculo.

1.1.5. Resumen

Enunciando brevemente lo que hemos visto hasta el momento, tenemos:

1. Una definición de conjunto como una colección de objetos.
2. Dos maneras básicas de describir conjuntos:
 - a) Por medio de una lista.
 - b) Por medio de una propiedad.
3. Conocemos el significado y uso de los símbolos \in y \notin .
4. Tenemos cuatro ejemplos básicos de conjuntos numéricos: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .

1.1.6. Ejercicios de la sección

1. Describe los siguientes cinco elementos de los siguientes conjuntos (o los anteriores cinco, según corresponda):
 - a) $\{0, 3, 6, 9, \dots\}$
 - b) $\{2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$
 - c) $\{\dots, -20, -16, -12, -8, -4\}$
 - d) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$
 - e) $\{0, 3, 9, 27, 81, \dots\}$
2. En cada caso, encuentra tres elementos que estén y tres elementos que no estén en los siguientes conjuntos:
 - a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \text{ es un número par}\}$.
 - b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 > 10\}$ (el símbolo $>$ se lee “mayor que”).
 - c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es divisor de } 81\}$.
 - d) $D = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ no es divisor de } 12\}$.
3. Encuentra, de ser posible, tres elementos de los siguientes conjuntos:
 - a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$.
 - b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 4\}$. ¿Cuál es la diferencia con el inciso anterior?
 - c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$.
 - d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \setminus \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$.
 - e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x+2) = 0\}$.
 - f) $F = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 > 0\}$.
 - g) $G = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 < 0\}$.
 - h) $H = \{p^2 \mid p \text{ es primo}\}$.
 - i) $I = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. Encuentra reglas que definan a los siguientes conjuntos por medio de una propiedad:
 - a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

- b) $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$
- c) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$
- d) $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$
- e) $\{\dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

5. Define los siguientes conjuntos por medio de una condición:

- a) X es el conjunto de los números naturales que son mayores a 100.
- b) Y es el conjunto de los números enteros tales que al elevarlos al cuadrado el resultado es menor a 10.
- c) Z es el conjunto de los números enteros tales que al dividirlos entre sí mismo el resultado es 1.
- d) W es el conjunto de los números naturales tales que su raíz cuadrada es entera.

6. Encuentra tres elementos de cada uno de los conjuntos del problema anterior. Encuentra también tres elementos que no pertenezcan a cada uno de ellos (en un caso esto no es posible, ¿cuál es?).

7. Al conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales se le llama *plano cartesiano* y se le denota por \mathbb{R}^2 . Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Encuentra cinco elementos de \mathbb{R}^2 .

1.2. Igualdad de conjuntos

El objetivo de esta sección será determinar bajo qué condiciones dos conjuntos serán iguales. Para eso, necesitaremos estudiar previamente el concepto de subconjunto.

1.2.1. Subconjuntos

Definición 7. Si se tienen dos conjuntos A y B tales que todo elemento de A es un elemento de B , se dice que A es un *subconjunto* de B . Este hecho se denota por

$$A \subset B.$$

Otras formas comunes de decir que A es subconjunto de B son: A está contenido en B y B contiene a A . Los símbolos $B \supset A$ significan lo mismo que $A \subset B$. Para denotar que A no es subconjunto de B , escribimos $A \not\subset B$ o $B \not\supset A$.

Veamos algunos ejemplos: sean $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Se tiene que $B \subset A$ y $C \subset A$, pero $B \not\subset C$ y $C \not\subset B$ (donde el símbolo $\not\subset$ se lee “no es subconjunto” o “no está contenido”). También son ciertas las siguientes afirmaciones: $A \subset \mathbb{Z}$, $C \subset \mathbb{N}$, $B \not\subset \mathbb{N}$, $A \not\subset \mathbb{N}$.

Con respecto a nuestros conjuntos numéricos, se tienen las siguientes contenciones, que fueron enunciadas en su momento en afirmaciones como “todo número natural es un número entero”, que se traduce en $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; “todo número entero es un número racional”, que se traduce en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; y finalmente “todo número racional es un número real”, que se vuelve $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. En resumen, se tiene:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.2.2. Igualdad entre conjuntos

Hasta el momento no hemos dicho qué significa que dos conjuntos sean iguales. Ahora es momento de hacerlo.

Definición 8. Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A ; en símbolos, $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$.

En otras palabras, esta definición dice que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Algunas consecuencias importantes se plantean con los siguientes ejemplos:

Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, a, b\}$ y $C = \{a, a, b, c, c, c\}$. Observa que $A \subset B$ y $B \subset A$. De aquí se concluye que $A = B$. De manera similar, podemos observar que $A \subset C$ y $C \subset A$, para concluir que $A = C$. También se puede ver que $B = C$.

Las conclusiones que extraemos de este ejemplo son dos:

1. El orden en el que aparecen los elementos de un conjunto no es importante; de hecho, no hay un orden preestablecido en el que deban aparecer dichos elementos.
2. El número de veces que aparece repetido un elemento en un conjunto no es importante. De hecho, un elemento puede pertenecer o no a un conjunto, y no tiene sentido hablar de que se repita más que cuando escribimos al conjunto como una lista.

1.2.3. Ejercicios de la sección

1. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e\}$, $C = \{c, d, e, f\}$, $D = \{c, e, c\}$, $E = \{c\}$. Di si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifica tus respuestas.

a) $A \subset C$

f) $C \supset E$

b) $C \supset D$

g) $\{e\} \subset D$

c) $B \subset D$

h) $\{e\} \subset E$

d) $D \subset E$

i) $D = \{e, c\}$

e) $E \subset D \subset C$

j) $B = D$

2. Si se tienen dos conjuntos A y B tales que $A \subset B$ pero $A \neq B$, se dice que A es *subconjunto propio* de B . Denotamos este hecho por los símbolos $A \subsetneq B$.

a) Encuentra dos conjuntos A y B , con tres y cuatro elementos, respectivamente, tales que $A \subsetneq B$.

b) Muestra que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$ es un subconjunto propio de $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$.

3. Es común que dos reglas en apariencia distintas definan el mismo conjunto. Prueba que los conjuntos A y B son iguales, donde $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 7\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

4. Muestra que $A = B$, donde $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ deja residuo } 2 \text{ al dividir entre } 4\}$ y $B = \{2, 6, 10, 14, 18, \dots\}$.

5. Sea $A = \{1, 2\}$. Haz la lista de todos los subconjuntos de A (sin olvidar a \emptyset ni a A mismo).

6. Dado un conjunto X , podemos considerar el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de X (sin olvidar a \emptyset). A dicho conjunto se le conoce como *conjunto potencia* de X y se le denota por $\mathcal{P}(X)$. En el ejercicio anterior, encontraste todos los elementos de $\mathcal{P}(X)$ para $X = \{1, 2\}$.

a) Encuentra el conjunto potencia de $X = \emptyset$. Sugerencia: tiene un único elemento.

b) Encuentra el conjunto potencia de $X = \{a, b, c\}$.

c) ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(X)$, si $X = \{a, b, c, d\}$?

1.3. Operaciones con conjuntos

En una buena parte de los problemas que enfrentaremos a lo largo del curso, será necesario modificar a los conjuntos que aparezcan, formando otros conjuntos nuevos a partir de los ya conocidos. La manera más común de hacer esto es por medio de las operaciones de conjuntos, que estudiamos en esta sección.

1.3.1. Unión de conjuntos

Si se tienen dos conjuntos A y B , es posible formar un tercer conjunto, que llamaremos la unión de A y B , y que denotaremos por $A \cup B$. La unión de A y B está constituida tanto por los elementos de A como por los de B . En símbolos:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Veamos un ejemplo sencillo que ilustre esta operación. Sean $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-2, -1, 3, 4\}$. Entonces $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Observa que el hecho de que -1 y 3 aparezcan tanto en A como en B no importa, de todas formas siguen siendo elementos de $A \cup B$.

En algunas ocasiones será útil considerar la unión de más de dos conjuntos. La idea básica es la misma: en la unión estarán los elementos que aparezcan en al menos uno de los conjuntos que se estén uniendo. Por ejemplo, si

$A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$, $B = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ y $C = \{-6, 6\}$, se tiene que

$$A \cup B \cup C = \{-6, -5, -4, \dots, 4, 5, 6\}.$$

1.3.2. Intersección de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B , la intersección de ellos, denotada por $A \cap B$, es el conjunto constituido por los elementos que aparecen tanto en A como en B . En símbolos:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Al igual que en el caso de la unión, puede resultar necesario considerar la intersección de más de dos conjuntos. Dicha intersección consistirá de los elementos que aparezcan en todos los conjuntos que se estén intersectando.

Veamos algunos ejemplos: Sean $A = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 10\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} | n > 8\}$ (el símbolo \leq se lee “menor o igual que”). $A \cap B$ consiste de los números que cumplen ambas condiciones, es decir de los números naturales que satisfacen tanto $n \leq 10$ como $n > 8$. Esto sólo permite que $n = 9$ o $n = 10$. De aquí se concluye que $A \cap B = \{9, 10\}$.

Consideremos ahora los conjuntos $C = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ es divisor de } 36\}$ y $D = \{5, 7, 8\}$. Se observa directamente que C y D no tienen ningún elemento en común. Esto es, $C \cap D$ no tiene ningún elemento. ¿Quién es, entonces, $C \cap D$? El conjunto vacío. En breve: $C \cap D = \emptyset$.

Como último ejemplo, calculemos $A \cap B \cap C$, donde $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$ y $C = \{n \in \mathbb{Z} | n < 10\}$. Dado que los únicos números que pertenecen a los tres conjuntos son $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, se tiene que

$$A \cap B \cap C = \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

1.3.3. Diferencia de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B , la diferencia de conjuntos entre A y B , denotada por $A \setminus B$, consiste de todos los elementos de A que no estén en B . En símbolos:

$$A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n \notin \mathbb{N}\}$ consiste de todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $n \notin \mathbb{N}$. Esto es, dicho de otra manera, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n < 0\}$.

Observa que, a diferencia de la unión y la intersección, donde el orden de los conjuntos no era importante (es decir, $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$), en el caso de la diferencia de conjuntos en general $A \setminus B$ es distinto de $B \setminus A$. Es decir, esta es una operación no conmutativa, donde el orden en el que aparecen los conjuntos sí es importante. Para ilustrar esta idea, invirtamos el orden de los conjuntos en el ejemplo de arriba, para tener $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{N} | n \notin \mathbb{Z}\}$, pero es imposible que algún elemento cumpla esto, porque todo número natural es también un número entero. Se concluye que $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$. De hecho, si $A \subset B$ siempre se tendrá que $A \setminus B = \emptyset$.

A diferencia de lo que pasa con la unión y la intersección, en una operación como $A \setminus B \setminus C$ es necesario aclarar cuál de las dos diferencias de conjuntos estamos haciendo primero. Es decir, si estamos calculando $(A \setminus B) \setminus C$ o $A \setminus (B \setminus C)$. El siguiente ejemplo ilustra que el resultado puede cambiar, dependiendo de cuál de las dos operaciones hagamos primero: sea $A = \mathbb{N}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{1, 2, \dots, 10\}$. Por un lado $(A \setminus B) \setminus C = \{11, 12, 13, \dots\}$, mientras que, por el otro, $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \emptyset = \mathbb{N}$.

1.3.4. Diagramas de Venn

Una manera muy común de representar las operaciones de conjuntos es por medio de los diagramas de Venn, en los cuales cada conjunto es representado por una figura geométrica (siempre que es posible, un círculo) que se superpone con las otras, de manera que se obtiene una representación geométrica para cada una de las operaciones mencionadas en esta sección.

Los casos más simples de diagramas de Venn involucran únicamente dos conjuntos y las operaciones de unión, intersección y diferencia entre ellos, como se ilustra a continuación:

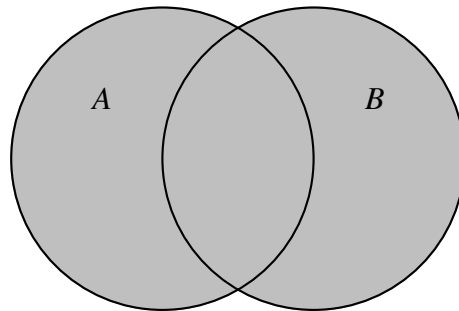


Figura 1.4: $A \cup B$

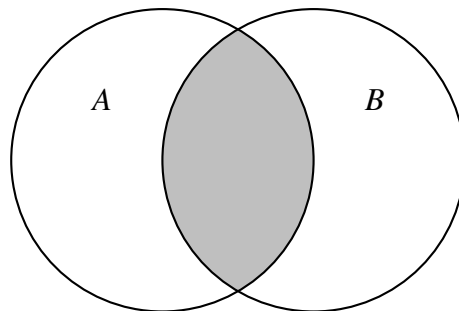
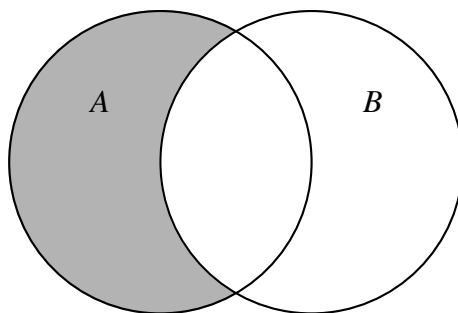
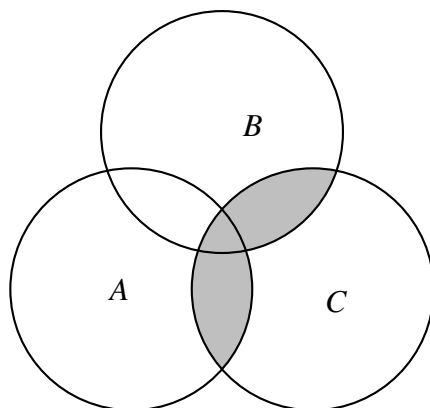


Figura 1.5: $A \cap B$

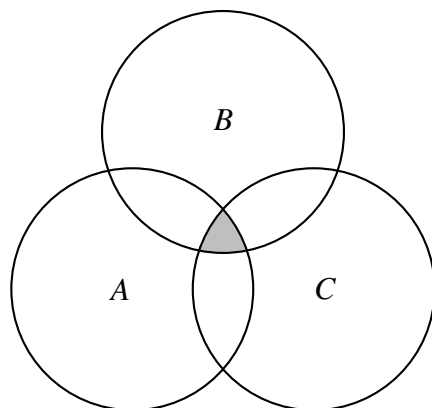
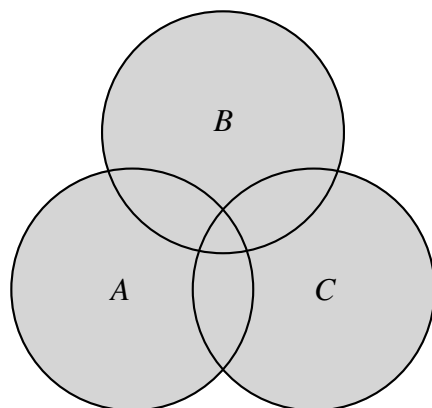
Figura 1.6: $A \setminus B$

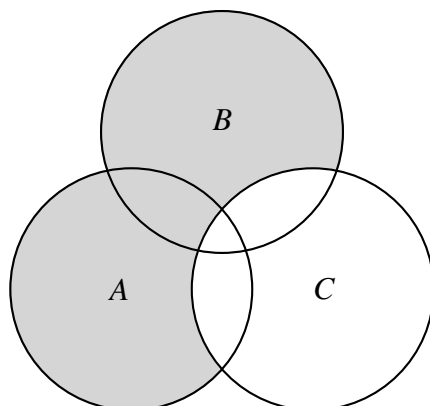
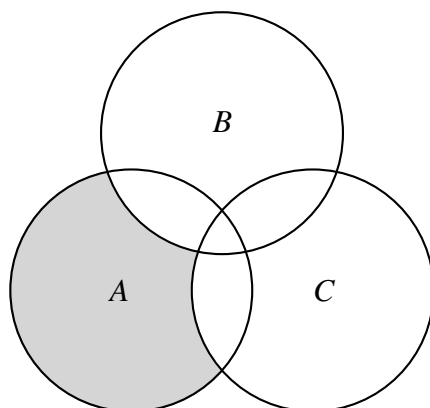
Al igual que sucede en la aritmética, se pueden combinar varias operaciones de conjuntos en una sola expresión. Un ejemplo de esto es $(A \cup B) \cap C$. Teniendo presente que los paréntesis indican, como es costumbre, la operación que se hace primero, se tiene que esta expresión representa los elementos que están ya sea en A o en B y también en C . En un diagrama de Venn esto se ve así:

Figura 1.7: $(A \cup B) \cap C$

Esto es, como lo indica la operación que estamos haciendo, el resultado de unir A con B e intersectar esta zona con C .

A continuación presentamos algunos ejemplos de operaciones que involucran a tres conjuntos y sus respectivos diagramas de Venn.

Figura 1.8: $A \cap B \cap C$ Figura 1.9: $A \cup B \cup C$

Figura 1.10: $(A \cup B) \setminus C$ Figura 1.11: $A \setminus (B \cup C)$

1.3.5. Ejercicios de la sección

1. Sean $A = \{1, 2, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 10\}$, $C = \{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $D = \{3, 5, 8, 9\}$, $E = \{8\}$.
Calcular los siguientes conjuntos:

a) $A \cup B$

b) $A \cup B \cup C$

c) $A \cap B \cap C$

d) $E \cap D \cap C$

e) $D \setminus (E \cup C)$

f) $(D \setminus E) \cap (D \setminus C)$ (comparar con el

inciso anterior)

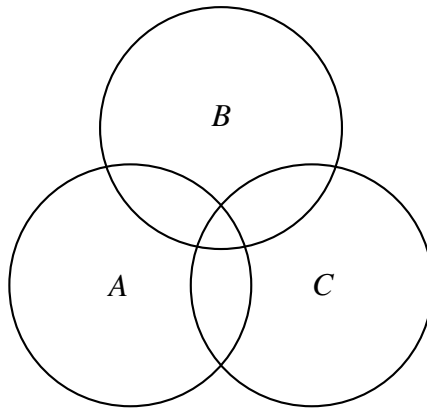
$$i) (C \cap A) \cup (B \cap D)$$

$$g) (A \cup B) \cap (C \cup D)$$

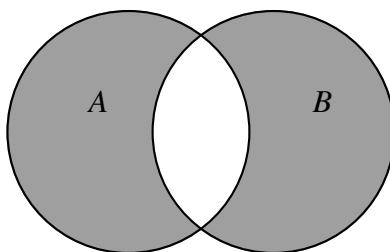
$$j) D \setminus (B \cap C)$$

$$h) A \setminus (B \cup C)$$

2. Haz un diagrama de Venn que involucre las relaciones entre los conjuntos A, B, C, D, E del ejercicio anterior.
3. Da dos ejemplos de conjuntos $A \subset B$, de modo que en un caso se tenga $B \setminus A = \emptyset$ y en el otro $B \setminus A \neq \emptyset$.
4. Muestra que $B \setminus A \neq \emptyset$ siempre que $A \subsetneq B$. (Ver ejercicio anterior.)
5. En el diagrama de Venn de abajo, cada una de las regiones es el resultado de hacer cierta operación de conjuntos. Encuentra, en cada caso, cuál es esta operación.



6. Haz un diagrama de Venn para cada una de las siguientes operaciones:
 - a) $(A \cap D) \setminus (B \cup C)$
 - b) $(A \cap B) \setminus (C \cup D)$
 - c) $(A \cup B \cup C) \setminus D$
7. Sean A y B dos conjuntos. Para simplificar ideas supondremos que ninguno de ellos está contenido en el otro. Al conjunto $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ se le conoce como la *diferencia simétrica* de A y B (ver dibujo):

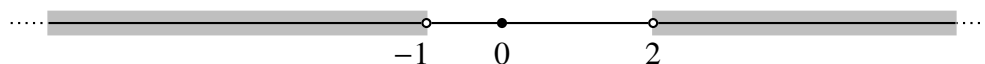
Figura 1.12: Diferencia simétrica de A y B

Muestra, usando diagramas de Venn, que $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. En otras palabras, muestra que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1.4. Intervalos

Aunque la mayoría de los diagramas de Venn representan a los conjuntos como secciones del plano, hay una excepción importante en la que esto no es así, se trata de \mathbb{R} , los números reales, que son representados por una recta, como establecimos antes. Así, los subconjuntos de \mathbb{R} serán representados por fragmentos de dicha recta. Observa, sin embargo, que un solo conjunto puede consistir de más de un “pedazo” de la recta real. Por ejemplo, $A = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ y } x > 2\}$, está representado gráficamente por la zona sombreada del dibujo de abajo:

Figura 1.13: $A = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ y } x > 2\}$

Ahora bien, los subconjuntos de \mathbb{R} que consisten de un solo pedazo de la recta numérica aparecerán con tanta frecuencia a lo largo del curso, que vale la pena darles un nombre y desarrollar una notación especial para ellos.

Definición 9. Un subconjunto de \mathbb{R} que se puede representar mediante un solo pedazo de recta numérica recibe el nombre de *intervalo*.

Analizando las posibilidades geométricamente, se llega a la conclusión de que un intervalo debe tener alguna de estas formas básicas:

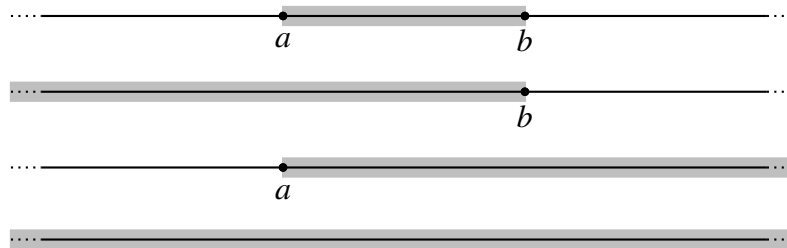


Figura 1.14: Formas básicas de los intervalos

Estudiamos, por el momento, intervalos de la forma siguiente:



Observa que, en este tipo de intervalos hay cuatro posibilidades, dependiendo de si cada uno de los extremos a y b pertenece o no al conjunto.

Consideremos primero el caso en el que ninguno de los extremos pertenecen al conjunto. Siguiendo la convención habitual, representamos gráficamente por \bullet el hecho de que el extremo correspondiente pertenezca al conjunto, y por \circ el hecho de que no pertenezca al conjunto. Así, el intervalo I que empieza en a y termina en b y que no incluye a ninguno de los extremos se representa gráficamente por



Figura 1.15: (a, b)

Veamos ahora qué condición debe de cumplir una $x \in \mathbb{R}$ para ser un elemento de I . Por un lado, debemos tener $a < x$, para que x esté a la derecha de a . Por el otro, debemos tener $x < b$, para que x esté a la izquierda de b . Así, las dos condiciones que debe cumplir una $x \in I$ son $a < x$ y $x < b$, que se escriben juntas como $a < x < b$. En otras palabras, podemos describir a I como el conjunto

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Un intervalo así será llamado *intervalo abierto*, y lo representaremos mediante los símbolos (a, b) . Es decir, por definición, se tiene que

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Analicemos ahora el caso en el que ambos extremos pertenecen al intervalo J que empieza en a y termina en b .

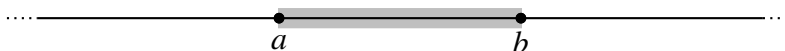


Figura 1.16: $[a, b]$

Si $x \in J$ entonces se debe de tener, por un lado, $a < x$ o $a = x$ (es decir, $a \leq x$) y por el otro, $x < b$ o $x = b$ (es decir, $x \leq b$). Similarmente a lo que hicimos antes, tenemos que las dos condiciones que debe de cumplir una $x \in J$ son $a \leq x$ y $x \leq b$, que se pueden resumir como $a \leq x \leq b$. Es decir, J queda descrito como el conjunto

$$J = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Un intervalo así será llamado *intervalo cerrado* y lo representaremos mediante los símbolos $[a, b]$; de manera que, por definición, se tiene que

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Observa la diferencia en notación entre este caso (que incluye a los extremos y usa corchetes) y el anterior (que no incluye a los extremos y usa paréntesis). Debe ser más o menos claro cómo definir y denotar los dos casos faltantes. En el caso del intervalo K que incluye al extremo izquierdo pero no al derecho,



Figura 1.17: $[a, b)$





se tiene que $K = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, y K lo denotamos por $K = [a, b)$.

Finalmente, el caso del intervalo L que incluye al extremo derecho pero no al izquierdo,

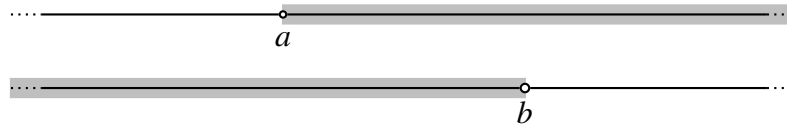
Figura 1.18: $(a, b]$

se define mediante $L = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$, y lo denotamos por $(a, b]$.

Resumimos toda esta información en la siguiente tabla.

Gráficamente	Condición	Notación
	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
	$a < x < b$	(a, b)
	$a \leq x < b$	$[a, b)$
	$a < x \leq b$	$(a, b]$

Quedan por analizar dos casos importantes de intervalos, que se ilustran nuevamente en el siguiente dibujo:



Estos casos son esencialmente distintos de los anteriores porque sólo tienen un extremo y continúan indefinidamente en la otra dirección. Analicemos el primer intervalo, que llamaremos A : en este caso, la única condición que se pide sobre un elemento $x \in \mathbb{R}$ para que pertenezca a A es que esté a la derecha de a , esto es, $a < x$. Esto es, el conjunto A lo podemos describir como el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} | a < x\},$$

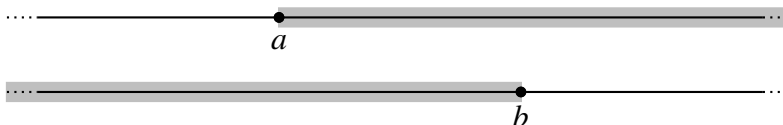
que representaremos mediante los símbolos (a, ∞) . El símbolo ∞ , que se lee “infinito” no es un número real, y aquí se está usando únicamente para indicar el hecho de que el intervalo A continúa indefinidamente hacia la derecha. Por eso es que usamos siempre paréntesis en lugar de corchetes, “)” en lugar de “]”, en el caso de ∞ , pues este “extremo” no es parte del intervalo en cuestión. Dado que ∞ no es un número, no tiene sentido hacer operaciones con él; así, expresiones como $x(\infty)$, $x \pm \infty$ y otras similares, no tienen ningún sentido.

De manera totalmente análoga al intervalo A , se tiene que para que un $x \in \mathbb{R}$ sea un elemento del segundo intervalo, que llamaremos B , se tiene que tener que x esté a la izquierda de b ; es decir, se tiene que cumplir $x < b$. Así, resulta que

$$B = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}.$$

De manera predecible, representaremos a B mediante los símbolos $(-\infty, b)$. Al igual que antes, hacemos énfasis en que $-\infty$ no es un número y no es posible hacer operaciones que lo involucren.

Quedan por analizar los casos ligeramente distintos a los anteriores representados por el siguiente dibujo:



Para tener una notación consistente con la definida antes para intervalos con dos extremos, representaremos estos intervalos por $C = [a, \infty)$ y $D = (-\infty, b]$.

Resumimos estos cuatro casos en la siguiente tabla:

Gráficamente	Condición	Notación
	$a < x$	(a, ∞)
	$x < b$	$(-\infty, b)$
	$a \leq x$	$[a, \infty)$
	$x \leq b$	$(-\infty, b]$

Falta únicamente por analizar el caso del intervalo más grande posible, que consiste de toda la recta real. Dicho intervalo lo representaremos por $(-\infty, \infty)$, aunque con más frecuencia utilizaremos el más sencillo \mathbb{R} .

1.4.1. Ejercicios de la sección

1. Encuentra cinco elementos de cada uno de los siguientes intervalos:

- a) $(1, 3]$
 - b) $[1, 1.5]$
 - c) $[-3, -2)$
 - d) $(100, \infty)$
 - e) $(8/9, 1)$
2. ¿Quién es el intervalo (a, a) ? En otras palabras, ¿de qué otra manera se puede representar este intervalo?
3. ¿Quién es el intervalo $[a, a]$? En otras palabras, ¿de qué otra manera se puede representar este intervalo?
4. Muestra, mediante un ejemplo para cada caso, que la unión de intervalos puede ser o no otro intervalo.
5. ¿Es posible que la intersección de dos intervalos no sea otro intervalo? Argumenta tu respuesta.
6. Realiza las siguientes operaciones de conjuntos. Expresa la respuesta en forma de intervalo (o uniones de intervalos):
- a) $[2, 4) \cup (4, 5]$ (La respuesta *no* es $[2, 5]$, ¿por qué?)
 - b) $[1, 5] \cap (3, 10)$
 - c) $(-\infty, 0] \setminus [0, 1]$
 - d) $[1, \infty) \setminus [2, 9)$
 - e) $[0, \sqrt{2}] \setminus (0, 2)$
 - f) $([1, 3] \cup (2, 8)) \setminus (2.5, 6)$
 - g) $((-5, -3] \cap (-4, -1)) \cup [-\pi, \infty)$
 - h) $\mathbb{R} \setminus [1, 12)$
 - i) $(3, 5) \cup (-7, 4] \cup (4, 5)$
 - j) $(-1, \infty) \cap (-\infty, 5) \cap (-8, 8)$
7. ¿Para qué valores de x tienen sentido las siguientes expresiones? Expresa la respuesta en forma de intervalo (o uniones de intervalos):
- a) \sqrt{x}

- b) $\sqrt{1-x}$
- c) $x^2 + 1 > 0$
- d) $1/x$
- e) $1/(x+2)$

1.5. Ejercicios del capítulo

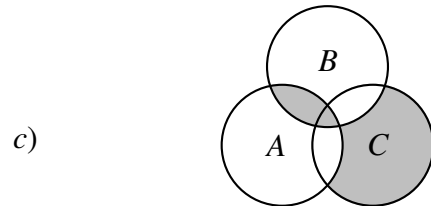
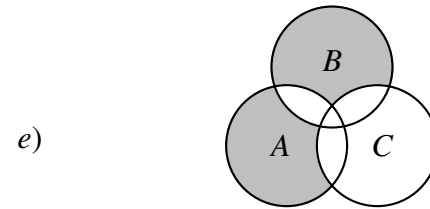
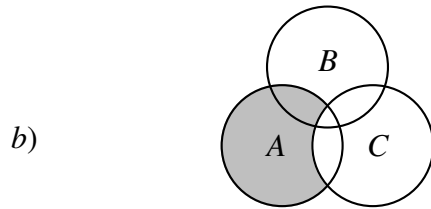
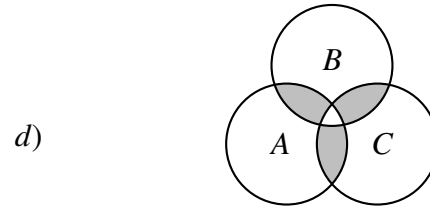
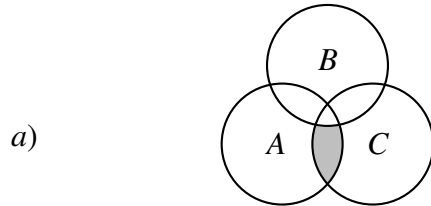
1. Di si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Argumenta tu respuesta:
 - a) Todo conjunto es elemento de sí mismo.
 - b) $\emptyset \subset A$ para cualquier conjunto A .
 - c) $\emptyset \in A$ para cualquier conjunto A .
 - d) $\emptyset = \{\emptyset\}$
 - e) Un elemento de $\{\emptyset\}$ es \emptyset .
2. Explica por qué en un conjunto el orden de los elementos no es relevante.
3. Da un ejemplo de un conjunto que tenga por elementos a otros conjuntos.
4. Explica qué es el conjunto potencia de un conjunto dado.
5. ¿El resultado de intersectar dos conjuntos, es siempre un conjunto?
6. Demuestra que $A \subset A \cup B$ para cualesquiera conjuntos A, B .
7. Demuestra que $A \cap B \subset A$ para cualesquiera conjuntos A, B .
8. Demuestra que $A \setminus B \subset A$ para cualesquiera conjuntos A, B .
9. Si $A \subset B$, demuestra que $A \setminus B = \emptyset$.
10. Demuestra que $A \cap A = A$.
11. Demuestra que $A \cup A = A$.
12. Dado un conjunto A , ¿quién es $A \setminus A$?
13. Menciona tres elementos que pertenezcan y tres elementos que no pertenezcan a cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

14. Describe, por medio de operaciones de conjuntos, la región sombreada de los siguientes diagramas de Venn.



15. Dibuja en la recta real los siguientes conjuntos. Aquéllos que sean intervalos, escríbelos usando la notación correspondiente.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x/3 \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$

h) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 100\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1/2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ o } x > 7\}$

16. Sean $A = [-7, -2) \cup [1, 6)$, $B = (-3, 1)$, $C = [-1, 3]$, $D = (-\infty, 0)$, $E = (-3, 0] \cup [3, 5)$.
Calcula los siguientes conjuntos y exprésalos como intervalos o uniones de ellos:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| a) $E \setminus D$ | f) $(B \cup E) \setminus D$ |
| b) $C \cap E$ | g) $C \setminus (A \cup B)$ |
| c) $A \setminus B$ | h) $(B \cup C) \setminus (-3, 3)$ |
| d) $D \cup E$ | i) $B \cap C \cap D \cap E$ |
| e) $\mathbb{R} \setminus C$ | j) $(B \cup C) \setminus (D \cap E)$ |

17. Recuerda que el plano cartesiano es, como conjunto, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Encuentra cinco elementos que pertenezcan y cinco elementos que no pertenezcan a cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

- | | |
|---|--|
| a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x = 3\}$ | e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y + 1 = x\}$ |
| b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y = 0\}$ | f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y = 2x\}$ |
| c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x = y\}$ | g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y = \frac{x}{2}\}$ |
| d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 -x = y\}$ | h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x^2 = -1\}$ |

Capítulo 2

Funciones y sus gráficas

2.1. Funciones

Comprender qué es una función, conocer algunos ejemplos importantes y algunas de sus aplicaciones son los grandes objetivos de este curso. En esta sección introducimos este importante concepto que será utilizado en todos los capítulos siguientes.

2.1.1. Definición y ejemplos

Una función es una regla que relaciona los elementos de dos conjuntos A y B , de manera que a cada elemento de A le asocia exactamente un elemento de B .

En términos más formales, una función es un conjunto C de parejas ordenadas (con el primer elemento en A y el segundo en B) con la propiedad de que para cada $a \in A$ existe una única $b \in B$ tal que $(a, b) \in C$.

En términos prácticos, uno piensa una función como una manera de relacionar elementos de A con elementos de B , de manera que

1. Ningún elemento de A se queda sin ser relacionado con algún elemento de B , y
2. Ningún elemento de A está relacionado con más de un elemento de B .

Al conjunto A se le conoce como *dominio* de la función, mientras que al conjunto B se le llama *codominio* de la función. Para indicar que A es el dominio y B el codominio de una función

f , escribimos $f : A \rightarrow B$. Comúnmente escribiremos $\text{Dom}(f)$ para denotar el dominio de f y $\text{Cod}(f)$ para denotar el codominio de f .

Una manera un tanto informal pero muy útil de pensar a las funciones es como máquinas que aceptan ciertas materias primas, las procesan y dan lugar a ciertos productos. Dado un elemento $a \in \text{Dom}(f)$, al único elemento del codominio con el que está relacionado se le conoce como *imagen* de a bajo f , y se le denota por $f(a)$, que se lee *f de a*. Esta idea se ilustra en el siguiente dibujo:

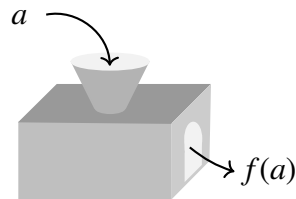


Figura 2.1: Una función pensada como una máquina

Es muy común pensar que $f(a)$ significa f multiplicado por a , pero esta interpretación es errónea. De hecho, f es una función y a un elemento de $\text{Dom}(f)$, así que no tiene sentido pensar en multiplicar f por a . $f(a)$ denota la función f evaluada en el punto a del dominio, por esta razón, $f(a)$ es un punto del codominio. Dicho de otra manera: $f(a)$ representa al producto de procesar la materia prima a bajo la máquina que es la función f .

Otra manera muy común de representar funciones (al menos cuando dominio y codominio son conjuntos con pocos elementos) es por medio de diagramas como los que aparecen a continuación:

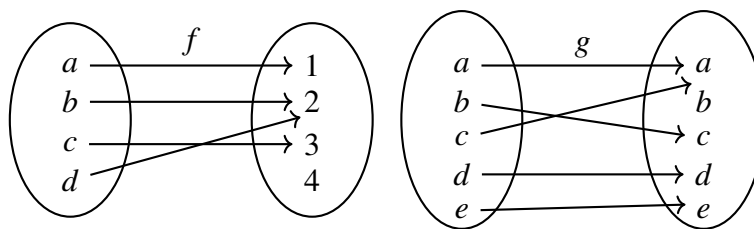


Figura 2.2: Funciones simples

En estos dibujos, el conjunto de donde salen las flechas representa al dominio de la función, mientras que el conjunto a donde llegan las flechas representa al codominio. Las flechas

también indican qué elemento del dominio está relacionado con qué elemento del codominio. Por ejemplo, en la función de la izquierda, se tiene que $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ y $f(d) = 2$; en la de la derecha se tiene que $g(a) = a$, $g(b) = c$, $g(c) = a$, $g(d) = d$ y $g(e) = e$.

Para comprender lo que es una función a veces sirve tener ejemplos “de la vida real”, aunque, la verdad, los ejemplos más elaborados también son “reales” (y muchas veces resultan útiles también).

Pensemos, por ejemplo, en el conjunto de todos los libros de una biblioteca determinada, que será el dominio de nuestra función. El codominio consistirá del conjunto de *todos* los posibles números ISBN (International Standard Book Number, número de libro estándar internacional), que, simplificando un poco, los podemos considerar como todos los números enteros de trece dígitos. Finalmente, la regla de correspondencia relacionará a cada libro con su número ISBN. La clave del asunto es que cada libro tiene asociado exactamente un número ISBN, y por lo tanto esta regla de correspondencia define una función.

¿Qué pasa si hay varios ejemplares del mismo libro? En este caso, habrá varios elementos del dominio relacionados con el mismo elemento del codominio (pues libros iguales tienen el mismo ISBN), pero la regla de correspondencia sigue dando lugar a una función.

Ahora bien, supongamos que en la biblioteca hay una publicación interna que no tiene número ISBN. En ese caso habrá un elemento del dominio que no está relacionado con ningún elemento del codominio y, aquí sí, fallará la primera parte de la definición de función.

En resumen, el hecho de que la regla de correspondencia (libro de la biblioteca \mapsto Número ISBN) sea una función o no, depende mucho de qué conjunto de libros se consideren. La “moraleja” (o más correctamente, la enseñanza) de este ejemplo es que el que una regla de correspondencia defina o no una función entre dos conjuntos depende fuertemente de la elección de éstos, y no únicamente de la manera en que se relacionan sus elementos.

Hay reglas de correspondencia entre dos conjuntos que no definen una función (arriba vimos un caso), porque fallan en alguna de las dos (o las dos) reglas enunciadas arriba. Otro ejemplo se obtiene invirtiendo los papeles de dominio y codominio en el problema de la biblioteca. En este caso, a cada número ISBN se le asociaría el libro correspondiente. Sin embargo, si hay dos o más ejemplares de la misma obra, un número ISBN tendrá asociado más de un libro, lo que contraviene la segunda regla de la definición de función. Incluso eliminando esta posibilidad (es decir, suponiendo que no hay libros repetidos en el acervo de la biblioteca), siempre será posible encontrar un número ISBN al que no le corresponda ningún libro de la biblioteca (de hecho, el sistema ISBN está hecho para que a todos los libros que están por hacerse les corresponda algún número —por lo menos en los próximos años—).

Veamos ahora algunos ejemplos de funciones entre dos conjuntos numéricos:

1. Considera la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que a cada número natural lo relaciona con él mismo. Esto es, $f(x) = x$. En este caso, $f(1) = 1$, $f(7) = 7$, $f(32) = 32$, etc. Observa que la expresión $f(1/2)$ no tiene sentido porque $1/2$ no es un elemento de $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$.
2. Sea $f : \{1, 3, 5, 7\} \rightarrow \mathbb{N}$ la función que a cada número del dominio le asocia ese número multiplicado por cien. Así, $f(1) = 100$, $f(3) = 300$, $f(5) = 500$, $f(7) = 700$. Observa que no es posible calcular $f(2)$ porque $2 \notin \text{Dom}(f)$. Observa también que hay muchos elementos de $\text{Cod}(f) = \mathbb{N}$ que no están relacionados con ningún elemento del dominio, por ejemplo 50, que no se puede ver como $f(x)$ para ninguna $x \in \text{Dom}(f)$.
3. La regla de correspondencia $f(x) = x + 1$ define una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A cada número real, esta función lo relaciona con el número real que resulta de sumarle uno. Por ejemplo, $f(5) = 5 + 1 = 6$, o sea que el 5 (del dominio) está relacionado con el 6 (del codominio) y con ningún otro número. En otras palabras, 6 es la *imagen* de 5 bajo f .
4. Consideremos ahora la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $g(x) = x^2$. Observa que, como en toda función, cada elemento del dominio es relacionado con exactamente un elemento del codominio, puesto que al elevar al cuadrado un número se obtiene un solo resultado. Sin embargo, distintos elementos del dominio están relacionados con el mismo elemento del codominio: $g(-2) = g(2) = 4$. Esto no impide que g sea una función.
5. Dado un conjunto A (no vacío), se puede construir una función muy sencilla $\text{Id} : A \rightarrow A$. Es la llamada *función identidad*, y su regla de correspondencia es $\text{Id}(x) = x$, es decir, a cada elemento de A , la función identidad lo relaciona con sí mismo. Aunque de apariencia inocente, Id será de gran utilidad cuando estudiemos la composición de funciones. Un caso de particular interés será la función $\text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\text{Id}(x) = x$, que es la función identidad en el conjunto de números reales \mathbb{R} . Observa que la función del ejemplo 1 es la función identidad cuando $A = \mathbb{N}$.
6. Sea $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $c(x) = 2$. ¿Qué significa esto? Que a cualquier número real, sin importar cuál sea, la función c le asocia el número 2. De esta manera, $c(-1) = 2$, $c(27) = 2$, $c(3/4) = 2$, etc. A este tipo de funciones, que toman el mismo valor independientemente del punto en el que se les evalúe, se les llama *funciones constantes*.
7. La raíz cuadrada de un número a se define como el único número positivo que al elevarlo al cuadrado da a . Con ayuda de esta operación, se puede definir una nueva función $s(x) = \sqrt{x}$. ¿Quién es $\text{Dom}(s)$? Para responder esta pregunta, recordemos que $y^2 \geq 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que si $y < 0$ no existe un número real x tal que

$x^2 = y$. Es decir, los números negativos no tienen raíz cuadrada real. En otras palabras, para los números negativos, la regla de correspondencia de esta función no tiene sentido. De aquí que $\text{Dom}(s)$ consista de los números reales positivos: $\text{Dom}(s) = [0, \infty)$. El codominio de s es \mathbb{R} : $\text{Cod}(s) = \mathbb{R}$.

8. $f(x) = 1 - x + x^2$ define una función con una regla de correspondencia “más complicada” que los ejemplos anteriores. ¿Cómo saber con quién está relacionado un número dado en el dominio? Simplemente hay que sustituir la x en la regla de correspondencia por el número de nuestro interés, y hacer las operaciones correspondientes. En el caso de $x = 3$, se tiene $f(3) = 1 - 3 + 3^2 = 1 - 3 + 9 = 7$. Tanto el dominio como el codominio de f son todos los números reales; esto lo escribimos en símbolos de la siguiente manera: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
9. Sea $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = (x+1)^2$. Observa que $\text{Dom}(f) = [1, 5]$ aunque la regla de correspondencia tiene sentido para toda $x \in \mathbb{R}$. Esta restricción puede ser únicamente teórica o, en un problema de aplicación, puede corresponder a alguna cuestión práctica.
10. El inverso aditivo de un número a es el número $-a$, porque al sumar ambos se obtiene cero: $a + (-a) = 0$. Sea $\text{Inv} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función que a cada número real le asocia su inverso aditivo. Así, $\text{Inv}(2) = -2$, $\text{Inv}(-4) = -(-4) = 4$ y en general, $\text{Inv}(x) = -x$.
11. A las doce del día, Daniel comienza a andar en bicicleta a una velocidad constante de 20 km/h. Recordando la ecuación $v = d/t$, es posible relacionar cualquier instante posterior a las 12 con la distancia que ha recorrido hasta ese momento. En otras palabras, para cada $t \geq 0$ (donde $t = 0$ corresponde a las 12:00) se tiene que la distancia (d) depende del tiempo (t). De hecho, despejando d de la ecuación anterior, se tiene $d = vt$. Así, por ejemplo después de una hora (es decir, cuando $t = 1$), $d = 20(1) = 20$. Si $t = 1.5$ entonces $d = 20(1.5) = 30$. Esto nos define una función con dominio $[0, \infty)$, codominio \mathbb{R} y regla de correspondencia $d(t) = 20t$.

Si sabemos en qué momento Daniel bajará de la bicicleta o cambiará su velocidad, podemos limitar el dominio justamente al intervalo donde la velocidad es constante. Mientras tanto, dejamos que $\text{Dom}(d) = [0, \infty)$ aunque es claro que, en términos prácticos, la regla sólo es válida para algunos valores positivos de t .

12. Algunas funciones tienen su regla de correspondencia definida por trozos. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 3 \\ -x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} .$$

Para entender qué dice esta regla de correspondencia, hay que fijarse qué propiedad

—de las que aparecen a la derecha— cumple una x dada. Por ejemplo: si $x = -1$ se cumple la primera propiedad, $x < 3$, y entonces $g(-1) = -1 + 1 = 0$. Si, por otro lado $x = 5$, se cumple la otra propiedad, $x \geq 3$, de modo que $g(5) = -5 + 7 = 2$.

2.1.2. Dominio natural de una función

Aunque para definir una función se necesitan tres cosas (dominio, codominio y regla de correspondencia), si no se especifica el dominio, es común dar por hecho que consiste de todos los números para los que tenga sentido la regla de correspondencia, y que el codominio es \mathbb{R} (al menos en estos primeros cursos). Ya vimos antes ejemplos en los que el dominio de una función no es todo \mathbb{R} (ver casos 1, 2, 7, 9, 11 en la lista anterior).

Al conjunto que consiste de todos los números para los cuales la regla de correspondencia tiene sentido se le llama *dominio natural* de la función. Así, el dominio natural de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mientras que el dominio natural de $s(x) = \sqrt{x}$ es el intervalo $[0, \infty)$ (dado que ningún número negativo tiene raíz cuadrada real, como vimos antes).

Veamos un ejemplo más:

¿Cuál es el dominio natural de la función con regla de correspondencia $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$? El meollo del asunto es saber qué valores puede tomar x . El problema que aparece en esta función es que si $x = -1$ se tiene $f(-1) = \frac{1}{(-1+1)(-1-2)}$ y esta expresión no tiene sentido, pues el denominador es cero (y nunca está permitido dividir entre cero). Esto muestra que $-1 \notin \text{Dom}(f)$. De manera similar, se puede mostrar que $2 \notin \text{Dom}(f)$. Como ningún otro valor de x hace que se anule el denominador, se debe tener que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Es decir, $\text{Dom}(f)$ consta de todos los números reales *excepto* -1 y 2.

¿Cuál es el dominio natural de la función con regla de correspondencia $f(x) = x + \frac{1}{x-9} + \sqrt{x}$? El primer término no pone ninguna restricción en x ; el segundo, nos dice que $x - 9 \neq 0$, o bien que $x \neq 9$; el tercer término obliga a $x \geq 0$. Juntando las restricciones se tiene que $\text{Dom}(f) = [0, \infty) \setminus \{9\}$.

2.1.3. Igualdad de funciones

Diremos que dos funciones f y g son iguales si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$
2. $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$.

Así, para que dos funciones sean iguales no basta que tengan la misma regla de correspondencia, deben tener también el mismo dominio. Por ejemplo, se podría pensar que las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x+2}$ son iguales, cancelando la expresión $x + 2$ que aparece en numerador y denominador de $g(x)$. Sin embargo, no se da la igualdad entre funciones, porque $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ mientras que $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Es suficiente que la condición 2 no se cumpla para alguna x para que las funciones no sean iguales. Considera las funciones definidas por trozos mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Si $x \neq 0$ entonces $f(x) = g(x)$. Pero $f(0) = -1$ y $g(0) = 1$. Esta única diferencia en la regla de correspondencia hace que f y g no sean iguales.

Comparemos ahora las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(t) = t^3 + 1$. Dado que no se hace ninguna mención sobre los dominios, se consideran los dominios naturales: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$. ¿Son iguales las reglas de correspondencia? Observa que la única diferencia es sobre la letra que se usa para representarlas, pero ambas representan la misma operación: elevar al cubo y sumar 1 al resultado. Esto nos dice que las reglas de correspondencia de f y g sí son iguales. Otra manera de ver esto es evaluando ambas funciones en un número cualquiera a : se tiene que $f(a) = a^3 + 1$, y que $g(a) = a^3 + 1$. Entonces $f(a) = g(a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$; es decir, ambas funciones tienen la misma regla de correspondencia. Como ya se había observado que los dominios eran iguales, se concluye que las funciones son iguales.

2.1.4. Función valor absoluto y función mayor entero

Se estudiarán aquí dos funciones importantes: la función valor absoluto y la función mayor entero. Con ayuda de éstas será posible construir muchos ejemplos más de funciones que aparecerán en el resto del texto, y que serán de utilidad en cursos de Cálculo.

La función *valor absoluto* se denota por $|x|$. Su dominio y codominio son ambos \mathbb{R} , y su regla de correspondencia (expresada geoméricamente) es como sigue: el valor absoluto de un número x es la distancia que lo separa del 0. Dado que las distancias son siempre positivas (o cero) se tiene que $|x| \geq 0$ para cualquier x .

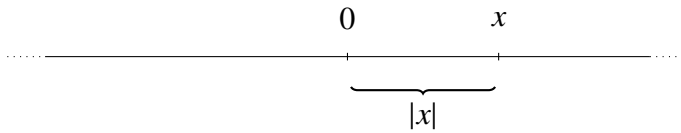


Figura 2.3: El valor absoluto de x

Otra forma de representar la regla de correspondencia de $|x|$ está dada por la expresión

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Este es un ejemplo más de una regla de correspondencia definida por trozos. Dada una x particular, se debe ver cuál de las propiedades de la derecha se cumple, y aplicar la regla correspondiente. Por ejemplo, si $x = 3$, se tiene que $x \geq 0$, por lo cual usaremos la regla del segundo renglón. De acuerdo a esto, se tiene que el valor absoluto de 3 es él mismo: $|3| = 3$. Por el contrario, si $x = -3$, se tiene que usar la regla de correspondencia del primer renglón, pues en este caso $x < 0$, de manera que el valor absoluto de -3 es $-(-3) = 3$.

Observa que, en efecto, las dos reglas de correspondencia (la de la distancia y la dada en forma de casos) coinciden para todas las $x \in \mathbb{R}$, de manera que definen la misma función.

Definamos ahora la función mayor entero. Dado un número real x , la función mayor entero (denotada por $[x]$) le asocia el entero más grande de todos los que son menores o iguales a x .

En forma geométrica esto se puede decir así: dado un número x , la función mayor entero lo relaciona con él mismo en caso de que x sea entero; en caso de que x no sea entero, la función mayor entero lo relaciona con el entero que esté inmediatamente a la izquierda de x en la recta numérica.

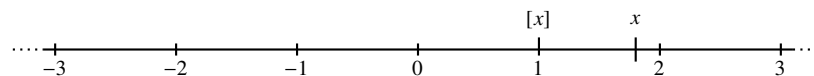


Figura 2.4: El mayor entero de x

Por ejemplo, si se quiere calcular $[2.5]$, hay que considerar el elemento más grande del conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} | n \leq 2.5\}$. Como se observa, dicho elemento es 2, de manera que $[2.5] = 2$. Si se quiere calcular $[-2.5]$, habría que encontrar el entero más grande de todos los que son menores (o iguales) a -2.5 . Una rápida inspección nos revela que este número es -3 . Así, $[-2.5] = -3$.

Esta regla de correspondencia define una función: en efecto, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se pueden seguir los pasos descritos arriba y encontrar el único número con el que x está relacionado. Como en alguno de los ejemplos anteriores, el hecho de que algunos números distintos tengan el mismo mayor entero ($[\pi] = 3 = [3]$), no dice que esta regla de correspondencia no defina una función.

2.1.5. Más ejemplos

Como tal vez hayas notado a partir de los ejemplos presentados hasta ahora, se pueden construir funciones nuevas usando funciones ya conocidas. En esta sección se presentan algunos ejemplos de este tipo y se calculan los dominios naturales (que muchas veces no serán todo \mathbb{R}) de las funciones correspondientes. Esta sección y sobre todo los ejercicios que aparecen al final deben servir como un resumen de lo visto hasta el momento en este capítulo.

Como un primer caso, analicemos la función $f(x) = [\sqrt{x}]$. ¿Cuál es su dominio natural? Para poder calcular \sqrt{x} es necesario que $x \geq 0$, como ya hemos visto. Por otro lado, no importa cómo sea \sqrt{x} , siempre le podremos calcular su mayor entero. En otras palabras, la única restricción para x es $x \geq 0$. Esto quiere decir que el dominio natural de f es $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$.

Nuestro segundo caso está dado por la función $g(x) = \sqrt{[x]}$. Observa que en este caso primero se calcula el mayor entero de x y a lo que resulte se le extrae raíz cuadrada (es decir, el orden de las operaciones es inverso al de la función f del ejemplo anterior). En un primer momento no hay ninguna restricción para x porque $\text{Dom}([x]) = \mathbb{R}$. Sin embargo, hay que tener cuidado con la raíz cuadrada. Para poder aplicarla, es necesario que $[x] \geq 0$ (puesto que sólo los números reales positivos tienen raíz cuadrada). Esto implica que $x \geq 0$, y así $\text{Dom}(g) = [0, \infty)$.

El tercer y último ejemplo está dado por $h(x) = 1/|x + 2|$. En un primer momento hay que sumar 2 al número x . Esto se puede hacer para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Después, hay que calcular el valor absoluto de $x + 2$, operación que también es posible hacer siempre, sin importar quién sea este valor. Finalmente, hay que dividir 1 entre el número $|x + 2|$. Esto impone una restricción: $|x + 2| \neq 0$. Que se cumpla esta condición es equivalente a pedir que $x + 2 \neq 0$, lo cual a su vez equivale a $x \neq -2$. En conclusión, $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2.1.6. Ejercicios de la sección

1. Escribe la regla de correspondencia de la función p , con dominio \mathbb{N} , que a cada número lo relaciona con su doble.
2. Escribe la regla de correspondencia de la función q , con dominio \mathbb{N} y codominio \mathbb{R} , que a cada número lo relaciona con su tercera parte.
3. Escribe la regla de correspondencia de la función con dominio \mathbb{R} que a cada número lo relaciona con el número que es tres unidades más pequeño que su doble.
4. ¿Existe una función g tal que $g(1) = 2$ y que $g(1) = -1$? Si sí, da un ejemplo. Si no, explica por qué.
5. ¿Existe una función h tal que $h(1) = 5$ y $h(10) = 5$? Si sí, da un ejemplo. Si no, explica por qué.
6. ¿Existe una función f tal que $f(4) = \frac{12}{4}$ y $f(4) = 3$? Si sí, da un ejemplo. Si no, explica por qué.
7. ¿Existe una función f tal que $f(2 + 7) = 5$ y $f(9) = 5$? Si sí, da un ejemplo. Si no, explica por qué.
8. Encuentra una función f tal que $f(1) = 3$, $f(5) = 11$.
9. Encuentra una función g tal que $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$.
10. La regla de correspondencia $f(x) = \frac{1}{x}$ define una función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - a) ¿Por qué $0 \notin \text{Dom}(f)$?
 - b) ¿Cuál es la imagen de $1/2$ bajo f ?
 - c) ¿Existe algún $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = 1/3$?
 - d) ¿Existe algún $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = 0$?
11. Determina el dominio natural de las siguientes funciones:
 - a) $f(x) = (1 - x)(2 + x)$
 - b) $g(x) = \sqrt{x^2}$
 - c) $r(x) = \sqrt{x - 3}$

$$d) h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f) p(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{-1-x}$$

$$e) q(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

$$g) s(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1-t}$$

$$h) f(t) = \frac{t(t+1)}{t^2}$$

12. Encuentra una función que tenga a $(-\infty, 0]$ por dominio natural.
13. Encuentra una función que tenga a $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ por dominio natural.
14. ¿Son iguales las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 8 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 8 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} ?$$

15. ¿Son iguales las funciones $f(t) = (t+1)^2$ y $g(t) = t^2 + 2t + 1$?
16. ¿Son iguales las funciones $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ y $g(t) = (3t^4 + 2t^2 - t)/t$?
17. Encuentra dos funciones f y g que tengan la misma regla de correspondencia pero no sean iguales.
18. Encuentra dos funciones f y g que tengan el mismo dominio y misma regla de correspondencia excepto para $x = 7$.
19. Encuentra dos funciones p y q con dominio \mathbb{R} para las cuales $p(x) = q(x)$ si $x \in (-\infty, 0]$ y $p(x) \neq q(x)$ para $x \in (0, \infty)$.
20. Encuentra dos funciones p y q para las que se cumpla $p(2) \neq q(2)$ y $p(x) = q(x)$ para toda $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. (Sugerencia: utiliza funciones definidas por trozos).
21. Las siguientes funciones involucran a las funciones $|x|$ y $[x]$. Evalúalas en los puntos indicados:
- a) $f(x) = 2|x|$ en $x = -7, -3/2, -1/3, 2/4, 10$
- b) $r(x) = |x - 3|$ en $x = -1, -1/2, 0, 1/3, 1, 7/6$
- c) $g(x) = [x] - 2$ en $x = -\pi, -1, 0, \pi/4, \pi/2, 5\pi$
- d) $h(x) = [1 - x]$ donde x es un múltiplo entero de $1/3$ entre -2 y 3
- e) $p(t) = \frac{|t| + 3}{2}$ en $t = -13/2, -5, -4/3, -2, 0, 1/4, 7/4, 3$

$$f) q(x) = |x| + [x] \text{ en } x = n/2 \text{ con } n \in \mathbb{N} \cap [-3, 2]$$

$$g) f(x) = \frac{|x|}{[x]} \text{ en } x = 1, 3/2, 9/4, 12, 1000, 1000.1$$

22. Encuentra el dominio (natural) de $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

23. Encuentra el dominio (natural) de $g(x) = \frac{1}{[x]}$.

24. En cada caso, evalúa la función dada (de ser posible) en los puntos indicados. Si no es posible evaluarla en alguno de ellos, explica por qué. Luego encuentra el dominio natural de la función.

a) $f(x) = [x] - x$, $x = -1, \pi, 2.5^2$

b) $g(x) = 2|x|$, $x = -3, 5, 100$

c) $h(x) = 1/|x + 1|$, $x = -1, 0, 1, 5/4$

d) $p(x) = 1/|x|$, $x = -3, -1, 0, 1/3, 1/2$

e) $q(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$, $x = -2, -1, 0, 1, 2, \pi$

f) $r(x) = \sqrt{x-3}$, $x = 12, 7, 4, 3, -1, -6$

g) $H : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x) = x^3$, $x = 0, 1, 3, 10/3$.

h) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$, $x = 0, \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{15}$

i) $g(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $x = -1/2, -1/3, 0, 5, 7, 10^{10}$

2.2. Tabulación y graficación

Muchas veces la regla de correspondencia de una función no nos da una idea clara de su comportamiento. La gráfica de una función, siendo un objeto geométrico (y por lo tanto visualizable), permite entender mejor algunos aspectos de ésta. Se puede pensar que la gráfica es como un retrato de la función, que nos muestra algunas de sus características principales y sus similitudes o diferencias con otras.

2.2.1. Graficación

La pregunta entonces es, ¿cómo a partir de dominio, codominio y regla de correspondencia podemos construir un dibujo de la función? La respuesta está en el plano cartesiano: identifiquemos el dominio con el eje x (o parte de él) y el codominio con el eje y (o parte de él). La regla de correspondencia, al indicarnos qué elemento del dominio está relacionado con qué objeto del codominio, nos dice qué puntos pertenecen a la gráfica: los de la forma $(a, f(a))$.

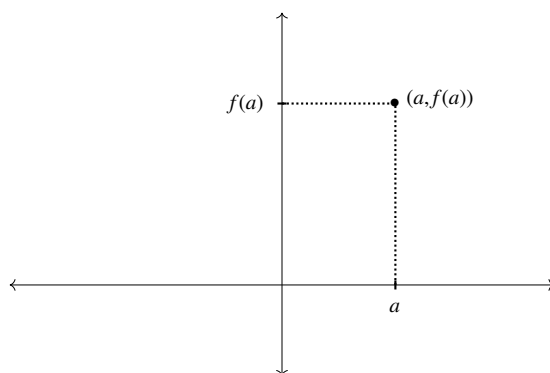


Figura 2.5: Un punto de la gráfica de f

Desde un punto de vista formal, la gráfica de una función f consiste del conjunto de puntos

$$\{(x, y) \in \text{Dom}(f) \times \text{Cod}(f) | y = f(x)\}.$$

Veamos algunos ejemplos que ilustren estas ideas:

Considera la función $f(x) = x + 1$. Algunos puntos de la gráfica son: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$. ¿Cómo se obtuvieron estos puntos? ¿Cómo se sabe que efectivamente están en la gráfica de la función? Para encontrar puntos de la gráfica de una función, hay que darle a x varios valores en $\text{Dom}(f)$ y posteriormente encontrar sus correspondientes imágenes. En el caso anterior, si $x = 0$, entonces $f(x) = f(0) = 0 + 1 = 1$, de donde $(0, 1)$ es un punto en la gráfica de f . De manera similar se pueden obtener los otros puntos mencionados. Al graficar estos puntos, nos damos una idea de cómo se comporta la función:

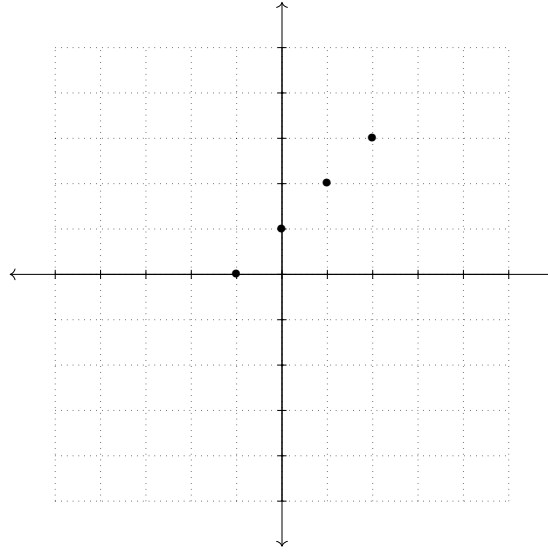


Figura 2.6: Algunos puntos en la gráfica de $f(x) = x + 1$

Debe ser claro que los puntos mencionados arriba no son los únicos en la gráfica de f , finalmente hay uno (¡exactamente uno!) para cada valor de $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Esto significa, entre otras cosas, que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se debe tener un único punto en la gráfica con primera coordenada a . Geométricamente, esto quiere decir que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la recta $x = a$ debe cortar a la gráfica en exactamente un punto (si no la cortara, querría decir que a no estaría relacionado con nadie en $\text{Cod}(f)$; si la cortara más de una vez, tendríamos que a estaría relacionado con más de un elemento de $\text{Cod}(f)$). Nuestro dibujo de arriba no cumple esta propiedad, porque no hemos dibujado todos los puntos de la gráfica. Si lo hiciéramos, obtendríamos algo similar a esto:

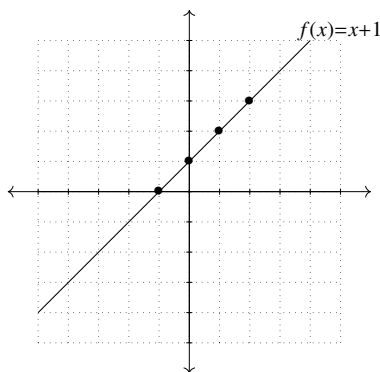


Figura 2.7: La gráfica de $f(x) = x + 1$

Como se puede ver, aquí sí se cumple la regla enunciada: cualquier recta vertical (de la forma $x = a$) corta a la gráfica exactamente una vez.

Analicemos la gráfica de $g(x) = -x^2$. Observa que en este caso, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, de manera que x puede tomar cualquier valor real. Para fijar ideas, démosle a x los valores $-5, -4, -1, 0, 2, 3, 10$. Al calcular las imágenes de estos puntos bajo f , obtenemos, respectivamente, $-25, -16, -1, 0, -4, -9, -100$. Al graficar estos puntos en el plano, obtenemos algo así:

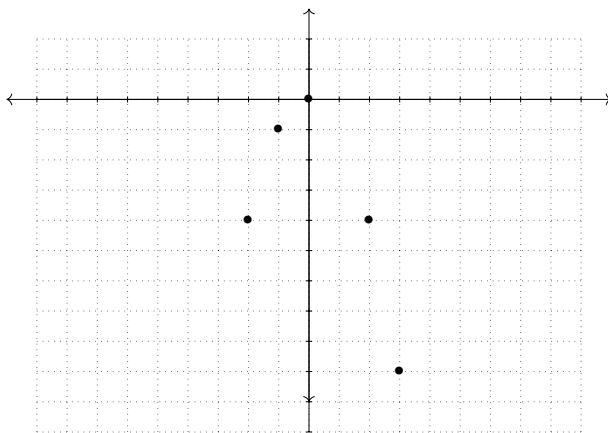


Figura 2.8: Algunos puntos en la gráfica de $g(x) = -x^2$

Al igual que en el ejemplo anterior, estos puntos no son todos los de la gráfica de g , pero si graficamos muchos de ellos tendremos algo así:

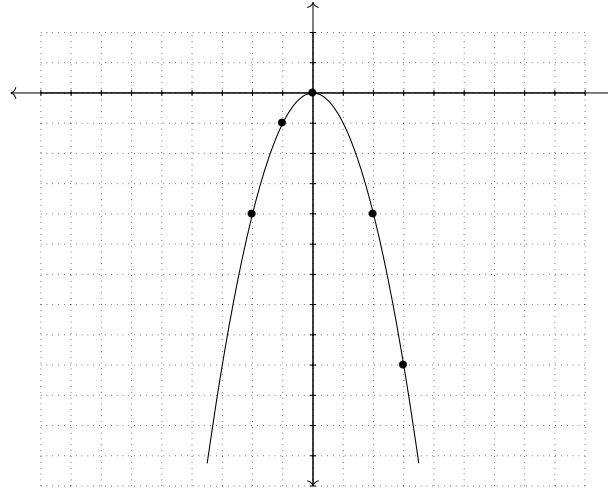
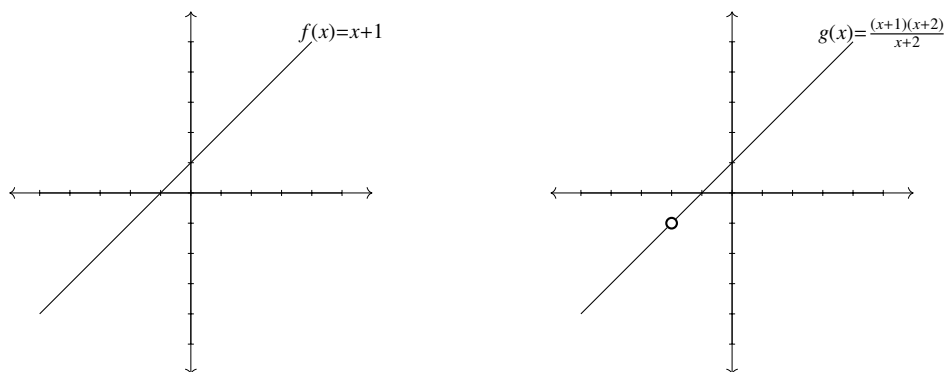


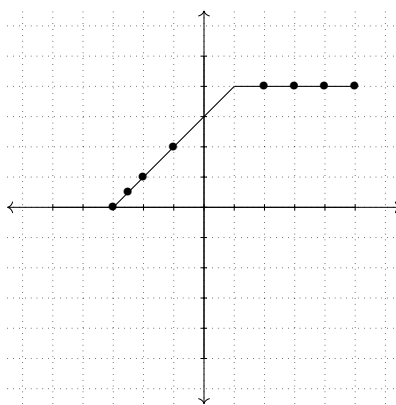
Figura 2.9: Gráfica de $g(x) = -x^2$

Observa que, conforme x toma valores más grandes, el valor de $g(x)$ disminuye, al contrario de lo que pasaba en el ejemplo anterior. Esto es lo que hace que la gráfica de g vaya de “bajada”, para x mayores a cero.

En la sección 2.1.3, sobre igualdad de funciones, observamos que $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x+2}$ no son iguales pese a que $f(x) = g(x)$ para cualquier $x \neq -2$, porque $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ mientras que $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. ¿Cómo se refleja esta diferencia en las respectivas gráficas? Por un lado, para cualquier $a \neq -2$, los puntos $(a, f(a))$ y $(a, g(a))$ son iguales, porque f y g coinciden para esos valores de a . Sin embargo el punto $(-2, -1)$ pertenece a la gráfica de f , porque $f(-2) = -1$, pero $(-2, -1)$ no es parte de la gráfica de g , porque $-2 \notin \text{Dom}(g)$. En otras palabras, la recta vertical $x = -2$ corta a la gráfica de f pero no a la de g . Así, las gráficas se diferencian en un solo punto, como se muestra a continuación:

Figura 2.10: f y g son dos funciones distintas

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \in [-3, 1] \\ 4 & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$ como un cuarto ejemplo. Dado que la regla de correspondencia está definida por trozos, conviene analizar cada uno de ellos por separado. Para el primero, consideremos los valores $-3, -2.5, -2, -1$, mientras que para el segundo usaremos los valores enteros $2, 3, 4, 5$. Al encontrar las imágenes de estos puntos bajo f , y graficarlos, se obtiene lo siguiente:

Figura 2.11: Gráfica de f

La parte de la gráfica de f que corresponde a $x \leq 1$ corresponde a una recta ascendente, mientras que los valores correspondientes a $x \geq 4$ definen una recta horizontal. Este cambio en la regla de correspondencia es lo que forma el “pico” de la gráfica en el punto $(1, 4)$. Observa que $\text{Dom}(f) = [-3, 5]$. Esto quiere decir que la gráfica de f quedará comprendida

entre las rectas verticales $x = -3$ y $x = 5$. Además, si $a \in \text{Dom}(f) = [-3, 5]$, entonces cualquier recta (vertical) de la forma $x = a$ cortará a la gráfica de f exactamente una vez.

El siguiente ejemplo muestra que la gráfica de una función no tiene por qué consistir de un solo trazo sobre el papel. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Si $x \leq 0$ entonces $f(x) = 1$, de manera que todos los puntos de la forma $(x, 1)$ con $x \leq 0$ son parte de la gráfica de f (esto incluye a puntos de la forma $(-0.5, 1)$, $(-0.1, 1)$, $(-1/100, 1)$, etc.). De manera análoga, si $x > 0$ entonces $f(x) = -1$, y por lo tanto todos los puntos de la forma $(x, -1)$ con $x > 0$ son parte de la gráfica de f (incluyendo puntos del tipo $(0.2, -1)$, $(1/73, -1)$, $(0.001, -1)$, etc).

Como consecuencia de estas observaciones se tiene que la gráfica de f luce así:

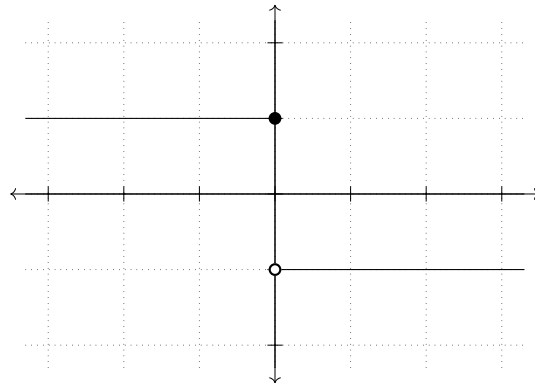


Figura 2.12: Gráfica de $f(x)$

Si la gráfica de una función consta de varios trazos, diremos que la función es *discontinua* en los puntos x donde la gráfica está “rota”. En el caso anterior, f es discontinua en $x = 0$. Por el contrario, si la gráfica de una función se puede dibujar en un solo trazo (sin despegar el lápiz del papel), diremos que la función es *continua*.

De estos ejemplos podemos sacar varias cosas en claro:

1. Si $a \in \text{Dom}(f)$, la recta vertical que corta al eje x en el punto $(a, 0)$, corta a la gráfica de f exactamente una vez: en el punto con coordenadas $(a, f(a))$.

2. Si $a \notin \text{Dom}(f)$, la recta vertical que corta al eje x en el punto $(a, 0)$ no corta a la gráfica de f en ningún punto.
3. Si dos funciones no son iguales, sus gráficas serán distintas en al menos un punto.

2.2.2. Tabulación

Como vimos antes, para poder graficar una función es necesario evaluarla en varios puntos de su dominio. Una forma de hacer esta tarea de forma más sistemática es por medio de una tabla de dos columnas: en la izquierda pondremos los valores de la variable y en la derecha los valores de la función evaluada en el valor correspondiente de la izquierda. Por ejemplo, si $f(x) = 2x - 1$ y queremos conocer el valor de f para $x = -1, 0, 1.5, 2, 4$, basta con realizar la siguiente tabla:

x	$f(x)$
-1	-3
0	-1
1.5	2
2	5
4	7

Observa que al juntar los dos números que aparecen en un renglón de la tabla, se obtiene un punto que pertenece a la gráfica de la función. En el caso anterior, se tiene que $(-1, -3)$, $(0, -1)$, $(1.5, 2)$, $(2, 5)$ y $(4, 7)$ son puntos en la gráfica de $f(x)$. Esto se debe al hecho de que finalmente, los puntos así construidos tienen la forma $(x, f(x))$, que son precisamente los puntos que forman la gráfica de f .

Esta manera de construir puntos de la gráfica de f no es nueva, es de hecho la misma que se vio en la subsección 2.2.1. La única novedad aquí es la tabla de dos columnas que permite luego hacer una lista con puntos de la gráfica de f .

Se requiere de cierta práctica saber cuáles y cuántos puntos se necesita tabular para tener una gráfica fiel de una función. Por ejemplo, si en el caso de $f(x) = |x|$ se le dan a x sólo valores negativos, parecería que la gráfica de f coincide con la de $h(x) = -x$, lo cual es falso. Un caso particularmente engañoso es el de $g(x) = [x]$: si le damos a x únicamente valores enteros, parecería que $g(x) = x$, lo cual es falso.

Una regla básica es que si la función está definida por trozos habrá que tabular valores correspondientes a cada uno de los pedazos que definen la regla de correspondencia. Por ejemplo,

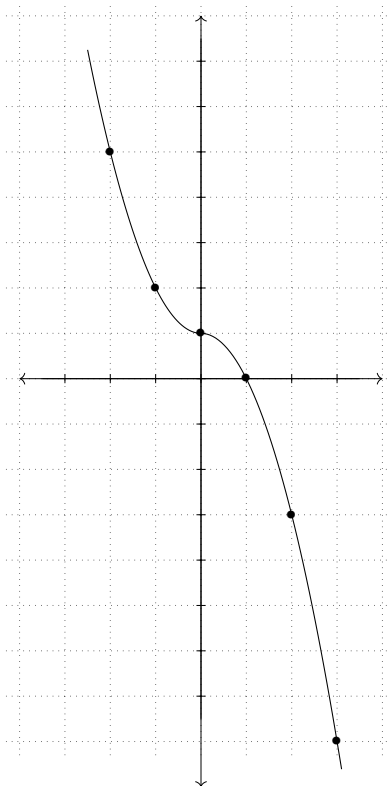
para tabular (y graficar) la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

hay que considerar valores positivos y negativos de x , para poder reflejar el comportamiento tanto de $x^2 + 1$ como el de $-x^2 + 1$. Con este fin, hacemos la tabla siguiente:

x	$f(x)$
-2	5
-1	2
0	1
1	0
2	-3
3	-8

Al graficar f de acuerdo a esta tabla se obtiene lo siguiente:

Figura 2.13: Gráfica de $f(x)$

2.2.3. Gráficas de $|x|$ y $[x]$

Tabulemos ahora algunas de las funciones vistas en las secciones anteriores, para después graficarlas.

Gráfica de $|x|$

Partiendo de la definición de $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, es natural pensar que en la tabulación se tiene que incluir tanto números positivos como negativos, para hacer uso de las dos reglas de correspondencia que definen a $|x|$.

Es un ejercicio para el lector completar la siguiente tabla y, con su ayuda, graficar la función

$$f(x) = |x|.$$

x	$ x $
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Gráfica de $g(x) = [x]$

Dado que g se comporta de manera distinta en \mathbb{Z} que en los números no enteros, es crucial que al momento de tabular se incluyan ambos tipos de números (enteros y no enteros). En un primer momento, nos concentraremos en la gráfica de g para $x \in [0, 1)$. Con este fin, completa la siguiente tabla y haz una gráfica de g para $x \in [0, 1)$.

x	$g(x)$
0	
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	
1	

Observa que $g(1) = 1$, aunque $g(x) = 0$ para cualquier $x \in [0, 1)$.

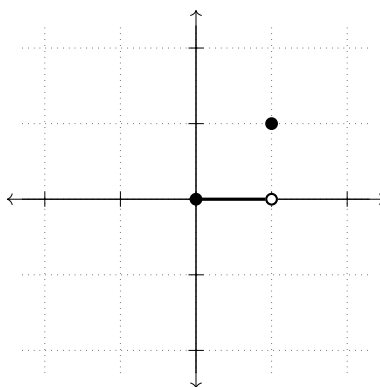


Figura 2.14: Gráfica de $g(x) = [x]$ para $x \in [0, 1]$

En los ejercicios se construye el resto de la gráfica de la función mayor entero.

2.2.4. Ejercicios de la sección

1. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(t) = 5$

f) $g(x) = 7x + 2$

b) $f(x) = -x$

g) $h(x) = 10x + 2$

c) $f(x) = -x + 1$

h) $g(x) = x^2 + 1$

d) $j(x) = 2x + 1$

i) $g(x) = x^3$

e) $f(x) = 5x + 2$

j) $s(x) = x^4$

2. Tabula y grafica las siguientes funciones. Si están definidas por pedazos, presta especial atención a los puntos donde cambia la regla de correspondencia.

a) $f(x) = \pi$.

b) $g(x) = \pi x$.

c) $p(x) = x^2 - 2x$.

d) $h(x) = \sqrt{x}$

(Sugerencia: ¿Quién es $\text{Dom}(h)$?)

e) $j(x) = \sqrt{-x}$
 (¿Cómo tiene que ser x para que $-x$ sea positivo?)

f) $q(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

g) $r(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t < -1 \\ t & \text{si } -1 \leq t < 2 \\ t + 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

h) $f(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t < 0 \\ 2t + 1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ -x + 7 & \text{si } t > 2 \end{cases}$
 (Observa que $\text{Dom}(f) \neq \mathbb{R}$.)

i) $g(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -(x - 1)^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 (¿Quién es $\text{Dom}(g)$?)

j) $p(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 - 1 & \text{si } x \neq -2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes incisos para terminar de graficar la función $g(x) = [x]$.

a) Haz una tabla y análisis semejantes a los anteriores para $x \in [1, 2]$ para hacer la gráfica de $g(x) = [x]$ para $x \in [0, 2]$. Recuerda que, según la regla que vimos antes, cualquier recta vertical (para $x \in [0, 2]$) debe cortar exactamente una vez a la gráfica de g .

b) Repite el inciso anterior para $x \in [-1, 0]$.

c) Con base en lo visto hasta ahora, dibuja la gráfica de $g(x) = [x]$ (para toda $x \in \mathbb{R}$).

4. Tabula y grafica las siguientes funciones. Antes de lanzarte a tabular, trata de averiguar qué valores hay que darle a la variable para obtener puntos “representativos” de la gráfica.

a) $f(x) = |x - 10|$

d) $p(x) = |x - 1| + 2$

b) $g(x) = |2x|$

e) $q(t) = \frac{1}{t}$

c) $h(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

f) $r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$$g) s(t) = \left[t + \frac{1}{2} \right]$$

$$h) w(t) = [t] + \frac{1}{2}.$$

5. ¿Son iguales las funciones s y w del problema anterior?

2.3. Mover una gráfica

En esta sección estudiaremos con más detalle la relación que existe entre una función y su gráfica. La idea central es descubrir cómo ciertas modificaciones algebraicas a la regla de correspondencia afectan geoméricamente a la gráfica. Veremos esto por medio de ejemplos para posteriormente hacer generalizaciones.

Como primer ejemplo, observemos las tablas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$, que tienen los mismos valores para x .

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$g(x)$
-3	10
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10

Observa que, en cada caso, las entradas en la columna $g(x)$ son mayores en una unidad que la entrada correspondiente en la columna $f(x)$. Esto no es casualidad, sino consecuencia del “+1” que aparece en la regla de correspondencia de g . De hecho, dado que $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$, se puede escribir $g(x) = f(x) + 1$. Es decir, para cualquier x (no sólo los que aparecen en las tablas de arriba) se tiene que $g(x)$ es 1 más que $f(x)$.

Si se trazan las gráficas de f y g en el mismo plano cartesiano, se obtiene lo siguiente:

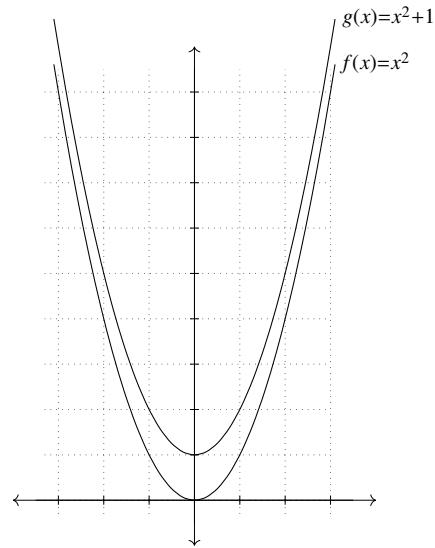


Figura 2.15: Desplazamiento vertical (1)

Observa que, en todo momento, la gráfica de $g(x) = x^2 + 1$ se mantiene una unidad arriba de la de $f(x) = x^2$. Si en el dibujo parece que se juntan las gráficas es porque la mente no toma la distancia vertical, sino hacia el punto más cercano de la otra curva.

Comparemos ahora las funciones $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = |x| + 4$. Sus tablas guardan cierta similitud:

x	$f(x)$
-3	2
-2	1
-1	0
0	-1
1	0
2	1
3	2

x	$g(x)$
-3	7
-2	6
-1	5
0	4
1	5
2	6
3	7

Al igual que en el ejemplo anterior, las columnas de la derecha de ambas tablas guardan una relación entre ellas: las entradas de la de g son cinco unidades mayores que las de f . ¿Cuál es el origen de esa diferencia? Calculando $g(x) - f(x) = (|x| + 4) - (|x| - 1) = 5$ se obtiene una respuesta.

Esto se refleja en una similitud entre las gráficas, como se observa a continuación:

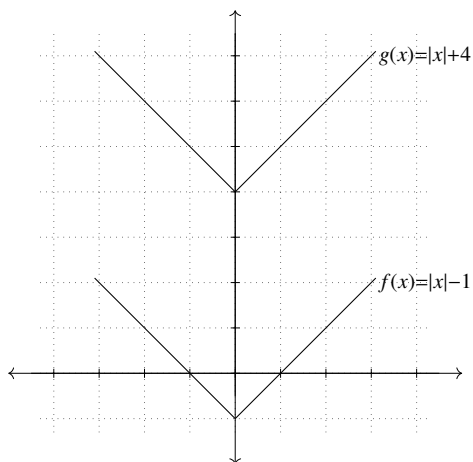


Figura 2.16: Desplazamiento vertical (2)

Esto tal vez no sea una gran sorpresa, puesto que, a semejanza de lo que pasaba en el ejemplo anterior, $g(x) = f(x) + 5$.

Generalizando lo visto en los dos ejemplos anteriores, se puede decir que si las reglas de correspondencia de dos funciones son iguales excepto por una constante positiva (es decir, si $g(x) - f(x) = k > 0$, o bien $g(x) = f(x) + k$), entonces la gráfica de g estará k unidades por arriba de la gráfica de f ; en otras palabras, la gráfica de g será un *desplazamiento vertical* por k unidades de la gráfica de f .

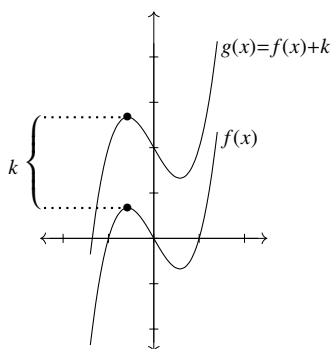


Figura 2.17: Desplazamiento vertical de k unidades

Informalmente, se dice que al sumar una constante positiva k a una función, la gráfica “sube”

k unidades.

Definición 10. Si una gráfica es el resultado de “subir” o “bajar” la gráfica de otra función, diremos que ambas gráficas son “paralelas”.

Ahora compararemos funciones que guardan entre sí una semejanza tal vez menos evidente que las estudiadas antes. Como un primer caso, comparemos $f(x) = |x|$ y $g(x) = |x + 1|$. Estas funciones no difieren por una constante (ya que $|x + 1| \neq |x| + 1$), de manera que no se puede concluir que sus gráficas sean paralelas. Tabulando y graficando obtenemos alguna información sobre la manera en que ese “+1” dentro del valor absoluto modifica la gráfica de f .

x	$f(x)$
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3

x	$g(x)$
-3	2
-2	1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

¿Cuál es la similitud entre ambas tablas? Observa que en la columna derecha de la tabla de g aparecen los mismos valores que en la de f , pero recorridos un lugar hacia arriba (por ejemplo, el 2 del segundo renglón de f aparece en el primer renglón de g , el 1 del tercer renglón de f aparece en el segundo renglón de g , etc.).

Las gráficas correspondientes se ven así:

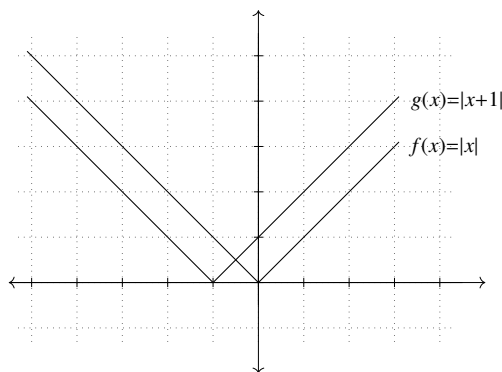


Figura 2.18: Desplazamiento horizontal (1)

Observa que la gráfica de g es un desplazamiento hacia la izquierda de la gráfica de f por una unidad. Analicemos las tablas de f y g para entender por qué ese corrimiento en las columnas se refleja en un desplazamiento horizontal hacia la izquierda en la gráfica.

Para que $f(x) = 0$, se debe de tener $x = 0$; por otro lado, para que $g(x) = 0$, se debe de tener $x + 1 = 0$, es decir, $x = -1$. Para que $f(x) = 1$, se debe tener $x = -1$ o $x = 1$; por otro lado, para que $g(x) = 1$, se debe de tener $x = -2$ o $x = 0$. O sea que la gráfica de g alcanza los mismos valores que la de f una unidad antes que f misma. Esto es otra manera de decir que los valores de f aparecen también en la tabla de g , pero un renglón hacia arriba. Esto significa que la gráfica de g sucede “antes” que la de f . ¿Cuánto antes? Una unidad.

Este tipo de operación se entenderá completamente cuando estudiemos la composición de funciones. Sin embargo es posible, desde este momento, analizar otros casos similares:

Veamos el caso de $p(x) = \frac{1}{x}$ y $q(x) = \frac{1}{x-3}$. Al igual que antes, quisiéramos averiguar cuál es el efecto de ese “-3” en el denominador de $q(x)$ sobre la gráfica. Antes que nada, nótese que $\text{Dom}(p) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mientras que $\text{Dom}(q) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Al hacer las tablas correspondientes, observamos que la columna de $q(x)$ tiene los mismos valores que la de $p(x)$ pero recorrida tres renglones hacia abajo:

x	$p(x)$	x	$q(x)$
-4	-1/4	-4	-1/7
-3	-1/3	-3	-1/6
-2	-1/2	-2	-1/5
-1	-1	-1	-1/4
0	-	0	-1/3
1	1	1	-1/2
2	1/2	2	-1
3	1/3	3	-
4	1/4	4	1

Repitiendo la idea del ejemplo anterior, esto muestra que el valor de p en un número a , q lo alcanza en el número $a + 3$. Por ejemplo, $p(2) = 1/2$, mientras que $q(2 + 3) = q(5) = 1/(5 - 3) = 1/2$. Un poco más en general: $q(a + 3) = 1/((a + 3) - 3) = 1/a = p(a)$. Una vez más, en palabras, tenemos que lo que vale p en a es lo mismo que vale q en $a + 3$. Esto quiere decir, a nivel de las gráficas, que la de q se encuentra recorrida tres unidades a la derecha con respecto a la de p , como se aprecia en el siguiente dibujo:

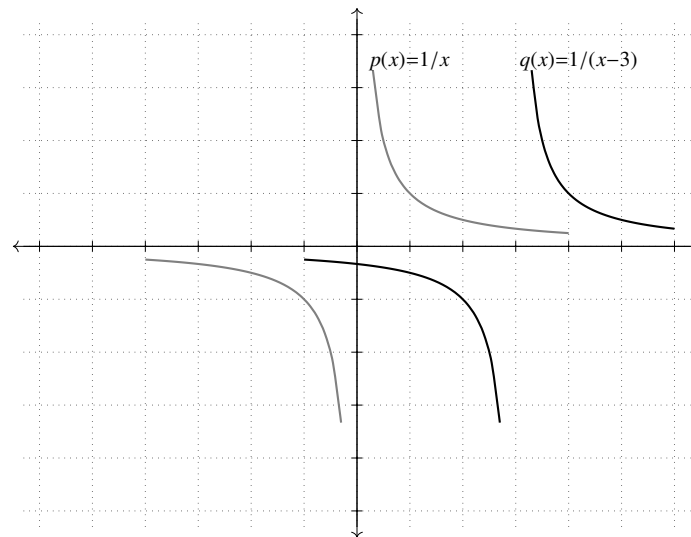


Figura 2.19: Desplazamiento horizontal (2)

Ahora bien, cuál es precisamente la relación entre $f(x) = |x|$ y $g(x) = |x + 1|$? ¿O entre $p(x) = 1/x$ y $q(x) = 1/(x - 3)$? Nota que si se evalúa $f(x)$ en $x + 1$, se obtiene $g(x)$: $f(x + 1) = |x + 1| = g(x)$. De manera similar, al evaluar $p(x)$ en el punto $x - 3$ se obtiene $q(x)$: $p(x - 3) = 1/(x - 3) = q(x)$. Esta observación, junto con el análisis previo, nos permite resumir nuestros últimos avances en el siguiente párrafo:

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen la igualdad $f(x - h) = g(x)$ para algún número $h \in \mathbb{R}$, entonces la gráfica de $g(x)$ es un desplazamiento hacia la *derecha* de la de $f(x)$, si $h > 0$. Si, por el contrario, $h < 0$, entonces la gráfica de $g(x)$ será un desplazamiento hacia la *izquierda* de la de $f(x)$.

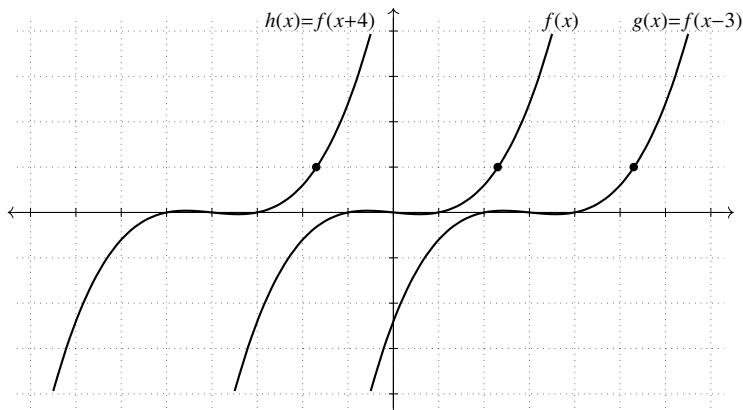
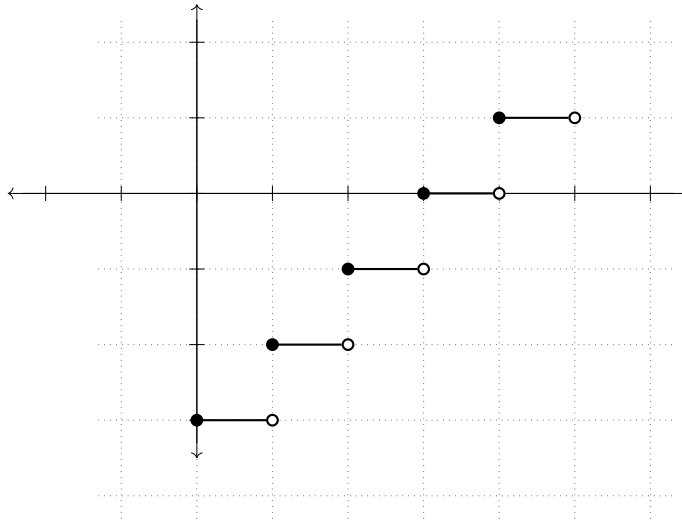


Figura 2.20: Desplazamiento horizontal (3)

2.3.1. Ejercicios de la sección

1. ¿Son paralelas las gráficas de $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = -x^2 + 1$? Observa que $g(x) - f(x) = -2 < 0$.
2. ¿Son paralelas las gráficas de $f(x) = \sqrt{|x|}$ y $g(x) = \sqrt{|x|} - 4$? Observa que $g(x) - f(x) = -4 < 0$.
3. Basándote en los ejercicios anteriores, di cómo se relacionan las gráficas de $g(x) = f(x) + k$ si k es una constante negativa.
4. Describe cómo se modifica la gráfica de una función al sumar a su regla de correspondencia una constante negativa $k < 0$.
5. Esboza, en el mismo plano cartesiano, las gráficas de $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3x + 2$, $h(x) = 3x + 5$, $p(x) = 3x + 10$ y $q(x) = 3x - 15$. La idea *no* es que hagas las tablas de las cinco funciones.
6. Encuentra una función $f(x)$ cuya gráfica sea paralela a la de $g(x) = |2x| + 1$ y que pase por el punto $(2, 17)$.
7. Encuentra una función $f(x)$ cuya gráfica sea paralela a la de $g(x) = x^2 - x - 1$ y que pase por el punto $(0, 7)$.
8. ¿Son paralelas las gráficas de las funciones $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = x^2 + 2x$? La idea es que puedas responder la pregunta *antes* de trazar las gráficas.

9. ¿Son paralelas las gráficas de $f(x) = x$ y de $g(x) = 7 - x$?
10. Encuentra la regla de correspondencia de una función cuya gráfica sea como la del dibujo:



11. Las ideas de esta sección también son válidas para funciones definidas por pedazos: observa que las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

son tales que $g(x) - f(x) = 1$. Grafícalas y comprueba que sus gráficas son paralelas.

12. Aunque una función sea discontinua, es posible desplazar verticalmente su gráfica. Encuentra una función $f(x)$ cuya gráfica sea paralela a la gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}.$$

13. ¿Cómo debería de ser la regla de correspondencia de una función $h(x)$ para que fuera un corrimiento horizontal de la gráfica de $f(x) = x^3$ dos unidades hacia la izquierda?
14. Encuentra dominio, gráfica y regla de correspondencia de la función que resulta de desplazar siete unidades a la izquierda a la función $f(x) = \sqrt{x}$.

15. Encuentra gráfica y regla de correspondencia de una función que sea un desplazamiento de $f(x) = x^3$ y que pase por el punto $(18, 0)$.
16. Encuentra la regla de correspondencia de la función que resulta de desplazar media unidad a la derecha la gráfica de la función $f(x) = [x]$.
17. Considera la función $f(x) = x^2$. Desplázala hacia la derecha de manera que pase por el punto $(10, 4)$. ¿Cuál es la regla de correspondencia de la nueva función? (Nota: hay dos soluciones. Traza la gráfica de f para ver por qué.)
18. Encuentra gráfica y regla de correspondencia de una función que sea un desplazamiento horizontal de $g(x) = |x + 12|$ de manera que pase por el origen.
19. En este ejercicio analizamos la relación que existe entre los desplazamientos horizontales y los desplazamientos verticales de una función cuya gráfica es una recta.
 - a) Grafica la función $f(x) = 2x$.
 - b) Encuentra la regla de correspondencia de la función que resulta de desplazar $f(x)$ dos unidades hacia arriba.
 - c) Encuentra la regla de correspondencia de la función que resulta de desplazar $f(x)$ una unidad hacia la izquierda.
 - d) ¿Observas alguna similitud entre las reglas de correspondencia de las funciones de los dos incisos anteriores? Explica geoméricamente.
20. Considera la función $f(x) = 3x + 1$. Encuentra la regla de correspondencia de la función que resulta de desplazar su gráfica cuatro unidades hacia la derecha. ¿Es posible ver esta nueva función $g(x)$ como un desplazamiento *vertical* de $f(x)$? En caso de que tu respuesta sea afirmativa, ¿cuánto es este desplazamiento?
21. Describe la gráfica de $g(x) = |x + 1| - 2$ a partir de desplazamientos verticales y horizontales de la función $f(x) = |x|$.

22. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Encuentra gráfica y regla de correspondencia de la función que resulta de desplazarla tres unidades hacia abajo y diez unidades a la derecha.

23. Grafica la función $g(x) = 10x^2$. ¿Es un desplazamiento (horizontal o vertical) de la función $f(x) = x^2$?

2.4. Otras características importantes de una función

En esta sección analizamos varios aspectos de una función que nos ayudarán a conocerla mejor: los intervalos donde es creciente o decreciente, y sus simetrías. La primera nos da información sobre cuándo la gráfica es “ascendente” o “descendente”, en un sentido que se expresa precisamente en el texto. La segunda, nos da condiciones sencillas de verificar para saber si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje y o si es simétrica con respecto al origen. En muchos casos, el tener esta información sobre una función nos será una herramienta muy útil para poder escoger valores adecuados para x al momento de tabular o incluso para esbozar la gráfica sin necesidad de tabular la función.

2.4.1. Funciones crecientes y funciones decrecientes

La gráfica de $f(x) = x^3$ nos parece que va de “subida” mientras que la gráfica de $g(x) = -x^{1/3}$ nos parece que va de bajada:

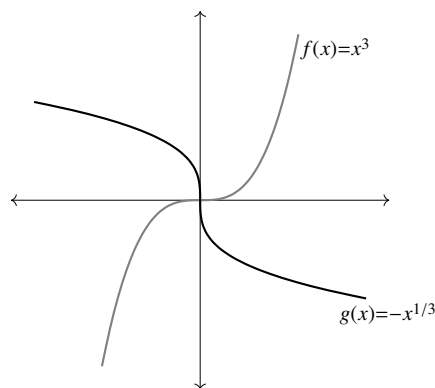


Figura 2.21: f “sube” y g “baja”

También hay funciones que suben en ciertos intervalos y bajan en otros, como:

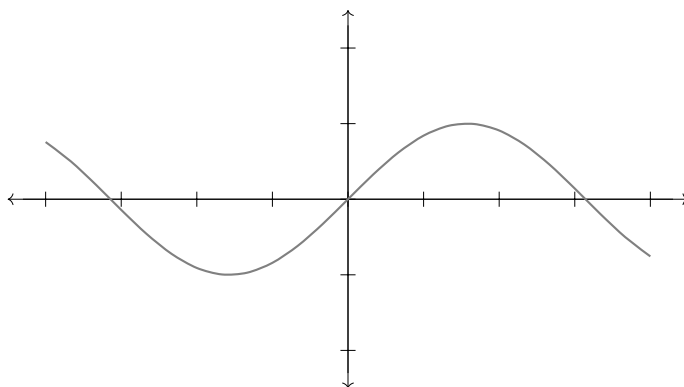


Figura 2.22: $f(x) = \text{sen}(x)$ “sube” en ciertos intervalos y “baja” en otros

En esta sección estudiaremos estas ideas geométricas a detalle, relacionándolas con propiedades de la regla de correspondencia de la función.

Definición 11. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es *creciente* si para cualesquiera $a, b \in A$ con $a < b$ se tiene que $f(a) \leq f(b)$. Si $f(a) < f(b)$ se dice que f es *estrictamente creciente*.

Observa que la definición anterior no involucra para nada la gráfica de f . Sin embargo, el que una función sea creciente se refleja en su gráfica: si $a < b$ entonces a aparece a la izquierda de b en el eje x , y si $f(a) < f(b)$ entonces $f(a)$ aparece abajo de $f(b)$ en el eje y . Esto le da a la gráfica de f la forma que uno esperaría de una función creciente, como lo ilustra la siguiente figura.

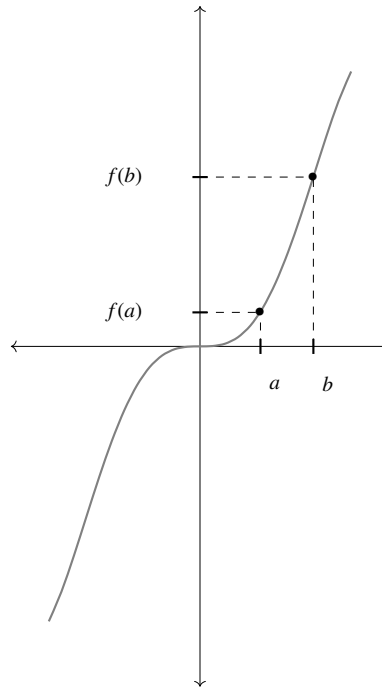


Figura 2.23: Una función creciente

Definición 12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es *decreciente* si para cualesquiera $a, b \in A$ con $a < b$ se tiene que $f(a) \geq f(b)$. Si $f(a) > f(b)$ se dice que f es *estrictamente decreciente*.

Al igual que en la definición de función creciente, aquí no aparece involucrada la gráfica de f , pero un análisis similar al anterior muestra que en la gráfica de f los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ deben aparecer en estas posiciones relativas, de manera que la gráfica es como la de la figura.

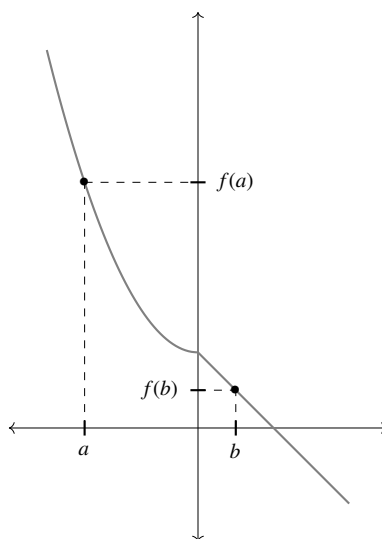
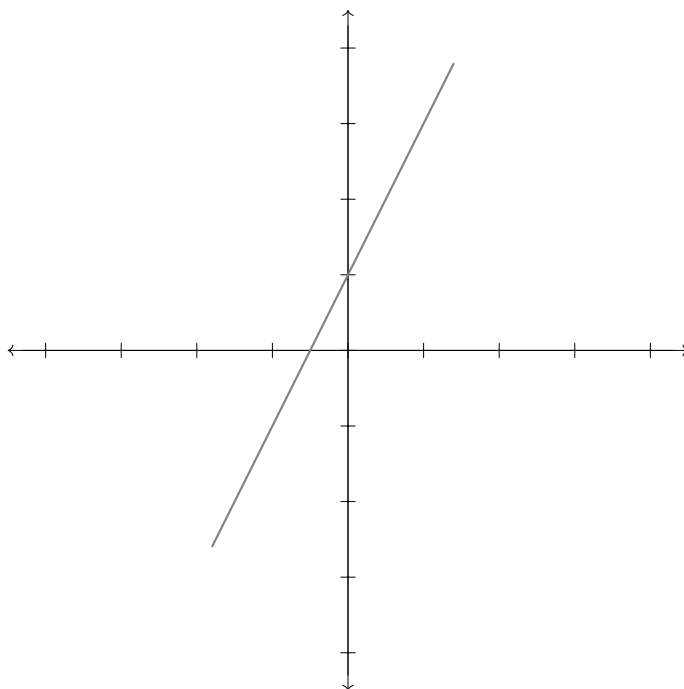


Figura 2.24: Una función decreciente

Más que memorizar la definición de función creciente (o decreciente), se trata aquí de observar la relación entre una definición que involucra únicamente desigualdades y la gráfica de una función. Esta relación entre el aspecto algebraico de las funciones y su aspecto geométrico es, de alguna manera, el objeto de estudio de todo el libro.

Veamos algunos ejemplos que ilustren estas definiciones:

La función $f(x) = 2x + 1$ es estrictamente creciente, puesto que si $a < b$ entonces $2a < 2b$ y $2a + 1 < 2b + 1$, de forma que $f(a) < f(b)$. Su gráfica es la siguiente:

Figura 2.25: Gráfica de $f(x) = 2x + 1$

La función constante $g(x) = 3$ es creciente y decreciente (aunque no estrictamente).

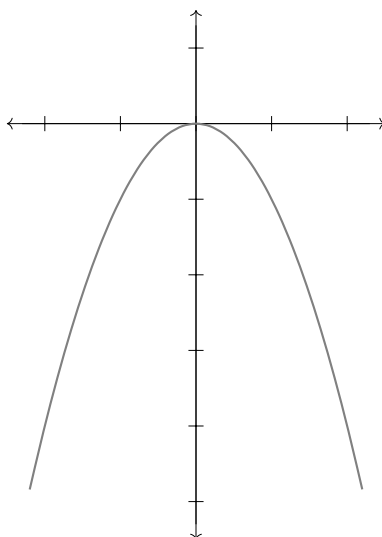
Un ejemplo más interesante nos lo da la función mayor entero, cuya gráfica ya conocemos. En este caso, si $a < b$ se puede tener $[a] = [b]$ o $[a] < [b]$ (ver ejercicios 1 y 2). Es decir, $a < b$ implica $[a] \leq [b]$. Esto muestra que esta función es creciente pero no estrictamente creciente.

Algunas funciones combinan “subidas” y “bajadas” en su gráfica, de manera que no son ni crecientes ni decrecientes. Sin embargo, en la mayoría de los casos se puede hablar de intervalos donde son crecientes e intervalos donde son decrecientes. Esto da lugar a la siguiente

Definición 13. Se dice que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es *creciente en* $[p, q]$ si para cualesquiera $a, b \in [p, q]$ se tiene $f(a) \leq f(b)$. Si $f(a) < f(b)$ entonces se dice que f es *estrictamente creciente en* $[p, q]$.

En la siguiente lista de ejercicios se te pedirá redactar una definición similar a la anterior para una función decreciente o estrictamente decreciente en $[p, q]$.

Como un primer ejemplo, analicemos la función $f(x) = -x^2$.

Figura 2.26: Gráfica de $f(x) = -x^2$

A partir de la gráfica, uno piensa que f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[0, \infty)$. Para comprobar esto según la definición, tomemos $a, b \in (-\infty, 0]$, con $a < b$. Multiplicando ambos lados de la desigualdad por a , se tiene $a^2 > ab$ (recuerda que $a < 0$). Pero también se tiene $ab > b^2$ (multiplicando $a < b$ por $b < 0$); de donde se concluye que $a^2 > b^2$ y por lo tanto $-a^2 < -b^2$, es decir, $f(a) < f(b)$. Esto muestra que f es creciente en $(-\infty, 0]$. Un procedimiento similar muestra que, para $a, b \in [0, \infty)$, $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$, lo que muestra que f es decreciente en ese intervalo.

En este caso se conoce de antemano la gráfica de f , y de ahí se ve claramente cuáles son los intervalos donde f es creciente y donde f es decreciente. En algunos casos (como el siguiente) la información sobre los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función nos ayudan a trazar su gráfica.

Sea $f(x) = x - [x]$. Veremos que f es creciente en los intervalos $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, ... Supongamos entonces que $a, b \in [1, 2)$, con $a < b$. Entonces $[a] = [b] = 1$, de modo que $a - [a] < b - [b]$; es decir, $f(a) < f(b)$. El mismo argumento sirve para los otros intervalos de la lista.

Nota que f no es creciente en el intervalo cerrado $[1, 2]$ puesto que $3/2 < 2$ pero $f(3/2) = 1/2$, mientras que $f(2) = 1$.

Esta información ayuda a graficar f , pues ya se sabe que es creciente en los intervalos de la forma $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, ... pero no en los intervalos cerrados correspondientes.

De hecho, f tiene una propiedad más: $f(t) = f(t+1)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Esto es consecuencia de que $[t+1] = [t] + 1$, puesto que $f(t+1) = t+1 - [t+1] = t+1 - ([t] + 1) = t - [t] = f(t)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de f se repite en cada uno de los intervalos $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, \dots

Después de todo este análisis, se puede ver que la gráfica de f es como sigue:

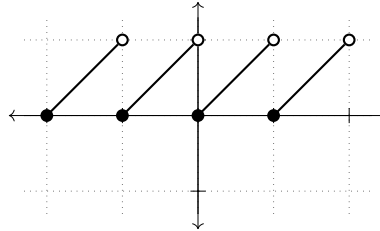


Figura 2.27: Gráfica de $f(x) = x - [x]$

La clave del último ejemplo es que primero calculamos los intervalos donde f era creciente y a partir de eso pudimos trazar su gráfica. Es decir, conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, es una herramienta útil para graficarla.

2.4.2. Funciones pares y funciones impares

Las nociones de *función par* y *función impar* serán de gran ayuda al momento de graficar algunos ejemplos. Al igual que en el caso de las funciones crecientes y decrecientes, aparecen aquí también un enfoque geométrico y uno algebraico. Una vez más, es la relación entre ambos enfoques lo que los hace tan útiles.

Definición 14. Se dice que la función f es *par* si para toda $x \in \text{Dom}(f)$, se tiene que $f(x) = f(-x)$.

Nota 1. La definición de función par implícitamente asume que si $x \in \text{Dom}(f)$ entonces $-x \in \text{Dom}(f)$ (puesto que si no la expresión $f(-x)$ no tendría sentido). Esto es, para que una función f sea par, se necesita que $\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ sea simétrico con respecto al origen de la recta real.

Nota 2. Obsérvese que la definición de función par pide que $f(x) = f(-x)$ para toda $x \in \text{Dom}(f)$. Esto es, no basta tomar dos o tres elementos de $\text{Dom}(f)$ y verificar que para ellos se cumple la igualdad de arriba. Dado que es una igualdad que se debe cumplir (en la mayoría de los casos) para una infinidad de x , es necesario comprobar esto tomando un elemento

arbitrario de $\text{Dom}(f)$ y no uno particular. Por el contrario, para probar que una función *no* es par, bastará exhibir una $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) \neq f(-x)$.

Ejemplo:

Verifiquemos que la función $f(x) = x^4$ es par. Para esto, tomemos $x \in \mathbb{R}$ y calculemos $f(-x) = (-x)^4$. Usando las leyes de los signos se ve que esta última expresión es igual a $f(x) = x^4$. Así, $f(x) = f(-x)$ y por lo tanto f es una función par.

Otro ejemplo:

Verifiquemos que la función $f(x) = x^3$ no es par. Dado que la definición pide que cierta igualdad se cumpla *para toda* $x \in \text{Dom}(f)$, bastará ver que esa igualdad *no* es cierta para algún valor de x para mostrar que no se cumple. Con esto en mente, observemos que $f(1) = 1$ y $f(-1) = -1$. Dado que $f(1) \neq f(-1)$, se concluye que f no es una función par.

Un ejemplo más (ver nota 1):

La función $f : [-3, 5) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ no es par, ya que es posible evaluar f en $x = 4$ pero no es posible hacerlo en $x = -4$. Es decir, $\text{Dom}(f)$ no es simétrico con respecto al origen de \mathbb{R} .

Gráfica de una función par

Veamos ahora, por medio de un ejemplo, qué propiedades tiene la gráfica de una función par.

Dando por hecho que la función $f(x) = x^4$ es par —como vimos arriba— al calcular $f(2) = 2^4 = 16$, se tiene también que $f(-2) = 16$. Esto quiere decir que el punto $(2, 16)$ está en la gráfica de f y *también* el punto $(-2, 16)$. Calculando $f(3) = 81$, se tiene que los puntos $(3, 81)$ y $(-3, 81)$ están en la gráfica de f . En general, los dos puntos $(a, f(a))$ y $(-a, f(a))$ están en la gráfica de f , puesto que $f(a) = f(-a)$.

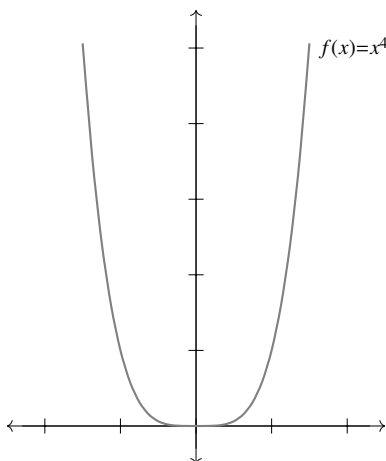


Figura 2.28: Gráfica de $f(x) = x^4$

El argumento de arriba es válido para cualquier función f , con tal de que sea par: el que $f(x)$ coincida con $f(-x)$ muestra que los puntos $(x, f(x))$ y $(-x, f(x))$, que son simétricos con respecto al eje y , están en la gráfica de f . Esto quiere decir que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y para cualquier función par.

En resumen, hemos visto que si una función es par entonces su gráfica es simétrica con respecto al eje y .

Inversamente, si f es una función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y , cada vez que $(x, f(x))$ sea un punto de ella, por simetría el punto $(-x, f(x))$ también será parte de la gráfica. Pero el punto $(-x, f(-x))$ es parte de la gráfica (puesto que la gráfica consta de todos los puntos de la forma $(t, f(t))$). Se tienen entonces dos puntos sobre la gráfica con la misma primera coordenada: $(-x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$. Dado que f es una función, se tiene que las dos segundas coordenadas son en realidad iguales (en caso contrario, el número $-x$ tendría asociados dos números distintos en $\text{Cod}(f)$, lo cual es falso). Es decir, $f(x) = f(-x)$. Así, hemos visto que si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje y , entonces la función es par.

Se ve entonces que las dos afirmaciones siguientes:

1. f es una función par; es decir, para toda $x \in \text{Dom}(f)$, se tiene que $f(x) = f(-x)$,
2. La gráfica de la función f es simétrica con respecto al eje y ,

son, para una función particular ambas verdaderas o ambas falsas. Dicho de otra manera, si sucede una (no importa cuál) entonces también sucede la otra.

Ahora bien, el carácter de la primera afirmación es algebraico (con esto queremos decir que se puede expresar por medio de igualdades entre expresiones que involucran variables) mientras que la segunda tiene carácter geométrico (es decir, que se refiere a propiedades de conjuntos en el plano cartesiano que se pueden dibujar).

El hecho de que estas dos afirmaciones estén tan relacionadas entre sí, es sólo la punta del iceberg de la relación entre el álgebra y la geometría.

Definición 15. Se dice que la función f es *impar* si para toda $x \in \text{Dom}(f)$, se tiene que $f(x) = -f(-x)$, o equivalentemente $-f(x) = f(-x)$.

Nota 3. Al igual que en el caso de las funciones pares, se tiene que la definición de función impar asume implícitamente que si $x \in \text{Dom}(f)$ entonces $-x \in \text{Dom}(f)$. Es decir, $\text{Dom}(f)$ es simétrico respecto al origen de la recta real.

Ejemplo:

La función identidad $\text{Id}(x) = x$ es impar. Por un lado, $-\text{Id}(x) = -x$; por el otro, $\text{Id}(-x) = -x$. De las dos igualdades se deduce que $-\text{Id}(x) = \text{Id}(-x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\text{Id}(x)$ es una función impar.

Otro ejemplo:

La función $g(x) = x^3$ es impar. Tenemos que verificar que $g(-x) = -g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Para esto, calculamos ambos lados de la igualdad por separado y los comparamos. Por un lado, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$; por el otro, $-g(x) = -(x^3) = -x^3$. De aquí que $g(-x) = -g(x)$ y por lo tanto $g(x)$ es una función impar.

Un ejemplo más:

La función constante cero es impar. Sea $f(x) = 0$. Entonces $-f(x) = -0 = 0$ y $f(-x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, de donde $-f(x) = f(-x)$ y por lo tanto $f(x)$ es impar.

Veamos un ejemplo de una función que *no* es impar. Considera $h(x) = x^3 + x^2$. Dado que se quiere mostrar que h no es impar, basta con encontrar una $x \in \text{Dom}(h)$ tal que $-h(x) \neq h(-x)$. Tomemos $x = 1$. Entonces $-h(1) = -(1^3 + 1^2) = -2$, mientras que $h(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = 0$. Dado que $-2 \neq 0$ se tiene que $-h(1) \neq h(-1)$ y por lo tanto $h(x)$ no es una función impar. Se pudo haber escogido cualquier otra $x \neq 0$ para verificar que $h(x)$ no es una función impar.

Gráfica de una función impar

Estudiemos ahora el comportamiento de la gráfica de las funciones impares. La base de esto es la observación de que si $f(x)$ es una función impar, entonces los puntos $P = (x, f(x))$ y $Q = (-x, -f(x))$ son parte de la gráfica de $f(x)$.

¿Por qué es cierto esto? Observa que si f es una función impar, entonces $-f(x) = f(-x)$. Es decir, los puntos $(-x, f(-x))$ y $(-x, -f(x))$ son iguales (puesto que sus primeras coordenadas son idénticas y las segundas son iguales también, por el hecho de que f es impar). Entonces, el punto $(-x, -f(x))$ es parte de la gráfica de f , al igual que $(x, f(x))$.

Observa que P y Q son iguales salvo por el signo de ambas coordenadas. ¿Qué significa esto en términos geométricos? Una forma de ver esto es que al girar el plano cartesiano 180 grados alrededor del origen, el punto P queda exactamente donde estaba Q antes de girar, y viceversa.

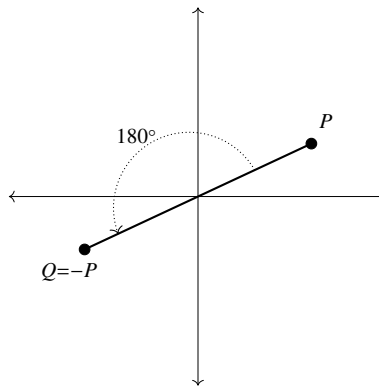


Figura 2.29: Rotación por 180°

¿Qué implica esto sobre la gráfica de $f(x)$? Dado que la propiedad mencionada arriba es cierta para cualesquiera dos puntos de la forma $(x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$ sobre la gráfica de $f(x)$, se concluye que la gráfica de $f(x)$ cumple la misma propiedad; es decir, al girarla 180 grados alrededor del origen, vuelve a quedar sobre sí misma.

Ilustramos estas ideas por medio de la gráfica de la función impar $g(x) = x^3$.

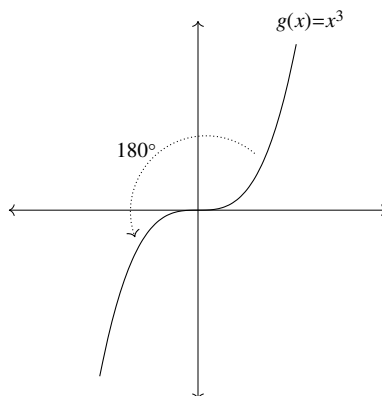


Figura 2.30: $g(x) = x^3$ es una función impar

Ahora bien, si se tiene una función f cuya gráfica es simétrica con respecto al origen (es decir, que queda igual tras girarla 180 grados alrededor de $(0, 0)$), ¿se puede concluir que f es impar? Veamos: si la gráfica de f es simétrica con respecto al origen, esto significa que para cualquier $x \in \text{Dom}(f)$, se tiene que tanto el punto $(x, f(x))$ y el punto Q que resulta de girarlo 180 grados alrededor de $(0, 0)$, están sobre la gráfica de f . Pero el punto Q tiene coordenadas $(-x, -f(x))$. Por otro lado, el punto con coordenadas $(-x, f(-x))$ también está en la gráfica de f . Se tienen entonces dos puntos sobre la gráfica de f con la misma primera coordenada. Dado que $f(x)$ es una función, se debe tener que las segundas coordenadas son iguales. Es decir, $-f(x) = f(-x)$. En conclusión, $f(x)$ es una función impar.

Se tiene entonces una equivalencia entre las dos afirmaciones siguientes:

1. f es una función impar; es decir, para toda $x \in \text{Dom}(f)$, se tiene que $f(x) = -f(-x)$.
2. La gráfica de la función $f(x)$ es simétrica con respecto al origen.

En otras palabras, si una de las dos afirmaciones es cierta para una función particular, entonces la otra también será cierta para esa misma función.

Al igual que en el caso de las funciones pares, una de estas afirmaciones tiene carácter algebraico y la otra carácter geométrico. Este tipo de equivalencia entre los dos tipos de enfoques se mantendrá a lo largo del curso. El lector deberá estar atento y preguntarse por relaciones de este tipo entre conceptos algebraicos y geométricos.

Cerramos esta sección con una observación útil: si $f(x)$ es una función impar y $0 \in \text{Dom}(f)$, entonces $f(0) = 0$. Esto se concluye directamente de la igualdad $f(-x) = -f(x)$ haciendo $x = 0$: $f(-0) = -f(0)$; es decir, $f(0) = -f(0)$, de modo que $2f(0) = 0$ y por lo tanto $f(0) = 0$.

Desde el punto de vista geométrico, para que la gráfica de $f(x)$ sea simétrica con respecto al origen, se debe de tener que $f(0) = 0$, puesto que si no al girar 180 grados la gráfica el punto $(0, f(0))$ no quedaría sobre sí mismo.

Una forma de la afirmación anterior que resulta útil es la siguiente: si $0 \in \text{Dom}(f)$ y $f(0) \neq 0$ entonces f no es una función impar. Observa que no se está diciendo que si $f(0) = 0$ entonces f es impar, lo cual es falso.

2.4.3. Ejercicios de la sección

1. Encuentra a, b tales que $a < b$ y $[a] = [b]$.
2. Encuentra a, b tales que $a < b$ y $[a] < [b]$.
3. Encuentra una función g que sea decreciente pero no estrictamente decreciente. (Sugerencia: modifica adecuadamente $[x]$.)
4. Con base en la definición 13, define los conceptos de función *decreciente en $[p, q]$* y *estrictamente decreciente en $[p, q]$* .
5. Dibuja la gráfica de una función estrictamente creciente en $(-\infty, -2] \cup [2, 10]$ y estrictamente decreciente en $[-2, 2] \cup [10, \infty)$.
6. ¿En qué intervalo(s) es estrictamente creciente la función $f(x) = |x + 4| - 2$? ¿Estrictamente decreciente?
7. Determina los intervalos en los que

$$f(x) = \begin{cases} [x] & \text{si } x \leq 1 \\ -[x] & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

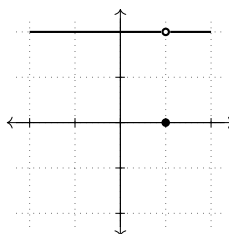
es creciente o decreciente.

8. ¿En qué intervalos es creciente la función $f(x) = x - [x]$?
9. Encuentra los intervalos donde $f(x) = |x|$ es creciente, y los intervalos donde es decreciente.
10. ¿Es verdad que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es estrictamente decreciente? ¿Decreciente? ¿En qué intervalo es estrictamente decreciente? ¿En qué intervalo es decreciente?

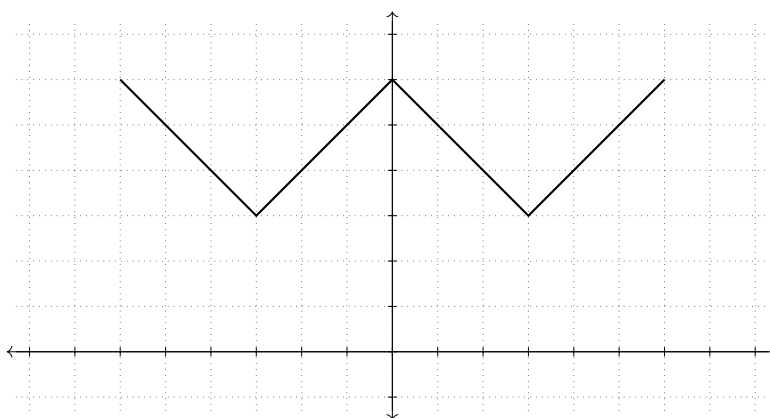
11. Sea $f(x) = c$ una función constante (es decir, $c \in \mathbb{R}$ es un número fijo a lo largo del problema).
 - a) ¿Es $f(x)$ una función creciente?
 - b) ¿Es $f(x)$ una función estrictamente creciente?
 - c) ¿Es $f(x)$ una función decreciente?
 - d) ¿Es $f(x)$ una función estrictamente decreciente?
12. ¿Es posible encontrar una función que sea estrictamente creciente pero no creciente? Si es posible da un ejemplo, si no es posible explica por qué.
13. ¿Es posible encontrar una función creciente y al mismo tiempo decreciente? Si es posible da un ejemplo, si no es posible explica por qué.
14. En este ejercicio, mostramos una función que es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y también en $(0, \infty)$ y que sin embargo no es decreciente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Muestra que $f(x) = 1/x$ tiene las características mencionadas.
15. Si una función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[a, b]$, muestra que $g(x) = f(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$ también es creciente en ese intervalo. ¿Se puede decir lo mismo de la función $h(x) = f(x - k)$?
16. Sea $f(x) = 1/x$. Dado que $f(1/2) = 2$ y por lo tanto $(1/2, 2)$ es un punto en la gráfica de f ¿se concluye que $(-1/2, 2)$ es un punto en la gráfica de f ?
17. Explica por qué la gráfica de la función $f : [-3, 5) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ no es simétrica con respecto al eje y .
18. Da dos ejemplos de funciones pares que no aparezcan en el texto.
19. Da dos ejemplos de funciones que no sean pares que no aparezcan en el texto.
20. Sea f una función. Si f no es par, ¿se puede concluir que f es impar?
21. Di si las siguientes funciones son pares o no:
 - a) $f(x) = |x + 1|$
 - b) $g(x) = |x| + 1$
 - c) $h(x) = 1/x^2$
 - d) $p(x) = x^{2n}$ para $n \in \mathbb{N}$
 - e) $q(x) = x^{2n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$
 - f) $s(x) = [x]$
 - g) $q(x) = [|x|]$

22. En cada caso, di si la función cuya gráfica se muestra es par. Luego encuentra una posible regla de correspondencia y confirma tu respuesta.

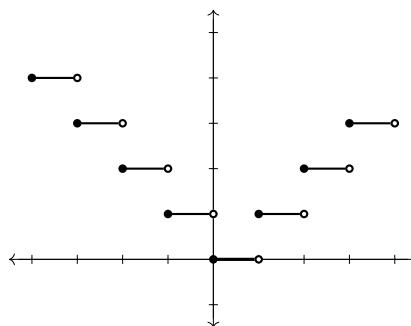
a)



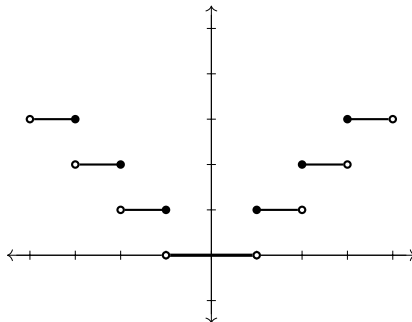
b)



c)



d)



23. Muestra por medio de un dibujo que la gráfica de $f(x) = -(x + 3)^2$ es simétrica con respecto a la recta vertical $x = -3$. ¿Es $f(x)$ una función par?
24. Si f es una función par, ¿se puede concluir entonces que $g(x) = f(x) + 1$ es una función par? Explica o da un contraejemplo.
25. Si $f(x)$ es una función par, ¿se puede concluir que $g(x) = f(x + 1)$ es una función par? Explica o da contraejemplo. (Sugerencia: $f(x) = x^2$ es una función par, ¿es $g(x) = f(x + 1)$ par?)
26. Sea $f(x)$ una función par con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. ¿Es posible que $f(x)$ sea creciente en todo \mathbb{R} ? Si tu respuesta es afirmativa, da un ejemplo. Si tu respuesta es negativa, explica por qué no es posible.
27. Verifica que la función $f : [-1, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ no es impar. Sugerencia: no es necesario que hagas ningún cálculo.
28. Escribe dos funciones que sean impares (distintas de las tratadas en el texto).
29. Escribe dos funciones que no sean impares (distintas de las tratadas en el texto).
30. Encuentra una función f que sea par e impar al mismo tiempo. (Sugerencia: empieza por dibujar la gráfica de f).
31. Prueba que la función $r(t) = 1/t$ es impar. Nota que $0 \notin \text{Dom}(r)$.
32. Di si las siguientes funciones son impares o no:

a) $f(x) = x^3 + x^2$.

d) $p(t) = t^{2n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$.

b) $f(x) = \sqrt{x - 10}$.

e) $q(t) = t^{2n}$, para $n \in \mathbb{N}$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $r(t) = 1/t^3$.

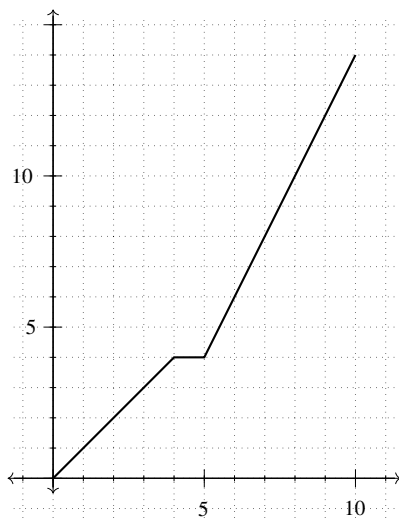
g) $f(x) = mx$, donde $m \in \mathbb{R}$ es una constante. h) $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

33. Grafica la función $f(x) = (x - 2)^3$. Observa que al girar la gráfica de $f(x)$ 180 grados alrededor del punto $(2, 0)$, ésta vuelve a quedar sobre sí misma. ¿Es $f(x)$ una función impar?
34. Si $f(x)$ es una función impar, ¿se concluye necesariamente que $g(x) = f(x) - 1$ es una función impar? Explica o da contraejemplo.
35. Si $f(x)$ es una función impar, ¿se concluye necesariamente que $g(x) = f(x + 2)$ es una función impar? Explica o da contraejemplo.
36. Sea $f(x)$ una función impar con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. ¿Es posible que $f(x)$ sea decreciente en todo su dominio? Si tu respuesta es afirmativa, da un ejemplo. Si tu respuesta es negativa, explica por qué no es posible.

2.5. Ejercicios del capítulo

1. El primer día de cada mes, se recorta el césped de un jardín. Haz la gráfica de la función $f(x)$, que a cada día del mes (30 días) le asocia la altura del pasto en ese día. ¿Quién es $\text{Dom}(f)$?
2. Un avión vuela de México a Guadalajara en una hora con treinta minutos. Si $h(t)$ es la función que a cada instante t le asocia la altura del avión, esboza una posible gráfica de h . En términos del vuelo, ¿a qué corresponde el intervalo donde $h(x)$ es creciente?, ¿a qué corresponde el intervalo donde $h(t)$ es decreciente?
3. Un auto recorre los 500 metros que separan un semáforo del siguiente en 60 segundos, alcanzando una velocidad máxima de 45 km/h. Esboza una posible gráfica de $v(t)$, la función que a cada instante le asocia la velocidad del auto.
4. La función $c(t)$ le asocia a la duración t de una llamada telefónica, su costo en pesos. Si la tarifa es de \$1 por minuto o fracción, encuentra la regla de correspondencia y gráfica de $c(t)$.
5. Encuentra la regla de correspondencia de la función que resulta de desplazar la gráfica de $g(x) = x^2$ tres unidades a la izquierda y dos unidades hacia abajo.

6. Considera un triángulo isósceles rectángulo, donde cada cateto mide x . Encuentra la regla de correspondencia y dominio natural de $A(x)$, la función que a cada x le asocia el área del triángulo correspondiente. (Sugerencia: usa el teorema de Pitágoras).
7. Basándote en el ejercicio anterior, encuentra la regla de correspondencia de la función que a cada x le asocia el perímetro del triángulo rectángulo isósceles correspondiente.
8. En este problema, r representa el radio de un círculo. Encuentra dominio y regla de correspondencia de la función que a cada r le asocia:
 - a) El área del semicírculo de radio r .
 - b) El perímetro del semicírculo de radio r .
9. El dibujo



representa la gráfica de la función $s(t)$, que a cada instante t le asocia la posición de un tren, donde t es el tiempo en minutos. Físicamente, ¿qué nos dice que la gráfica sobre el intervalo $[4, 5]$ sea horizontal? ¿Es seguro descender del tren cuando $t = 6$? El que la recta en el intervalo $[5, 10]$ esté más inclinada que la del intervalo $[0, 4]$, ¿a qué situación física corresponde?

10. La función $d(l)$ le asocia a cada cuadrado de lado l la longitud de su diagonal. Encuentra dominio y regla de correspondencia de $d(l)$.
11. La función I le asocia, a cada $t \geq 0$, el área limitada por la recta $y = x$, el eje x , el origen y la recta $x = t$, como se ve en el dibujo. Encuentra la regla de correspondencia de I .

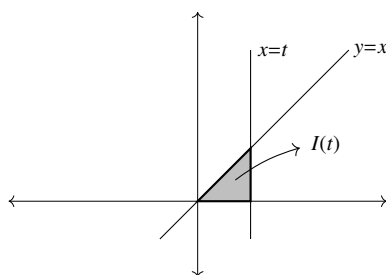
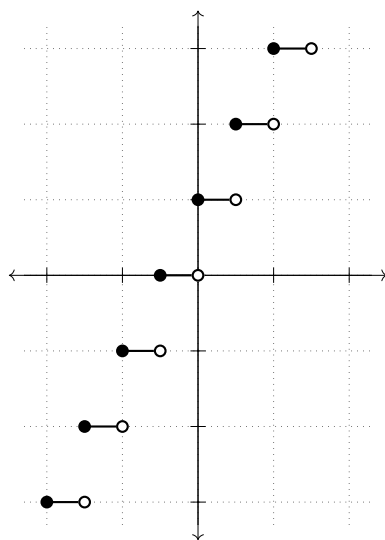
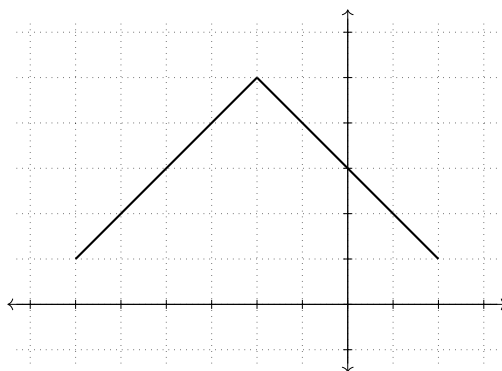


Figura 2.31: La función I le asocia, a cada t , el área sombreada

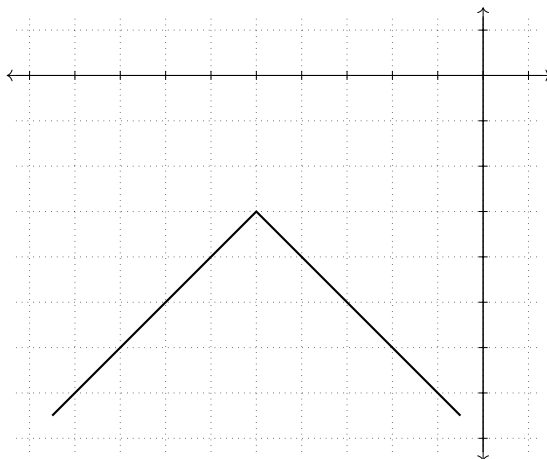
12. Modifica adecuadamente la función mayor entero para que su gráfica sea como sigue:



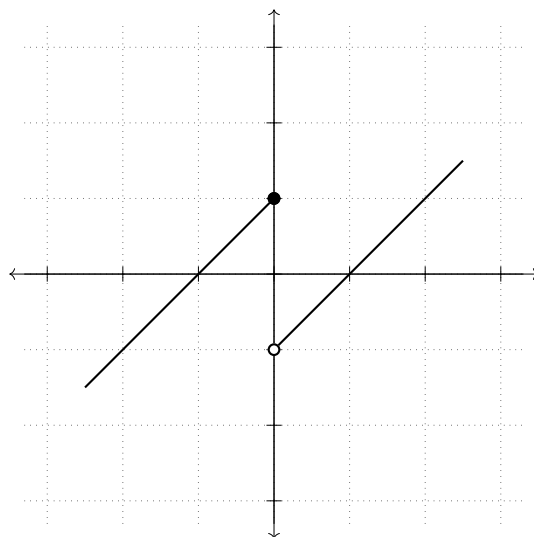
13. Encuentra la regla de correspondencia de una función cuya gráfica sea como sigue:



14. Modifica la función valor absoluto para obtener una función con una gráfica como la que se muestra:



15. Encuentra una función (definida por pedazos) que tenga una gráfica como la que se muestra:



16. Encuentra los intervalos donde la función $f(x) = [x/10]$ es estrictamente creciente.
17. Encuentra dos funciones (lo más distintas entre sí que puedas) que sean estrictamente crecientes en $(-\infty, -2]$ y estrictamente decrecientes en $[-2, \infty)$.
18. Encuentra una función que sea decreciente en todos los intervalos de la forma
 $\dots, [-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1, 2), [2, 3), \dots$

pero que no sea decreciente en el intervalo que resulta de unir dos intervalos consecutivos de este tipo. Sugerencia: modifica adecuadamente alguna de las funciones vistas en el texto.

19. Haz un esbozo de la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Explica por qué f no es creciente ni decreciente en ningún intervalo de \mathbb{R} .
20. Sea $f(x) = 2x$, para $x > 0$. ¿Cómo debe ser la regla de correspondencia de f para $x < 0$ si se requiere que sea una función par?
21. Sea $f(x) = |x - 3|$ para $x \geq 0$. ¿Cómo debe ser la regla de correspondencia de f para $x < 0$ si se requiere que sea una función par?
22. Sea $f(x) = x^2$, para $x < 0$. ¿Cómo debe ser la regla de correspondencia de f para $x > 0$ si se requiere que f sea una función impar?
23. Sea $f(x) = [x]$, para $x \geq 0$. ¿Cómo debe ser la regla de correspondencia de f para $x < 0$ si se requiere que f sea una función par?
24. Encuentra la regla de correspondencia de una función f que sea par y que además cumpla $f(x) < -2$ para toda $x \in \mathbb{R}$.
25. Encuentra, de ser posible, la regla de correspondencia de una función f que sea impar y que además cumpla $f(x) < -2$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Si no es posible explica por qué.
26. Encuentra dominio natural y gráfica de las siguientes funciones. También encuentra los intervalos donde son crecientes o decrecientes. Di si son pares, impares o ninguna de las dos.
 - a) $f(x) = -\sqrt{x - 10} + 1$
 - b) $g(x) = |x^2 - 4|$
 - c) $h(x) = -||x| - 1|$
 - d) $p(x) = 1/x$
 - e) $q(x) = 1/x^2$
 - f) $w(t) = 1/(t^2 + 1)$
 - g) $s(t) = (x - 2)^3$
 - h) $\alpha(x) = \sqrt{x^2}$ Observación: $\sqrt{x^2} \neq x$ (por ejemplo, si $x = -3$).

$$i) \beta(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$j) \gamma(x) = \frac{|x|}{|x|}$$

27. Encuentra el valor de b para que la función f sea continua (recuerda que una función es continua si su gráfica se puede hacer de un solo trazo —sin despegar el lápiz del papel—), donde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 4 \\ b & \text{si } x = 4 \end{cases}$.
28. Encuentra el valor de b para que la función f sea continua (ver ejercicio anterior), donde $f(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x \in (-\infty, 3] \\ -x + 1 & \text{si } x \in (3, \infty) \end{cases}$.

Capítulo 3

Rango y preimagen

Además del dominio y el codominio, una función tiene asociados otros conjuntos importantes, uno de ellos es el rango —que consiste de todos los elementos del codominio relacionados con alguno (o varios) del dominio—, otro es la preimagen (o imagen inversa) de un subconjunto B del codominio.

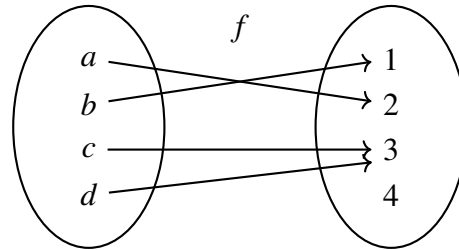
3.1. La imagen de un conjunto

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Recuerda que si $x \in X$, la imagen de x es el punto $f(x) \in Y$. Esta idea se puede generalizar para cualquier subconjunto de X : la imagen de un subconjunto A de X será el conjunto $f(A)$ que consiste de las imágenes de todos los puntos de A . A continuación damos la definición formal. Dado un subconjunto A de X , se puede pensar en el conjunto

$$f(A) = \{f(a) | a \in A\}.$$

Dado que $f(a) \in Y$ para cada $a \in X$, se tiene que $f(A) \subseteq Y$. Al conjunto $f(A)$ se le llama la *imagen* de A bajo la función f .

Veamos algunos ejemplos: Considera la función f representada por el siguiente diagrama:

Figura 3.1: La función f

¿Quién es $f(\{a, b\})$? De acuerdo con la definición dada arriba, se tiene que $f(\{a, b\}) = \{f(a), f(b)\} = \{1, 2\}$. ¿Quién es $f(\{a, d\})$? Con un análisis similar al anterior se puede determinar que $f(\{a, d\}) = \{2, 3\}$. Finalmente, observa que $f(\{a, b, c, d\}) = \{1, 2, 3\}$; nota que un elemento del codominio de f , el 4, no pertenece a $f(\{a, b, c, d\})$.

Un ejemplo más elaborado está dado por la función $g(x) = 2x$. ¿Quién es $g([1, 2])$? Observa que en este caso $A = [1, 2]$. Estamos buscando determinar el conjunto

$$g([1, 2]) = \{g(x) | x \in [1, 2]\}.$$

Esto es, $g([1, 2]) = \{2x | x \in [1, 2]\} = [2, 4]$. La explicación rigurosa de esta última afirmación es como sigue: $x \in [1, 2]$ si y sólo si $1 \leq x \leq 2$ y multiplicando las desigualdades por 2, se tiene que esto pasa si y sólo si $2 \leq 2x \leq 4$ si y sólo si $x \in [2, 4]$. Sin embargo, debe ser intuitivamente claro que $2x \in [2, 4]$ siempre que $x \in [1, 2]$.

Si hacemos ahora $A = \mathbb{N}$, ¿quién es $g(A)$? Aquí necesitamos encontrar una descripción del conjunto $g(\mathbb{N}) = \{g(n) | n \in \mathbb{N}\} = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$, que es el conjunto de los números pares.

Antes de ver más ejemplos, analicemos el significado de $f(A)$ bajo algunos de los enfoques vistos en el capítulo anterior para tratar con funciones.

$f(A)$ desde el punto de vista de la tabla

El conjunto $f(A)$ puede ser comprendido (al menos parcialmente) desde el punto de vista de la tabla que se usa para graficar la función f .

Recordemos la definición de $f(A)$:

$$f(A) = \{f(a) | a \in A\}.$$

Esto quiere decir que un número y es parte de $f(A)$ si existe $a \in A$ con la propiedad de que $f(a) = y$. En términos de la tabla, esto quiere decir que y aparece en la columna derecha y a en la izquierda (sin olvidar que a tiene la propiedad adicional de ser un elemento de A).

Ilustremos esta idea calculando $f(A)$, donde $f(x) = [x]$ y $A = [0, 1)$. Necesitamos observar qué pasa si ponemos un elemento de A en la columna izquierda de la tabla:

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ \hline a & f(a) = 0 \end{array}$$

Dado que $a \in [0, 1)$, se tiene que $[a] = 0$ y por lo tanto $f(a) = 0$. Es decir, no importa qué elemento de A se ponga en la columna izquierda de la tabla, del lado derecho únicamente aparecerá 0. Esto es, $f(A) = \{0\}$.

$f(A)$ desde el punto de vista de la máquina con “entradas” y “salidas”

Desde esta perspectiva, $f(A)$ consiste de los valores que “salen” de la máquina tras haber metido en ella todos los puntos de A . Como distintos puntos de A pueden tener la misma imagen, puede ser que el conjunto $f(A)$ tenga menos elementos que el conjunto original A . El caso extremo de esto es cuando se tiene una función constante, $f(x) = c$. En este caso, $f(A) = \{c\}$ para cualquier $A \neq \emptyset$. Por ejemplo, si $f(x) = 2$, entonces $f(\mathbb{R}) = \{2\}$. Esto coincide con la idea de $f(A)$ que se obtiene a través de la tabulación, donde decíamos que $f(A)$ consiste de todos los elementos que aparecen en la columna derecha de la tabla.

Analicemos ahora el caso de $f(x) = |x|$ con $A = [-1, 2]$. La pregunta es, entonces, qué números “salen” de f cuando se meten números de A . El siguiente dibujo ilustra algunos de estos casos:

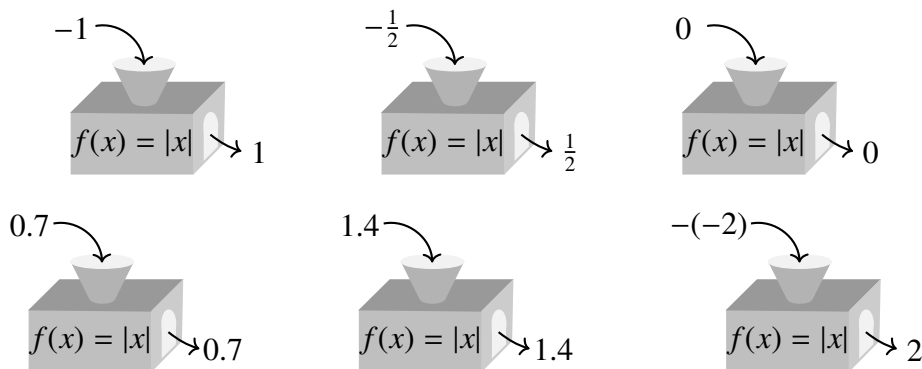


Figura 3.2: La función $f(x) = |x|$ como máquina

Se observa entonces que $f(A) = [0, 2]$. Observa que esto concuerda con el hecho de que el valor absoluto de un número es siempre positivo (y por lo tanto nunca “saldrán” números negativos de la función $f(x) = |x|$).

$f(A)$ desde el punto de vista de la gráfica de f

Recordemos que cada punto de la gráfica de f tiene la forma $(x, f(x))$. Esto significa que si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A)$. Es decir, que si consideramos la parte de la gráfica que resulta de fijarnos en la parte correspondiente a A , obtendremos puntos en el plano cuya segunda coordenada está en $f(A)$. Si ahora “aplastamos” estos puntos hacia el eje y (los matemáticos prefieren usar el verbo “proyectar”), obtendremos una representación gráfica de $f(A)$, como se ilustra a continuación:

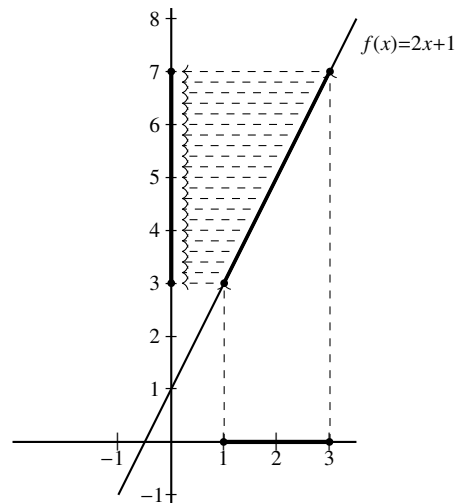


Figura 3.3: $f(A) = [3, 7]$, donde $A = [1, 3]$

Optativo: $f(A)$ para el caso en el que A es un intervalo

En el caso en el que $A = [a, b]$, un intervalo, el conjunto $f(A)$ toma la forma

$$\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}.$$

En estos casos, una buena idea para calcular $f(A)$ es tratar de manipular la desigualdad $a \leq x \leq b$ para llevarla a una en donde en la parte de en medio aparezca $f(x)$: $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, de modo que $f(x) \in [\alpha, \beta]$. Ilustremos por medio de un ejemplo:

Calcular $f([0, 3])$, donde $f(x) = -2x + 1$. Partiendo entonces de $0 \leq x \leq 3$ quisiéramos llegar a una desigualdad del tipo $\alpha \leq -2x + 1 \leq \beta$, donde α y β son números desconocidos por el momento. Volviendo a la desigualdad original, tenemos $0 \leq x \leq 3$, multiplicando por -2 se

obtiene $0 \geq -2x \geq -6$ y sumando 1 llegamos a la expresión buscada: $1 \geq -2x + 1 \geq -5$, que se puede escribir también como

$$-5 \leq f(x) \leq 1,$$

de modo que $f(x) \in [-5, 1]$ si $x \in [0, 3]$ (en este caso tenemos que $\alpha = -5$ y $\beta = 1$). En conclusión, $f([0, 3]) = [-5, 1]$.

No está de más decir que este método no siempre funciona, principalmente porque puede llevar a desigualdades en extremo complicadas. Sin embargo, en muchos casos es útil y representa la manera más formal de resolver el cálculo de $f(A)$ cuando es posible usarlo.

Presentamos a continuación varios ejemplos del cálculo de la imagen de A . Aunque en cada caso usamos un sólo método, un buen ejercicio consiste en resolver (o al menos visualizar la solución de) los mismos ejemplos usando algunos de los otros enfoques.

Ejemplo 1:

Calcular $f(A)$, donde $f(x) = |x| - 1$ y $A = [-2, 3]$. Usando el método gráfico, se observa que $f(A) = [-1, 2)$.

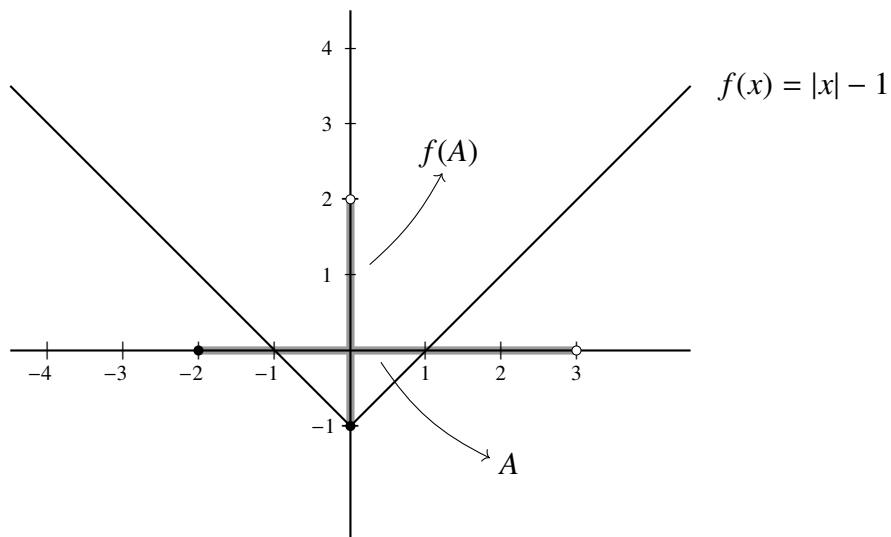


Figura 3.4: A y $f(A)$

Ejemplo 2:

Calcular $g(B)$, donde $g(x) = [x] + 1/2$ y $B = (0, \infty)$. En este caso usaremos la tabulación de g . Observa que, sin importar quién sea $x \in B$, se tiene que $[x] \in \mathbb{N}$, de manera que $[x] + 1/2$

tiene la forma $n + 1/2$, donde $n \in \mathbb{N}$. Esto es, en la columna derecha de la tabla aparecen números como $1/2, 3/2, 5/2$, etc.

x	$g(x)$
0	$1/2$
0.1	$1/2$
0.5	$1/2$
1.3	$3/2$
2.8	$5/2$

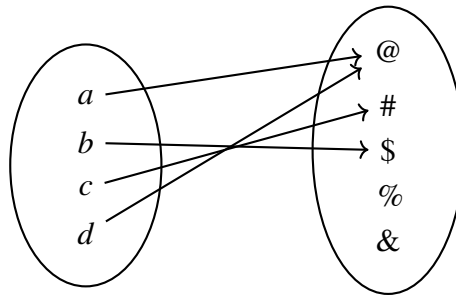
Esto muestra que $g(B) = \{1/2, 3/2, 5/2, \dots\}$. Siendo un poco más elegantes, este conjunto lo podemos expresar como $g(B) = \{n + 1/2 | n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 3:

Considera la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con regla de correspondencia $f(n) = 2n$ y el conjunto $A = \mathbb{N}$. Al observar qué elementos “salen” de la función f , se observa que siempre son pares, pues tienen la forma $2n$ (es decir, siempre son un número natural multiplicado por 2). Esto muestra que $f(A) = \{\text{números pares}\} = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$.

3.1.1. Ejercicios de la sección

1. Encuentra el rango de la función f , dada por:



2. ¿Es posible que $f(A)$ sea el conjunto vacío si $A \neq \emptyset$? Sugerencia: utiliza la tabla o la idea de función como máquina. ¿Es posible que no salga *nada* de la máquina tras haber metido *algo*?
3. Sea f una función cualquiera. ¿Quién es $f(\emptyset)$?
4. En cada caso, calcula la imagen del conjunto dado bajo la función dada.
 - a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n + 1, A = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$.

b) $f(x) = 3, A = [-1, 10)$.

c) $g(x) = |x + 1|, B = [-2, 1]$.

d) $h(x) = [x] + 1, C = \mathbb{Z}$.

e) $k(x) = [x] - 1, D = \mathbb{N}$.

f) $f(x) = 1/x, A = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

g) $f(x) = 1/2x, A = (0, \infty)$. Muestra también que $f(A) \subset A$.

h)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad A = \mathbb{R}$$

i) **(Optativo)** $f(x) = \frac{5x-1}{3}, A = [-3, 9)$.

5. Encuentra una función f y un intervalo $A = [a, b]$ tales que $f(A)$ tenga sólo dos elementos. Sugerencia: construye una función adecuada definida por pedazos.
6. Encuentra una función f y un intervalo $A = [a, b]$ tales que $f(A)$ tenga exactamente siete elementos.
7. Demuestra que si $A \subseteq B$ entonces $f(A) \subseteq f(B)$.
8. Da un ejemplo de una función f y subconjuntos A y B de $\text{Dom}(f)$ tales que $A \subsetneq B$ pero $f(A) = f(B)$.
9. Dado un conjunto X , el conjunto potencia de X , denotado por $P(X)$, es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X . Por ejemplo, si $X = \{0, 1, 2\}$, entonces los subconjuntos de X son:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}.$$

Y por lo tanto el conjunto potencia de X es

$$P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

- a) Encuentra $P(X)$, donde $X = \{a, b, c, d\}$.
- b) Encuentra cinco elementos de $P(\mathbb{N})$.
- c) Encuentra cinco elementos de $P(\mathbb{R})$.

10. Dada una función $f : X \rightarrow Y$, se puede definir una nueva función $\bar{f} : P(X) \rightarrow P(Y)$, como sigue: $\bar{f}(A) = f(A)$. Es decir, la función \bar{f} a cada elemento de $P(X)$ (o sea, a cada subconjunto de X), le asocia su imagen (que es un subconjunto de $P(Y)$). Verifica que \bar{f} es, en efecto, una función. Es decir, verifica que la regla de correspondencia de \bar{f} , dada arriba, da lugar a una función.

3.2. Rango de una función: conjuntista y geoméricamente

En la sección anterior se definió $f(A)$, donde $f : X \rightarrow Y$ es una función y A un subconjunto de X . En el caso particular en el que A es todo X , al conjunto $f(X)$ se le llama *rango* de la función f . En esta sección analizamos algunas de las propiedades más importantes de este concepto.

Definición 16. Sea f una función. El *rango* de f , denotado por $\text{Ran}(f)$, es la imagen de $\text{Dom}(f)$. Esto es,

$$\text{Ran}(f) = f(\text{Dom}(f)) = \{f(x) | x \in \text{Dom}(f)\}.$$

Desde un punto de vista intuitivo, esto quiere decir que el rango de una función consiste de todos los valores que toma la función al hacer que la variable recorra la totalidad de $\text{Dom}(f)$.

El rango siempre es un subconjunto del codominio

De la definición de rango de f ,

$$\text{Ran}(f) = \{f(x) | x \in \text{Dom}(f)\},$$

se tiene que $\text{Ran}(f) \subseteq \text{Cod}(f)$, ya que siempre se tiene $f(x) \in \text{Cod}(f)$. Sin embargo, no siempre se da la igualdad de conjuntos, como veremos en el siguiente ejemplo.

El rango no es lo mismo que el codominio

Para ilustrar esto, consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. ¿Quién es $\text{Ran}(f)$? Como vimos antes, necesitamos ver cuáles números se obtienen tras aplicar f a un número en $\text{Dom}(f)$. Dado un número $y \in [0, \infty)$, se tiene que $y = (\sqrt{y})^2$; es decir, cualquier número positivo y puede ser visto como $f(\text{alguien})$, en este caso $y = f(\sqrt{y})$. Esto muestra que $[0, \infty) \subseteq \text{Ran}(f)$. Por otro lado, $f(x) = x^2$ es siempre mayor o igual a cero, de modo que $\text{Ran}(f) \subseteq [0, \infty)$. En conclusión, se tiene que $\text{Ran}(f) = [0, \infty)$. Ahora bien, $\text{Cod}(f) = \mathbb{R}$, de manera que $\text{Ran}(f) \neq \text{Cod}(f)$.

Cada una de las formas de analizar el conjunto $f(A)$ nos da naturalmente una manera de analizar $\text{Ran}(f)$, que no es otra cosa sino el caso particular $A = \text{Dom}(f)$ de lo visto entonces. Enunciamos a continuación los criterios correspondientes para $\text{Ran}(f)$.

El rango desde el punto de vista de la tabla

Desde el punto de vista de la tabla, el rango consiste de todos los números que aparecen en la columna derecha de la misma, es decir, el rango es el conjunto de puntos de la forma $f(x)$, para alguna $x \in \text{Dom}(f)$.

El rango desde el punto de vista de la máquina con “entradas” y “salidas”

Si se piensa a la función como una máquina con entradas en $\text{Dom}(f)$, el rango es el conjunto cuyos elementos son todos aquellos elementos que “salen” de la máquina, sin más restricción que $x \in \text{Dom}(f)$.

El rango desde el punto de vista de la gráfica

¿Es posible visualizar el rango de una función a partir de su gráfica? Recordemos que la gráfica de una función consiste de todos los puntos de la forma $(x, f(x))$, donde $x \in \text{Dom}(f)$. Esto significa que en la gráfica aparecen todas las $f(x)$ posibles. ¿Dónde aparecen? En la segunda coordenada de los puntos de la gráfica; esto es, en las alturas de los puntos de la gráfica. Así, si se consideran todas las alturas de todos los puntos que aparecen en la gráfica de f , se tendrá $\text{Ran}(f)$. Geométricamente esto se puede visualizar como el conjunto que resulta de proyectar la gráfica de f en el eje y (recuerda que “proyectar”, en este contexto, significa “aplantar horizontalmente”).

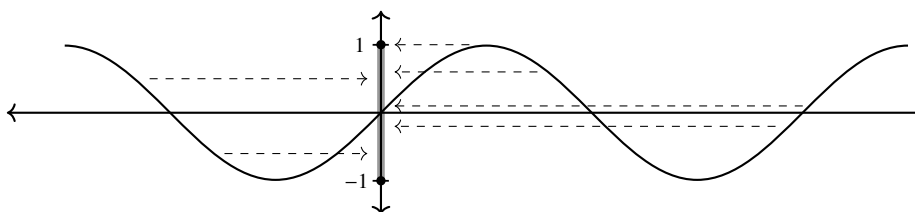


Figura 3.5: $\text{Ran}(f) = [-1, 1]$, donde $f(x) = \text{sen}(x)$ (ver capítulo 5)

Ejemplos de cálculo del rango**Rango de $f(x) = [x]$**

Consideremos la función mayor entero, $f(x) = [x]$. Queremos calcular $\text{Ran}(f)$. ¿Cómo hacer esto? Necesitamos encontrar cuáles son los números y que se pueden ver como el mayor entero de alguien. Observemos, en primer lugar, que cualquier entero es el mayor entero de sí mismo. Es decir, si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n = [n]$. En otras palabras, cualquier entero $n \in \mathbb{Z}$ está en el rango de f . Se tiene así la contención $\mathbb{Z} \subseteq \text{Ran}(f)$. De la definición de mayor entero, es claro que $\text{Ran}(f) \subseteq \mathbb{Z}$, de modo que se tiene la igualdad de conjuntos $\text{Ran}(f) = \mathbb{Z}$. Como se

vio arriba, esto se puede visualizar proyectando la gráfica de $f(x) = [x]$ sobre el eje y , como se ilustra a continuación:

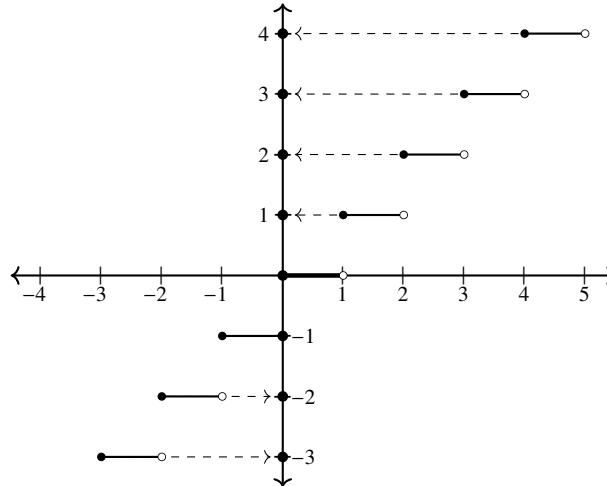


Figura 3.6: $\text{Ran}(f) = \mathbb{Z}$, donde $f(x) = [x]$

Rango de $f(x) = c$

¿Cómo es el rango de una función constante? Estamos buscando todos los números que tienen la forma $f(x)$, para alguna $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En este caso, $f(x) = c$ para cualquier x , de manera que $\text{Ran}(f) = \{c\}$.

Rango de $f(x) = |x|$

La función $f(x) = |x|$ es uno de nuestros ejemplos básicos a lo largo del libro. Aquí calculamos su rango. Para empezar, observemos que si $x \geq 0$, entonces $x = |x|$. Esto muestra que, para toda $x \geq 0$, se tiene que $x \in \text{Ran}(f)$; es decir, $[0, \infty) \subseteq \text{Ran}(f)$. Inversamente, si $y \in \text{Ran}(f)$ entonces $y = |x|$ para alguna x y por lo tanto $y \geq 0$. Esto muestra que $\text{Ran}(f) \subseteq [0, \infty)$. Concluyendo, se tiene $\text{Ran}(f) = [0, \infty)$.

Rango de $g(x) = 1/x$

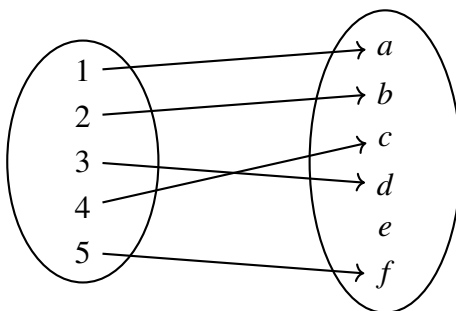
La pregunta aquí es qué números pueden ser escritos de la forma $1/x$; en otras palabras, ¿para qué valores de y la ecuación $y = 1/x$ tiene alguna solución para x ? Despejando x , se obtiene que $x = 1/y$ siempre y cuando $y \neq 0$. En otras palabras, si $y \neq 0$, $g(1/y) = 1/(1/y) = y$, y por lo tanto $y \in \text{Ran}(g)$. Así, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \text{Ran}(g)$.

Ahora bien, si $y \in \text{Ran}(g)$, entonces $y = 1/x$ y por lo tanto $y \neq 0$ (esto es porque la división de 1 entre lo que sea no puede ser cero, ¿por qué?). Es decir, $\text{Ran}(g) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dado que se

tienen ambas contenciones, se tiene $\text{Ran}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.2.1. Ejercicios de la sección

1. Si $y = 1/x$, prueba que $y \neq 0$.
2. Encuentra el rango y codominio de la siguiente función:



3. Explica la diferencia entre rango y codominio de una función.
4. Encuentra una función f tal que $\text{Cod}(f) = \text{Ran}(f)$.
5. Encuentra una función f tal que $\text{Cod}(f) \neq \text{Ran}(f)$.
6. Demuestra que si f es una función cuyo rango consiste de un solo elemento, $\text{Ran}(f) = \{*\}$, entonces f es una función constante. ¿Cuál es esa constante?
7. Encuentra el rango de las siguientes funciones:
 - a) $m(x) = \frac{1}{2}[x]$
 - b) $f(x) = |5x - 1|$ (Sugerencia: usa el método gráfico)
 - c) $g(x) = 5|x| - 1$
 - d) $g(t) = t^2 + 1$
 - e) $f(x) = \sqrt{x}$
 - f) $F(x) = \sqrt{x} - 1$
 - g) $g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$

$$h) h(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$i) r(t) = 1/x + 1 \text{ (Sugerencia: revisa los ejemplos desarrollados en el texto)}$$

$$j) p(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

8. Encuentra una función cuyo rango sea $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
9. Encuentra una función cuyo rango sea $[1, 10]$.
10. Encuentra una función cuyo rango sea $\{0, 1\}$.
11. Encuentra una función cuyo rango sea $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.
12. La siguiente pregunta está basada en el ejercicio 10 de la sección 3.1. ¿Qué nombre hemos usado a lo largo del texto para el conjunto $\overline{f(X)} = f(X)$?

3.3. La preimagen de un punto

Dada una función f , a cada punto $y \in \text{Cod}(f)$ se le puede asociar el conjunto de todos los puntos $x \in \text{Dom}(f)$ cuya imagen es y ; es decir, el conjunto de puntos que al evaluarlos dan precisamente y . Dicho conjunto recibe el nombre de *preimagen* de y . Para calcular la preimagen de un elemento y , frecuentemente será necesario resolver ecuaciones. El lector que lo necesite, puede consultar el apéndice 1, donde se trata este tema. Las definiciones de inyectividad y suprayectividad de una función, estudiadas en secciones posteriores, están basadas en el concepto de preimagen.

Formalmente, se tiene lo siguiente:

Definición 17. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Dado $y \in Y$, se define la *preimagen de y* mediante la igualdad

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}.$$

Es común que la preimagen sea llamada *imagen inversa*.

Nota que el superíndice -1 que aparece en la definición no es un exponente; es decir, $f^{-1}(y)$ no es lo mismo que $\frac{1}{f}(y)$, que es un símbolo que todavía no significa nada para nosotros.

Nota también que si $y \notin \text{Ran}(f)$, entonces no existe ninguna $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$; es decir, $f^{-1}(y) = \emptyset$. En cambio, si $y \in \text{Ran}(f)$ se tiene al menos una $x \in \text{Dom}(f)$ con $f(x) = y$

y por lo tanto $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. En resumen,

$$y \in \text{Ran}(f) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \neq \emptyset. \quad (3.1)$$

Veamos ahora algunos ejemplos que nos den cierta intuición sobre este nuevo concepto.

Ejemplo 1 Sea $f(x) = |x|$. Calcular $f^{-1}(3)$.

Lo que se tiene que hacer es encontrar todos los números $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| = 3$. Nuestra familiaridad con la función valor absoluto nos permite afirmar que hay exactamente dos soluciones: $x = 3$ y $x = -3$. De aquí, se concluye que $f^{-1}(3) = \{-3, 3\}$.

Ejemplo 2 Sea $g(x) = 2x + 1$. Calcular $g^{-1}(6)$.

En este caso, estamos buscando las $x \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ tales que $g(x) = 6$. Es decir, buscamos las x tales que $2x + 1 = 6$. Al resolver esta ecuación se obtiene $x = \frac{5}{2}$. Observa que en este caso la imagen inversa de 6 consiste de un solo elemento: $g^{-1}(6) = \{\frac{5}{2}\}$.

Ejemplo 3 También puede suceder, de acuerdo a la observación de arriba, que la preimagen de un punto resulte ser el conjunto vacío. Para ilustrar esto, y basándonos en (3.1), necesitamos encontrar una función f tal que $\text{Ran}(f) \neq \text{Cod}(f)$, y una $y \in \text{Cod}(f) \setminus \text{Ran}(f)$. Uno de nuestros ejemplos predilectos en estos casos es $f(x) = [x]$, donde y es un elemento no entero de $\mathbb{R} = \text{Cod}(f)$. Por ejemplo, si $y = 1/2$, se tiene que $f^{-1}(1/2) = \{x \in \text{Dom}(f) | f(x) = 1/2\} = \{x \in \text{Dom}(f) | [x] = 1/2\} = \emptyset$.

Ejemplo 4 La misma función del ejemplo anterior nos muestra que hay puntos y para los cuales $f^{-1}(y)$ consiste de todo un intervalo: $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} | [x] = 1\} = [1, 2)$.

Con estos ejemplos en mente, estudiaremos a continuación el concepto de preimagen de un punto bajo los diversos enfoques que hemos manejado de una función:

La preimagen en la gráfica

Tomemos entonces $z \in \text{Cod}(f)$. Buscamos los puntos $x \in \text{Dom}(f)$ tales que $f(x) = z$. Esto es, los puntos $(x, f(x))$ sobre la gráfica tales que $f(x) = z$. En otras palabras, buscamos los puntos de la gráfica cuya segunda coordenada sea z . Para encontrarlos geoméricamente, trazamos una línea horizontal a altura z (de manera que todos sus puntos tienen esta misma altura, o esta misma segunda coordenada) y vemos dónde interseca a la gráfica. Las x correspondientes a estos puntos en la gráfica, serán los elementos de $f^{-1}(z)$. Si $z \notin \text{Ran}(f)$ entonces la recta horizontal que pasa por z no corta a la gráfica de f , lo que muestra que $f^{-1}(z) = \emptyset$.

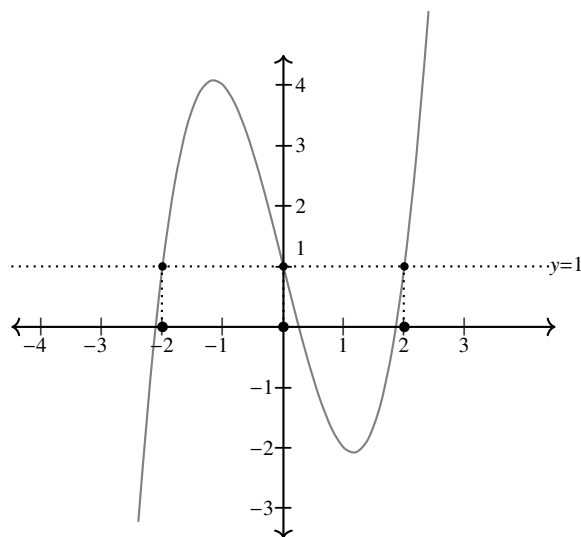


Figura 3.7: $f^{-1}(1) = \{-2, 0, 2\}$

En el caso mostrado en el dibujo, este método muestra rápidamente que hay puntos $z \in \text{Cod}(f)$ tales que $f^{-1}(z)$ consiste de 1, 2, o 3 elementos. ¿Existe algún $z \in \text{Cod}(f)$ tal que $f^{-1}(z) = \emptyset$?

La preimagen en la tabla

Al buscar la preimagen de un elemento y , hay que analizar qué se debe poner en la columna izquierda (o dicho de otra manera: qué valores se le pueden dar a x) para que se obtenga el valor y . Hay que tener siempre presente que puede haber más de un punto x para el cual $f(x) = y$. Por ejemplo, al considerar la tabla de $f(x) = x^2$ y observar el pedazo de la tabla

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
⋮	⋮

se podría pensar que $f^{-1}(4) = \{-2\}$, pero esto no es cierto. Lo único que muestra la tabla, hasta el momento, es que $-2 \in f^{-1}(4)$. Observa que también se tiene que $2 \in f^{-1}(4)$, puesto que $f(2) = 4$. Ahora sí, dado que un número distinto de cero aparece solamente dos veces en la columna derecha de la tabla, no hay más elementos $x \in \text{Dom}(f)$ tales que $f(x) = 4$, lo que muestra que $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$.

La preimagen desde el punto de vista de la máquina con “entradas” y “salidas”

Bajo este enfoque, la preimagen de y consiste de todas las entradas x tales que al pasar por la máquina dan y . Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Entonces $f^{-1}(-1)$ consiste de todas las posibles x para las cuales $f(x) = -1$. Se tiene entonces $f^{-1}(-1) = (-\infty, 0]$. ¿Quién es $f^{-1}(1)$? Dado que las x para las cuales $f(x) = 1$ son exactamente las $x > 0$, se tiene que $f^{-1}(1) = (0, \infty)$. Ahora bien, ¿quién es $f^{-1}(2)$? Dado que no hay ningún x para el cual $f(x) = 2$, se concluye que $f^{-1}(2) = \emptyset$. De hecho, para cualquier $c \neq \pm 1$, se tiene que $f^{-1}(c) = \emptyset$.

Enfoque formal

Si nos queremos basar únicamente en la definición y no en algunas de las formas auxiliares de ver a una función, para calcular $f^{-1}(y)$ necesitamos encontrar las $x \in \text{Dom}(f)$ para las cuales $f(x) = y$. En otras palabras, necesitamos resolver la ecuación

$$f(x) = y.$$

El problema de resolver esta ecuación varía enormemente en dificultad, dependiendo de cómo sea la regla de correspondencia de f .

Veremos a continuación varios ejemplos, que muestren las dificultades que pueden surgir al intentar usar este método.

Ejemplo:

Calcular $f^{-1}(10)$, donde $f(x) = 3x - 2$.

En este caso se requiere resolver la ecuación $3x - 2 = 10$, que tiene como única solución $x = 4$.

Ejemplo:

Calcular $f^{-1}(4)$, donde $f(x) = |1/x|$.

Buscamos aquí todas las soluciones de la ecuación $|1/x| = 4$. Esto quiere decir que $1/x$ puede tomar dos valores: 4 o -4 . Tenemos entonces dos posibilidades: $1/x = 4$, que nos da la solución $x = 1/4$; y $1/x = -4$, que nos da la solución $x = -1/4$. Se tiene entonces

$$f^{-1}(4) = \{-1/4, 1/4\}.$$

Ejemplo:

Calcular $f^{-1}(3)$, donde $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.

La ecuación que hay que resolver es $-x^2 + 5x - 4 = 3$, que se vuelve $-x^2 + 5x - 7 = 0$, al

igualar a cero. Al usar la fórmula cuadrática, se observa que el discriminante (la parte de la fórmula que queda adentro de la raíz cuadrada) es: $b^2 - 4ac = 25 - 4(-1)(-7) = -3$. Esto implica que la ecuación no tiene solución (puesto que para que la hubiera tendríamos que calcular $\sqrt{-3}$, que no existe en \mathbb{R}). Así, $f^{-1}(3) = \emptyset$.

Ejemplo:

Calcular $f^{-1}(0)$, donde $f(x) = x^5 - 4x + 2$

En cursos más avanzados, se puede ver que no hay una fórmula que resuelva la ecuación $f(x) = 0$. No es que la fórmula no se haya descubierto aún, sino que se ha probado que no puede existir. En este caso, es imposible resolver directamente el problema de la función inversa. Hay otros métodos (que se entienden bien a partir de la gráfica, aunque requieren más herramienta de la que tenemos hasta el momento) que permiten encontrar aproximaciones a la solución, pero nada más.

3.3.1. Ejercicios de la sección

1. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Encuentra una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f^{-1}(2)$ tenga dos elementos.
2. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Encuentra una función $g : X \rightarrow Y$ tal que $g^{-1}(3) = \emptyset$.
3. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Es posible encontrar alguna función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f^{-1}(1), f^{-1}(2), f^{-1}(3), f^{-1}(4)$ y $f^{-1}(5)$ sean todos distintos del conjunto vacío? Argumenta tu respuesta.
4. Sea f la función constante 2, es decir, $f(x) = 2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Encuentra $f^{-1}(2)$ y $f^{-1}(-2)$.
5. Calcula la preimagen de cada función para los puntos indicados.
 - a) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2, y = 1$.
 - b) $f(x) = \sqrt{x}, y = -2, 3, 4$.
 - c) $g(x) = \sqrt{x+1}, y = -2, -1, 0$.
 - d) $h(x) = |x+2| - 1, y = -3, -2, 0$.
 - e) $p(x) = x(x-2), y = -1, 0, 1$.
 - f) $q(x) = [x^2], y = 1/2, 1$.

$$g) f(x) = (x + 1)^2 + 1, y = 17, 24.$$

$$h) g(x) = 2x^2 - 12x + 8, y = -12, -10, -8$$

$$i) h(t) = |2t - 1|, y = -1, 0, 5$$

$$j) q(t) = \frac{1}{t + 1} + 2, y = 2, 3, 10$$

6. Encuentra una función f tal que $f^{-1}(2) = \emptyset$ pero $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ para toda $c \neq 2$. Sugerencia: define a f por pedazos, o bien, modifica adecuadamente la función $f(x) = 1/x$.
7. Encuentra una función f tal que $f^{-1}(3) = [-1, 1]$ y $f^{-1}(c)$ tenga exactamente un elemento para $c \neq 3$.
8. Encuentra una función f tal que $f^{-1}(c)$ sea un intervalo, para una infinidad de $c \in \mathbb{R}$. Sugerencia: busca a f entre los ejemplos de esta sección.
9. Uno podría pensar que $f^{-1}f(\{x\}) = \{x\}$. Desafortunadamente esta igualdad no siempre es cierta. En este ejercicio se presenta un ejemplo donde $f^{-1}(f(\{x\})) \supsetneq \{x\}$. Sea $f(x) = [x]$. Demuestra que, $f^{-1}(f(\{1\})) \neq \{1\}$.
10. Sea $f(x) = [x]$. ¿Existe algún valor de a para el cual $f^{-1}(a)$ consista de dos elementos?

3.4. La preimagen de un conjunto

Esta sección generaliza lo estudiado sobre imágenes inversas en la anterior, para cualquier subconjunto B del codominio de una función.

Definición 18. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y $B \subseteq Y$. La preimagen (o imagen inversa) de B es el conjunto definido por la igualdad

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Observación 2. Si B consiste de un solo punto, es decir, si $B = \{y\}$, entonces $f^{-1}(B) = f^{-1}(y)$, la preimagen de y bajo f . Esto muestra que, en efecto, estamos generalizando el concepto de preimagen de un punto visto en la sección anterior.

Observación 3. Si $B = \text{Cod}(f)$ entonces $f^{-1}(B) = \text{Dom}(f)$. Esto sucede siempre, ya que por definición se tiene que, dada $x \in X$, entonces $f(x) \in \text{Cod}(f) = B$.

Intuitivamente, la preimagen de un conjunto B consiste de todos los puntos del dominio que, bajo la función, van a dar al conjunto B .

Gráficamente, la preimagen de un intervalo (a, b) corresponde a la parte de la gráfica de f que queda comprendida entre las dos rectas horizontales $y = a$ y $y = b$. Más precisamente, a la proyección de esta parte de la gráfica sobre el eje x . A continuación, se muestra gráficamente que, para $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene que $f^{-1}((1, 2)) = (1, 4)$.

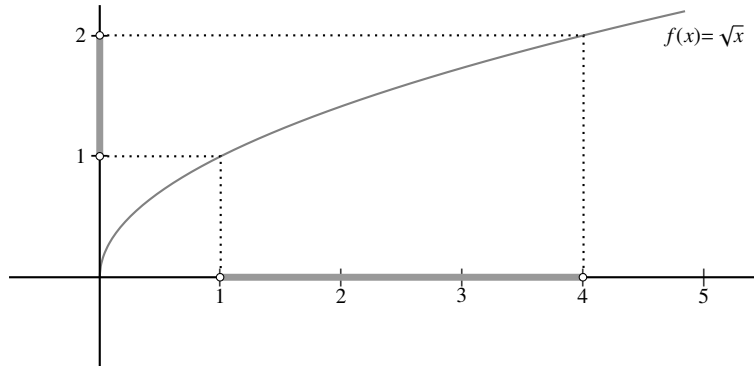


Figura 3.8: $f^{-1}((1, 2)) = (1, 4)$

El siguiente ejemplo nos muestra gráficamente que la preimagen de un intervalo no necesariamente es un intervalo. Si $f(x) = x^2$ y $B = [1, 4]$, podemos observar gráficamente que $f^{-1}(B) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

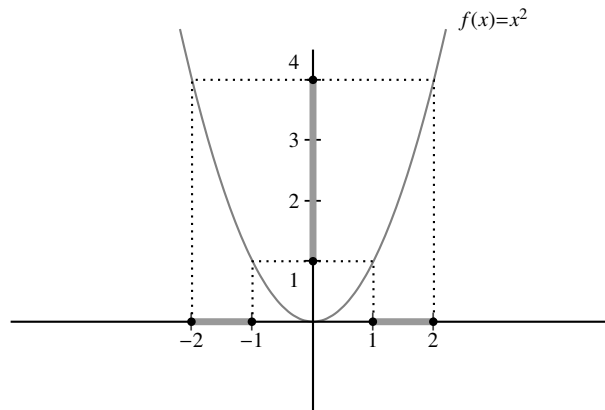


Figura 3.9: $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$

En muchas aplicaciones, el conjunto B será un intervalo. Esto sucede, a veces, cuando se quiere que el valor de una función caiga entre dos extremos. Por ejemplo, si f es la función que relaciona el tiempo en una ciudad con la temperatura ambiente, puede ser útil saber en qué momentos la temperatura está entre los 15 y 25 °C. En lenguaje matemático, esto corresponde a calcular $f^{-1}[15, 25]$.

Regresando a la teoría, si $B = (a, b)$, se tiene que $f^{-1}(B) = \{x \in \text{Dom}(f) | a < f(x) < b\}$. Así, para calcular esta imagen inversa es necesario resolver las desigualdades

$$a < f(x) < b.$$

Es un ejercicio para el lector modificar apropiadamente esta desigualdad cuando el intervalo B es cerrado, semi abierto o de los tipos $(-\infty, b)$, (a, ∞) .

Como en el caso de $f^{-1}(y)$, la dificultad de resolver esto varía enormemente, dependiendo sobre todo de la regla de correspondencia de f , y en algunos casos de los valores de a y b . Veremos a continuación algunos ejemplos que ilustren algunas de las dificultades que aparecen.

Calcular $f^{-1}[2, 3)$, para $f(x) = 5x + 1$.

En este caso, buscamos las $x \in \mathbb{R}$ tales que $2 \leq 5x + 1 < 3$. Restando 1 en cada uno de los miembros de esta desigualdad, se tiene $1 \leq 5x < 2$, y al multiplicar la expresión por $1/5$, se obtiene $1/5 \leq x < 2/5$. En conclusión, $f^{-1}[2, 3) = [1/5, 2/5)$.

A continuación se presenta otra función donde la preimagen de un intervalo no es un intervalo. Sea $f(x) = 1/x$. Veremos que $f^{-1}(-1, 1)$ no es un intervalo.

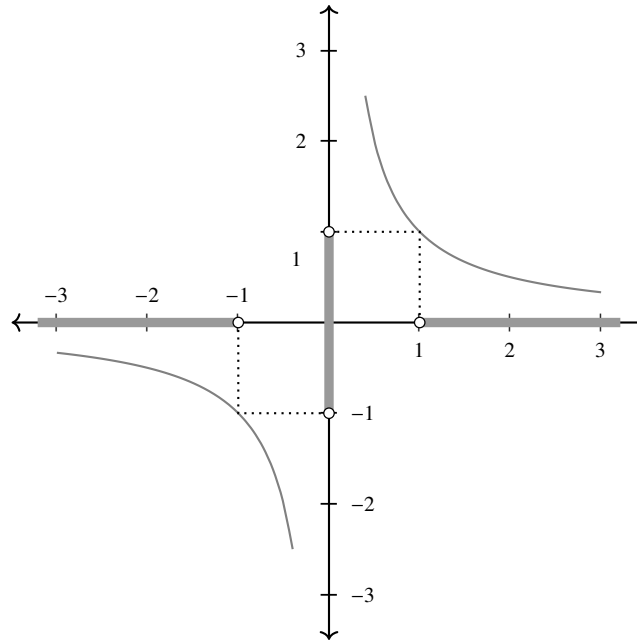


Figura 3.10: $f^{-1}(-1, 1) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

En el dibujo se observa que $f^{-1}(-1, 1) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Como habíamos prometido, se tiene una función y un intervalo de manera que su imagen inversa no es otro intervalo (sino una unión de ellos). Desde luego, también es posible desarrollar este ejemplo por medio de desigualdades. Esto es uno de los ejercicios del final de la sección.

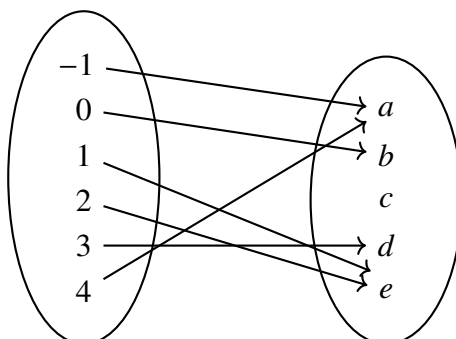
¿En qué casos se tiene que $f^{-1}(B) = \emptyset$? Esto sólo puede pasar en el caso en el que, para cualquier $x \in \text{Dom}(f)$, se tenga $f(x) \notin B$. Esto es, que B y $\text{Ran}(f)$ no tengan ningún punto en común, o en otras palabras, $B \cap \text{Ran}(f) = \emptyset$. También es cierto que si $B \cap \text{Ran}(f) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(B) = \emptyset$. En este caso, dado cualquier $x \in \text{Dom}(f)$, se tiene que $f(x) \in \text{Ran}(f)$ y por lo tanto $f(x) \notin B$, de donde $f^{-1}(B) = \emptyset$. En resumen, se tiene que

$$f^{-1}(B) = \emptyset \Leftrightarrow B \cap \text{Ran}(f) = \emptyset. \quad (3.2)$$

3.4.1. Ejercicios de la sección

1. En el texto de esta sección, se omitieron deliberadamente explicaciones sobre lo que es $f^{-1}(B)$ desde el punto de vista de la tabla y de la función vista como máquina. Proporciona dichas explicaciones. Apóyate con ejemplos de las funciones más conocidas.

2. Considera la función f dada por el siguiente diagrama:



Encuentra $f^{-1}\{a\}$, $f^{-1}\{c\}$, $f^{-1}\{e\}$, $f^{-1}\{a, b\}$.

- Explica gráficamente las afirmaciones de (3.2).
- Escribe desigualdades que garanticen que $x \in f^{-1}(B)$, donde B es alguno de los siguientes tipos de intervalos: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞) , (a, ∞) .
- Calcula, por medio únicamente de desigualdades, $f^{-1}(-1, 1)$, donde $f(x) = 1/x$. No olvides considerar que es posible que $x < 0$ aun cuando no haya ningún signo negativo delante de la variable.
- Calcula las siguientes imágenes inversas, para la función y el conjunto (o conjuntos) indicados:
 - $f(x) = x$, $B = [-1, 2.5)$.
 - $g(x) = 0$, $A = \{0\}$, $B = \mathbb{R}$, $C = [1, \infty)$.
 - $h(x) = x^2$, $B = [4, 9]$.
 - $f(x) = [x]$, $A = [0, 1]$, $B = (0, 1]$, $C = [0, 1)$, $D = (0, 1)$.
 - $p(x) = x - [x]$, $A = \{1/2\}$, $B = [1/4, 3/4]$.
 - $q(x) = |1/x|$, $A = [-2, -1]$, $B = \{0\}$, $C = [-1, 1)$.
- Sea $f(x) = |x|$. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}[a, 100]$ es un intervalo? ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}[a, 100]$ no es un intervalo?
- Misma función y preguntas que en el ejercicio anterior, para el intervalo abierto $(a, 100)$.
- Sea $f(x) = [x]$, la función mayor entero. Encuentra un intervalo (a, b) para el cual $f^{-1}(f(a, b)) \neq (a, b)$.

10. A partir del ejercicio anterior, concluye que la igualdad $f(f^{-1}(A)) = A$ no siempre se da.

3.5. Funciones inyectivas y suprayectivas

Los conceptos de inyectividad y suprayectividad serán muy útiles en el capítulo correspondiente a funciones inversas. Más allá de eso, los conceptos son importantes por sí mismos, pues reflejan propiedades importantes de la función, que se manifiestan también en los diversos aspectos que hemos venido analizando de una función: regla de correspondencia, tabla y gráfica.

Observa las cuatro funciones siguientes:

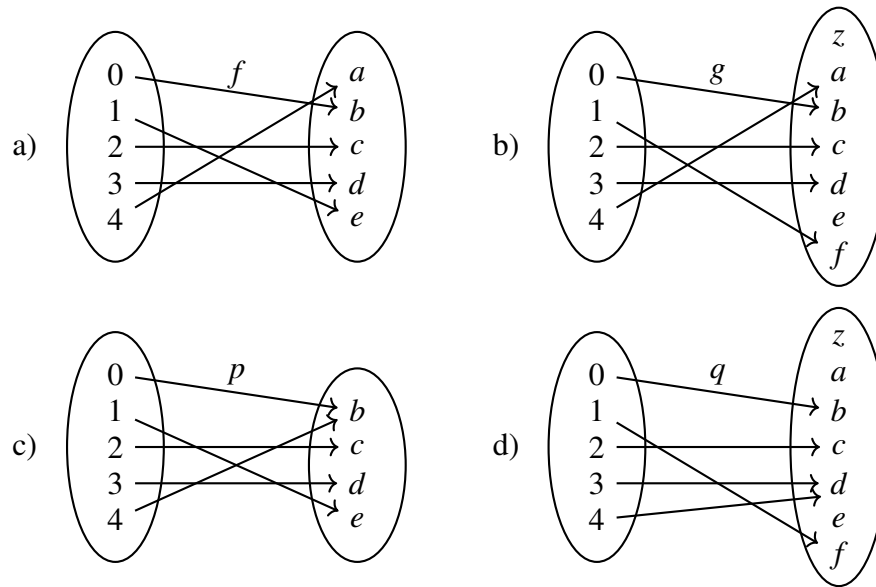


Figura 3.11: f, g, p, q .

3.5.1. Funciones inyectivas

Observa que, en la figura 3.11 las funciones f y g (de los incisos **a** y **b**) cumplen con la siguiente propiedad:

1) Elementos distintos del dominio están relacionados con elementos distintos del codominio; es decir, si a y b son elementos de $\text{Dom}(f)$ con $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$.

Ahora bien, esto último es equivalente a

1') Si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$.

Definición 19. Si f es una función que cumple la propiedad 1 (o, equivalentemente, la propiedad 1'), se dice que f es una función *inyectiva* o *uno a uno*.

De acuerdo con esto, las funciones f y g de los incisos **a** y **b** son inyectivas, puesto que no hay dos flechas que apunten al mismo elemento del codominio. Por otro lado, la función p del inciso **c** no es inyectiva, puesto que 0 y 4 (que son elementos distintos del dominio) están relacionados con el mismo elemento b del dominio. Dicho de acuerdo a la propiedad 1': $p(0) = p(4)$ pero $0 \neq 4$. De manera similar, se ve que la función q del inciso **d** no es inyectiva, puesto que hay dos elementos distintos en el dominio (3 y 4) que están relacionados con el mismo elemento del codominio: d . Veamos otro par de casos:

Ejemplo de una función no inyectiva:

Sea $f(x) = x^2$, uno de nuestros caballitos de batalla. Esta función no es inyectiva porque no cumple la propiedad 1: $2 \neq -2$ pero $f(2) = 4 = f(-2)$. Así, tenemos dos elementos distintos en el dominio que están relacionados con el mismo elemento del codominio. Es posible observar directamente que f no satisface 1': $f(2) = f(-2)$ no implica $2 = -2$.

Ejemplo de una función inyectiva:

Sea $g(x) = 2x + 1$. Veamos que g satisface la propiedad 1': Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $g(a) = g(b)$. Entonces $2a + 1 = 2b + 1$. Restando 1 de ambos lados se tiene $2a = 2b$, y dividiendo entre 2 ambos lados, concluimos que $a = b$. Es decir, si $g(a) = g(b)$ entonces $a = b$ (esto es, g satisface la propiedad 1'). Se concluye que g es una función inyectiva.

Veamos cómo se refleja la inyectividad de una función en los conjuntos $f^{-1}(y)$, en la tabla y en la gráfica de una función.

Conjuntos $f^{-1}(y)$

Sea f una función inyectiva. De acuerdo a la propiedad 1', si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$. Esto implica que la preimagen de un punto y en el codominio es vacía (si $y \notin \text{Ran}(f)$) o consiste de un solo punto (si $y \in \text{Ran}(f)$).

Inversamente, si f es una función tal que $f^{-1}(y)$ es vacío o consiste de un solo punto para cualquier $y \in \text{Cod}(f)$, entonces f cumple la propiedad 1' (ya que si $f(a) = f(b)$ entonces $a, b \in f^{-1}(y)$, donde $y = f(a) = f(b)$; como $f^{-1}(y)$ tiene un solo elemento, se concluye que $a = b$) y por lo tanto es inyectiva.

Tabla

De acuerdo a la regla 1, si f es una función inyectiva, elementos distintos del dominio están relacionados con elementos distintos del codominio. Esto quiere decir que en la tabla de f , no aparece dos veces el mismo elemento en la columna derecha.

Inversamente, si f es una función tal que ningún elemento de la columna derecha aparece repetido, entonces necesariamente elementos distintos del dominio están relacionados con elementos distintos del codominio; esto es, f es inyectiva.

Gráfica

Si f es una función inyectiva, elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas. Esto significa que a elementos distintos del eje x le corresponden distintas alturas en la gráfica. De otra manera: no hay dos elementos distintos del dominio que tengan asociada la misma altura. Esto implica que cualquier recta horizontal cortará la gráfica de f a lo más una vez.

Inversamente, si f es una función con la propiedad de que cualquier recta horizontal corta su gráfica a lo más una vez, se concluye que no hay dos elementos del dominio con la misma imagen; es decir, f es inyectiva.

3.5.2. Funciones suprayectivas

Refiriéndonos a la figura 3.11, observa que las funciones f y p de los incisos **a** y **c** cumplen la siguiente propiedad:

2) Dada $y \in \text{Cod}(f)$ existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$.

Nota también que las funciones g y q de los incisos **b** y **d** no tienen esta propiedad. En el caso de g , dado $e \in \text{Cod}(g)$ (o z) no existe algún elemento del dominio cuya imagen sea e . En el caso de la función q , ni z ni a ni e cumplen con la propiedad 2, de modo que q no es suprayectiva.

Definición 20. Si una función f cumple la propiedad 2, se dice que f es una función *suprayectiva* o *sobreyectiva*, o simplemente *sobre*.

Veamos otros dos ejemplos de funciones suprayectivas y no suprayectivas.

Ejemplo de una función suprayectiva

Sea $f(x) = -4x + 2$. Para verificar que f es una función suprayectiva, hay que tomar un elemento arbitrario $y \in \text{Cod}(f) = \mathbb{R}$ y encontrar $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Así, necesitamos encontrar x tal que $f(x) = y$; es decir, $-4x + 2 = y$. Despejando x de esta

ecuación se tiene que $x = \frac{y-2}{-4}$. Finalmente verificamos que $f(x) = y$. En efecto, $f\left(\frac{y-2}{-4}\right) = -4\left(\frac{y-2}{-4}\right) + 2 = y - 2 + 2 = y$.

Ejemplo de una función no suprayectiva

Sea $f(x) = [x]$. Necesitamos ver que f no cumple la propiedad 2; esto es, necesitamos ver que existe algún $y \in \text{Cod}(f)$ que no se puede ver de la forma $f(x)$, para ninguna $x \in \text{Dom}(f)$.

Como sabemos que $[x]$ es siempre un entero, si tomamos $y = \frac{1}{2}$, se tiene inmediatamente que y no es de la forma $f(x)$, para ningún $x \in \text{Dom}(f)$. Esto muestra que f no es suprayectiva. Desde luego, hay otros valores de y que también muestran que f no es suprayectiva; de hecho, cualquier valor no entero de y sirve.

A continuación, estudiaremos el concepto de suprayectividad desde los otros puntos de vista que hemos estudiado las funciones.

Conjuntos $f^{-1}(y)$

Sea f una función suprayectiva. De acuerdo a la propiedad 2, dado $y \in \text{Cod}(f)$ existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$. Esto es, $x \in f^{-1}(y)$, y por lo tanto $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Inversamente, si f es una función con la propiedad de que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ para cualquier $y \in \text{Cod}(f)$, entonces (para cualquier $y \in \text{Cod}(f)$) existe una $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$, y por lo tanto f es suprayectiva. Estas dos afirmaciones muestran que una función f es suprayectiva si y solamente si para cualquier $y \in \text{Cod}(f)$ se tiene que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Tabla

Es un *ejercicio* para el lector determinar qué propiedades tiene la tabla de una función f suprayectiva. Como sugerencia, piénsese en qué significa la suprayectividad de f en términos del párrafo anterior. Un ejercicio complementario consiste en determinar qué propiedad debe tener la tabla de una función f para que ésta sea suprayectiva.

Gráfica

Sea f una función suprayectiva, y $y_0 \in \text{Cod}(f)$. Dado que existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y_0$, se tiene que el punto (x, y_0) está en la gráfica de f . Esto es, la gráfica y la recta horizontal $y = y_0$ se cortan.

Inversamente, si f es una función con la propiedad de que para cualquier $y_0 \in \text{Cod}(f)$, la recta horizontal $y = y_0$ intersecta a la gráfica de f en un punto (x, y_0) , entonces x es tal que $f(x) = y_0$ y por lo tanto f es suprayectiva.

En resumen: una función f es suprayectiva si y sólo si cualquier recta horizontal que corta al eje y en un punto de $\text{Cod}(f)$, corta a la gráfica de f .

Rango de f

Sea f es una función suprayectiva y $y \in \text{Cod}(f)$. Entonces existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$; es decir, y es un elemento de $\text{Ran}(f)$. En otras palabras, $\text{Cod}(f) \subseteq \text{Ran}(f)$. Como la contención $\text{Ran}(f) \subseteq \text{Cod}(f)$ siempre es cierta, se tiene entonces que $\text{Cod}(f) = \text{Ran}(f)$. Inversamente, si f es una función tal que $\text{Cod}(f) = \text{Ran}(f)$, entonces dado un elemento del codominio y , se tiene que y es también un elemento del rango. Así, existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$, y por lo tanto f es suprayectiva. Esto muestra que para una función f , son afirmaciones equivalentes que f sea suprayectiva y que $\text{Cod}(f) = \text{Ran}(f)$.

3.5.3. Ejercicios de la sección

1. Considera la función que a cada automóvil le asocia su número de placas (para que esto sea función, suponemos que no hay ningún automóvil que no tenga placas). Definiendo el codominio de f como el conjunto de todas las placas posibles, responde las siguientes preguntas: ¿Es ésta una función inyectiva? ¿Es suprayectiva?
2. Encuentra una función con dominio \mathbb{R} que sea inyectiva pero no suprayectiva.
3. Encuentra una función con dominio \mathbb{R} que sea suprayectiva pero no inyectiva.
4. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + 1)^2 - 2$. ¿Es inyectiva? ¿Es suprayectiva?
5. Considera la función $g : \mathbb{R} \rightarrow [-2, \infty)$ dada por $g(x) = (x + 1)^2 - 2$. ¿Es inyectiva? ¿Es suprayectiva? Compara con el ejercicio anterior.
6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia $f(x) = |x - 3|$. ¿Es inyectiva? ¿Es suprayectiva?
7. Sea $g : (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia $g(x) = |x - 3|$. ¿Es inyectiva? ¿Es suprayectiva? Compara con el ejercicio anterior.
8. Escribe un criterio para que una función sea suprayectiva a partir de su tabulación. Justifica tu afirmación.
9. Di si las siguientes funciones son inyectivas o suprayectivas. Argumenta tus respuestas.
 - a) $f(x) = x$
 - b) $g(x) = 2$
 - c) $q(t) = 1300x - 1234$

- d) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $h(x) = [x]$.
- e) $j : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $j(x) = 1/x$.
- f) $p(t) = t^3$.
- g) $f(l)$, donde f es la función que al cuadrado de lado l le asocia la longitud de su diagonal. Sugerencia: ¿Quiénes son $\text{Dom}(f)$ y $\text{Cod}(f)$?
- h) $P(r)$, donde P es la función que al círculo de radio r le asocia su perímetro. Sugerencia: ver ejercicio anterior.
- i) $f(x)$, donde f es la función que a cada número real x le asocia su distancia al número -3 . Sugerencia: encontrar una expresión para la regla de correspondencia de f usando valor absoluto. Ver también ejercicios anteriores.
- j) $f(l)$, donde f es la función que al cubo de lado l le asocia su número de aristas (una arista es el borde de una de las caras).
10. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Definamos g como la función $g : A \rightarrow \text{Ran}(f)$ que tiene la misma regla de correspondencia que f (es decir, f y g sólo difieren en el codominio; tienen el mismo dominio y la misma regla de correspondencia). Muestra que g es suprayectiva.

3.6. Ejercicios del capítulo

- Di si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifica tu respuesta.
 - La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = [x]$ es suprayectiva pero no es inyectiva.
 - El que una función sea inyectiva depende únicamente de la regla de correspondencia, no del dominio o codominio.
 - Si una función no es inyectiva, entonces necesariamente es suprayectiva.
 - Hay funciones que son inyectivas y suprayectivas a la vez.
 - Si f es una función tal que $\text{Cod}(f) = \text{Ran}(f)$, entonces f es inyectiva.
- Sea f una función. ¿Quién es $f(\emptyset)$, la imagen del conjunto vacío?
- La función $c(t)$ le asocia a la duración t de una llamada telefónica, su costo en pesos. En términos de dinero, ¿qué interpretación tiene $\text{Ran}(c)$?

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\text{Ran}(f)$ consiste de un solo elemento. ¿Qué se puede decir de la función f ?
5. Encuentra una función cuyo dominio sea \mathbb{R} y cuyo rango sea el conjunto $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$. Sugerencia: define la función por pedazos.
6. Encuentra una función cuyo dominio sea \mathbb{R} y cuyo rango sea el conjunto $[-3, -1] \cup \{2\}$.
7. Sea $g(x) = |x|$. Encuentra dos intervalos distintos A y B tales que $g(A) = g(B)$.
8. Considera la función E que a cada mexicano le asocia el estado de la república donde nació.
 - a) Encuentra $\text{Dom}(E)$ y $\text{Cod}(E)$.
 - b) ¿Qué característica comparten los ciudadanos que pertenecen al conjunto $E^{-1}(\text{Oaxaca})$?
 - c) ¿Qué imagen inversa representa a los ciudadanos que nacieron en la península de Yucatán?
9. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. Encuentra dos conjuntos distintos A y B tales que $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$.
10. Encuentra dos intervalos A y B tales que $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$, donde $f(x) = x^2$.
11. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$
 - a) Encuentra un intervalo cerrado I tal que $f^{-1}(I)$ consista de un solo punto. Observa que esto no muestra que f sea una función constante.
 - b) ¿Es posible encontrar un intervalo abierto I tal que $f^{-1}(I)$ consista de un solo punto? Explica.
12. [OPCIONAL] Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, y $A \subset X$, $B \subset Y$. Muestra que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, y $A \subset f^{-1}(f(A))$.
13. Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. ¿Es posible encontrar una función inyectiva $f : A \rightarrow B$? ¿Es posible encontrar una función suprayectiva $g : A \rightarrow B$?
14. Sean A y B como en el ejercicio anterior. ¿Es posible encontrar una función inyectiva $p : B \rightarrow A$? ¿Es posible encontrar una función suprayectiva $q : B \rightarrow A$?
15. Encuentra una función $f : (-5, 10) \rightarrow [-1, 1]$ que sea suprayectiva pero no inyectiva.

16. Muestra que la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ con regla de correspondencia

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es suprayectiva. Esto muestra, intuitivamente, que hay al menos tantos números naturales como enteros, a diferencia de lo que uno podría pensar: que hay “el doble” de enteros que de naturales.

17. Encuentra un intervalo (lo más grande posible) donde la función $f(x) = x - [x]$ sea inyectiva.
18. Calcula $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1/2)$, donde $f(x) = x - [x]$. Este ejemplo muestra que f^{-1} puede ser un conjunto infinito aún si la función no es constante en ningún intervalo.
19. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de que $f^{-1}(0)$ consista de exactamente tres elementos. Sugerencia: empieza por esbozar la gráfica de la función.
20. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y valores $a, b, c \in \text{Ran}(f)$ tales que $f^{-1}(a)$ consista de un elemento, $f^{-1}(b)$ consista de dos elementos y $f^{-1}(c)$ consista de tres elementos.
21. ¿Es posible construir una función $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Ran}(f) = \{-2, 0, 1\}$? Si es posible da un ejemplo, si no es posible explica por qué.
22. Encuentra una función suprayectiva tal que $\text{Ran}(f) = \{0\}$. Sugerencia: ¿Quién debe ser $\text{Cod}(f)$?
23. Encuentra una función inyectiva tal que $f^{-1}(1) = \text{Dom}(f)$. Sugerencia: ¿Quién debe ser $\text{Dom}(f)$?
24. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función inyectiva. Si $A, B \subset X$ son distintos, muestra que $f(A) \neq f(B)$.
25. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Demuestra que entonces $f^{-1}(A) \neq f^{-1}(B)$ si A y B son dos subconjuntos distintos de Y .
26. Si una función es inyectiva y suprayectiva, se dice que es *biyectiva*. ¿Qué propiedades tiene la gráfica de una función biyectiva?
27. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. ¿Es posible encontrar una función biyectiva con dominio A y codominio B ? ¿Con dominio B y codominio A ?

28. Basándote en su gráfica, muestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es biyectiva.

29. A partir de la regla de correspondencia, muestra que la función $f(x) = 5x - 12$ es biyectiva.

30. Muestra que para cualquier intervalo I , la función identidad $\text{id} : I \rightarrow I$ es biyectiva.

Capítulo 4

Funciones de la forma $f(x) = mx + b$

En este capítulo estudiaremos funciones de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes reales. Observa que más que estudiar caso por caso, estamos analizando una familia completa de funciones. Este enfoque tiene la ventaja de ser muy general, además de que es muy utilizado en cursos posteriores (por ejemplo, se puede decir que el curso de Cálculo diferencial consiste en estudiar las funciones diferenciables, o que el curso de Álgebra lineal consiste de estudiar las funciones lineales).

4.1. Gráfica de funciones del tipo $f(x) = mx + b$

Antes de comenzar propiamente el estudio de las funciones del tipo $f(x) = mx + b$, queremos asegurarnos que se entiende qué funciones estudiaremos. Algunas funciones concretas de esta forma son $f(x) = 2x + 8$, $g(x) = x + 7$, $h(x) = -5x - 3$, $p(x) = -x$, $q(x) = -4$, $r(x) = 2 - 8x$. Es un ejercicio sencillo (pero importante) determinar los valores de m y b en cada uno de los ejemplos anteriores.

Como veremos, las similitudes en las reglas de correspondencia de estas funciones tienen consecuencias sobre sus gráficas, que pueden ser determinadas a partir de los valores de m y b . Si el lector está ya razonablemente seguro de entender cuál es el tipo de funciones que estudiaremos, puede seguir leyendo. En caso contrario, le pedimos que dé más ejemplos numéricos hasta que el concepto sea claro.

Veamos qué se puede decir de una función del tipo $f(x) = mx + b$ en general; es decir, sin conocer específicamente los valores de m y b . Dada $f(x) = mx + b$, notemos que la variable

x puede tomar cualquier valor, dado que no hay ninguna restricción sobre ella. En otras palabras, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. El codominio, como es usual, es \mathbb{R} . Así, para cualquier función f de este capítulo (salvo algunos casos en la sección de aplicaciones donde aparecen restricciones a partir del contexto), se tiene $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ya hemos estudiado algunos casos de este tipo de funciones, como las constantes, que tienen la forma $f(x) = 0x + b = b$ (en estos casos $m = 0$), o la función identidad, $\text{Id}(x) = x$, en donde $m = 1$ y $b = 0$. Para refrescar ideas, incluimos a continuación sus gráficas.

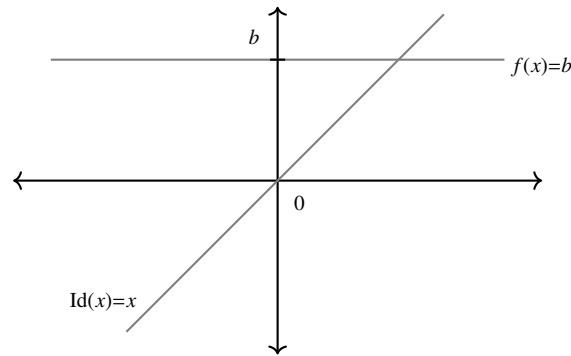


Figura 4.1: Las gráficas de $f(x) = b$ e Id

Como vimos arriba, si $m = 0$ se tiene que f es una función constante y por lo tanto no inyectiva. ¿Qué pasa en los casos en los que $m \neq 0$? Si $f(x) = f(y)$ se tiene $mx + b = my + b$, de donde $mx = my$ y por lo tanto $x = y$ (observa que para poder cancelar la m es crucial que sea distinta de cero). Esto es, la función $f(x) = mx + b$ es inyectiva siempre que $m \neq 0$.

Analicemos ahora la suprayectividad: si $m = 0$ se tiene la función constante, que no es suprayectiva. Veremos que este es el único caso en el que $f(x) = mx + b$ no es suprayectiva. Si $m \neq 0$, dado $y \in \text{Cod}(f) = \mathbb{R}$, buscamos un número $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Esto es, buscamos x tal que $mx + b = y$. Despejando x de esta ecuación, obtenemos $x = \frac{y - b}{m}$, lo cual tiene sentido ya que $m \neq 0$. Verificando, $f(x) = f\left(\frac{y - b}{m}\right) = m\left(\frac{y - b}{m}\right) + b = (y - b) + b = y$. Esto muestra que, para $m \neq 0$ se tiene que $f(x) = mx + b$ es suprayectiva.

Tenemos entonces ya bastante información sobre las funciones de la forma $f(x) = mx + b$. Hasta el momento, sabemos que tienen dominio y codominio \mathbb{R} y que, si $m = 0$ se trata de una función constante, mientras que si $m \neq 0$ se tiene una función biyectiva (es decir, inyectiva y suprayectiva).

Papel de b

En un primer momento, analizaremos el papel que juega b . En la sección 2.3, vimos que al sumar una constante a la regla de correspondencia de una función, lo que sucede es que la gráfica sube (si la constante añadida es positiva) o baja (si la constante añadida es negativa). Recordamos esto por medio del siguiente dibujo, donde aparecen las gráficas de $f(x) = 2x + b$, con $b = -2, -1, 0, 1, 2$.

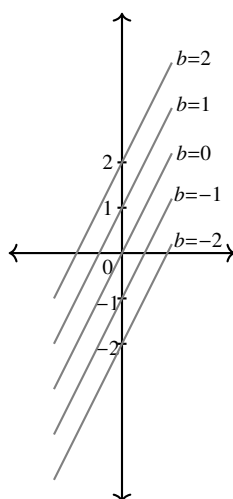
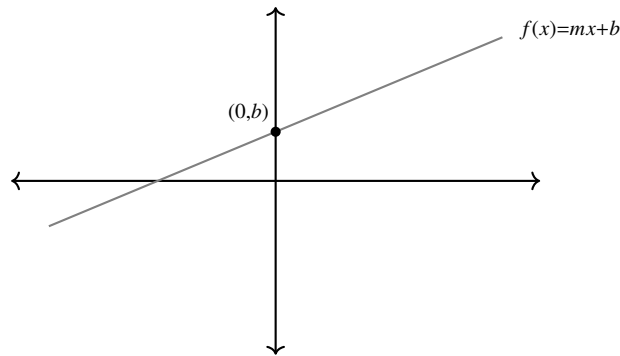


Figura 4.2: Gráfica de $f(x) = 2x + b$, con $b = -2, -1, 0, 1, 2$

Ahora bien, esto no nos da ninguna referencia sobre una función en particular. Es decir, con lo que sabemos hasta ahora podemos estar seguros de que la gráfica de $p(x) = 2x + 7$ está dos unidades arriba de la gráfica de la función $q(x) = 2x + 5$. Sin embargo, no podemos saber a qué altura está cada una de ellas sin tabular.

La cuestión aquí es que hay un valor para x para el cuál es muy simple encontrar su imagen. Se trata de $x = 0$. En efecto, para cualquier función de la forma $f(x) = mx + b$, se tiene que $f(0) = m(0) + b = b$. Es decir, la gráfica de f pasa por el punto $(0, b)$.

Figura 4.3: Gráfica de $f(x) = mx + b$

Nota que aunque el dibujo está trazado suponiendo que $b > 0$, en realidad la constante b puede tomar cualquier valor en \mathbb{R} , de modo que puede ser también negativa (o cero). En los ejercicios analizarás las gráficas de todas las combinaciones posibles para m y b positivas, negativas o cero.

Papel del signo de m

Analicemos ahora el papel que juega el signo de m . En otras palabras, si tenemos varias funciones con la misma b pero m de distinto signo, ¿cómo varían sus gráficas? Para simplificar (aunque sin perder generalidad) estudiaremos las funciones del tipo $f(x) = mx$; es decir, cuando $b = 0$. Por lo que vimos en el párrafo anterior, sabemos que todas ellas pasan por el punto $(0, 0)$ (hecho que, de todas formas, se puede verificar en caso de duda). Démosle algunos valores a m para poder observar cómo cambia la gráfica.

En el siguiente dibujo, se aprecian las gráficas de $f(x) = mx$ para los valores de $m = -2, -1, 0, 1, 2$, mismas que puede reconstruir, paso a paso, el lector minucioso.

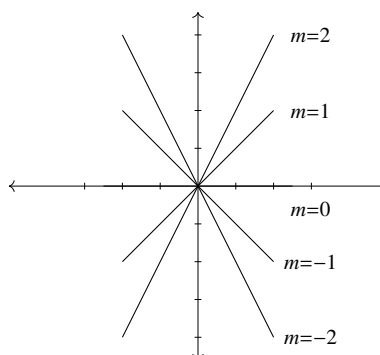


Figura 4.4: Gráfica de $f(x) = mx$, con $m = -2, -1, 0, 1, 2$

¿Qué se puede decir, entonces, de cómo afecta el valor de m a la gráfica de la función? Basándonos en los ejemplos de arriba, es factible pensar que el signo de m determina si la gráfica de la función “sube” o “baja” (es decir, si f es creciente o decreciente, respectivamente).

En efecto, si $x < y$ entonces $mx > my$ (recordando que, en este caso, $m < 0$ y por lo tanto hay que invertir el sentido de la desigualdad al multiplicar por m). Es decir, $x < y$ implica $f(x) > f(y)$, lo cual corresponde a la definición de una función decreciente.

También es posible mostrar que si $m > 0$ entonces f es creciente: $x < y$ implica $mx < my$ (en este caso $m > 0$ de modo que no hay que invertir la desigualdad). Es decir, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$, lo que corresponde a la definición de una función creciente.

Resumimos estos argumentos en la siguiente tabla:

$m > 0$	f creciente
$m = 0$	f constante
$m < 0$	f decreciente

Papel de m (más allá del signo)

Parecería, sin embargo, que podemos extraer más información del valor de m que tomando en cuenta solamente su signo (que fue lo que hicimos arriba). Con este fin, comparemos las gráficas de $f(x) = mx$ con $m = 2$ y $m = 4$.

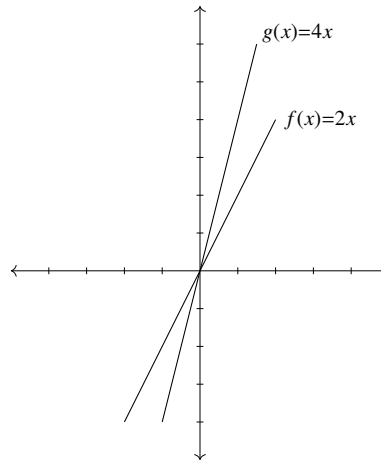


Figura 4.5: Gráficas de $f(x) = 2x$, $g(x) = 4x$

Observemos que, cuando $m = 2$, la gráfica “sube” dos unidades por cada unidad que crece x . Por ejemplo, cuando $x = 0$ tenemos el punto sobre la gráfica $(0, 0)$ y cuando $x = 1$ tenemos el punto sobre la gráfica $(1, 2)$. Esto es: al aumentar la primera coordenada en 1, la segunda aumentó en 2. Esto se repite para cualesquiera otros puntos sobre la recta, no es exclusivo de $x = 0$ y $x = 1$. En cambio, para g , donde $m = 4$, se tiene que la gráfica “sube” cuatro unidades por cada unidad que crece x .

En general, el valor de m nos indica cuántas unidades sube la gráfica por cada unidad que crece x . Esto se ve analizando dos puntos sobre la gráfica de $f(x) = mx$: cuando $x = 0$ y cuando $x = 1$, de donde se obtienen, respectivamente, $(0, 0)$ y $(1, m)$. Un poco más en general, para x y $x + 1$ se obtienen los puntos (x, mx) y $(x + 1, m(x + 1)) = (x + 1, mx + m)$, lo que muestra que cada que crece x en una unidad, la gráfica sube m unidades.

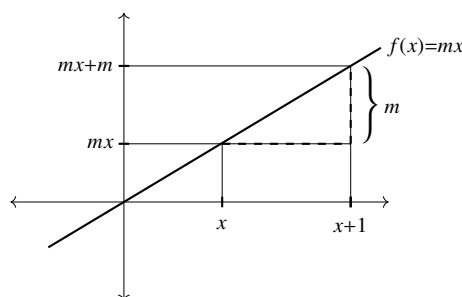


Figura 4.6: $f(x) = mx$ sube m unidades por cada unidad que avanza

Observa que todo este análisis sigue siendo válido si le damos a m valores negativos. Por ejemplo, si $m = -2$, se tiene que cada que crece x en una unidad, la gráfica “sube” -2 unidades: interpretamos “subir -2 unidades” como “bajar 2 unidades”.

Resumiendo todo esto, se tiene que el valor de m nos dice cuánto “sube” la gráfica (si $m > 0$) o cuánto “baja” (si $m < 0$) por cada unidad que aumenta x . Hay otras maneras de redactar esta afirmación, todas equivalentes, que se analizan en los ejercicios de esta sección.

A continuación, veremos otra explicación (por medio de ejemplos) del papel de m en la función $f(x) = mx + b$. Consideremos la función $f(x) = 2x - 1$. Por lo que hemos visto hasta el momento, sabemos que f es una función con dominio y codominio \mathbb{R} , que es biyectiva y que es creciente (porque $m > 0$). Podemos encontrar su gráfica tabulando, como aprendimos en el capítulo 2. Esto da algo así:

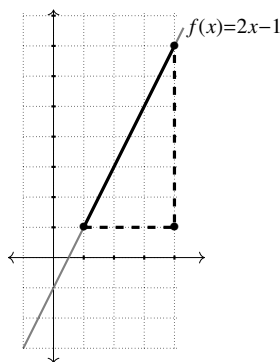


Figura 4.7: $f(x) = 2x - 1$

Observemos el triángulo que se forma entre los puntos de la gráfica $(1, 1)$, $(4, 7)$ y $(4, 1)$. Notemos que el lado horizontal tiene una longitud de 3 unidades, mientras que el lado vertical mide 6 unidades. Esto está de acuerdo con la explicación del párrafo anterior, donde decíamos que por cada unidad que se incrementa x , la gráfica sube $m = 2$ unidades. En este caso particular, x aumentó 3 unidades y la gráfica “subió” 6 unidades (2 unidades por cada unidad que aumentó x).

Otra manera de ver esto es notar que al hacer la división de lo que “sube” la gráfica (6 unidades) entre lo que avanzó la x (3 unidades), se obtiene 2, que es m . Uno podría pensar que esto es casualidad, pero no es así. A continuación, trataremos de explicar esto de manera más general, usando únicamente letras para representar los números (y parejas de letras para representar los puntos en el plano).

Sea $f(x) = mx + b$, y considera los puntos $P = (x, mx + b)$, y $Q = (x + a, m(x + a) + b)$. Observa que tanto P como Q tienen la forma $(x, f(x))$, de manera que pertenecen a la gráfica de f .

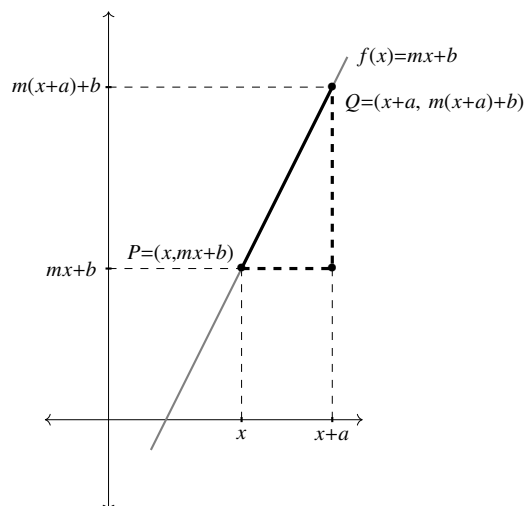


Figura 4.8: Gráfica de $f(x) = mx + b$

Nota que el lado horizontal de este triángulo mide a unidades, mientras que su lado vertical mide ma unidades, de manera que al hacer la división de lo que “sube” la gráfica entre lo que avanza la x , se tiene

$$\frac{ma}{a} = m$$

Esto muestra que la afirmación del ejemplo es efectivamente general (ya que las constantes m , a y b son arbitrarias; es decir, son números *cualesquiera*, con la única condición de que $a \neq 0$, para que P y Q sean efectivamente dos puntos distintos).

Este es tal vez el primer ejemplo en el que tratamos las cosas con tanta generalidad. Si en una primera lectura el estudiante lo encuentra sin sentido, le puede dar valores arbitrarios a m , a y b (con las restricciones $m \neq 0$, $a \neq 0$), y repetir la explicación las veces que sea necesario hasta que encuentre lo que es común a todas ellas: que al dividir lo que “sube” la gráfica entre lo que “avanza” la x siempre se obtiene m (incluso para 0 o valores negativos de m , a o b).

4.1.1. Ejercicios de la sección

- En el texto vimos que, para $f(x) = mx$ por cada que x aumenta en una unidad, la gráfica de f sube m unidades. Convéncete de que esto es lo mismo a decir:
 - Cada que x disminuye una unidad, la gráfica “baja” m unidades.
 - Cada que x aumenta n unidades, la gráfica “sube” mn unidades.
- Haz un esbozo de la gráfica de $f(x) = mx + b$ de acuerdo a cada una de las siguientes condiciones:

a) $m > 0, b > 0$	d) $m = 0, b > 0$	g) $m < 0, b > 0$
b) $m > 0, b = 0$	e) $m = 0, b = 0$	h) $m < 0, b = 0$
c) $m > 0, b < 0$	f) $m = 0, b < 0$	i) $m < 0, b < 0$
- Encuentra los valores de m y b para las siguientes funciones (aunque no sea inmediato por la forma en que están escritas, todas se pueden llevar a la forma $f(x) = mx + b$ mediante operaciones algebraicas).

a) $f(x) = -3 + 8x$	d) $f(x) = \frac{2x - 1}{3}$
b) $f(x) = \frac{-1}{4}x - 7$	e) $f(x) = \left(\frac{x}{3} + 3\right) + \left(\frac{x}{2} + 1\right)$
c) $f(x) = (x - 1)^2 - x^2$	f) $f(x) = (2x - 3)^2 - 4x^2$
- Grafica cada una de las funciones del inciso anterior, una vez que las tengas en la forma $f(x) = mx + b$. Verifica que tus gráficas coincidan cualitativamente con las del ejercicio 2; por ejemplo, si $m > 0$ y $b < 0$, la gráfica deberá ser creciente y cortar al eje y por debajo del eje x , etc.
- Grafica la función $f(x) = mx + 2$ para $m = -3, -2, -1/2, -1/4, 1/7, 1/5, 5, 10$.
- Grafica la función $f(x) = mx + b$ para todas las posibles combinaciones de $m = -3, 2, 4$ y $b = -5, 1, 6$. Por ejemplo, hay que graficar $f(x) = -3x - 5$ (que se obtiene con $m = -3$ y $b = -5$), también $f(x) = -3x + 1$ (que se obtiene con $m = -3$ y $b = 1$), etc.
- Encuentra los puntos de intersección de las siguientes funciones con el eje x . Observa que esto es lo mismo que encontrar los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 0$. Es decir, la

intersección (o intersecciones) de la función f con el eje x , corresponde a los elementos de $f^{-1}(0)$.

$$a) f(x) = 2x - 4$$

$$b) g(x) = -3x + 2$$

$$c) h(x) = \frac{1}{2}x + 7$$

$$d) p(x) = -\frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

$$e) q(x) = 0$$

$$f) r(x) = \sqrt{2}x + 1$$

4.2. Otro enfoque

Dados m y b números reales podemos construir la función $f(x) = mx + b$, que sabemos, por la sección anterior, que siempre tiene por gráfica a una recta. Aquí enfrentamos la situación inversa: si se tiene una recta l en el plano, ¿será posible encontrar valores de m y b para que la gráfica de $f(x) = mx + b$ sea exactamente l ?

Las siguientes dos definiciones nos ayudarán a resolver este problema:

Definición 21. Si l es una recta no vertical en el plano que interseca al eje y en el punto $(0, b)$, se dice que b es la *ordenada al origen* de la recta l .

Definición 22. Dados dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ sobre la recta l , definimos su *pendiente* (que denotaremos por la letra m) mediante la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La interpretación geométrica de la definición de m se aprecia en el siguiente dibujo:

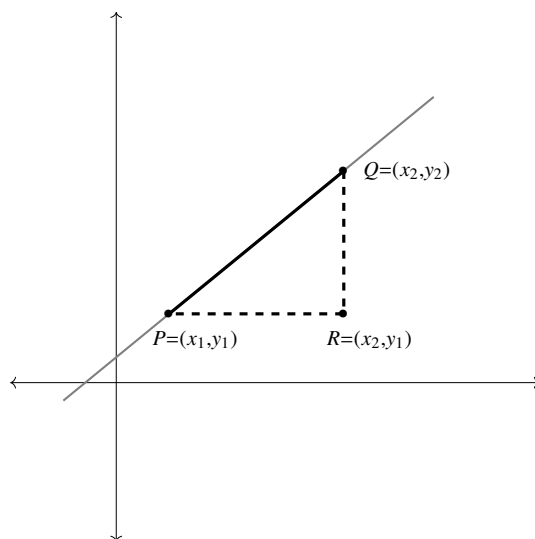


Figura 4.9: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

de donde se tiene que la longitud del segmento PR es $x_2 - x_1$ y la del segmento RQ es $y_2 - y_1$. Así, m corresponde al cociente (o división) de lo que “sube” la recta cuando x aumenta de x_1 a x_2 .

Aclaremos que las definiciones dadas arriba parten de consideraciones geométricas de una recta no vertical y son por lo tanto independientes de los papeles de m y b en la regla de correspondencia $f(x) = mx + b$. Sin embargo, uno de los objetivos de esta sección es establecer que si l es una recta con ordenada al origen b y pendiente m , entonces l será la gráfica de la función $f(x) = mx + b$. Es decir, la recta l queda determinada por el punto en el que corta al eje y y una medida de su inclinación con respecto al eje x , que está dada por la pendiente, m .

La observación clave es que, si se tiene $f(x) = mx + b$, su gráfica (que es una línea recta como vimos en la sección anterior) corta el eje y en $(0, b)$ (como se verifica evaluando f en $x = 0$). Es decir, la ordenada al origen de la gráfica de f es b . Además, dado que la constante m nos dice cuánto sube la gráfica de f por cada unidad que se incrementa x , se tiene que la pendiente de la recta l es precisamente m . En otras palabras: dos características geométricas de l (la altura a la que corta al eje y y su inclinación con respecto al eje x) nos definen los valores de m y b , de manera que podemos determinar la regla de correspondencia de f .

Aclaremos esta solución a nuestro problema (dada l encontrar f tal que su gráfica sea l) mediante dos ejemplos:

Ejemplo

Sea l la recta que pasa por los puntos $P = (0, 4)$ y $Q = (2, 10)$. Encontrar una función de la forma $f(x) = mx + b$ que tenga por gráfica a l .

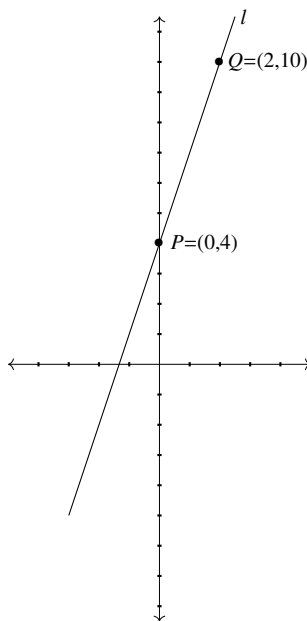


Figura 4.10: Encontrar f tal que su gráfica sea l

En este caso, resulta inmediato que $b = 4$, puesto que la recta l y el eje y se cruzan en el punto $P = (0, 4)$. Esto quiere decir que nuestra función deberá tener la forma $f(x) = mx + 4$, donde aún falta por determinar el valor de m . Ahora bien, observa que al avanzar de P a Q , el incremento en x es de 2 unidades, mientras que la gráfica “sube” $10 - 4 = 6$ unidades. De acuerdo a lo visto en la sección anterior, esto muestra que $m = \frac{6}{2} = 3$. En el lenguaje de esta sección, la pendiente de la recta l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 4}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3.$$

Así, la función f debe ser $f(x) = 3x + 4$. Una manera de comprobar que hicimos las cosas bien, es verificando que la gráfica de f pasa por los puntos P y Q . Que esto es verdad es una consecuencia de que $f(0) = 4$ y de que $f(2) = 10$, lo que muestra que los puntos $P = (0, 4)$ y $Q = (2, 10)$ están en la gráfica de f .

Ejemplo

Encontrar la función que tiene por gráfica a la recta que pasa por los puntos $P = (-1, -3)$ y $Q = (4, 7)$.

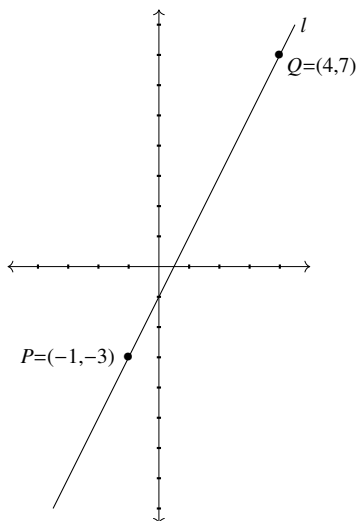


Figura 4.11: ¿De qué función f es gráfica l ?

En este caso no es inmediato el valor de b . De hecho, será más conveniente empezar por determinar m : al ir de P a Q , el valor de x se incrementa en 5 unidades, mientras que la gráfica “sube” 10 unidades. De aquí que $m = \frac{10}{5} = 2$. Como es de esperarse, el valor de m también se puede obtener por medio de la definición 22, obteniendo

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{4 - (-1)} = \frac{10}{5} = 2.$$

Esto nos dice que la función buscada tendrá la forma $f(x) = 2x + b$. Falta por determinar b . Para esto, observemos que es necesario que $f(-1) = -3$, y que $f(4) = 7$ (¿por qué?). Esto es, necesitamos que $f(-1) = 2(-1) + b = -3$, de donde se obtiene la ecuación $b - 2 = -3$, que al resolverla nos da $b = -1$. Una observación importante es que al resolver para b la ecuación $f(4) = 7$, se tiene $2(4) + b = 7$, que también tiene por solución $b = -1$. De este análisis se desprende que $f(x) = 2x - 1$. Al igual que en el caso anterior, podemos comprobar nuestro resultado verificando que los puntos P y Q están sobre la gráfica de f , para lo cual basta con comprobar que $f(-1) = -3$ y que $f(4) = 7$.

4.2.1. Ejercicios de la sección

- De acuerdo a lo visto en el texto, no hay una función cuya gráfica sea la recta l que pasa por $P = (3, 1)$ y $Q = (3, 2)$, porque se trata de una recta vertical. Intenta calcular m según la fórmula de la definición 22 para que veas cuál es el problema algebraico que aparece.
- Encuentra funciones que tengan por gráfica a las rectas con las siguientes condiciones:
 - Pasa por los puntos $P = (-1, 3)$, $Q = (4, 13)$.
 - Pasa por los puntos $P = (-2, -4)$, $Q = (2, -4)$.
 - Pasa por los puntos $P = (1, 3)$, $Q = (-3, 5)$.
 - Pasa por los puntos $P = (0, -2)$, $Q = (1, 1)$.
 - Pasa por los puntos $P = (3, 0)$, $Q = (10, -3)$.
 - Pasa por $P = (3.5, -1)$ y tiene $m = -2$.
 - Tiene $b = 4$ y pasa por $P = (5, 17)$.
- Encuentra tres funciones (distintas) de la forma $f(x) = mx + b$ cuya gráfica pase por $P = (0, 1)$.
- Encuentra tres funciones (distintas) de la forma $f(x) = mx + b$ cuya gráfica pase por $P = (2, -3)$.
- En este ejercicio encontrarás las coordenadas del punto de intersección de dos gráficas de funciones del tipo $f(x) = mx + b$.
 - Grafica las funciones $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = \frac{x}{4} + 5$ en el mismo plano cartesiano.
 - Observa que hay un punto P en el que se cortan.
 - Para encontrar la coordenada x de P , haz $f(x) = g(x)$ y resuelve la ecuación resultante.
 - Con ayuda del inciso anterior, encuentra la coordenada y de P .
 - Explica la idea geométrica detrás del método descrito para encontrar las coordenadas de P .
- Siguiendo los pasos del ejercicio anterior, trata de encontrar el punto de intersección de las gráficas de $f(x) = -4x + 10$ y $g(x) = 3 - 4x$. ¿Qué es lo que falla geoméricamente?

¿Cómo se refleja este problema en la ecuación $f(x) = g(x)$?

7. Encuentra el punto de intersección (si existe) de las gráficas de los siguientes pares de funciones.

$$a) \begin{cases} f(x) = 2x + 6 \\ g(x) = -3x \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} f(x) = 2x + 3 \\ g(x) = -3x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} p(x) = 3 - x \\ q(x) = -x + 12 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} p(x) = -4 + 7x \\ q(x) = 2 + 6x - 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} r(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \\ s(x) = \frac{5}{4}x - \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} r(t) = 3 - 2t - 5 \\ s(t) = \frac{t - 5}{2} \end{cases}$$

4.3. Aplicaciones

4.3.1. ¿Qué es un modelo matemático?

Resolver un problema siempre es un reto, casi siempre cuesta trabajo y la mayoría de las veces hay que invertir dinero para hacer experimentos que permitan encontrar la solución. Así que casi siempre aparece otro problema, que consiste en resolver el problema original con el menor trabajo posible —en general, invirtiendo la menor cantidad posible de recursos—. Una de las mejores maneras de hacer esto es plantear y resolver el problema primero en el papel y luego llevar la solución encontrada a la práctica.

Pongamos un ejemplo simple: supongamos que queremos averiguar la velocidad a la que un coche se debe desplazar para cubrir 15 kilómetros en 12 minutos. A (casi) nadie se le ocurriría experimentar haciendo el recorrido real en coche a distintas velocidades hasta encontrar aquella que permita cumplir la condición del problema (esto es, recorrer los 15 kilómetros en 12 minutos).

En fin, a nosotros se nos ocurrió pero nos dimos inmediatamente cuenta que es una mala idea: gasta recursos y tiempo que se pueden dedicar a otras cosas. Un enfoque más interesante sería resolver primero el problema en el papel, y luego verificar que la solución es correcta (ahí sí, empíricamente), lo que mostraría, entre otras cosas, que no hemos olvidado ningún factor importante en nuestros cálculos.

Recordando que $v = \frac{d}{t}$, donde v es la velocidad, d es la distancia y t el tiempo, se tiene que, bajo las condiciones del problema, necesitamos que $v = \frac{15 \text{ km}}{12 \text{ min}} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. En la práctica, sin embargo, puede haber factores que hagan que esta solución no sea la óptima: tráfico, curvas que no permitan mantener la velocidad, etc. Sin embargo, hemos avanzado bastante ayudados por la teoría.

En general, y respondiendo a la pregunta que da nombre a esta sección, un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones o funciones que reflejan de alguna manera los aspectos más relevantes de cierta situación. Cuando decimos $v = \frac{d}{t}$, estamos haciendo un modelo que refleja la manera en la que se desplaza un objeto a velocidad constante. Nuestro modelo será adecuado para el problema si la variación en la velocidad del coche es pequeña. Si, como en el ejemplo precedente, el coche no puede mantener una velocidad cercana a $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, entonces el modelo no será de gran ayuda y habrá que modificarlo.

4.3.2. Tres modelos matemáticos sencillos

El tipo de funciones que hemos venido estudiando en este capítulo nos pueden ayudar a modelar algunos fenómenos, y por lo tanto a entenderlos y resolver problemas relacionados con ellos (al menos en teoría).

Veamos algunas situaciones que se pueden modelar adecuadamente con este tipo de funciones:

Comprando azúcar

Supongamos que el precio del azúcar a granel es de \$8 por kilogramo. Quisiéramos construir una función que nos calcule el total a pagar, T , como función de la cantidad x de azúcar comprada. Estrictamente hablando, x no es una variable real, y ni siquiera racional: si alguien pretende comprar 0.000000001 kg. de azúcar, la báscula no tendría la precisión suficiente para hacer la medida correspondiente, y aún resolviendo este problema, la cantidad a pagar sería tan insignificante que sería imposible hacer el cobro. Sin embargo, consideraremos que x es una variable real, lo que simplifica nuestro modelo sin introducir complicaciones que reflejen estas situaciones poco comunes. Observemos, antes que nada, qué valores puede tomar x : notemos que x tiene que ser positivo (podemos permitir incluso $x = 0$, si pensamos en la

situación rara, pero admisible, de que alguien quisiera comprar cero kilogramos de azúcar). Esto es $\text{Dom}(T) = [0, \infty)$.

Ahora bien, por cada kilo de azúcar comprado, se pagarán \$8, de modo que al comprar x kilogramos de azúcar, el total a pagar será de $8x$ pesos; esto es, $T(x) = 8x$. Nota que T es una función de la forma $f(x) = mx + b$, con $b = 0$ y $m = 8$.

Introduzcamos una complicación: supongamos ahora que además del azúcar hay que pagar una bolsa que cuesta \$1 para transportarla. Si incluimos este nuevo gasto en la cuenta total, se tiene que la nueva función del total a pagar, que denotamos por T_2 para distinguirla de la anterior, es $T_2(x) = 8x + 1$.

En este momento, alguien podría objetar, con toda razón, que si x es grande, no toda el azúcar cabrá en la única bolsa comprada. En otras palabras, el costo de las bolsas para transportar el azúcar no es constante, sino que es también una función de la cantidad x . La función resultante (que no es de la forma $f(x) = mx + b$) se calcula en los ejercicios.

Lo que queremos hacer notar con estas sucesivas complicaciones de la situación, es que el modelo particular que sea el más adecuado depende de las circunstancias reales en las que se desarrolle el problema. Siempre hay que tener esto presente.

El plano inclinado

Al dejar caer una canica por un plano inclinado, como se muestra en el dibujo, se tiene que la velocidad de la canica en el instante t está dada por

$$v(t) = v_0 + g \text{sen}(\alpha)t,$$

donde v_0 es la velocidad inicial de la canica en m/s^2 (es decir, la velocidad con la que se avienta originalmente), t es el tiempo en segundos, $g = 9.81m/s^2$ y $\text{sen}(\alpha)$ es el seno del ángulo de inclinación del plano respecto a la horizontal (no hemos visto en este texto las funciones trigonométricas, de las cuales $f(x) = \text{sen}(x)$ es una de las más comunes; el lector no familiarizado puede considerar a $\text{sen}(\alpha)$ como una constante positiva (que depende de la constante α)).

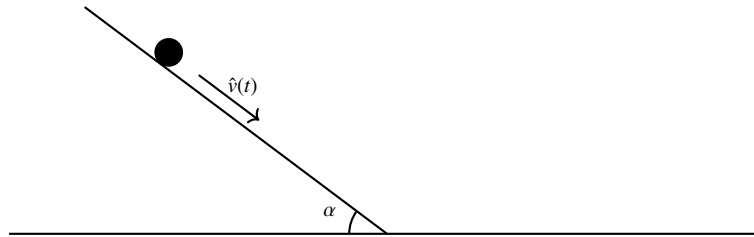


Figura 4.12: Plano inclinado

Observa que la función $v(t) = v_0 + g \operatorname{sen}(\alpha)t$ tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde v_0 juega el papel de b y la constante $g \operatorname{sen}(\alpha)$ juega el papel de m . Dado que el experimento comienza cuando $t = 0$, no tiene sentido considerar valores negativos de t , de modo que $\operatorname{Dom}(v) = [0, \infty)$. Dado que la constante $g \operatorname{sen}(\alpha)$ es positiva, se tiene que $\operatorname{Ran}(v) = [v_0, \infty)$. La interpretación de este hecho en el contexto del problema es que la canica alcanza (en algún momento) cualquier velocidad que sea mayor o igual a v_0 .

Para fijar ideas, supongamos que $\alpha = 45^\circ$, de manera que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, y que la canica se avienta con una velocidad inicial de 2 m/s . Con estas condiciones particulares, la función v toma la forma particular $v(t) = 2 + \frac{g}{\sqrt{2}}t$. Numéricamente, $v(t) \approx 2 + 6.94t$. (El símbolo \approx significa “aproximadamente igual a”).

Este modelo permite responder preguntas como las siguientes:

- ¿Cuál es la velocidad de la canica en el instante $t = 7$?
- ¿Cuál es la diferencia de velocidades entre los instantes $t = 5$ y $t = 8$?
- ¿En qué momento la canica alcanza una velocidad de 10 m/s ?

Este tipo de cuestiones las resolverás en los ejercicios. Por lo pronto sólo notemos que sin el modelo matemático, estas preguntas serían bastante difíciles de responder, aunque el fenómeno estudiado es bastante simple.

Grados Fahrenheit vs. grados centígrados

Las dos escalas más comunes para determinar la temperatura de un objeto son los grados Fahrenheit y los grados centígrados. La temperatura de un objeto medida en grados Fahrenheit la denotamos por $^\circ F$, mientras que su temperatura en grados centígrados la escribimos

$^{\circ}C$. La relación entre una y otra escala se puede construir sabiendo que dicha relación es de la forma $f(x) = mx + b$ y que $32^{\circ}F$ corresponden a $0^{\circ}C$ (la temperatura de congelamiento del agua), y que $212^{\circ}F$ corresponden a $100^{\circ}C$ (la temperatura de ebullición del agua al nivel del mar).

Grafiquemos los puntos que tenemos en el plano cartesiano, tomando al eje x como los grados centígrados y al eje y como los grados Fahrenheit. Tenemos lo siguiente:

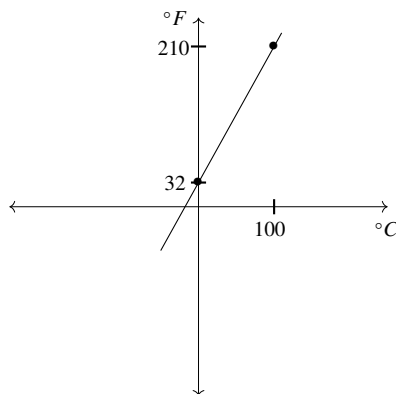


Figura 4.13: ¿Cómo convertir de $^{\circ}C$ a $^{\circ}F$?

Para encontrar la regla de correspondencia de la función cuya gráfica es la recta punteada en el dibujo de arriba, se tiene que $b = 32$ (porque es el punto en el cual la recta corta al eje y), y que $m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1.8$. Esto es, $f(c) = 1.8c + 32$, donde c representa la temperatura en grados centígrados y f representa la temperatura en grados Fahrenheit.

En los ejercicios, encontrarás la función inversa de esta; es decir, la función que transforma grados Fahrenheit en grados Centígrados. Sin embargo, adelantamos algunas cuestiones que es posible resolver gracias a este modelo:

- ¿Cuál es la temperatura común del cuerpo humano ($37^{\circ}C$), medida en grados Fahrenheit?
- Debido a que la presión atmosférica a la altura de la Ciudad de México es menor que a nivel del mar, el agua hierve a una temperatura de $92^{\circ}C$. ¿Cuál es esta temperatura en grados Fahrenheit?
- Una receta de cocina pide hornear un pastel a $355^{\circ}F$. ¿Qué temperatura es ésta en grados centígrados?

- Si la diferencia de temperatura entre dos objetos es de 1°C , ¿cuál será su diferencia de temperatura medida en grados Fahrenheit?

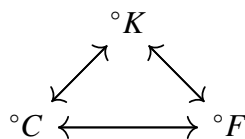
4.3.3. Ejercicios de la sección

1. Grafica la función

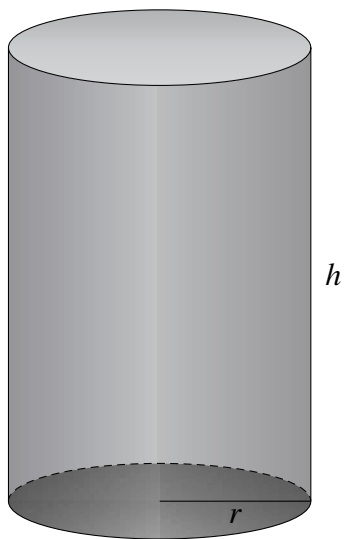
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ [x] & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Este problema se refiere al ejemplo 4.3.2. Supón que por cada kilogramo o fracción que se quiera comprar de azúcar es necesario comprar una bolsa para transportarla.
 - a) Encuentra una función que dé el costo de las bolsas a partir de la cantidad x de azúcar a comprar. Nota que esta función da saltos: si $x \leq 1$ se necesitará solo una bolsa, pero si $x > 1$, se necesitarán al menos dos bolsas. Sugerencia: La función del ejercicio anterior puede ser de utilidad.
 - b) Encuentra una función que dé el costo total (incluyendo las bolsas para transportarla) de comprar x cantidad de azúcar.
 - c) Grafica la función del inciso anterior. ¿A qué corresponden los saltos en la gráfica de esta función?
3. Cierta producto se vende a un precio de \$9 el kilogramo.
 - a) Encuentra una función que relacione la cantidad comprada x con el precio total a pagar.
 - b) Grafica esta función junto con la función $T_2(x) = 8x + 1$ del ejemplo 4.3.2.
 - c) Observa que ambas gráficas pasan por el punto $(1, 9)$. ¿Qué significa este hecho en términos de cantidades compradas y costos?
4. Responde las preguntas planteadas al final del ejemplo de las escalas de temperatura.
5. El objetivo de este ejercicio es encontrar una función de la forma $f(x) = mx + b$ que transforme la temperatura en grados Fahrenheit a temperatura en grados centígrados.
 - a) Identifica el eje x del plano cartesiano con grados Fahrenheit, y el eje y con grados centígrados.
 - b) Ya conoces dos puntos de la gráfica de la función que convierte de grados Fahrenheit a grados centígrados. ¿Cuáles son? Grafícalos y traza la recta que los une.

- c) Encuentra m y b para la función cuya gráfica es la recta de arriba.
- d) Escribe la regla de correspondencia de la función que convierte grados Fahrenheit (f) en grados centígrados (c). Así, la función deberá tener la forma $c(f) = \dots$, pues en este caso los grados centígrados *dependen* de los grados Fahrenheit.
6. Una tercera escala usada para medir temperaturas es la escala de Kelvin . El cero de esta escala corresponde a $-273.15^\circ C$ (que teóricamente corresponde a una temperatura en la que un cuerpo ya no tiene almacenada energía calorífica, nada puede estar más frío que $0 K$). Un aumento de un grado Kelvin (abreviado K) corresponde a un aumento de un grado centígrado. Encuentra funciones de la forma $f(x) = mx + b$ que transformen de grados centígrados a grados Kelvin y viceversa.
7. Con ayuda del ejercicio anterior, encuentra funciones de la forma $f(x) = mx + b$ que transformen temperaturas en grados Kelvin a temperaturas en grados Fahrenheit, y viceversa. Nota que con esto, ya tenemos una manera de convertir directamente de cualquiera de las tres escalas de temperatura a cualquier otra. En total tenemos seis funciones, que representamos en el siguiente diagrama:



8. Una pulgada equivale a 2.54 cm. Encuentra una función que transforme de centímetros a pulgadas.
9. En una tienda hay un rollo de tela de ancho 1.5 metros. Cuando un cliente quiere comprar, escoge la longitud x que desea, de modo que compra un rectángulo de x por 1.5 metros.
- a) Encuentra una función que describa el perímetro P como función del largo escogido x . Sugerencia: por simplicidad, no consideres el caso $x = 0$, de modo que el dominio de la función será $(0, \infty)$.
- b) Encuentra una función que describa la cantidad de metros cuadrados comprados de tela, en términos de x .
10. Expresa la cantidad necesaria de metal (en cm^2) necesaria para construir un cilindro con tapas como el que se muestra en la figura, en función de h , siendo r constante a lo largo del problema.



11. Considera un triángulo de base constante b y altura variable h . Expresa su área como función de h .

4.4. Ejercicios del capítulo

1. En este ejercicio mostramos que si dos rectas l y l' son paralelas, entonces tienen la misma pendiente.

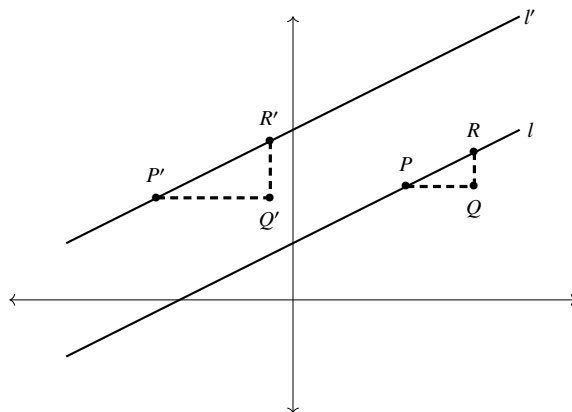


Figura 4.14: l y l' son paralelas

- a) Basándote en la ilustración 4.14, muestra que los triángulos rectángulos $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ tienen los mismos ángulos, y son por lo tanto semejantes.
- b) Concluye que $\frac{QR}{PQ} = \frac{Q'R'}{P'Q'}$, y por lo tanto las pendientes de l y l' son iguales.
2. Inversamente a lo mostrado en el ejercicio anterior, aquí se muestra que si dos rectas l y l' tienen la misma pendiente, entonces son paralelas.

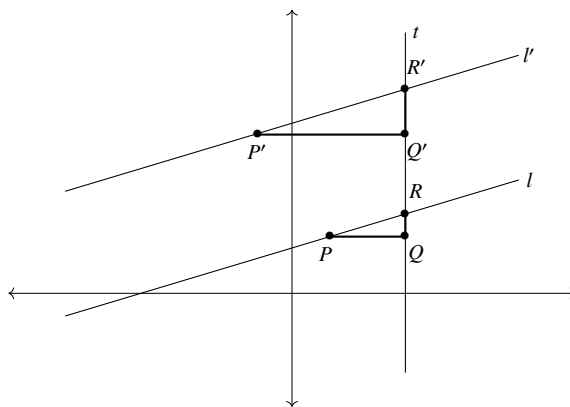


Figura 4.15: l y l' tienen la misma pendiente

- a) Sean l y l' dos rectas con la misma pendiente. Considera la recta vertical t , que corta a l y l' en R y R' , respectivamente. Considera también los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$, con segmentos horizontales PQ y $P'Q'$.
- b) Dado que l y l' tienen la misma pendiente, se tiene que $\frac{QR}{PQ} = \frac{Q'R'}{P'Q'}$.
- c) Muestra que los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ son semejantes.
- d) Concluye que $\angle PRQ = \angle P'R'Q'$, y que por lo tanto l y l' son paralelas.
3. En este ejercicio mostramos que si dos rectas son perpendiculares entre sí, entonces el producto de sus pendientes es -1 .

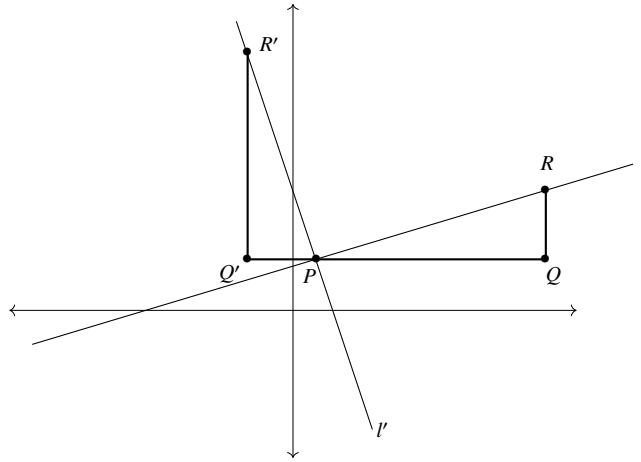


Figura 4.16: l y l' son perpendiculares

- Considera dos rectas perpendiculares l y l' de pendientes m y m' , respectivamente, y sea P su punto de intersección.
 - Considera el triángulo rectángulo $\triangle PQR$, donde el segmento horizontal PQ tiene longitud 1. ¿Cuál es la longitud de QR ?
 - Considera ahora el triángulo rectángulo $\triangle PQ'R'$, donde el segmento horizontal PQ' tiene longitud m . Explica por qué los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle PQ'R'$ son congruentes.
 - ¿Cuánto mide el segmento $R'Q'$?
 - Muestra que la pendiente de l' es $-\frac{1}{m}$.
 - Concluye que el producto de las pendientes de l y l' es -1 .
 - ¿Qué pasaría en la construcción anterior si la recta l fuera horizontal (es decir, si su pendiente fuera cero)?
- Modifica el ejercicio anterior para mostrar que si dos rectas l y l' son tales que el producto de sus pendientes es -1 , entonces l y l' son perpendiculares entre sí. Sugerencia: a grandes rasgos, se trata de invertir los pasos del ejercicio anterior.
 - En cada caso, encuentra las ecuaciones de rectas con las características pedidas:

- | | |
|---|--|
| a) Paralela a $y = 3x$ y pasa por $A = (0, -4)$. | e) Perpendicular a $y = x + 3$ y pasa por $P = (0, 3)$. |
| b) Paralela a $y = -5x + 7$ y pasa por $B = (-3, 4)$. | f) Perpendicular a $y = -x - 2$ y pasa por $Q = (7, -1)$. |
| c) Paralela a $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ y pasa por el origen. | g) Perpendicular a $y = 7 - 2x$ y pasa por $R = (1, -1)$. |
| d) Paralela a $y = -\frac{3}{7}x - \frac{1}{6}$ y pasa por $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$. | h) Perpendicular a $y = \frac{3}{8} + \frac{7}{2}x$ y pasa por $\left(1, \frac{3}{4}\right)$. |

En cálculo diferencial, uno de los conceptos más importantes es el de recta tangente a una gráfica, que es la recta que mejor se aproxima a la gráfica de una función en un punto particular. La pendiente de esta recta (es decir, su m), es la derivada de la función en el punto. De dicha cantidad y otras similares, se podrá extraer una buena cantidad de información sobre la función, como si es creciente o decreciente, o si tiene un mínimo o un máximo en algún punto de su dominio, o incluso si la gráfica se “dobla” hacia arriba o hacia abajo en ese punto. Los siguientes ejercicios exploran estas ideas.

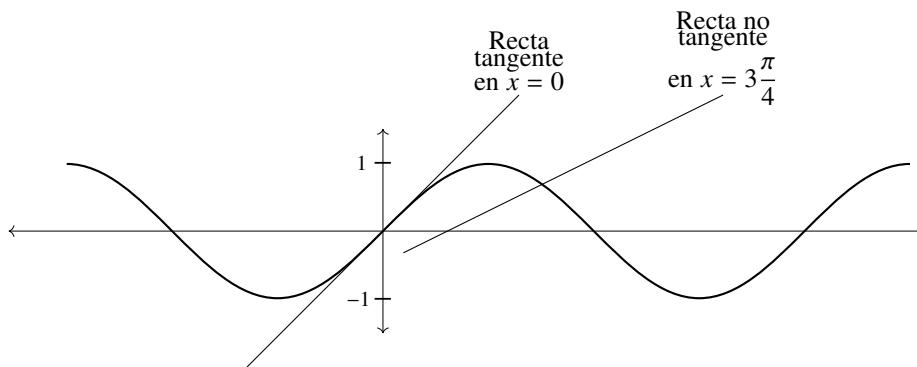


Figura 4.17: Recta tangente y recta no tangente

6. En este ejercicio se explica la idea de función derivada. Considera una función con una gráfica como la de la figura 4.17. Observa que a cada $x \in \text{Dom}(f)$ le corresponde el punto sobre la gráfica $P = (x, f(x))$. Si a este punto le asociamos la pendiente de la recta tangente a la gráfica (que pasa por P), obtenemos la función derivada de f , denotada por $f'(x)$. Contesta las siguientes preguntas basándote en la gráfica del dibujo:

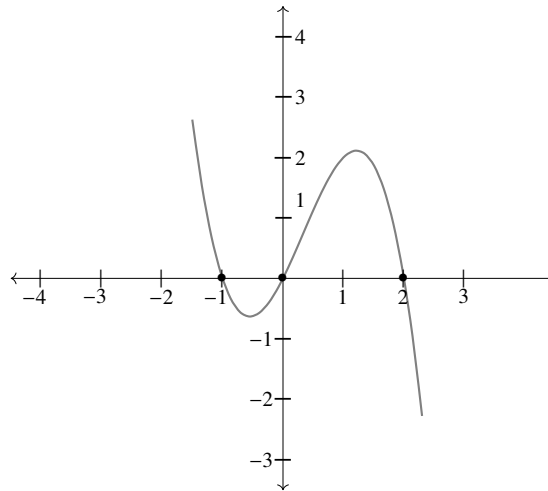


Figura 4.18: $f(x) = -x(x + 1)(x + 2)$

- a) Encuentra gráficamente dos valores de x para los cuales $f'(x) = 0$.
 - b) Señala varios valores de x (al menos tres) para los cuales $f'(x) > 0$.
 - c) Señala varios valores de x (al menos tres) para los cuales $f'(x) < 0$.
7. Considera la función $f(x) = 1/x$. Por medio de dibujar varias rectas tangentes a su gráfica, haz un esbozo de la gráfica de f' . Recuerda que f' es la función que a cada valor de x le asocia la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f .
 8. Considera la función $f(x) = mx + b$. Tomando en cuenta el hecho de que la recta tangente a una recta es ella misma, encuentra $f'(x)$. Sugerencia: recuerda que f' le asocia, a cada x , la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(x, f(x))$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a una recta dada?
 9. Hay funciones que no tienen recta tangente en todos sus puntos. El ejemplo típico de esto es la función valor absoluto: si $x = 0$, la recta que mejor se aproxima a la gráfica es $y = x$ a la derecha de 0 y $y = -x$ a la izquierda de 0. Se concluye que no hay recta tangente en $x = 0$. Otro ejemplo de función que no tiene recta tangente en todos sus puntos es la función mayor entero, $f(x) = [x]$. ¿Para qué valores de x se tiene que f no tiene recta tangente?

En general, se dice que una función es derivable en un punto x de su dominio, si su gráfica tiene recta tangente en el punto $(x, f(x))$. De acuerdo a lo visto arriba, $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$. El ejemplo es de suma importancia porque muestra que una función continua (es decir, cuya gráfica es de un solo pedazo) puede ser no derivable.

10. La función $f(x) = x^2 + 1$ tiene derivada $f'(x) = 2x$. Es decir, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$, es $2x$. Por ejemplo, si $x = 3$, se tiene que $f'(3) = 2(3) = 6$. Esto quiere decir que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 10)$, es 6.
- Grafica la función $f(x) = x^2 + 1$.
 - Encuentra la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(3, 10)$.
 - Encuentra la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(0, 1)$.
 - ¿Para qué valor de x se tiene que la recta tangente a f tiene pendiente -1 ?
 - ¿Para qué valor de x se tiene que la recta tangente a f tiene pendiente 0 ?
11. Continuamos trabajando con la función $f(x) = x^2 + 1$ y su derivada $f'(x) = 2x$.
- ¿Para qué valores de x se tiene que $f'(x) > 0$? ¿Para cuáles $f'(x) < 0$?
 - ¿En qué intervalo es f creciente? ¿En qué intervalo es decreciente?
 - Compara tus respuestas a las dos últimas preguntas. ¿Cuál podría ser una posible relación entre el signo de f' y el hecho de que f sea creciente o decreciente? ¿Va esto de acuerdo con la intuición geométrica?

Capítulo 5

Funciones seno y coseno

En este capítulo estudiaremos las funciones seno y coseno. La regla de correspondencia de estas funciones tiene un origen geométrico. En términos generales, se trata de asociarle, a cada distancia recorrida sobre un círculo de radio 1 con centro en $(0, 0)$, alguna de las coordenadas del punto resultante (la primera en el caso de $f(t) = \cos(t)$; la segunda en el caso de $g(t) = \sin(t)$), como se ilustra en el siguiente dibujo:

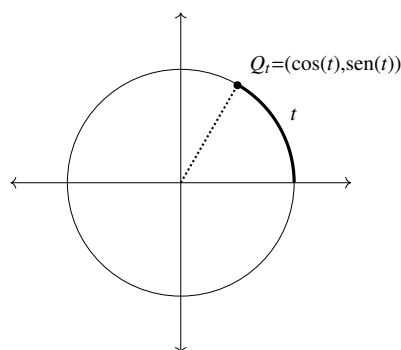


Figura 5.1: $t \mapsto Q_t$

5.1. Medidas de ángulos en radianes

Aunque en términos prácticos muchas veces se usan los grados para medir ángulos, esta unidad de medida tiene la desventaja de que la división del ángulo recto en 90 partes iguales

(o de la circunferencia completa en 360 partes iguales) es arbitraria (es decir, no hay ninguna razón matemática para preferir el número 90 sobre algún otro, como 100). Esta elección no siempre da los mejores resultados. Por eso es que comúnmente se usa otra unidad, llamada radián. Dicha unidad está basada en la razón entre el arco (el pedazo de círculo) que resulta al trazar un ángulo y el radio de dicho círculo.

Para medir un ángulo α en radianes (abreviado rad), lo consideraremos centrado en un círculo de radio r , como se ilustra en la imagen:

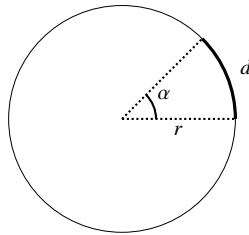
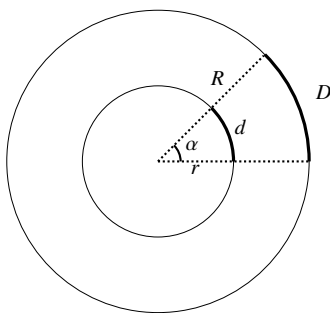


Figura 5.2: α mide $\frac{d}{r}$ radianes

Por definición, el ángulo α medirá $\frac{d}{r}$ radianes, donde d es la longitud del segmento de círculo que queda comprendido dentro del ángulo α (un poco más formalmente, se dice que d es la longitud del arco subtendido por α).

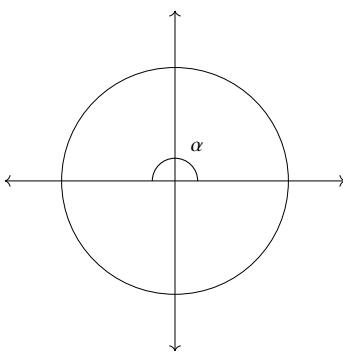
A partir de la definición, uno podría pensar que la medida del ángulo α en radianes depende del radio del círculo en el que se considere al ángulo α . Sin embargo, esto no es así, puesto que la longitud del arco definido por α varía proporcionalmente con el radio, de tal manera que el cociente $\frac{d}{r}$ es siempre el mismo sin importar quién sea r . En los círculos del dibujo de abajo, se tiene que $\frac{D}{R} = \frac{d}{r}$.

Figura 5.3: $\frac{D}{R} = \frac{d}{r}$

Veamos algunos casos concretos:

Ejemplo 1

Sea α el ángulo que corresponde a la mitad de la circunferencia; es decir, α es el ángulo que mide 180° .

Figura 5.4: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

Para responder a la pregunta de cuál es la medida de α en radianes, es necesario calcular la longitud del arco subtendido por α y dividir dicha cantidad entre r . Dado que el perímetro del círculo completo mide $2\pi r$, se tiene que el arco tiene una longitud de πr . De esta forma, α mide $\frac{\pi r}{r} = \pi$ radianes.

Ejemplo 2

Sea β un ángulo recto. En grados, β mide 90° . Es un ejercicio para el lector hacer el dibujo correspondiente, y mostrar que en este caso el arco subtendido por β tiene una longitud de $\frac{\pi r}{2}$, de modo que β mide $\frac{\pi r}{2} \div r = \frac{\pi}{2}$ radianes.

Basándose en estos dos ejemplos, el lector puede calcular la medida en radianes de ángulos que midan 360° , 60° , 45° , 30° , y algunos otros. Ver ejercicios (3) y (4).

Partiendo de cualquiera de estos ángulos para los que se conocen su medida tanto en grados como en radianes, es posible encontrar la equivalencia entre estas dos unidades. Basémonos, para fijar ideas, en el hecho de que

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad.} \quad (5.1)$$

Dividiendo esta igualdad entre 360 en ambos lados, tenemos que

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Si, por el contrario, dividimos la igualdad (5.1) entre 2π , obtenemos

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Numéricamente, $\frac{180}{\pi} \approx 57.29577\dots$, lo que significa que un radián mide aproximadamente $57.29577\dots$ grados, mientras que $\frac{\pi}{180} = 0.0174\dots$ lo que muestra que 1° mide aproximadamente 0.0174 radianes. Aunque estas igualdades no serán de (mucho) utilidad práctica, las incluimos aquí porque son preguntas que surgen comúnmente entre los estudiantes.

5.1.1. Ángulos positivos y negativos

En la sección siguiente será necesario medir ángulos tanto positivos como negativos; también, será indispensable que a cada número real —por grande que sea— le corresponda un ángulo. Estas generalizaciones las desarrollamos aquí. Su principal consecuencia es que el dominio de las funciones seno y coseno sea \mathbb{R} .

Vimos arriba que la medida de un ángulo (en radianes) no dependía del radio del círculo auxiliar que se considerara, así que podemos usar $r = 1$, lo que simplifica un poco algunas operaciones. Con esto en mente, se tiene que la longitud del arco subtendido por un ángulo (en un círculo de radio $r = 1$ y centro C) coincide con su medida en radianes, ya que el cociente $\frac{d}{r} = \frac{d}{1} = d$. Ahora bien, si se fija un punto P sobre el círculo, a cada longitud d se le puede asociar el punto Q (que depende de d) sobre el círculo, y que resulta de recorrer el perímetro del círculo una distancia d . Por un acuerdo entre matemáticos, dicho recorrido se hará en la dirección contraria a las manecillas del reloj si $d > 0$, y en la dirección de las manecillas del reloj si $d < 0$.

Estas ideas se ilustran en el siguiente dibujo:

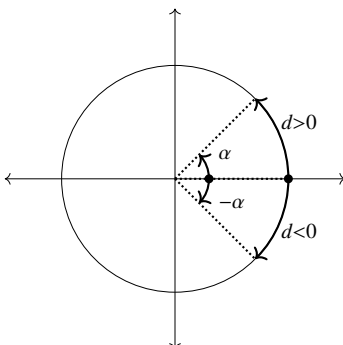


Figura 5.5: Ángulos positivos y negativos

Se tiene que para $d > 2\pi$ (o $d < -2\pi$), se recorrerá más de una vez completa el perímetro del círculo. Esto no cambia en nada el hecho básico de que a cada $d \in \mathbb{R}$ se le esté asociando un ángulo. Esta última observación sólo muestra que distintos números d tendrán asociados el mismo ángulo (esto es, en nuestro lenguaje, que la función definida entre números reales y ángulos no es inyectiva). Por ejemplo, los números $d_1 = 0$ y $d_2 = 2\pi$ tienen asociado el mismo ángulo; de la misma manera, $p_1 = \frac{\pi}{2}$ y $p_2 = 5\frac{\pi}{2}$ también tienen asociado el mismo ángulo. También se da el caso en el que un número positivo y otro negativo tengan asociado el mismo punto Q , y por lo tanto determinen el mismo ángulo con centro en C : $q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = -\frac{3\pi}{2}$. En la sección de ejercicios se pide al lector que compruebe estas afirmaciones.

5.1.2. Ejercicios de la sección

1. Para completar el ejemplo 2, muestra que el arco subtendido por un ángulo recto en una circunferencia de radio r , mide $\frac{\pi r}{2}$; de modo que, en radianes, el ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$.
2. Calcula la medida en radianes de un ángulo que mida 15° .
3. Basándote en el ejercicio anterior, encuentra la medida en radianes de un ángulo que mida un múltiplo entero de 15° (es decir, $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, \dots, 330^\circ, 345^\circ, 360^\circ$).
4. Los ángulos del ejercicio anterior no son los únicos cuya medida en radianes es un múltiplo racional de π . Calcula la medida en radianes de un ángulo de 72° para verificar la afirmación anterior.

5. a) Verifica que los números reales $d_1 = 0$ y $d_2 = 2\pi$ determinan el mismo punto Q sobre el círculo de radio 1 (y por lo tanto determinan también el mismo ángulo).
- b) Haz lo mismo que en el ejercicio anterior para las parejas de puntos $p_1 = \frac{\pi}{2}, p_2 = 5\frac{\pi}{2}$ y $q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = -3\frac{\pi}{2}$.
- c) Encuentra otras tres parejas de números reales que determinen el mismo punto Q sobre el círculo de radio 1.
6. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que ambos determinan el mismo punto Q sobre el círculo de acuerdo a la construcción de la sección 5.1.1. ¿Qué se puede decir del número $p - q$? Más específicamente, ¿qué se puede decir del cociente $\frac{p - q}{2\pi}$?
7. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un triángulo, medidos en radianes?
8. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un polígono (regular) de n lados?

5.2. Funciones seno y coseno

Esta es la sección central del capítulo, y en ella se definen las funciones que le dan nombre. Es posible que el estudiante conozca ya estas funciones para ángulos comprendidos en el intervalo $(0, 90)$ (en grados). En todo caso, debe tener presente que las que aquí trabajamos, son generalizaciones de aquéllas para que su dominio sea todo \mathbb{R} . La unidad de medida de los ángulos siempre será, a menos que se diga lo contrario, el radián.

Dado que en mucho de lo que haremos el círculo de radio 1 y centro en $C = (0, 0)$ jugará un papel importante, la siguiente definición resulta útil:

Definición 23. El círculo unitario es el círculo de radio 1 con centro en $C = (0, 0)$.

Si $Q = (x, y)$ es un punto del círculo unitario, se puede construir el triángulo rectángulo con vértices en $Q, C = (0, 0)$ y $R = (x, 0)$, como se ilustra en el siguiente dibujo.

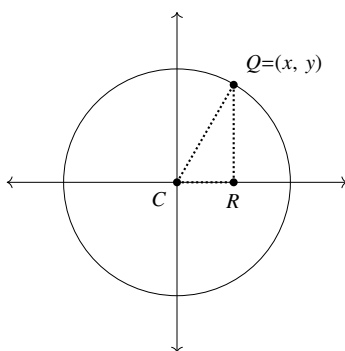


Figura 5.6: Círculo unitario

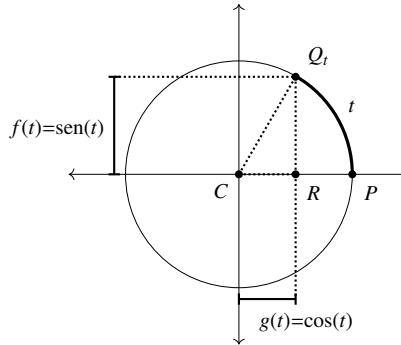
Observa que los catetos del $\triangle QCR$ tienen longitudes $|x|$ y $|y|$. Nota que los valores absolutos son necesarios para que estas longitudes sean positivas, sin importar en qué cuadrante se halle Q . De acuerdo con el teorema de Pitágoras, se tiene que $|x|^2 + |y|^2 = 1^2$; es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Resumimos esto en la siguiente

Observación 4. Si $Q = (x, y)$ es un punto sobre el círculo unitario, se tiene que $x^2 + y^2 = 1$.

Dado un número real t , sea Q_t el punto que resulta de recorrer t unidades sobre el perímetro del círculo unitario a partir del punto $P = (1, 0)$. De acuerdo a la convención de la sección 5.1.1, si $t > 0$, recorremos el perímetro en la dirección contraria a las manecillas del reloj, y si $t < 0$ recorremos el perímetro en la dirección de las manecillas del reloj.

Definición 24. 1. La función seno, denotada por $f(t) = \text{sen}(t)$, asocia a cada número real t la segunda coordenada del punto Q_t de la construcción del párrafo anterior.

2. La función coseno, denotada por $g(t) = \text{cos}(t)$, asocia a cada número real t la primera coordenada del punto Q_t de la construcción del párrafo anterior.

Figura 5.7: Definiciones de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$

5.2.1. Dominio y rango de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$

Dado que la construcción de arriba es posible para cualquier $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$, y también que $\text{Dom}(\text{cos}) = \mathbb{R}$.

Para encontrar el rango de estas funciones, observa que las coordenadas del punto $Q_t = (x, y)$ siempre cumplen $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. De hecho, dado un valor $y \in [-1, 1]$ existe al menos un punto sobre el círculo unitario cuya segunda coordenada es y ; de aquí, que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que Q_t tiene por segunda coordenada a la y dada. Esto muestra que $\text{Ran}(\text{sen}) = [-1, 1]$. Un análisis similar para $x \in [-1, 1]$ muestra que $\text{Ran}(\text{cos}) = [-1, 1]$.

5.2.2. Comparación de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ con la definición mediante triángulos rectángulos

Probablemente el estudiante está familiarizado con otras definiciones de las funciones sen y cos , que involucraban el cociente de algún cateto con la hipotenusa. Las recordamos brevemente aquí para luego poder ver que, bajo ciertas restricciones sobre el ángulo, coinciden con las que se dan aquí.

Definición 25. Dado un ángulo α y un $\triangle CRQ$ rectángulo que tenga a α como uno de sus ángulos agudos, definimos

$$\text{sen}_{\text{trad}}(\alpha) = \frac{RQ}{CQ}$$

$$\text{cos}_{\text{trad}}(\alpha) = \frac{CR}{CQ}.$$

Los subíndices trad significan que éstas son las definiciones tradicionales, en oposición a las definiciones basadas en el círculo unitario que dimos en la definición (24).

Es un ejercicio de semejanza de triángulos mostrar que estas definiciones no dependen en realidad de $\triangle CRQ$, sino solamente del ángulo t .

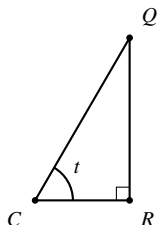


Figura 5.8: Triángulo rectángulo con ángulo t

De acuerdo a esta definición, para poder calcular $\text{sen}_{\text{trad}}(t)$ o $\text{cos}_{\text{trad}}(t)$ es necesario que $0 < t < \pi/2$, ya que en otro caso no es posible construir el $\triangle CRQ$ de manera que t sea uno de sus ángulos agudos. Esto muestra que $\text{Dom}(\text{sen}_{\text{trad}}(t)) = (0, \pi/2)$, y que $\text{Dom}(\text{cos}_{\text{trad}}(t)) = (0, \pi/2)$. Este hecho muestra que, como funciones, $\text{sen}(t) \neq \text{sen}_{\text{trad}}(t)$ y $\text{cos}(t) \neq \text{cos}_{\text{trad}}(t)$, pues para que dos funciones sean iguales se necesita (entre otras cosas) igualdad entre sus dominios.

Sin embargo, para $0 < t < \pi/2$, y tomando $\triangle CRQ$ con hipotenusa de longitud 1 (es decir, haciendo $CQ = 1$) y C como el origen del plano cartesiano (ver figura 5.7), se tiene que

$$\text{sen}_{\text{trad}}(t) = \frac{QR}{CQ} = \frac{QR}{1} = \text{sen}(t).$$

Para coseno tenemos una igualdad similar:

$$\text{cos}_{\text{trad}}(t) = \frac{CR}{CQ} = \frac{CR}{1} = \text{cos}(t).$$

Es decir, aunque las funciones $\text{sen}(t)$ y $\text{sen}_{\text{trad}}(t)$ no son iguales, sí coinciden en el intervalo $t \in (0, \pi/2)$. Lo mismo se puede decir para las funciones $\text{cos}(t)$ y $\text{cos}_{\text{trad}}(t)$.

5.2.3. Evaluación de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para algunos valores de t

Es posible calcular algunos valores de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$, en algunos casos mediante la equivalencia vista en la sección 5.2.2. Aquí haremos dichas construcciones y las generalizaremos

para valores de t en los intervalos $[0, 2\pi]$ y $[-2\pi, 0]$.

Cuando t es un múltiplo entero de $\pi/2$ (es decir, cuando $t = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \dots$), los puntos Q_t tienen coordenadas particularmente sencillas, porque coinciden con la intersección del círculo unitario con los ejes coordenados. En la ilustración se muestran algunos de ellos.

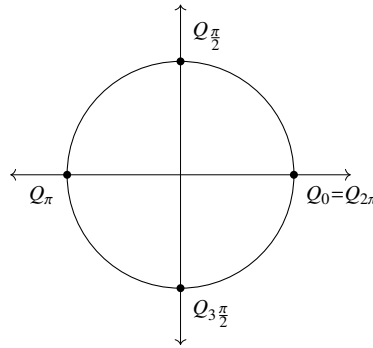


Figura 5.9: Q_t para $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$

Basándonos en estos puntos Q_t , podemos realizar las evaluaciones de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para los valores de t que son múltiplos enteros de $\pi/2$.

Casos $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Si $t = 0$, se tiene que $Q_0 = (1, 0)$, de manera que $\text{sen}(0) = 0$ y $\text{cos}(0) = 1$.

Si $t = \pi/2$, se tiene que $Q_{\pi/2} = (0, 1)$ y así $\text{sen}(\pi/2) = 1$ y $\text{cos}(\pi/2) = 0$.

Si $t = \pi$, se tiene que $Q_{\pi} = (-1, 0)$, y por lo tanto $\text{sen}(\pi) = 0$ y $\text{cos}(\pi) = -1$.

Si $t = 3\pi/2$, se tiene que $Q_{3\pi/2} = (0, -1)$, y por lo tanto $\text{sen}(3\pi/2) = -1$ y $\text{cos}(3\pi/2) = 0$.

En los ejercicios el lector calculará $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para algunos otros múltiplos enteros de $t = \pi/2$.

Caso $t = \frac{\pi}{3}$

Para calcular $\text{sen}(\pi/3)$ y $\text{cos}(\pi/3)$, será necesario tener presente la equivalencia vista en 5.2.2.

Dado que en un triángulo equilátero los tres ángulos internos miden lo mismo, y que la suma de los tres es π radianes, se tiene que cada uno de ellos mide $\pi/3$. Sea, entonces, el $\triangle ABC$ un triángulo equilátero de lado 1. Así, $\angle ABC$ mide $\pi/3$. Si dividimos $\triangle ABC$ mediante la mediana que pasa por A (o la bisectriz de $\angle CAB$, o la mediatriz de BC (todas estas rectas son iguales dado que $\triangle ABC$ es equilátero)), obtenemos un triángulo rectángulo $\triangle ABD$, donde $\angle ABD = \angle ABC$. Por ser D el punto medio de BC , se tiene que el segmento BD mide $1/2$, mientras que, según el teorema de Pitágoras, AD mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Esta situación se resume en el siguiente dibujo:

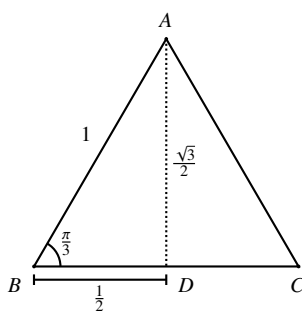


Figura 5.10: $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A partir de esto, se observa que

$$\text{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{cos}(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

Para este cálculo, usamos fuertemente que $\text{sen}_{\text{trad}}(t) = \text{sen}(t)$ para $0 < t < \pi/2$. De hecho, lo que calculamos fue $\text{sen}_{\text{trad}}(\pi/3)$, que por la identidad anterior sabemos que es $\text{sen}(\pi/3)$. Usando ahora la definición de $\text{sen}(t)$ basada en el círculo unitario, calcularemos $\text{sen}(t)$ para los múltiplos enteros de $\pi/3$. Los puntos Q_t sobre el círculo unitario para $t = 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$, que serán necesarios para hacer estos cálculos, se muestran en el siguiente dibujo.

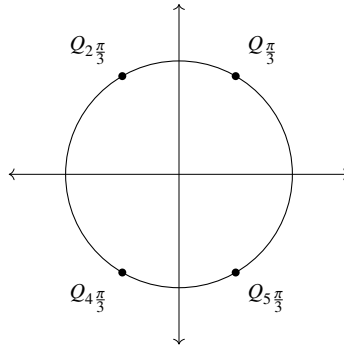


Figura 5.11: $Q_{n\pi/3}$ para $n = 1, 2, 4, 5$

Observa que los puntos $Q_{2\pi/3}$ y $Q_{\pi/3}$ son simétricos con respecto al eje y . Esto nos dice que $Q_{2\pi/3} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, y por lo tanto

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Un razonamiento similar permite mostrar que $Q_{4\pi/3} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q_{5\pi/3} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, de donde se concluye que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{cos}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

y

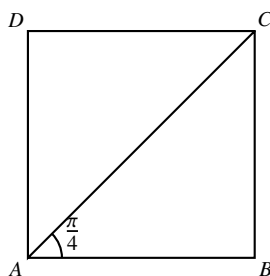
$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{cos}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

En los ejercicios, se pide al lector que use el otro ángulo agudo del $\triangle ABD$ de la figura 5.10 para calcular

$$\operatorname{sen}(\pi/6) \text{ y } \operatorname{cos}(\pi/6).$$

$$t = \pi/4$$

Calculemos, por último, $\operatorname{sen}(\pi/4)$ y $\operatorname{cos}(\pi/4)$. Para hacer esto, partimos de un cuadrado de lado 1 dividido por su diagonal.

Figura 5.12: $AC = \sqrt{2}$

Se observa del dibujo que $\angle CAB$ mide $\pi/4$ radianes y, por el teorema de Pitágoras, se tiene que la hipotenusa AC mide $\sqrt{2}$. De aquí que $\text{sen}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ y $\text{cos}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

Procediendo como en el caso de $t = \pi/3$, se puede calcular $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para múltiplos enteros de $\pi/4$; es decir, para $t = \pm\pi/4, \pm\pi/2, \pm3\pi/4, \pm\pi, \dots$. Observa que ya habíamos evaluado nuestras funciones para algunos de estos puntos (de hecho, para los múltiplos enteros de π).

5.2.4. La periodicidad de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$

En esta subsección estudiaremos la periodicidad, que es una propiedad interesante de las funciones $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$, misma que nos permitirá evaluarlas en puntos t fuera del intervalo $[0, 2\pi]$, y por lo tanto graficarlas. Otras funciones trigonométricas, que aparecerán en capítulos posteriores, también tienen esta propiedad.

Recordemos que Q_t es el punto sobre el círculo unitario que se obtiene después de recorrer una distancia t a partir del punto $(1, 0)$. La clave del asunto es que $Q_0 = Q_{2\pi}$. En general, $Q_t = Q_{t+2\pi}$, dado que, 2π unidades recorriendo el perímetro del círculo unitario equivalen a una vuelta completa. De aquí que $\text{sen}(t) = \text{sen}(t+2\pi)$. De manera similar, $\text{cos}(t) = \text{cos}(t+2\pi)$.

Observa también que 2π es el número positivo más pequeño con esta propiedad: cualquier otro $t < 2\pi$ no alcanzaría a dar una vuelta completa al círculo. Sin embargo, hay otros números k con la propiedad de que $Q_t = Q_{t+k}$ (y por lo tanto $\text{sen}(t) = \text{sen}(t+k)$, $\text{cos}(t) = \text{cos}(t+k)$). Dichos k corresponden a dar un número entero de vueltas al círculo unitario. Es un ejercicio para el lector encontrar estos otros valores de k .

La siguiente definición permite nombrar esta propiedad tan útil de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$:

Definición 26. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es una función *periódica* si existe $c > 0$ tal que

$$f(x) = f(x + c) \quad (5.2)$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Al número c más pequeño que hace cierta la ecuación 5.2 se le llama *periodo* de f .

El párrafo previo a la definición muestra que $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ son funciones periódicas de periodo 2π .

Para conocer la gráfica de una función periódica f , bastará estudiarla en un intervalo de longitud c , donde c es el periodo de la función. Esto es una consecuencia de que $f(t+c) = f(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. En términos de la gráfica, lo que esta igualdad dice es que la gráfica se repite cada intervalo de longitud c , como muestra el dibujo.

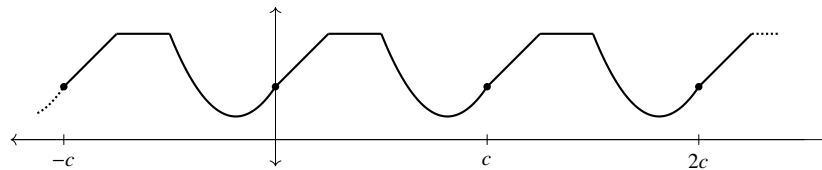


Figura 5.13: Función de periodo c

De todo esto se concluye que bastará conocer la gráfica de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$ para conocerla para todo $t \in \mathbb{R}$.

5.2.5. La identidad $\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$

Cuando se tiene una ecuación, hay valores de las variables que hacen cierta la igualdad y valores que la hacen falsa. Por ejemplo, en la ecuación $3 + x = 5$, el valor de $x = 2$ hace cierta la igualdad (porque $3 + 2 = 5$), mientras que cualquier otro valor para x hará que la igualdad sea falsa. Hay ecuaciones para las cuáles más de un valor de la incógnita hace verdadera la igualdad: $(x + 1)^2 = 9$ tiene dos soluciones, al igual que $|x - 1| = 10$ (¿cuáles son dichas soluciones?). Existen ecuaciones que resultan verdaderas para cualquier valor que se le dé a la variable (o variables, si hay más de una). Dichas ecuaciones reciben el nombre de *identidades*.

Un ejemplo de identidad es $2 + 2 = 4$ (que además parece ser la favorita de la gente para ejemplificar un hecho obvio). Aquí no hay variables involucradas. Ejemplos de identidades

con variables son:

$$\begin{aligned}t^2 &= tt, \\x + 3 &= 3 + x, \\2x &= -5x + 7x.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Un ejemplo de identidad que involucra dos variables es la conocida fórmula para desarrollar el binomio al cuadrado:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

El hecho de que esta igualdad sea independiente de los valores de a y b (y la frecuencia con que aparece) es lo que hace tan útil esta expresión.

Las identidades trigonométricas (es decir, aquellas identidades que involucran funciones trigonométricas) son muy útiles, entre otras cosas porque permiten calcular valores de seno y coseno que de otra forma requerirían métodos mucho más sofisticados. A continuación se deduce la más común de ellas.

Recordemos la observación (4), que dice que para cualquier t , el punto $Q_t = (x, y)$ sobre el círculo unitario satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Por otro lado, sabemos que las coordenadas de Q_t son precisamente $(\cos(t), \sin(t))$, de modo que se tiene

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1\tag{5.4}$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Manipulando algebraicamente la ecuación (5.4) se ve que las igualdades

$$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t),$$

$$\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$$

también son ciertas para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Estas identidades son muy útiles cuando se conoce alguno de los valores $\sin(t)$ o $\cos(t)$ y se desea conocer el otro.

Veamos un ejemplo. Sabiendo que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y usando la identidad $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ para $t = \frac{\pi}{3}$, se tiene que $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

En resumen, tenemos que $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, de modo que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ es $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. Para determinar su signo, basta con ver que $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, de modo que $Q_{\frac{\pi}{3}}$ está en el primer cuadrante y por lo tanto $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$. Así, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

5.2.6. Ejercicios de la sección

- Calcula $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para los siguientes valores de t . Puede resultar útil usar la periodicidad de estas funciones.
 - $t = -\pi/2, -\pi, -3\pi/2, -2\pi$.
 - $t = 13\pi/2, -9\pi/2, \pm 123\pi/2$.
 - $t = -17\pi/3, 54\pi/3, 47\pi/4, -315\pi/4$.
- ¿Cuánto vale $\text{sen}(t)$ para $t = n\pi/2$, donde $n \in \mathbb{N}$ es par?
 - ¿Qué dos valores puede tomar $\text{sen}(t)$ para $t = m\pi/2$, donde $m \in \mathbb{N}$ es impar?
 - ¿De qué depende cuál de estos dos valores tome $\text{sen}(t)$? Es decir, ¿para qué valores de m se obtiene uno de los dos posibles valores de $\text{sen}(t)$ y para cuáles el otro?
 - Plantea y responde preguntas análogas a las anteriores para $\text{cos}(t)$.
- Usando un triángulo equilátero de lado 1 y un razonamiento similar al usado para el cálculo de $\text{sen}(\frac{\pi}{3})$ y $\text{cos}(\frac{\pi}{3})$, calcula $\text{sen}(\frac{\pi}{6})$ y $\text{cos}(\frac{\pi}{6})$.
- Usando un razonamiento semejante expuesto para el caso $t = \pi/3$, encuentra los valores de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para $t = 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.
- Completa la siguiente tabla con los valores que hemos encontrado hasta el momento para $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$.

t	$\text{sen}(t)$	$\text{cos}(t)$
0		
$\pi/4$		
$\pi/3$		
$\pi/2$		
$2\pi/3$		
$3\pi/4$		
π		

t	$\text{sen}(t)$	$\text{cos}(t)$
$5\pi/4$		
$4\pi/3$		
$3\pi/2$		
$5\pi/3$		
$7\pi/4$		
2π		

- ¿Cuáles son los valores de k (distintos a 2π) para los cuales $\text{sen}(t) = \text{sen}(t + k)$, para toda $t \in \mathbb{R}$?
- Verifica que las ecuaciones de 5.3 son identidades.

8. Otras identidades trigonométricas que involucran a $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ son:

$$\text{sen}^2(t) = \frac{1 - \text{cos}(2t)}{2}, \quad (5.5)$$

$$\text{sen}(2t) = 2 \text{cos}(t) \text{sen}(t)$$

que se conocen como *identidades del ángulo doble*. La deducción de estas fórmulas está fuera de nuestro alcance (por el momento), pero las podemos usar para calcular valores de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ para t distintas a las ya vistas.

- a) Usa la primera fórmula para calcular $\text{sen}^2(\pi/8)$. Usando el círculo unitario para determinar el signo de $\text{sen}(\pi/8)$, determina su valor.
- b) Usa la segunda fórmula (y el inciso anterior) para calcular $\text{cos}(\pi/8)$.
- c) Encuentra otra $t \in [0, \pi]$ para el que sea posible calcular $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ usando un razonamiento similar al de los incisos anteriores.
- d) ¿Cuántas de estas t es posible encontrar?

5.3. Análisis de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$

En esta última sección del capítulo, y con ayuda del trabajo previo, construimos las gráficas de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$. También estudiaremos algunas de las modificaciones más comunes a dichas funciones, y su influencia en las gráficas correspondientes.

5.3.1. Gráficas de $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$

Con toda la información que hemos reunido en la sección anterior sobre $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ es posible darnos una idea bastante buena de cómo son sus gráficas. Sólo elaboraremos la gráfica de $\text{sen}(t)$, dejando la gráfica de $\text{cos}(t)$ como un ejercicio (imprescindible) para el lector.

A partir de la tabla hecha en el ejercicio 5 de la sección 5.2.6, podemos encontrar los siguientes puntos en la gráfica de $\text{sen}(t)$.

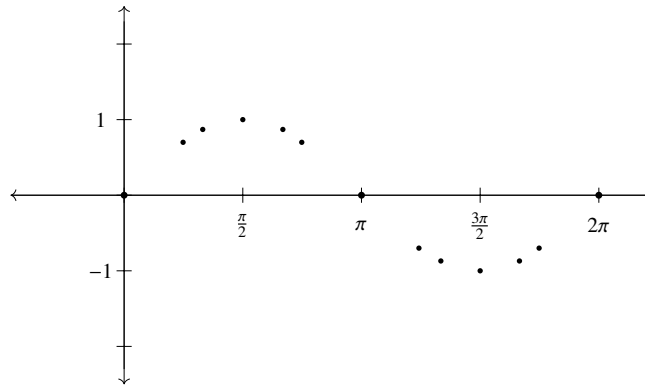


Figura 5.14: Puntos conocidos de la gráfica de $f(x) = \text{sen}(x)$

De aquí se concluye que la gráfica de $\text{sen}(t)$ es como sigue, para $t \in [0, 2\pi]$.

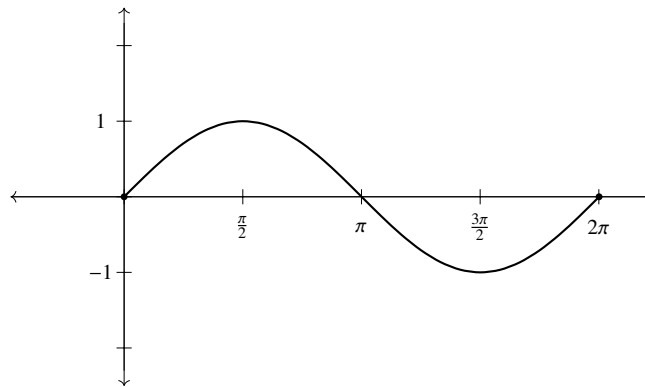
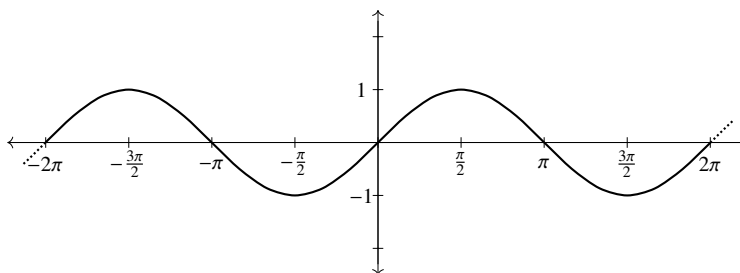


Figura 5.15: Gráfica de $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x \in [0, 2\pi]$

Gracias a la periodicidad de $f(x) = \text{sen}(x)$ (estudiada en la sección 5.2.4), se tiene que la gráfica completa de $\text{sen}(t)$ consiste simplemente de repeticiones a izquierda y derecha de la gráfica para $t \in [0, 2\pi]$.

Figura 5.16: Gráfica de $f(x) = \text{sen}(x)$

5.3.2. $f(x) = a \text{sen}(bx + h) + k$

Si recordamos lo visto en la sección 2.3, sabemos que la función $g(x) = f(x - h) + k$ es una traslación de la gráfica de $f(x)$. Dicha traslación consiste de un desplazamiento horizontal de $|h|$ unidades (a la derecha si $h > 0$ y a la izquierda si $h < 0$) y un desplazamiento vertical de $|k|$ unidades (hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$).

Con la notación del párrafo anterior, si hacemos $f(x) = \text{sen}(x)$, tenemos que $g(x) = \text{sen}(x - h) + k$ es una traslación de la gráfica de $f(x) = \text{sen}(x)$ con las características descritas arriba. Estas no son las únicas formas de modificar una función. En esta subsección estudiamos otras de ellas, representadas por la función $g(x) = a \text{sen}(bx)$, donde a y b son constantes positivas.

Veamos primero qué pasa al modificar el valor de a , y haciendo por lo pronto $b = 1$, de manera que trabajaremos con la función $g_a(x) = a \text{sen}(x)$. Observa la a que aparece como subíndice de g . Dicha letra indica que la función g_a cambia conforme cambia el valor de a ; es decir, para cada a tenemos una función g_a diferente. Aquí buscamos esclarecer cómo va cambiando la gráfica de g_a al cambiar a . En un primer momento, observa que para $a = 1$, tenemos que $g_1(x) = \text{sen}(x)$. Es decir, g_1 es la función $f(x) = \text{sen}(x)$, cuya gráfica ya conocemos.

Consideremos ahora los casos $a = 2$ y $a = 3$, que dan lugar, respectivamente, a las funciones $g_2(x) = 2 \text{sen}(x)$ y $g_3(x) = 3 \text{sen}(x)$. Dado que ya se conocen los valores de $g_1(x) = \text{sen}(x)$, es

un ejercicio sencillo completar la siguiente tabla para los valores de g_2 y g_3 .

x	$\text{sen}(x)$	$2 \text{sen}(x)$	$3 \text{sen}(x)$	x	$\text{sen}(x)$	$2 \text{sen}(x)$	$3 \text{sen}(x)$
0				$5\pi/4$			
$\pi/4$				$4\pi/3$			
$\pi/3$				$3\pi/2$			
$\pi/2$				$5\pi/3$			
$2\pi/3$				$7\pi/4$			
$3\pi/4$				2π			
π							

Al hacer las gráficas correspondientes a g_1 , g_2 y g_3 , se obtiene lo siguiente:

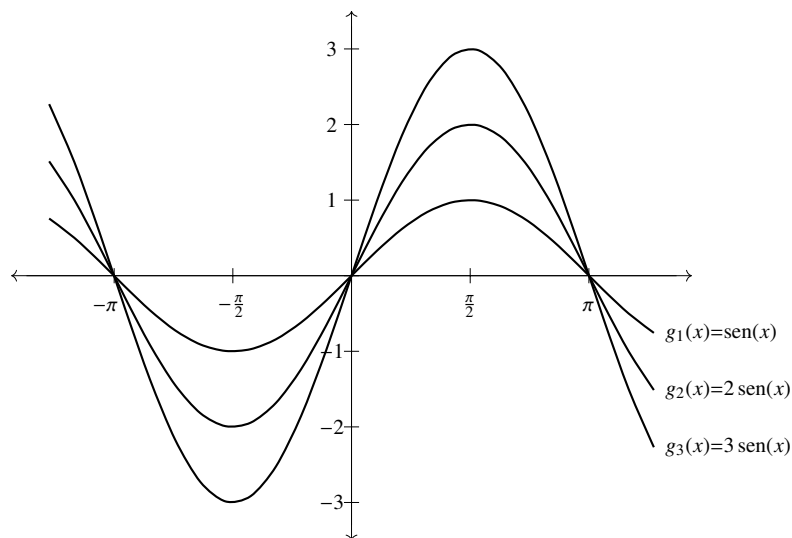


Figura 5.17: Gráfica de $g_a(x) = a \text{sen}(x)$, para $a = 1, 2, 3$

Observa que la altura máxima de la gráfica de g_2 es 2, mientras que la de g_3 es 3. Algo similar sucede con las alturas mínimas: la de g_2 es -2 , y la de g_3 es -3 . Con respecto a los rangos, se tiene lo siguiente: $\text{Ran}(g_1) = [-1, 1]$, $\text{Ran}(g_2) = [-2, 2]$, $\text{Ran}(g_3) = [-3, 3]$.

La generalización que extraemos de aquí es que la altura máxima de g_a es a , mientras que la mínima es $-a$, y $\text{Ran}(g_a) = [-a, a]$. De hecho, nos es posible encontrar puntos $x, y \in \mathbb{R}$ para los cuales $g(x) = -a$ y $g(y) = a$. Para encontrarlos, nos bastará encontrar puntos x, y para los cuales $\text{sen}(x) = -1$ y $\text{sen}(y) = 1$. Así, podemos hacer $x = -\pi/2, 3\pi/2, \dots$ y $y = \pi/2, 5\pi/2, \dots$

La verificación de esto consiste simplemente en evaluar:

$$\begin{aligned} g(-\pi/2) &= a \sin(-\pi/2) & g(\pi/2) &= a \sin(\pi/2) \\ &= a(-1) & &= a(1) \\ &= -a & &= a. \end{aligned}$$

Con todos estos argumentos, esperamos haber convencido al lector de que la gráfica de $g_a(x) = a \sin(x)$ es como sigue:

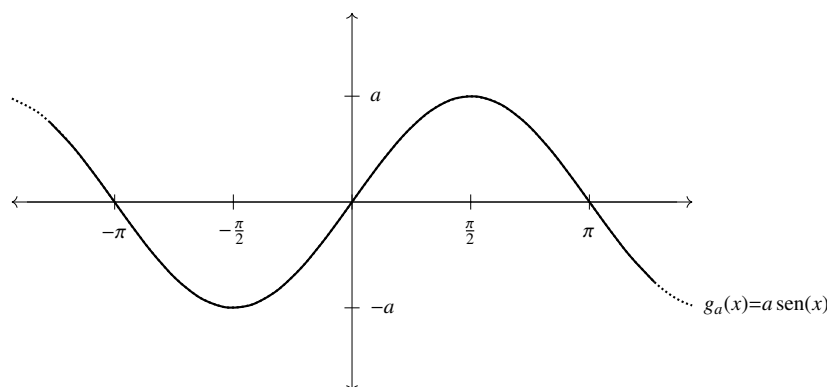


Figura 5.18: Gráfica de $g_a(x) = a \sin(x)$

En varias aplicaciones, donde la función $f(x) = a \sin(x)$ modela ondas, el número a recibe el nombre de *amplitud*.

Analicemos ahora las funciones del tipo $h_b(x) = \sin(bx)$. Antes que nada, notemos la diferencia entre h_b y g_a , ilustrada en los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{cc} h_b(x) & g_a(x) \\ x \mapsto bx \mapsto \sin(bx) & x \mapsto \sin(x) \mapsto a \sin(x) \end{array}$$

En palabras, h_b primero multiplica a x por b , y al resultado de esta operación le aplica la función seno. La función g_a hace las cosas en el otro orden posible: primero calcula $\sin(x)$ y a este número lo multiplica por a . La diferencia de este cambio en el orden de hacer las cosas, como veremos, no es pequeña.

Al igual que antes, estudiaremos la manera en que b afecta a la función h_b (y su gráfica) dándole varios valores a b y comparando sus gráficas. El caso más simple se da cuando $b = 1$, pues en ese caso $h_1(t) = \sin(t)$. Veamos qué pasa cuando $b = 2$. En este caso, $h_2(t) = \sin(2t)$.

Podríamos analizar la gráfica de h_2 por medio de una tabulación, como hicimos antes para estudiar las funciones g_a ; sin embargo, aquí intentaremos otro enfoque. Notemos que la expresión $2t$ recorre la recta real al doble de velocidad que la expresión t . Es decir, si t recorre el intervalo $[0, \pi]$, entonces $2t$ recorrerá el intervalo $[0, 2\pi]$. Pensados como ángulos, el punto Q_{2t} recorrerá una vuelta completa sobre el círculo unitario por cada media vuelta del punto Q_t . ¿Qué significa esto en términos de las gráficas? Que por cada ciclo completo de $f(x) = \text{sen}(x)$, se tienen *dos* ciclos completos de $h_2(x) = \text{sen}(2x)$. De aquí se sigue que la gráfica de h_2 es como sigue:

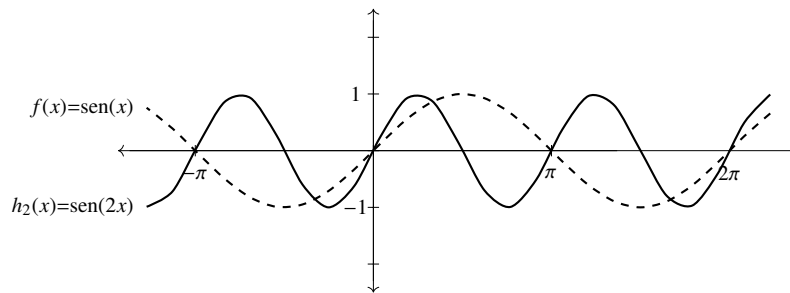


Figura 5.19: $f(x) = \text{sen}(x)$ y $h_2(x) = \text{sen}(2x)$

Este mismo razonamiento permite esbozar las gráficas de h_3 , h_4 , etc. Queda pendiente, sin embargo, la cuestión de cómo es la gráfica de h_b cuando b no es entero. Analicemos el caso $b = 1/2$. La cuestión esencial es determinar cómo se mueve $Q_{t/2}$ con respecto a Q_t : por cada vuelta de este último, el primero da únicamente media vuelta. Esto es, por cada ciclo completo de $f(x) = \text{sen}(x)$ se tendrá *medio* ciclo de $h_{1/2}(x) = \text{sen}(x/2)$. La conclusión inmediata es que la gráfica de $h_{1/2}$ es la siguiente:

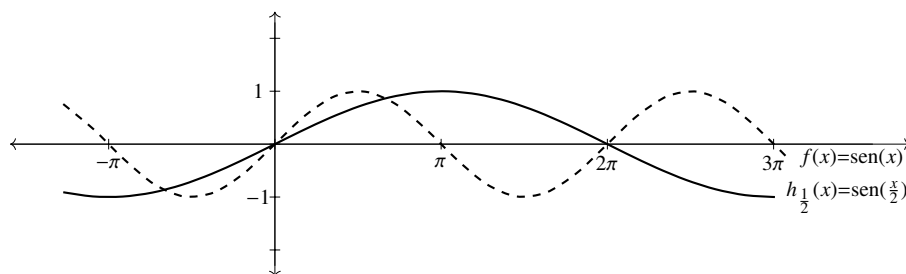


Figura 5.20: $h_{1/2}(x) = \text{sen}(x/2)$ y $f(x) = \text{sen}(x)$

5.3.3. Intervalos donde $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ son funciones inyectivas

En capítulos posteriores, será necesario saber cuáles son los intervalos más grandes donde una función es inyectiva. Esto permitirá —entre otras cosas— garantizar la existencia de la función inversa.

Partiendo de que ya se conoce la gráfica de $f(t) = \text{sen}(t)$, podemos observar que, si nos restringimos a $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, se tiene que cualquier recta horizontal corta a la gráfica a lo más una vez (ninguna, si la altura de la recta es menor a -1 o mayor a 1 ; una, si la altura de la recta está entre -1 y 1). Esto nos dice que la función $f(t) = \text{sen}(t)$ es inyectiva para $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Observando la gráfica, notamos que no es posible hacer más grande este intervalo sin que se pierda la inyectividad de la función.

Por otra parte, $[-\pi/2, \pi/2]$ no es el único intervalo donde f es inyectiva. Dado que la función es periódica, si se traslada uno 2π unidades a la derecha (o a la izquierda) se obtiene otro intervalo donde $f(t) = \text{sen}(t)$ también es inyectiva. Así, para $t \in [3\pi/2, 5\pi/2]$, se tiene que $f(t) = \text{sen}(t)$ es inyectiva.

Un análisis similar para $g(t) = \text{cos}(t)$ muestra que dicha función es inyectiva en el intervalo $[0, \pi]$, así como en los intervalos resultantes tras trasladarse (a izquierda o derecha) una distancia de 2π .

En los ejercicios 7 y 8, el lector encontrará otros intervalos de longitud π donde las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{cos}(x)$ son inyectivas.

5.3.4. Ejercicios de la sección

1. Grafica la función $g(t) = \text{cos}(t)$.
2. Con ayuda de la sección 2.3, grafica las siguientes funciones:

a) $p(t) = \text{sen}(t) + 1$

d) $s(t) = \text{cos}(t + \pi/2)$

b) $q(t) = \text{sen}(t) - 1$

e) $w(t) = \text{sen}(t - \pi) + \pi/4$

c) $r(t) = \text{sen}(t + \pi/2)$

f) $u(t) = \text{cos}(t + \pi/4) - 2$

3. Describe cómo varían las gráficas de $p_a(x) = a \text{cos}(x)$ y $q_b(x) = \text{cos}(bx)$ al variar las constantes positivas a y b . Este ejercicio es, en buena medida, la mitad no escrita de la subsección (5.3.2).

4. Grafica las siguientes funciones:

a) $\alpha(t) = -\text{sen}(t)$

d) $g(x) = 2 \cos(x)$

b) $\beta(t) = -\cos(t)$

e) $h(t) = \cos^2(t) + \text{sen}^2(t)$

c) $f(x) = \cos(2x)$

5. Encuentra una expresión para la función $\text{sen}(\alpha)$, donde α está medido en grados. Sugerencia: ¿Cómo se convierte de grados a radianes?
6. Repite el ejercicio anterior para $\cos(\alpha)$.
7. Los intervalos descritos en la subsección 5.3.3 no son los únicos de longitud π donde la función $f(t) = \text{sen}(t)$ es inyectiva.
- a) Muestra que hay otro intervalo de longitud π , contenido en $[0, 2\pi]$, donde $f(t) = \text{sen}(t)$ es inyectiva.
- b) Con base en el inciso anterior, encuentra otros intervalos de longitud π donde $f(t) = \text{sen}(t)$ no es inyectiva.
8. De manera similar al ejercicio anterior, muestra que los intervalos $[0, \pi]$ y sus desplazamientos no son los únicos donde $g(t) = \cos(t)$ es inyectiva.
9. ¿En qué intervalos es la función $f(t) = \text{sen}(t)$ creciente? ¿En qué intervalos es decreciente?
10. ¿En qué intervalos es la función $g(t) = \cos(t)$ creciente? ¿En qué intervalos es decreciente?
11. Describe los intervalos más grandes donde la función $h_3(x) = \text{sen}(3x)$ es inyectiva.
12. Describe los intervalos más grandes donde la función $h_{1/2}(x) = \text{sen}(x/2)$ es inyectiva.

5.4. Ejercicios del capítulo

1. Además de los grados y radianes, existen otras unidades de medida de ángulos. Una de ellas es el *grado binario*, abreviado brads, que consiste en $1/256 = 1/2^8$ de vuelta completa. Otra de ellas es el *grado centesimal*, abreviado grad, que consiste en $1/400$ de vuelta completa. Partiendo de las equivalencias para una vuelta completa, encuentra

fórmulas que relacionen las cuatro unidades mencionadas para medir ángulos: grados, radianes, grados binarios y grados centesimales.

2. El *minuto de grado* se define como $1/60$ de grado y se denota por un apóstrofe, así $1'$ significa un minuto de grado. De forma análoga, el *segundo de grado* se define como $1/60$ de minuto y se denota por dos apóstrofes, de modo que $1''$ significa un segundo de grado. Suponiendo que la Tierra es una esfera perfecta con un radio de 6371km, encuentra la distancia d que hay que recorrer sobre la superficie terrestre para hacer un ángulo $\alpha = 1^\circ$ con el centro del planeta. ¿Cuál es esta distancia para $\alpha = 1'$ o $\alpha = 1''$?

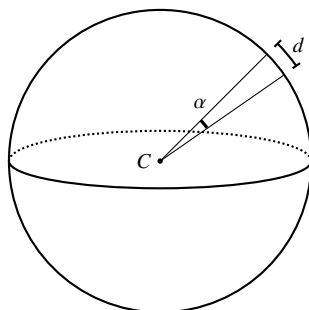


Figura 5.21: Si $r = 6371\text{km}$ y $\alpha = 1'$, ¿cuánto vale d ?, ¿si $\alpha = 1''$?

3. Basándote en un reloj de manecillas con horario, minutero y segundero, responde las siguientes preguntas:
- ¿Cuántos grados (o minutos o segundos de grado) se mueve el segundero cada segundo que transcurre?
 - ¿Cuántos grados (o minutos o segundos de grado) se mueve el minutero cada segundo?
 - ¿Cuántos grados (o minutos o segundos de grado) se mueve el horario cada segundo?
4. Modifica adecuadamente las funciones $f(t) = \text{sen}(t)$ y $g(t) = \text{cos}(t)$ para obtener funciones que $F(\alpha)$ y $G(\alpha)$ que a cada ángulo α medido en grados binarios, le asocien $\text{sen}(\alpha)$ y $\text{cos}(\alpha)$, respectivamente.
5. Repite el ejercicio anterior, reemplazando grados binarios por grados centesimales.
6. Con ayuda de las fórmulas del ángulo doble (ecuación (5.5)), calcula $\text{sen}(\pi/12)$ y $\text{cos}(\pi/12)$.

7. Las siguientes identidades trigonométricas relacionan el seno y el coseno de dos ángulos con el seno y el coseno de la suma de dichos ángulos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta), \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).\end{aligned}$$

- a) Usando el ejercicio previo y las identidades de arriba, calcula $\operatorname{sen}(t)$ y $\cos(t)$ para $t = 5\pi/12$. Sugerencia: $5\pi/12 = \pi/3 + \pi/12$.
- b) Partiendo de estas identidades, deduce la identidad

$$\operatorname{sen}(2t) = 2 \cos(t) \operatorname{sen}(t).$$

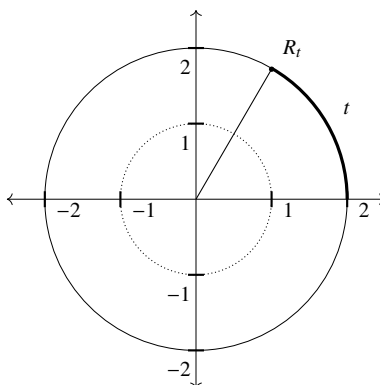
Sugerencia: haz $t = \alpha = \beta$.

- c) Deduce también, a partir de estas identidades, que

$$\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

Sugerencia: haz $t = \alpha = \beta$. Luego, utiliza la identidad $\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$.

- d) Observa que las fórmulas deducidas en los incisos anteriores son las identidades del ángulo doble (ecuación (5.5)).
8. Haz un esbozo de la gráfica de la función $f(x) = a \operatorname{sen}(bx) + c$. Indica qué papel juegan en el dibujo a , b y c .
9. La función F a cada número real t le asocia la primera coordenada del punto R_t , donde R_t es el punto que se obtiene al recorrer, empezando en $(2, 0)$, la longitud t sobre el círculo de radio 2 y centro en $(0, 0)$. Seguimos aquí la convención de que si $t > 0$ se recorre el perímetro del círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que si $t < 0$ se recorre el perímetro del círculo en la dirección de las manecillas. Encuentra una expresión para $F(t)$ en términos de $\cos(t)$.

Figura 5.22: Construcción de R_t

10. La función G a cada número real t le asocia la segunda coordenada del punto R_t , donde R_t es como en el ejercicio anterior. Encuentra una expresión para $G(t)$ en términos de $\text{sen}(t)$.
11. En este ejercicio se define una función $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es decir, a cada número real, σ le asocia un punto del plano. La regla de correspondencia de σ está dada por

$$\sigma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)).$$

- a) Recordando la manera en que definimos $\text{sen}(t)$ y $\cos(t)$, muestra que $\sigma(t) = Q_t$, para toda $t \in \mathbb{R}$.
- b) ¿Cuáles son los puntos en \mathbb{R}^2 que están relacionados, bajo σ , con alguien en \mathbb{R} ? Es decir, ¿quién es, geoméricamente, $\text{Ran}(\sigma)$? Nota que $\text{Ran}(\sigma)$ es un subconjunto de \mathbb{R}^2 .
12. Basándote en el ejercicio anterior, encuentra geoméricamente $\text{Ran}(\alpha)$, donde $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por $\alpha(t) = (2 \cos(t), \text{sen}(t))$. La curva descrita por el rango de α recibe el nombre de *elipse*. En general, cualquier curva descrita por una función de la forma $\beta(t) = (a \cos(t), b \text{sen}(t))$, donde a y b son constantes positivas, es una elipse.
13. Hay muchas curvas que se pueden describir usando las funciones $\text{sen}(t)$ y $\cos(t)$, como en los ejercicios anteriores. La curva descrita por la función

$$\sigma(t) = (rt - r \text{sen}(t), r - \cos(t))$$

es una *cicloide*, que geoméricamente resulta del trazo que hace un punto en el extremo de una rueda de radio r , mientras avanza por una línea recta. Haz un esbozo de la curva descrita por σ .

Capítulo 6

Construyendo nuevas funciones

Lo que hemos hecho en este texto es construir una lista de funciones (lo cuál requirió una definición de este concepto), así como tratar de comprenderlas por medio de su gráfica y otras características (paridad, intervalos de crecimiento, etc.). En este capítulo veremos una varias formas de construir nuevas funciones a partir de las ya conocidas. Además de las operaciones de suma (resta) y multiplicación (división), se estudia la composición de funciones, que es una operación que no tiene su contraparte en la aritmética, pero que resulta indispensable tanto en la teoría como en las aplicaciones.

6.1. Operaciones con funciones que se pueden hacer con números

Al evaluar una función con codominio \mathbb{R} en un elemento del dominio se obtiene un número real. Así, si se tienen dos funciones f y g , y se evalúa ambas en el mismo número x , se tienen dos números reales que pueden ser sumados, restados, multiplicados o divididos (cuando el denominador no es cero) entre sí. Estas operaciones dan lugar a nuevas funciones, que se definen con detalle a continuación.

6.1.1. Multiplicación por una constante

Supongamos que se tiene una función f y un número real c . Con estos ingredientes es posible construir una nueva función, llamada cf , que tiene por regla de correspondencia $(cf)(x) =$

$cf(x)$.

Obsérvese que el lado izquierdo de la igualdad denota la nueva función cf evaluada en el punto x , mientras que el lado derecho denota una multiplicación de números reales: c por $f(x)$. Es fundamental entender esta diferencia para poder comprender a la función cf .

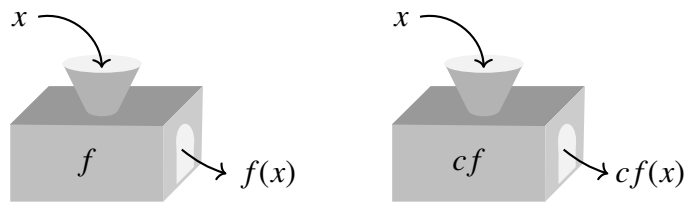


Figura 6.1:

Como siempre que tenemos una nueva función, resulta fundamental conocer su dominio. Nos preguntamos entonces: ¿para qué puntos x tiene sentido la multiplicación $cf(x)$? Como siempre es posible multiplicar cualesquiera dos números reales, la única restricción es que podamos calcular $f(x)$; es decir, que $x \in \text{Dom}(f)$. Así, hemos mostrado que $\text{Dom}(cf) = \text{Dom}(f)$.

Veamos dos casos que ilustren estas ideas:

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^2$, y $c = 3$. ¿Quién es, entonces, la función $3f$? ¿Cómo es su regla de correspondencia, su dominio, su gráfica? De acuerdo a lo expuesto arriba, tenemos que $(3f)(x) = 3f(x) = 3x^2$. Así, la regla de correspondencia de nuestra nueva función está dada por $x \mapsto 3x^2$. Dado que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, se tiene que $\text{Dom}(3f) = \mathbb{R}$. Finalmente, veamos cómo afecta el factor 3 a la bien conocida gráfica de $f(x) = x^2$:

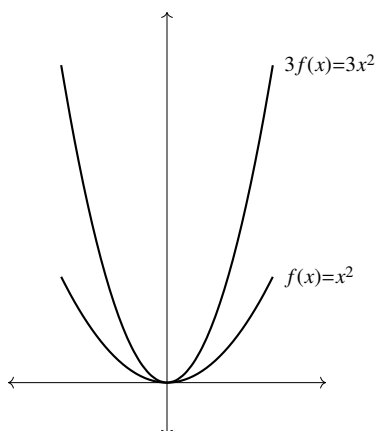


Figura 6.2:

El factor 3, al triplicar el valor de $f(x)$ hace que la gráfica se estire en dirección vertical. Veremos en el siguiente ejemplo que para otros valores de c , el efecto sobre la gráfica de f puede ser diferente.

Ejemplo:

Sea $g(x) = |x|$ y $c = \frac{1}{2}$. Estudiaremos regla de correspondencia, dominio y gráfica de la función $\frac{1}{2}g$. Se tiene que $(\frac{1}{2}g)(x) = \frac{1}{2}g(x) = \frac{1}{2}|x|$. Dado que $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, se tiene que $\text{Dom}(\frac{1}{2}g) = \mathbb{R}$. En cuanto a la gráfica, tenemos lo siguiente:

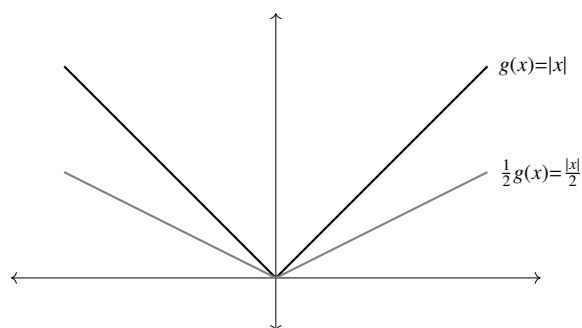


Figura 6.3:

Observa que, en este caso, el factor $\frac{1}{2}$ lo que hizo fue encoger la gráfica de g en dirección vertical. Esto tiene sentido si pensamos que, para $g(x)$ positiva, se tiene que $0 < \frac{1}{2}g(x) <$

$g(x)$; en oposición a lo que pasaba en el ejemplo anterior, donde, para $f(x)$ positiva, se tenía $0 < f(x) < 3f(x)$.

Los ejemplos anteriores nos sugieren que, para $c > 1$ la gráfica se estira verticalmente, mientras que para $c < 1$, la gráfica se encoge verticalmente. Sólo hay que cuidar el caso $c < 0$, que tiene un efecto distinto en la gráfica de f . Por lo pronto, tenemos lo siguiente:

1. Para $c > 1$, la gráfica de cf es similar a la de f , pero estirada verticalmente.
2. Para $c = 1$, $cf = f$ (y por lo tanto tienen la misma gráfica).
3. Para $0 < c < 1$, la gráfica de cf es similar a la de f , pero encogida verticalmente.

¿Qué pasa cuando $c < 0$?

Cuando $c < 0$, se tiene que $cf(x)$ y $f(x)$ tienen signos opuestos, de modo que las gráficas de f y cf estarán siempre de lados distintos del eje x , y coincidirán en los puntos donde lo cruzan (ya que si $f(x) = 0$ entonces también $cf(x) = 0$).

Veamos qué pasa cuando $c = -1$. Para evitar confusiones, llamemos g a la función $(-1)f = -f$. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g ? Dado que $g(x) = -f(x)$ para toda x , se tiene que la gráfica de g es un reflejo de la de f con respecto al eje x . A manera de ejemplo, consideremos la función $g(x) = -[x]$, que es igual a la función $-f$, donde $f(x) = [x]$. El lector puede verificar que la gráfica de g es como sigue:

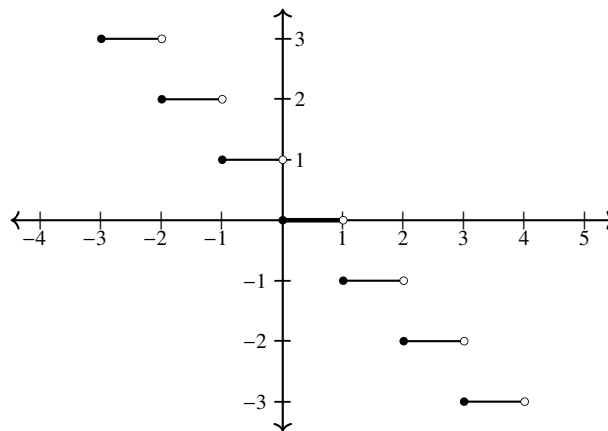


Figura 6.4: $g(x) = -[x]$

Observa que la gráfica de f va por debajo del eje x cuando la de g va por encima del eje x , y viceversa. Más aún: como previmos, la gráfica de g es un reflejo (en el eje x) de la de f . También se tiene que ambas funciones coinciden en el intervalo $[0, 1)$, puesto que ahí ambas valen 0.

Finalmente, podemos combinar los dos aspectos estudiados hasta ahora para completar nuestro estudio de cf :

4. Si $c < 0$ la gráfica de cf será un reflejo de la de f .
5. Si $c < -1$, la gráfica de cf será un reflejo estirado de la de f .
6. Si $c = -1$, la gráfica de $cf = -f$ será un reflejo exacto de la de f .
7. Si $-1 < c < 0$, la gráfica de cf será un reflejo encogido de la de f .

El estudiante no debe ver esta serie de reglas como un objeto a memorizar. Su importancia radica

1. En su utilidad para graficar funciones del tipo cf , donde la gráfica de f es conocida, y
2. en los razonamientos que elaboramos para llegar a ellas. Son estos últimos los que constituyen la parte medular de casi todos los procesos que estudiamos.

6.1.2. Suma y resta de funciones

En los siguientes párrafos, dadas dos funciones f y g , definiremos las funciones $f + g$ y $f - g$.

Sean f y g dos funciones con dominio $\text{Dom}(f)$ y $\text{Dom}(g)$, respectivamente. Definimos la función $f + g$ por medio de la regla de correspondencia

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Observemos (de manera similar a lo que se hizo al definir cf), que el lado izquierdo de la igualdad de arriba representa la función $f + g$ evaluada en el punto x , mientras que el lado derecho representa la suma de dos números reales: $f(x)$ y $g(x)$ (que son a su vez la evaluación de f y g en el punto x).

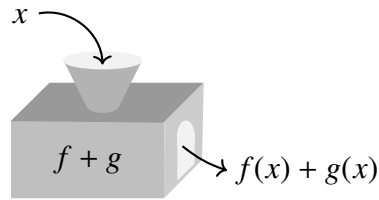


Figura 6.5:

La pregunta que surge inmediatamente es: ¿cuál es el dominio de $f + g$? Para responderla, observemos que las expresiones $f(x)$ y $g(x)$ tienen sentido si y sólo si $x \in \text{Dom}(f)$ y $x \in \text{Dom}(g)$, que sucede si y sólo si $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. En resumen, $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Antes de ver algunos ejemplos, observemos que, de manera completamente similar a lo visto arriba, podemos definir la función $f - g$ mediante la regla de correspondencia

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

También se tiene que $\text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Veamos, ahora sí, algunos ejemplos.

Ejemplo:

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x + 3$. La función $f + g$ tiene regla de correspondencia $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x + 1) + (x + 3) = 3x + 4$. Dado que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, se concluye que $\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R}$.

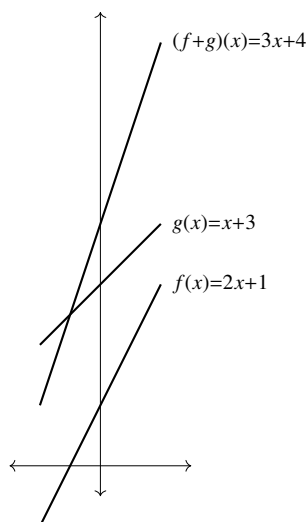


Figura 6.6:

Ejemplo:

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1$. La función $f + g$ tiene regla de correspondencia $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 1$. En este caso, $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, de modo que $\text{Dom}(f + g) = [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.

Ejemplo:

¿Qué sucede con la función $f + g$ si $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \emptyset$? En este caso, tendríamos que $\text{Dom}(f + g) = \emptyset$ de manera que la función $f + g$ no está definida en este caso¹.

¿Cómo es la gráfica de $f + g$? En general es más sencillo graficar, partiendo de cero, la nueva función $f + g$, que tratar de deducir su gráfica a partir de las gráficas de f y g . Sin embargo, hay una idea geométrica que explicamos a continuación. Los puntos en la gráfica de $f + g$ tienen la forma $(x, (f + g)(x)) = (x, f(x) + g(x))$. Por otro lado, los puntos en la gráfica de f son de la forma $(x, f(x))$ y los de la gráfica de g son de la forma $(x, g(x))$. Esto muestra que los puntos de la gráfica de $f + g$ se obtienen sumando las segundas coordenadas de puntos en las gráficas de f y g (para el mismo valor de x). El siguiente dibujo ilustra esta situación:

¹Siendo estrictos, hay una única función $h : \emptyset \rightarrow Y$. Sin embargo, esta función “rara” no nos interesa aquí.

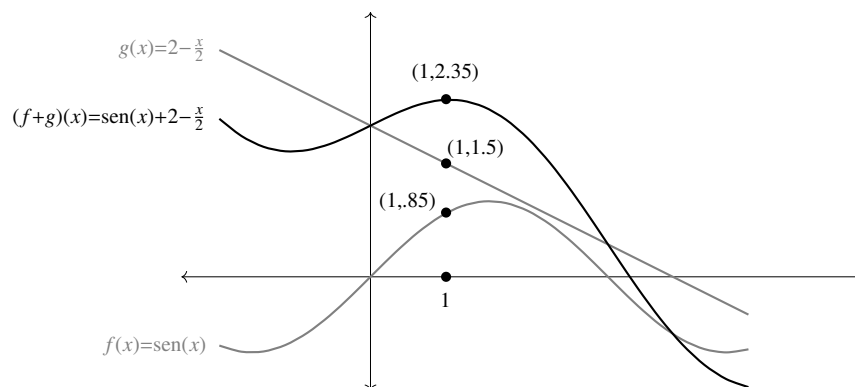


Figura 6.7:

Un situación completamente análoga se da para la gráfica de la función $f - g$.

6.1.3. Multiplicación y división de funciones

De manera similar a la sección anterior, dadas dos funciones f y g , es posible definir funciones fg y f/g . En este último caso, sin embargo, hay que tener cuidado de evitar que el denominador se haga cero.

Sean f y g funciones con dominios $\text{Dom}(f)$ y $\text{Dom}(g)$, respectivamente. Definimos la función producto, fg , mediante la regla de correspondencia $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Al igual que en el caso de la suma de funciones, $x \in \text{Dom}(fg)$ si y sólo si $x \in \text{Dom}(f)$ y $x \in \text{Dom}(g)$, de modo que $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Ejemplo:

Consideremos las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$. La función producto tiene por regla de correspondencia $(fg)(x) = f(x)g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$. Dado que $\text{Dom}(f)$ y $\text{Dom}(g)$ son ambos \mathbb{R} , se tiene que $\text{Dom}(fg) = \mathbb{R}$.

Ejemplo:

El producto de dos funciones constantes es otra función constante. Sean $f(x) = c$ y $g(x) = d$. Entonces $(fg)(x) = f(x)g(x) = cd$. Así, fg es la función constante cd , con dominio \mathbb{R} (¿por qué se tiene $\text{Dom}(fg) = \mathbb{R}$?).

Ejemplo:

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = 1/x$. La regla de correspondencia de fg está dada por $x \mapsto 1$ (puesto que $x(1/x) = 1$). Sin embargo, $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Este caso nos permite

insistir en lo siguiente: $\text{Dom}(fg)$ *no* es el dominio natural de la regla de correspondencia de fg , sino que $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

En cuanto a la división o cociente de funciones, podemos definir la función f/g mediante la regla de correspondencia $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Sin embargo, el dominio de $\frac{f}{g}$ sufre una modificación importante. Para que la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenga sentido, es necesario que $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ y además que $g(x) \neq 0$. Así, $\text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \setminus \{x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) = 0\}$, o, lo que es lo mismo, $\text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \setminus g^{-1}(0)$.

Ejemplo:

Sean $f(x) = 1$, $g(x) = x$. Observa que f/g es la función $s(x) = 1/x$, y que su dominio *no* es igual a $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, sino que hay que quitar el punto donde $g(x) = 0$. Así, resulta que $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplo:

Sea 0 la función constante cero y f alguna otra función. Si se intenta hacer el cociente $f/0$, resulta que $\text{Dom}(f/0) = \text{Dom}(f) \cap \emptyset = \emptyset$, de modo que la función $f/0$ no está definida.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 1$ y $g(x) = \text{sen}(x)$. A la función cociente $(f/g)(x) = 1/\text{sen}(x)$ se le conoce como *cosecante*, abreviado *csc*. Observa que

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\text{csc}) &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) = 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots\} \end{aligned}$$

Con ayuda de los valores conocidos para $\text{sen}(x)$, se puede ver que la gráfica de $\text{csc}(x)$ es como sigue:

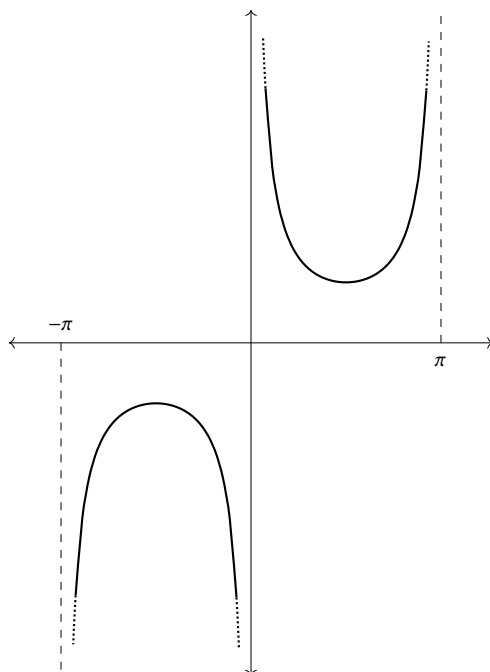


Figura 6.8:

Hay otros tres cocientes que se pueden formar con las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$, a saber: $\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$, $\frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$ y $\frac{1}{\text{cos}(x)}$. Estos cocientes reciben, respectivamente, los nombres de *tangente* (abreviado *tan*), *cotangente* (abreviado *cot*) y *secante* (abreviado *sec*).

Estas funciones, junto con las ya estudiadas $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ son las funciones trigonométricas básicas que, bajo otros enfoques, uno relaciona con las razones entre lados distintos de triángulos rectángulos. Aunque los dominios de estas funciones no son todo \mathbb{R} (salvo en los casos de $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$), son mucho más amplios consideradas como cocientes de funciones que como razones entre lados de un triángulo rectángulo (donde por fuerza $0 < x < \pi/2$). En los ejercicios de esta sección se pide encontrar dominios, reglas de correspondencia y gráficas de estas funciones.

Para terminar esta sección, hacemos notar que, aunque la gráfica de fg está determinada por las funciones f y g (y por lo tanto también por sus gráficas), la relación entre ellas no es tan inmediata como en el caso de cf y $f \pm g$. Desde luego, cualquier punto en la gráfica de fg tiene la forma $(x, f(x)g(x))$, y es por lo tanto el resultado de multiplicar las segundas coordenadas de puntos en las gráficas de f y g (para el mismo valor de x); sin embargo, esta observación no es de gran utilidad práctica. Una guía más útil resulta de considerar los signos

de $f(x)$ y $g(x)$ para determinar el de $(fg)(x)$.

Por ejemplo, en el caso de la función $\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, el signo de $\csc(x)$ está determinado por el signo de $\operatorname{sen}(x)$ (ya que la función constante 1 es siempre positiva); esto quiere decir que $\csc(x)$ es positiva si y sólo si $\operatorname{sen}(x)$ es positiva. Así, y dado que $\operatorname{sen}(x) > 0$ para $x \in (0, \pi)$, se tiene que $\csc(x) > 0$ en ese intervalo.

6.1.4. Resumen

Definimos, a partir de dos funciones conocidas f y g , las funciones cf , $f + g$, $f - g$, fg y f/g . También calculamos sus dominios (que dependerán de los dominios de f y g).

Definición 27. Sean f y g dos funciones, con dominios $\operatorname{Dom}(f)$ y $\operatorname{Dom}(g)$, respectivamente, y $c \in \mathbb{R}$. Definimos las funciones cf , $f + g$, $f - g$, fg y f/g mediante las siguientes reglas de correspondencia:

1. $(cf)(x) = c(f(x))$
2. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
3. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
4. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Para calcular los dominios de estas funciones, tenemos que ver para qué puntos x tiene sentido cada una de las expresiones de arriba. En el primer caso, el de $(cf)(x) = c(f(x))$, tenemos que la expresión de la derecha tiene sentido siempre que podamos calcular $f(x)$; esto es, siempre que $x \in \operatorname{Dom}(f)$. Así, tenemos que $\operatorname{Dom}(cf) = \operatorname{Dom}(f)$.

En los siguientes tres casos $f + g$, $f - g$ y fg las expresiones tendrán sentido si y sólo si las evaluaciones $f(x)$ y $g(x)$ se pueden realizar; esto es, si $x \in \operatorname{Dom}(f)$ y $x \in \operatorname{Dom}(g)$, que es una condición equivalente a $x \in \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$. Así, se tiene que

$$\operatorname{Dom}(f + g) = \operatorname{Dom}(f - g) = \operatorname{Dom}(fg) = \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g).$$

Finalmente, en el caso de $\frac{f}{g}$, tenemos que la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene sentido si y sólo si $x \in \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$ (para que se puedan hacer las evaluaciones $f(x)$, $g(x)$) y además $g(x) \neq 0$, ya que de otra manera estaríamos haciendo una división entre cero.

Así, $\text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \cap \{x \in \text{Dom}(g) | g(x) \neq 0\}$.

Otra manera de ver esto es la siguiente: para que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenga sentido, es necesario *quitarle* a $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ el conjunto donde la g se hace cero. Esto es, $\text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \setminus g^{-1}(0)$.

6.1.5. Ejercicios de la sección

- En cada caso, grafica todas las funciones de la forma cf , para los valores indicados de c y f :
 - $f(x) = |x|$, $c = -2, -1, 0, 1, 2$.
 - $f(x) = (x - 1)^2$, $c = -3, -1, 1, 3$.
 - $f(x) = \text{sen}(x)$, $c = -1, -1/2, 0, 1/3, 1, 3$.
 - $f(x) = [x - 1] + 2$, $c = -4, -1/4, 5, 10$. (Observa que $cf(x) = c([x - 1] + 2) = c[x - 1] + 2c$).
 - $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $c = 0, 1/3, 1/2, 1, 2$.
 - $f(x) = \sqrt{x}$, $c = -1, 1$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$, $c = -1, 0, 1, 2$. (¡Observa que $\text{Dom}(0f) \neq \mathbb{R}$!)
- Encuentra un valor adecuado de c para que las funciones $f(x) = cx^2$ y $g(x) = -12$ se intersecten en los puntos $(\pm 2, -12)$.
- Grafica los siguientes pares de funciones comparándolas entre sí.
 - $f(x) = 2|x|$, $g(x) = |x|$
 - $g(x) = -x + 2$, $h(x) = 5(-x + 2)$
 - $p(x) = \text{sen}(x)$, $q(x) = -3 \text{sen}(x)$
- Sea $f(x) = \frac{x-1}{2}$. Encuentra $c \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $(cf)(1) = 7$. Encuentra también $d \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $(df)(2) = -3$.
- Encuentra dominio, regla de correspondencia y gráfica de $f + g$ y $f - g$, para los valores dados en cada inciso:

a) $f(x) = 2, g(x) = -3$

b) $f(x) = x, g(x) = x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -1$

d) $f(x) = |x|, g(x) = x$

e) $f(x) = [x], g(x) = x$

f) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$

g) $f(x) = -x^2 + 2x - 1, g(x) = 3x + 1$

h) $f(x) = x + 1, g(x) = x + 1.$

i) $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x), g(x) = \text{sen}(x) - \text{cos}(x)$ (Nota que, en este caso, $f + g$ y $f - g$ tienen reglas de correspondencia y gráficas más sencillas que f y g).

6. Diremos que dos números a y b son inversos aditivos uno del otro si $a + b = 0$. Por ejemplo, 3 y -3 son inversos aditivos porque su suma da cero: $3 + (-3) = 0$. Entre funciones, decimos que f es inverso aditivo de g si $f + g = 0$ (donde el cero de la derecha denota la función constante cero).

a) Encuentra el inverso aditivo de la función constante $f(x) = 7$.

b) Encuentra el inverso aditivo de la función $f(x) = 2x + 1$.

c) Muestra que toda función f tiene un inverso aditivo g , en el sentido de que $f + g = 0$ ¿Cuál es el dominio de g ?

7. Demuestra que $f + f = 2f$ para cualquier función f . Sugerencia: dos funciones son iguales si su regla de correspondencia, dominio y codominio son iguales.

8. Es posible combinar las tres operaciones con funciones vistas hasta el momento (multiplicación por una constante, suma y resta). Por ejemplo: si $f(x) = x^2, g(x) = -x$ entonces la función $3f + g$ tiene regla de correspondencia $(3f + g)(x) = 3f(x) + g(x) = 3(x^2) + (-x) = 3x^2 - x$. En cada caso, encuentra dominio, regla de correspondencia y gráfica de $cf + g$:

a) $f(x) = 2x, g(x) = x, c = -1/2$.

b) $f(x) = \text{sen}(x), g(x) = 3 \text{sen}(x), c = -2$.

c) $f(x) = x^2, g(x) = x, c = 3$

d) $f(x) = 1/x, g(x) = x, c = 1$

9. Encuentra regla de correspondencia, dominio y gráfica de las siguientes funciones:

a) $\alpha\beta$, donde $\alpha(t) = 2t - 1, \beta(t) = -t^2 + 1.$ $\text{sen}(x) - 1.$

b) fg , donde $f(x) = \text{sen}(x) + 1, g(x) =$ c) fg , donde $f(x) = g(x) = \sqrt{x}$. Nota:

$\text{Dom}(fg) \neq \mathbb{R}$. ¿Por qué?

d) pq , donde $p(x) = (x + 1)(x - 1)$, $q(x) = \frac{1}{(x + 1)(x - 1)}$. Nota: $\text{Dom}(pq) \neq \mathbb{R}$!

e) $\frac{f}{g}$, donde $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$.

f) $\frac{g}{f}$, donde $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.

g) $\frac{f}{2g}$, donde $f(x) = -5x + 2$, $g(x) = -2$.

h) $\frac{1}{f}$, donde $f(x) = 1/\sqrt{x}$. En este caso, el numerador del cociente de funciones es la función constante 1.

i) $\frac{g + 2h}{f}$, donde $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = 1$. Sugerencia: en general, ¿cómo está dada la regla de correspondencia de $\frac{g + 2h}{f}$?

j) $\frac{f}{g + h}$, donde $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2 + 12x - 1$, $h(x) = -3x^2 - 12x - 1$. Sugerencia: ver ejercicio anterior.

10. Encuentra dominio, regla de correspondencia y gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a) $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$

b) $\cot(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$

c) $\sec(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$

11. En analogía a lo que sucede con los números (donde al producto xx se le denota comúnmente por x^2), al producto de una función f consigo misma, se le denota por f^2 .

a) Explica por qué $\text{Dom}(f^2) = \text{Dom}(f)$.

b) Encuentra regla de correspondencia y gráfica de f^2 , donde $f(x) = 1/x$.

c) Encuentra regla de correspondencia y gráfica de f^2 , donde $f(x) = \text{sen}(x)$.

12. Dados dos números reales distintos de cero, a y b , diremos que son inversos multiplicativos entre sí si su producto es 1; esto es, si $ab = 1$. Sea f una función tal que $f(x) \neq 0$ para toda $x \in \text{Dom}(f)$. Muestra que f tiene un inverso multiplicativo; es decir, encuentra una función g tal que $fg = 1$ (donde el 1 de la derecha representa la función constante 1).
13. Considera la función $f(x) = x^2 - 1$. ¿Tiene f un inverso multiplicativo en el sentido del ejercicio anterior? Responde la misma pregunta para la función $g(x) = x^2 + 1$?

6.2. Composición de funciones

Todas las operaciones con funciones vistas hasta el momento tienen su contraparte numérica. La composición de funciones es una excepción a esto, pues su origen está en la función como correspondencia entre dos conjuntos. La idea básica de la composición es aplicar una función al resultado de otra para tener una función “compuesta” por dos partes.

Definición 28. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Z \rightarrow W$ dos funciones. La función $g \circ f$, llamada la *composición de f con g* , es la función definida por la regla de correspondencia

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad (6.1)$$

y tiene por dominio el conjunto de $x \in X$ para las cuales el lado derecho de (6.1) tiene sentido.

Los símbolos $g(f(x))$ en la definición anterior significan la función g evaluada en el punto $f(x)$. Esto es, para evaluar la función $g \circ f$ en el punto x , se evalúa f en x (obteniendo $f(x)$) y luego, a este valor se le aplica la función g . El siguiente dibujo, basado en la idea de función como máquina, tal vez sea útil para aclarar esta operación:

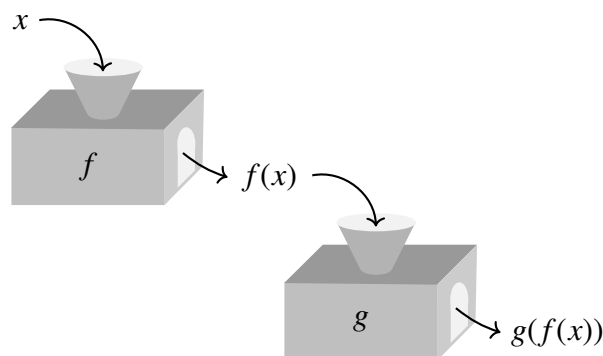


Figura 6.9:

Para que la expresión $g(f(x))$ tenga sentido, son necesarias dos cosas:

1. $x \in \text{Dom}(f)$, para que $f(x)$ tenga sentido.
2. $f(x) \in \text{Dom}(g)$, para que $g(f(x))$ tenga sentido.

Ahora bien, la segunda condición es equivalente a $x \in f^{-1}(\text{Dom}(g))$.

De aquí que, $x \in \text{Dom}(g \circ f)$ si y sólo si $x \in \text{Dom}(f)$ y $x \in f^{-1}(\text{Dom}(g))$; esto es,

$$\text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}(f) \cap f^{-1}(\text{Dom}(g)) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\}.$$

Un ejemplo sencillo lo tenemos en el siguiente diagrama:

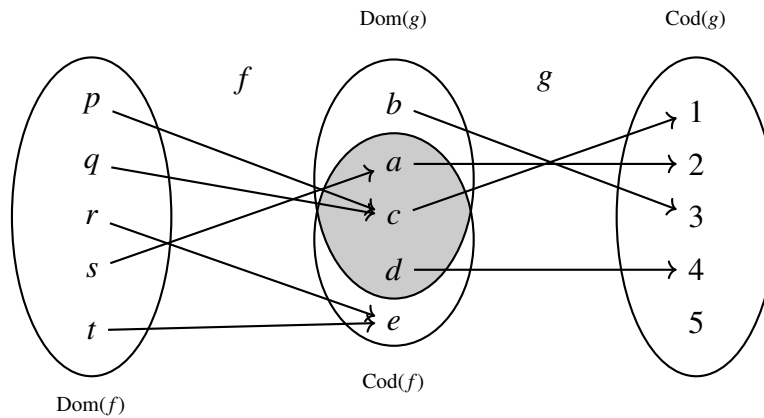


Figura 6.10:

Observa que algunos de los elementos de $\text{Dom}(f)$ pueden recorrer el diagrama hasta $\text{Cod}(g)$ y otros no. En este caso, p, q y s sí pueden recorrer todo el diagrama (porque $f(p), f(q), f(s) \in \text{Dom}(g)$), mientras que r y t no (porque $f(r), f(t) \notin \text{Dom}(g)$). Así, la composición $g \circ f$ es la siguiente función:

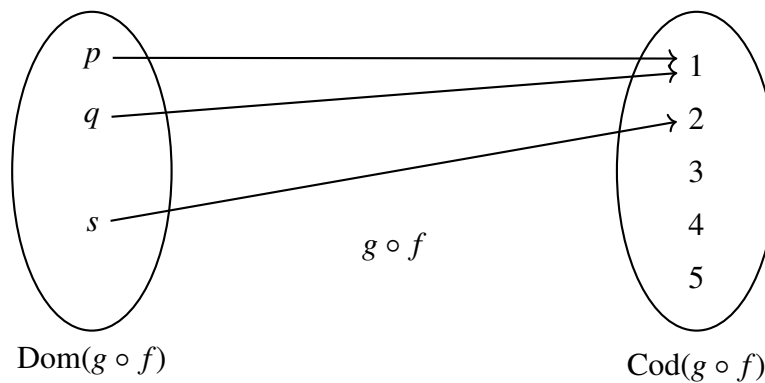


Figura 6.11:

Puede ser que no exista ninguna x que pueda hacer el recorrido completo $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$. En este caso, decimos que la composición $g \circ f$ no está definida. Ilustramos esto con un ejemplo:

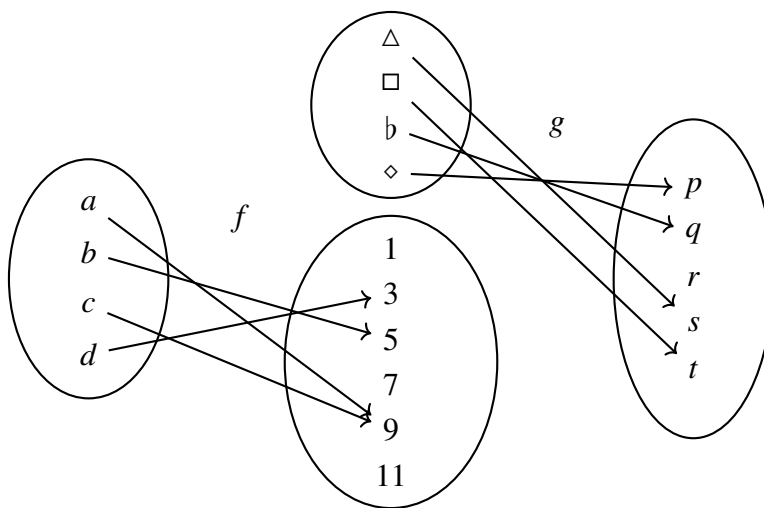


Figura 6.12:

Observa que el codominio de f y el dominio de g no tienen ningún elemento en común, de donde se concluye que la función $g \circ f$ no está definida. Un tercer ejemplo lo tenemos en las siguientes funciones:

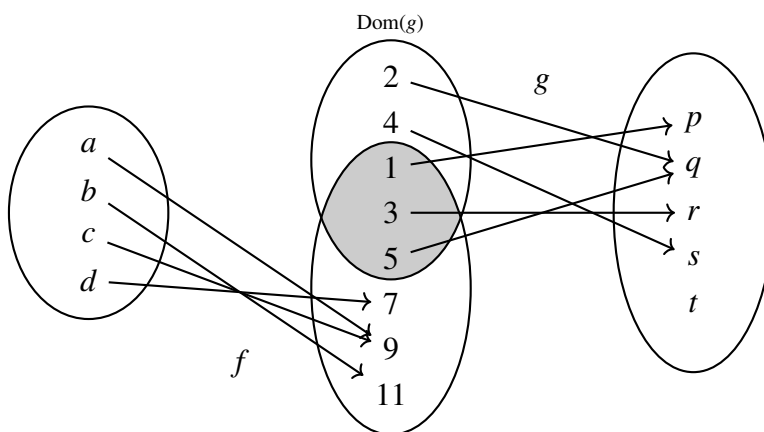


Figura 6.13:

En este caso, dado que no hay ningún elemento en $\text{Dom}(f)$ para el que se pueda hacer todo el recorrido, se tiene que la composición $g \circ f$ no está definida.

Un ejemplo más elaborado lo dan las siguientes funciones: $f(x) = -x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$. Nota que $\text{Ran}(f) = (-\infty, -1]$ y $\text{Dom}(g) = [0, \infty)$, de manera que $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) | f(x) \in \text{Dom}(g)\} = \emptyset$ y por lo tanto la composición $g \circ f$ no está definida.

A continuación presentamos algunos ejemplos que nos permitan clarificar el concepto que nos ocupa.

Ejemplo:

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$. Calcular dominio y regla de correspondencia de $g \circ f$.

Se tiene que $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned} \text{Dom}(g \circ f) &= \{x \in \text{Dom}(f) | f(x) \in \text{Dom}(g)\} \\ &= \{x \in [0, \infty) | \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\ &= [0, \infty), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ se cumple para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

En cuanto a la regla de correspondencia, tenemos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $(g \circ f)(x) = x$. Uno podría pensar que, dado que esta regla de correspondencia tiene sentido para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se debería tener $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$. Sin embargo, esto no es así, porque para $x < 0$ la expresión $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene sentido, de manera que $g(f(x))$ tampoco. Para enfatizar: $\text{Dom}(g \circ f) = [0, \infty)$, como concluimos en el párrafo anterior.

Ejemplo:

Una de las características más sorprendentes de la composición es que no es conmutativa: en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Calculemos $g \circ f$ donde $g(x) = x^2$ y $f(x) = \sqrt{x}$, como en el ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x|, \end{aligned}$$

mientras que $(g \circ f)(x) = x$.

Ejemplo:

Sean $f(x) = -\frac{4}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$. Calcular dominio y regla de correspondencia de $g \circ f$.

En primera instancia, notemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Así, $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$. Es decir, necesitamos encontrar los puntos x para los cuales $f(x) \neq -1$.

Ahora bien, encontrar las x para las cuales $f(x) \neq -1$ es equivalente a encontrar las x para las cuales $f(x) = -1$ y quitarlas de $\text{Dom}(f)$. En símbolos, $\text{Dom}(g \circ f) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus \{x \mid f(x) = -1\}$.

Para encontrar este último conjunto, necesitamos resolver la ecuación $\frac{-4}{x} = -1$, que tiene por única solución $x = 4$. De aquí se concluye que $\text{Dom}(g \circ f) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus \{4\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

Para calcular la regla de correspondencia de $g \circ f$, recordemos que ésta está dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. En este caso particular, tenemos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(-\frac{4}{x}\right) \\ &= \frac{-\frac{4}{x}}{-\frac{4}{x} + 1} \\ &= \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{-4+x}{x}} \\ &= \frac{-4x}{x(-4+x)} \\ &= \frac{-4}{-4+x}. \end{aligned}$$

Observa que, en el último paso, fue posible cancelar la x común a numerador y denominador porque $x \neq 0$ (ya que $0 \notin \text{Dom}(g \circ f)$, como vimos en el párrafo anterior).

Ejemplo:

En algunos casos, es posible componer una función consigo misma. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. La regla

de correspondencia de $f \circ f$ está dada por

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x}} \\ &= x,\end{aligned}$$

mientras que $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f \circ f) &= \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(f)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\},\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque $\frac{1}{x} \neq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Una vez más, insistimos que aunque la regla de correspondencia $(f \circ f)(x) = x$ tiene sentido para toda $x \in \mathbb{R}$, $\text{Dom}(f \circ f) \neq \mathbb{R}$, puesto que $f(x) = \frac{1}{x}$ no tiene sentido para $x = 0$.

6.2.1. Ejercicios de la sección

1. Recuerda la función identidad $\text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene regla de correspondencia $\text{Id}(x) = x$. Verifica que, para cualquier función f , se tiene que $f \circ \text{Id} = f$ e $\text{Id} \circ f = f$. Esto es, la función identidad se comporta como un neutro con respecto a la composición (es decir, componer con Id por cualquiera de los dos lados no afecta a la función original).
2. Considera las funciones $f(x) = \frac{x}{2}$ y $g(x) = 2x$. Muestra que $f \circ g = \text{Id}$ y $g \circ f = \text{Id}$. Funciones con esta propiedad se dice que son *inversas* entre sí. El concepto de función inversa es tan importante, que toda la siguiente sección estará dedicada a él.
3. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Verifica que $f \circ g = \text{Id}$ (para $x \in [0, \infty)$) pero $g \circ f \neq \text{Id}$. Este ejemplo muestra que, para que dos funciones sean inversas, es imprescindible verificar que ambas composiciones dan la identidad; en otras palabras, que una composición sea la identidad no garantiza que la otra también lo sea.
4. Sea $f(x) = c$ una función constante, y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. Explica por qué siempre tienen sentido las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Quién es $f \circ g$? ¿Quién es $g \circ f$?

5. Considera la función $g(x) = x + 2$, y sea f una función cualquiera. ¿Cómo es la gráfica de $g \circ f$ comparada con la de f ? (Sugerencia: revisa la sección (2.3) del capítulo 2.)
6. Sean f y g como en el problema anterior. ¿Cómo es la gráfica de $f \circ g$ comparada con la de f ? (Misma sugerencia que en el ejercicio anterior.)
7. Repite los dos ejercicios anteriores con $g(x) = x + c$, donde c es una constante (es decir, $c \in \mathbb{R}$).
8. Considerando las funciones dadas en la primera lista, encuentra dominio y regla de correspondencia de las composiciones indicadas en la segunda lista.

$$a) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$b) p(x) = x^2$$

$$c) s(x) = 3x - 2$$

$$i) g \circ f$$

$$ii) p \circ r$$

$$iii) r \circ p$$

$$iv) g \circ q$$

$$v) q \circ g$$

Nota que $q \circ g \neq g \circ g$.

$$vi) p \circ p$$

$$d) g(x) = |x|$$

$$e) q(x) = [x]$$

$$f) \alpha(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$vii) \alpha \circ \beta$$

$$viii) \alpha \circ s$$

$$ix) \alpha \circ f$$

Observa que $\alpha \circ f = \text{Id}$ (ver 5)

$$x) f \circ \alpha$$

Observa que $f \circ \alpha = \text{Id}$ (ver 5).

¿Qué nombre reciben las funciones que al componerlas de ambas maneras posibles dan Id?

$$g) h(x) = \sqrt{-x+1}$$

$$h) r(x) = \text{sen}(x)$$

$$i) \beta(x) = \frac{x}{1+x}$$

9. Expresa las siguientes funciones como composición de dos funciones más sencillas:

$$a) g(x) = \text{sen}(x^2).$$

$$b) h(x) = \text{sen}^2(x). \text{ La notación } \text{sen}^2(x) \text{ puede ser confusa al principio, pero es equivalente a } (\text{sen}(x))^2 \text{ (y más económica).}$$

$$c) f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$d) p(x) = |2x| + 12$$

$$e) q(x) = x^4 + 3x^2 + 2. \text{ Sugerencia: escoge a } g(x) = x^2 \text{ como una de las funciones.}$$

$$f) r(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}{\frac{1}{x}}$$

$$g) \alpha(x) = 3[x] - 9$$

$$h) \beta(x) = [7x - 2]$$

10. Es posible componer tres funciones (o más), mediante la regla $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ (o reglas análogas para un número mayor de funciones). Considerando las funciones

$$f(x) = (x + 1)^2, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 1},$$

encuentra dominio y regla de correspondencia de las composiciones siguientes:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $g \circ f \circ h$ | e) $h \circ f \circ f$ |
| b) $f \circ g \circ h$ | f) $g \circ h \circ g$ |
| c) $h \circ g \circ f$ | g) $f \circ g \circ f$ |
| d) $h \circ f \circ g$ | h) $h \circ g \circ g$ |

6.3. Funciones inversas

En términos coloquiales, diremos que dos funciones son inversas si una *deshace* lo que hace la otra al componerlas. Por ejemplo: las funciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x - 2$ son inversas porque g *quita* el 2 que agrega f . Esto se ve más claramente al estudiar las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$:

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) & g \circ f &= g(f(x)) \\ &= f(x - 2) & &= g(x + 2) \\ &= (x - 2) + 2 & &= (x + 2) - 2 \\ &= x & &= x \end{aligned}$$

El hecho de que $f \circ g(x) = x$ y $g \circ f(x) = x$ es equivalente a $f \circ g = \text{Id}$ y $g \circ f = \text{Id}$ (donde Id es la función identidad, $\text{Id}(x) = x$), que a su vez es una manera más matemática de decir que f y g son funciones que *deshacen* lo que hace la otra.

Más formalmente, el concepto de función inversa es el siguiente:

Definición 29. Dadas dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$, diremos que son *funciones inversas* si $f \circ g = \text{Id}$ y $g \circ f = \text{Id}$. En este caso es común denotar a g por f^{-1} (y a f por g^{-1}).

Observemos, en primer lugar, que las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ tienen sentido porque $\text{Dom}(f) = \text{Cod}(g)$ y $\text{Cod}(f) = \text{Dom}(g)$. De aquí que $\text{Dom}(f \circ g) = B$ y $\text{Dom}(g \circ f) = A$ y por lo tanto $f \circ g : B \rightarrow B$ y $g \circ f : A \rightarrow A$.

A manera de ejemplo, mostraremos que las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con reglas de correspondencia $f(x) = 2x - 1$ y $g(y) = \frac{y+1}{2}$ son inversas entre sí. En primer lugar, observemos que $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$. En cuanto a las reglas de correspondencia, se tiene que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\ &= f\left(\frac{y+1}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{y+1}{2}\right) - 1 \\ &= y,\end{aligned}$$

de modo que $f \circ g = \text{Id}$. De manera similar, se tiene que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x - 1) \\ &= \frac{(2x - 1) + 1}{2} \\ &= x,\end{aligned}$$

de donde $g \circ f = \text{Id}$. De aquí se concluye que f y g son funciones inversas.

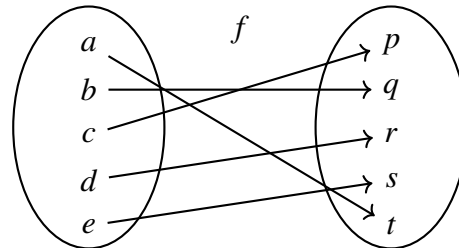
En el resto de la sección mostraremos que si una función es biyectiva entonces tiene inversa. También mostraremos que si f es una función inyectiva (pero no suprayectiva) se puede modificar su codominio para obtener una función biyectiva (y que por lo tanto tiene inversa). La idea será mostrar estas afirmaciones para funciones muy sencillas y luego generalizarlas.

Dado que es necesario que el lector tenga bien presentes los siguientes conceptos, nos permitimos escribir el siguiente recordatorio:

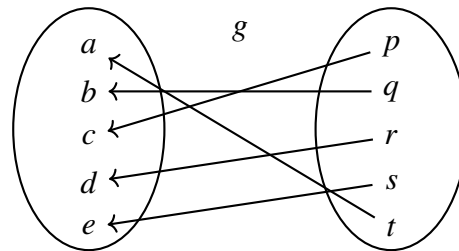
1. Una función f es *inyectiva* (o *uno a uno*) si, para cualesquiera $x \neq y$ en $\text{Dom}(f)$, se tiene $f(x) \neq f(y)$. Equivalentemente, f es una función inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.
2. Una función f es *suprayectiva* (o *sobre*) si $\text{Cod}(f) = \text{Ran}(f)$.

3. Una función f es *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Consideremos una función biyectiva f . Por ejemplo:

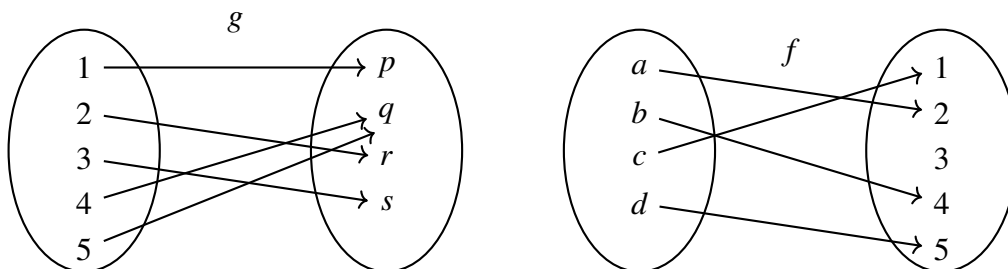


Observa que si invertimos la dirección de las flechas de f , obtenemos una función que tiene por dominio a $\text{Cod}(f)$ y por codominio a $\text{Dom}(f)$, como se ilustra en seguida:



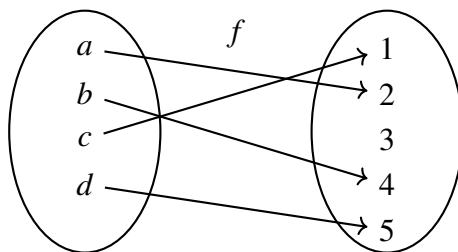
Dicha función (que aquí llamamos g) tiene la propiedad de que al componerla con f en cualquiera de los dos órdenes posibles, resulta en la función identidad. Es decir, g es la función inversa de f . Esta afirmación es inmediata de verificar, dada la forma en que se construyó g , por ejemplo: $g(f(a)) = g(q) = a$. Notemos también que $\text{Dom}(g) = \text{Cod}(f)$ y $\text{Cod}(g) = \text{Dom}(f)$.

A continuación mostramos mediante un ejemplo la necesidad de que una función sea biyectiva para que al invertir las flechas se obtenga una función. Si en los siguientes diagramas invertimos la dirección de las flechas *no* se obtiene una función, porque las funciones originales no son biyectivas.

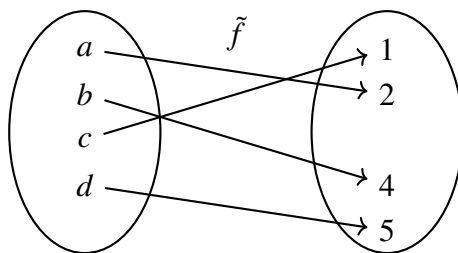


Nota que en el caso de g , la relación que resulta de invertir las flechas no es una función porque q tendría dos imágenes. Esto es una consecuencia de que la función original g no sea inyectiva. En el caso de f , la relación que resulta de invertir las flechas no es una función porque 3 no está relacionado con nadie; esto es una consecuencia de que este elemento, 3, no esté en $\text{Ran}(f)$, que a su vez es una consecuencia de que f no sea una función suprayectiva. Así, para que la relación que resulta de invertir las flechas sea una función, es necesario que la función sea tanto inyectiva como suprayectiva; es decir, biyectiva. Con estos razonamientos esperamos haber convencido al lector del hecho de que es necesario que una función sea biyectiva para que tenga inversa. De hecho, también es suficiente que una función sea biyectiva para que tenga inversa. En otras palabras, una función es biyectiva si y sólo si tiene inversa.

Estudiemos, una vez más, la función f de arriba:



Como ya se dijo, al invertir la dirección de las flechas de f , no se obtiene una función, porque no sería cierto que a cada elemento del dominio de la nueva función se le asocia un elemento del codominio. Sin embargo, si restringimos $\text{Cod}(f)$ para que sea igual a $\text{Ran}(f)$, tendremos una función biyectiva y por lo tanto con inversa:



Para ser completamente claros: esta nueva función \tilde{f} y la función original f no son iguales, ya que $\text{Cod}(f) \neq \text{Cod}(\tilde{f})$. Sin embargo, son muy parecidas dado que tienen el mismo dominio y la misma regla de correspondencia, con la ventaja adicional de que \tilde{f} es biyectiva y tiene por lo tanto una función inversa. Por estas razones, al inverso de \tilde{f} le llamaremos también el inverso de f , o la función inversa de f . Este abuso de notación no tiene ningún pero, siempre y cuando lo tengamos presente.

De aquí se concluyen dos cosas:

1. Las funciones biyectivas tienen inverso.
2. Las funciones inyectivas tienen inverso si se restringe su codominio para que sea igual a su rango (puesto que con esta restricción tenemos en realidad una función biyectiva).

6.3.1. Gráfica de la función inversa

¿Cómo están relacionadas las tablas de las funciones f y f^{-1} ? Recordemos que la regla de correspondencia de la función f^{-1} consiste de *deshacer* lo que hace f . Esto es, si se tiene que $f(a) = b$, entonces se tendrá que $f^{-1}(b) = a$, lo que se traduce en que la tabla de f^{-1} se obtiene intercambiando de lugar las columnas de la tabla de f . Por ejemplo, si $f(x) = x + 2$, se tiene que $f^{-1}(x) = x - 2$, como sabemos por un ejemplo anterior. Las tabulaciones correspondientes a f y f^{-1} se muestran a continuación:

x	$f(x)$	x	$f^{-1}(x)$
-3	-1	-3	-5
-2	0	-2	-4
-1	1	-1	-3
0	2	0	-2
1	3	1	-1
2	4	2	0
3	5	3	1

Observa que, como previmos, las columnas de la tabla de f^{-1} son iguales a las de la tabla de f , pero intercambiadas de lugar.

Ahora bien, ¿cuál es la relación entre la gráfica de f y la de f^{-1} ? Recordemos que la gráfica de una función f consiste de todas las parejas del tipo $(x, f(x))$, donde $x \in \text{Dom}(f)$. Dado que la tabla de f^{-1} es igual a la de f pero con las columnas intercambiadas, se concluye que la gráfica de f^{-1} consiste de todas las parejas de la forma $(f(x), x)$, donde $x \in \text{Dom}(f)$.

Esto también se puede entender de otra manera: la gráfica de f consiste de los puntos de la forma (x, y) , con $x \in \text{Dom}(f)$ y $y = f(x)$. Dado que entonces $f^{-1}(y) = x$, se tiene que la gráfica de f^{-1} consiste de puntos de la forma $(y, f^{-1}(y)) = (y, x)$. Esto es, la gráfica de f^{-1} consiste de las mismas parejas que la gráfica de f , pero con el orden intercambiado.

Ahora bien, los puntos $P = (a, b)$ y $Q = (b, a)$ se obtienen uno del otro mediante una reflexión a lo largo de la recta $y = x$, como se ilustra en el siguiente dibujo:

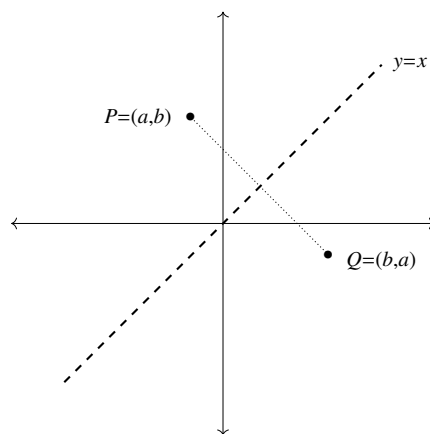


Figura 6.14:

Esta idea geométrica nos dice que la gráfica de f^{-1} (que consiste de los puntos de la forma $(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x)$) es un reflejo a lo largo de la recta $y = x$ de la gráfica de f (que consiste de los puntos de la forma $(x, f(x))$).

Este hecho tiene una interpretación geométrica, y es que la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f a lo largo de la recta $y = x$, pues esta reflexión corresponde a la acción de intercambiar el orden de los elementos de la pareja $(x, f(x))$. Ejemplificamos esta idea en el siguiente dibujo, que muestra las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$ y su inversa, $f^{-1}(x) = x^2$, con $x \geq 0$.

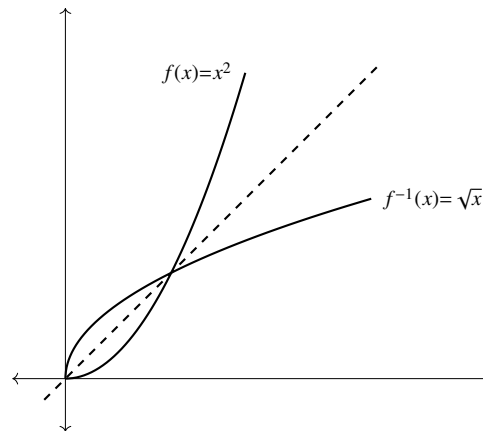


Figura 6.15:

Una manera de visualizar esta reflexión es dibujar la gráfica de f en una hoja de papel delgado y, tomándola por las esquinas que corresponden a los cuadrantes I ($x > 0, y > 0$) y III ($x < 0, y < 0$) darle la vuelta, de manera que la cara en blanco quede frente al observador. Puesta a contraluz, será posible ver la gráfica de f^{-1} desde el otro lado del papel.

6.3.2. Cálculo de funciones inversas

Si f es una función biyectiva, sabemos por la sección anterior que la función inversa de f , f^{-1} , existe. En algunos casos esta información puede ser suficiente, pero en algunos otros es necesario contar con una expresión explícita para la regla de correspondencia de f^{-1} . En esta sección veremos cómo encontrar dicha expresión en los casos más simples.

El método es como sigue: supongamos que la función f relaciona a $x \in \text{Dom}(f)$ con $y \in \text{Cod}(f)$; es decir,

$$f(x) = y. \quad (6.2)$$

Buscamos una regla de correspondencia que invierta esta expresión; en otras palabras, queremos expresar a x como función de y . Una manera de lograr esto es despejando x de la expresión $f(x) = y$, lo que resultará en una expresión del tipo

$$x = g(y). \quad (6.3)$$

Con ayuda de las ecuaciones (6.2) y (6.3) es posible mostrar que g es efectivamente la función inversa de f :

$$f(g(y)) = f(x) = y, \quad g(f(x)) = g(y) = x.$$

En teoría, este método funciona siempre. En la práctica, muchas veces resulta muy complicado (o de plano imposible) despejar a x de la ecuación (6.2).

Veamos algunos casos más o menos sencillos:

Ejemplo:

Sea $f(x) = 3x + 1$. Encontrar f^{-1} (si es que existe).

En primer lugar, observamos que la función f es biyectiva, de modo que tiene sentido buscar su función inversa. Una vez que sabemos que el objeto que estamos buscando realmente existe, nos podemos plantear la pregunta de cómo encontrarlo. De acuerdo a la exposición de arriba, buscamos resolver la expresión $y = 3x + 1$. Un poco de manipulación algebraica muestra que entonces $x = \frac{y-1}{3}$; es decir, $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$.

Ejemplo:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Encontrar f^{-1} (si es que existe).

Notemos que $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ y $\text{Cod}(f) = \mathbb{R}$ (como siempre que no se especifica nada sobre el codominio). Dado que $\text{Ran}(f) = [0, \infty)$, se tiene que f no es suprayectiva. Sin embargo, sí es inyectiva, y de acuerdo a lo expuesto antes, f^{-1} sí existe (en realidad lo que existe es la función inversa de $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, pero identificamos a \tilde{f}^{-1} con f^{-1}). De estas observaciones se concluye que f^{-1} tendrá dominio $[0, \infty)$ y codominio $[0, \infty)$. En cuanto al cálculo de la regla de correspondencia, hacemos $y = \sqrt{x}$ y al despejar obtenemos $y^2 = x$, lo que nos dice que $f^{-1}(y) = y^2$.

Insistimos en el hecho de que $\text{Dom}(f^{-1}) = [0, \infty)$, y $\text{Cod}(f^{-1}) = [0, \infty)$. Este detalle tiene su importancia, porque la función $g(x) = x^2$, que tiene la misma regla de correspondencia que f^{-1} , no tiene función inversa, dado que no es inyectiva.

Ejemplo:

Sea $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = \cos(x)$. Encontrar f^{-1} (si es que existe).

Al igual que en el caso anterior, f es una función inyectiva pero no suprayectiva. Para que tenga función inversa será necesario restringir su codominio y trabajar con la función $\tilde{f} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ (que en un pequeño abuso de notación denotamos también por f), que es biyectiva. Para encontrar la regla de correspondencia de f^{-1} , habría que despejar x de la ecuación $y = \cos(x)$, lo cual es imposible de hacer por medio de manipulación algebraica. Este es un ejemplo en el que el método descrito aquí no resulta útil. El hecho de que no

podamos calcular la regla de correspondencia de f^{-1} no afecta en nada su existencia.

6.3.3. Ejercicios de la sección

1. **Basado en un ejercicio de [1]** Di si los siguientes pares de funciones son inversas entre sí.

a) $f(x) = 3x + 1, g(x) = x - \frac{1}{3}$.

b) $f(x) = x^3 - 10, g(x) = \sqrt[3]{x} + 10$.

c) $f(x) = -8 + 4x, g(x) = \frac{x}{4} + 2$.

d) $f(x) = \frac{1}{x-2}, g(x) = \frac{1}{x} + 2$.

e) $f(x) = (x+3)^2, g(x) = (x-3)^2$.

2. En cada caso, encuentra la función inversa de la función dada. Es posible que sea necesario restringir el codominio para obtener una función biyectiva.

a) $f(x) = 4x - 9$

b) $g(x) = \frac{5x-2}{4}$

c) $h(x) = -\frac{3}{x}$

d) $p(x) = x^3$

e) $q(x) = (x-2)^3 + 9$

f) $r(x) = \frac{1}{x^2+1}$, con $\text{Dom}(q) = [0, \infty)$.

g) $\alpha(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$. ¿Por qué es necesaria esta condición?

h) $\beta(x) = \alpha \circ \alpha$, donde $\alpha(x) = ax + b$, con $a \neq 0$.

i) $\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

3. Explica por qué la función $f(x) = [x]$ no tiene función inversa.
4. Explica por qué la función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ con regla de correspondencia $f(x) = [x]$ sí es biyectiva. ¿Cuál es su función inversa? ¿Cuál es la diferencia con el inciso anterior?
5. ¿Cuál es la función inversa de $\text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?
6. ¿Cuál es la función inversa de $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con regla de correspondencia $f(x) = 1/x$?

7. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea inyectiva pero no suprayectiva. Verifica que la gráfica de la relación inversa (obtenida con el procedimiento explicado en 6.3.1) no corresponde a la gráfica de una función.
8. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea suprayectiva pero no inyectiva. Verifica que la gráfica de la relación inversa (obtenida con el procedimiento explicado en 6.3.1) no corresponde a la gráfica de una función.
9. La función $\alpha(x) = \text{sen}(x)$ no es suprayectiva ni inyectiva. Haciendo $\text{Cod}(\alpha) = [-1, 1]$, tendremos una función suprayectiva pero no inyectiva. Si además restringimos el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, obtendremos una nueva función $\tilde{\alpha} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ biyectiva, y por lo tanto con inversa. Haz restricciones similares para $\beta(x) = \text{cos}(x)$ y $\gamma(x) = \text{tan}(x)$ para obtener funciones biyectivas. Nota que, en cada caso, hay muchas maneras (de hecho infinitas) de hacer esto.
10. En cada caso, encuentra la gráfica de la función inversa a la función dada.
 - a) $\alpha : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1], \alpha(x) = \text{sen}(x)$.
 - b) $\beta : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \beta(x) = \text{cos}(x)$.
 - c) $\gamma : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(x) = \text{tan}(x)$.

Estas funciones reciben el nombre de *arcoseno*, *arcocoseno* y *arcotangente*, respectivamente. Como se dijo en el ejercicio anterior, la elección de los dominios de α , β y γ es arbitraria. Sin embargo, las que se usan aquí son las más comunes por ser las más cercanas al origen.

11. Encuentra dominios y codominios adecuados para que las funciones $\text{cot}(x)$, $\text{sec}(x)$ y $\text{csc}(x)$ sean biyectivas y por lo tanto invertibles. (Sugerencia: ¿cuáles son los criterios sobre la gráfica de una función para saber si es inyectiva o suprayectiva?)
12. Encuentra las gráficas de las funciones inversas del inciso anterior.

6.4. Ejercicios del capítulo

1. Di si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifica tu respuesta.
 - a) La suma de dos funciones constantes no necesariamente es una función constante.
 - b) El producto de dos funciones constantes es una función constante.

- c) Para cualquier función f , siempre es posible calcular las funciones $f + f$ y ff .
- d) Para cualquier función f , siempre es posible realizar la composición $f \circ f$.
- e) Para cualquier función f , se tiene que $f \circ f = ff$.
- f) $\frac{g}{g+h} = \frac{1}{h}$ para cualesquiera funciones g y h .
- g) Si $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ entonces se puede realizar la composición $f \circ g$, y $\text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}(f)$.
- h) La igualdad $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ para cualesquiera funciones f, g con $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$.
2. Recordemos que Id , la función identidad, tiene regla de correspondencia $\text{Id}(x) = x$. Resuelve los siguientes incisos:
- a) Expresa a la función $p(x) = 5x^4$ como resultado de aplicar ciertas operaciones con funciones a la función Id .
- b) Expresa a la función $p(x) = 4x^3 - 7x^2 + 1$ como resultado de aplicar ciertas operaciones con funciones a la función Id .
- c) Generalizando los dos incisos anteriores, convéncete de que cualquier polinomio (es decir, cualquier función de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes) se puede expresar como resultado de aplicar operaciones con funciones a la función Id .
- d) Finalmente, muestra que cualquier función que sea cociente de polinomios (es decir, cualquier función de la forma $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde p y q son polinomios con $q \neq 0$) se puede expresar como resultado de aplicar operaciones con funciones a Id .
3. La función $c(x)$ representa los gastos de cierta empresa en el mes x , la función $v(x)$ representa las ventas de esas misma empresa en el mes x . Usando operaciones de funciones, encuentra una función que represente las ganancias netas de dicha empresa en el mes x .
4. Para un gas ideal, la presión es directamente proporcional a la temperatura e inversamente proporcional al volumen que ocupa, de manera que $P = \lambda \frac{T}{V}$, donde λ es una constante. Si tanto T como V son funciones del tiempo t , entonces la presión también

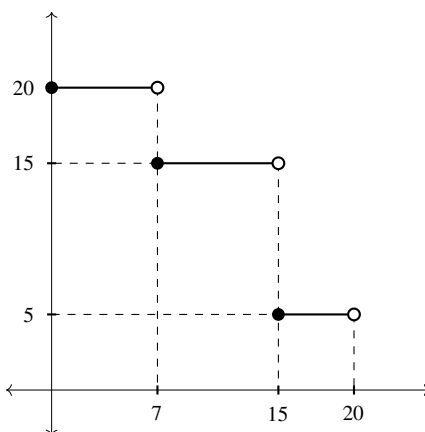
lo será. De hecho se tendrá que

$$P(t) = \lambda \frac{T(t)}{V(t)}.$$

Con base en esto, responde las siguientes preguntas:

- Si la temperatura permanece constante y el volumen disminuye con el paso del tiempo (como en un globo que está siendo aplastado) ¿qué pasa con la presión?
 - Si el volumen permanece constante y la temperatura disminuye con el paso del tiempo (como en un tanque de gas LP que se pone a enfriar) ¿qué pasa con la presión?
 - Ahora supongamos que la presión permanece constante y el volumen aumenta (como en un globo elástico al que se le mete cada vez más aire) ¿Qué pasa con la temperatura?
 - Por último, expresa la temperatura como función de la presión y el volumen.
5. El consumo de aire de un buzo (es decir, la cantidad de litros de aire a presión de una atmósfera que consume) es una función de la presión a la que se encuentra (que depende directamente de su profundidad) y del tiempo transcurrido. En fórmulas, tenemos $\text{Consumo} = 14 \left(\frac{\text{Prof}(t)}{10} + 1 \right) t$ donde $\text{Prof}(t)$ es la función profundidad medida en metros y $14 \frac{lt}{min}$ es el consumo de litros de aire por minuto a presión de una atmósfera.

Encuentra la cantidad de litros de aire consumidos si la gráfica de la función profundidad es como sigue:



6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Muestra que $f \circ f = 0$, la función constante cero.

7. Considera las funciones constantes (es decir, las funciones de la forma $f_c(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ (donde el subíndice c de f_c indica que ésta depende de ese valor c) y la función $g(x) = x$. ¿Cómo son las gráficas de las funciones de la forma $f_c g + f_d$?
8. Muestra que $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$. Esto es, muestra que para cualquier x , se tiene que $((f + g) \circ h)(x)$ coincide con $(f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)$.
9. Muestra mediante un ejemplo que $f \circ (g + h)$ no necesariamente es igual a $(f \circ g) + (f \circ h)$. Es decir, encuentra funciones f , g y h tales que las funciones $f \circ (g + h)$ y $(f \circ g) + (f \circ h)$ no sean iguales. [SUGERENCIA: Haz $f(x) = x^2$.]
10. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria. Encuentra dominio y regla de correspondencia de la función $\frac{f}{f}$. ¿En qué caso se tendrá que $\text{Dom}\left(\frac{f}{f}\right) = \emptyset$?
11. ¿Cómo debe de ser la gráfica de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para que f sea su propia inversa? Sugerencia: usa el resultado principal de 6.3.1.
12. En este ejercicio encontramos las inversas de las funciones $f_c(x) = x + c$, $g_c(x) = cx$, y mostramos que la función $h_c(x) = x^c$ no necesariamente es invertible.
- Sea $f_c(x) = x + c$, donde $c \in \mathbb{R}$. Muestra que f_c y f_{-c} son funciones inversas.
 - Sea $g_c(x) = cx$, donde $c \in \mathbb{R}$. Muestra que g_c y $g_{1/c}$ son funciones inversas (si $c \neq 0$).
 - Explica por qué en general no es cierto que $h_c(x) = x^c$ y $h_{1/c} = x^{1/c}$ sean funciones inversas, para $c \in \mathbb{Q}$. Sugerencia: ¿qué pasa cuando $c = 2$?
13. El kilo de arroz, vendido a granel, cuesta \$ 15.
- Encuentra una función f que relacione peso a comprar con precio a pagar.
 - Encuentra el inverso de la función f . En este contexto, ¿cómo se interpreta a la función f^{-1} ?
14. La función $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ para $t \geq 0$, describe la posición de un objeto que se deja caer libremente y es sujeto a la atracción gravitacional de la Tierra ($g \approx 9.81m/s^2$ es la aceleración que la Tierra produce en un objeto cercano a ella). Explica por qué s es

una función invertible, encuentra su función inversa y dale una interpretación en este contexto.

15. Cuando se avienta un objeto verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 , su posición está descrita por la función $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$, donde g es como en el ejercicio anterior.
 - a) Explica intuitivamente por qué s no es una función inyectiva.
 - b) Muestra dos valores distintos de t que tengan la misma imagen bajo s .
 - c) Con base en los incisos anteriores, explica por qué no es posible determinar el momento de lanzamiento del objeto a partir solamente de la posición del objeto.
 - d) Contrasta tu respuesta al inciso anterior con la del problema precedente.
16. **Ejercicio tomado de [1]** Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones invertibles. Muestra que $g \circ f$ también lo es. Sugerencia: El hecho de que f y g sean invertibles garantiza la existencia de f^{-1} y g^{-1} .
17. **Ejercicio tomado de [1]** Sea f una función impar e invertible. Muestra que f^{-1} es también una función impar.
18. Explica por qué una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea par no puede ser invertible.
19. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función invertible. Basándote en los dos ejercicios anteriores, ¿se concluye necesariamente que f debe ser impar?
20. **Ejercicio tomado de [1]** Considera la función $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Encuentra $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-3)$ y $f^{-1}(5)$. Sugerencia: encuentra números a, b, c tales que $f(a) = 1$, $f(b) = -3$, $f(c) = 5$. Una vez que los tengas, ¿cómo usarlos para encontrar lo que se pide?

Apéndice A

Apéndice: ecuaciones y desigualdades

Una de las herramientas que se necesitan en el capítulo 2 es la resolución de ecuaciones y desigualdades, para encontrar la imagen inversa de un punto o de un intervalo bajo una función. En este apéndice daremos una introducción a estos dos temas, suficiente apenas para comprender la teoría y resolver los ejercicios de dicho capítulo. Desde luego, las aplicaciones de la resolución de ecuaciones y desigualdades no se reducen sólo a esto, sino que son muy extensas.

A.1. ¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones (muchas veces algebraicas) al menos una de las cuales involucra una incógnita, que es una letra que representa alguna cantidad desconocida.

Por ejemplo, si igualamos las expresiones $x + 1$ y 2 , se obtiene la ecuación $x + 1 = 2$. Puede ser que ambas expresiones involucren a la incógnita: $x + 1 = 7x - 2$ también es una ecuación. Al igualar las expresiones $1 + 3$ y $8 - 4$ se obtiene la igualdad $1 + 3 = 8 - 4$. Esta igualdad es cierta, pues ambos lados son iguales; no se trata de una ecuación, pues no hay ninguna incógnita. Al igualar las expresiones $2 + 3$ y $7 + 1$ se obtiene una igualdad falsa: $2 + 3 = 7 + 1$, que tampoco es una ecuación.

Las expresiones a igualar pueden involucrar cualquiera de las funciones vistas en el texto, como valor absoluto, mayor entero, potencias o raíces, o cualquiera de las funciones trigonométricas.

También es posible tener ecuaciones con más de una incógnita, como $2x + 3y = 1$, o $4x - y = \frac{x+y}{2}$. En este texto nos limitamos a ecuaciones con a lo más dos incógnitas, aunque la mayoría de ellas tendrán una sola.

Es común pensar a una ecuación como una relación que cumple una (o varias) cantidades desconocidas (que son las incógnitas). La idea de resolver una ecuación consiste entonces en encontrar el valor —o los valores— de las incógnitas que hagan cierta esa relación.

A.2. ¿Qué significa resolver una ecuación?

Una solución de una ecuación es un valor de la incógnita (o un valor de cada una de las incógnitas, si se trata de una ecuación con dos variables) con la propiedad de que al sustituirlo en la ecuación se obtiene una igualdad verdadera. Por ejemplo, en la ecuación

$$2x + 1 = 11,$$

$x = 5$ es una solución, puesto que $2(5) + 1 = 11$. $x = 0$ no es solución, porque al substituir este valor para x en la ecuación original, se obtiene $2(0) + 1 = 11$, lo cual no es verdadero.

Verifiquemos ahora que $x = 1/2$ es solución de la ecuación $8x - 5 = -1$. Simplemente hay que substituir el valor $x = 1/2$, y verificar que la igualdad así obtenida es verdadera: $8(1/2) - 5 = -1$, que se transforma en $4 - 5 = -1$, que es cierta.

¿Qué pasa en el caso de una ecuación con dos variables? La idea sigue siendo la misma: substituir cada incógnita por su valor y comprobar si se da o no la igualdad entre ambos lados. Por ejemplo, al considerar la ecuación $x + y = 1$, se tiene que $x = 1, y = 0$ es una solución, porque al substituir x por 1 y y por 0, se obtiene $1 + 0 = 1$, que es una igualdad verdadera.

Es probable que el lector se esté preguntando por qué decimos “una” solución y no “la” solución. La razón, tal vez sorprendente, es que hay ecuaciones con más de una solución. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 9$ tiene dos soluciones: $x = 3$ (que es la más conocida) y $x = -3$. De hecho, hay ecuaciones con una infinidad de soluciones, como $3x + 5 = x + 4 + x + 1 + x$, o $\sin(x) = 0$ (ver capítulo sobre funciones trigonométricas para este último ejemplo). Es un ejercicio para el lector verificar que $x = 4, y = -3$ y $x = -1, y = 2$ son soluciones de la ecuación con dos incógnitas $x + y = 1$. De hecho, esta ecuación tiene infinitas soluciones.

Por otro lado, también hay ecuaciones que no tienen solución. Un caso de esto nos lo da la ecuación $x^2 = -1$. ¿Cómo verificar que ningún número real satisface esto? Hacer todas las

substituciones es imposible, puesto que hay un número infinito de valores para x . Necesitamos entonces un método indirecto: observa que, sin importar cuál sea el valor de x , se tiene que $x^2 \geq 0$ (esto es una consecuencia de las leyes de los signos). Por otro lado, se tiene que $-1 < 0$. Esto muestra que x^2 y -1 no pueden nunca ser iguales (si lo fueran, los dos serían positivos o los dos negativos, pero acabamos de mostrar que uno es siempre positivo (o cero) mientras que el otro es siempre negativo). Se concluye entonces que la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución.

Con lo que sabemos hasta ahorita es posible resolver algunas ecuaciones sencillas, como $x+9 = 71$, o $x+298 = 731$. Todo lo que hay que hacer es darle a x distintos valores hasta que se obtenga una igualdad verdadera. En este último ejemplo, después de varias substituciones (que debe intentar el lector antes de seguir leyendo), se puede concluir que $x = 433$ es una solución. Desde luego, este método pierde su poder rápidamente: intentar resolver así la ecuación $6x^2 + x - 6 = 0$ se puede volver frustrante, además de que nada garantiza que se hayan encontrado todas las soluciones.

En la siguiente sección veremos un método para resolver los tipos más simples de ecuaciones.

A.3. Resolución de ecuaciones lineales

Nuestro método para resolver ecuaciones está basado en una observación básica, que es la siguiente:

Observación 5. Si f es una función y $a = b$, entonces $f(a) = f(b)$.

Esto es una consecuencia inmediata de la definición de función, que dice que un objeto del dominio está relacionado con exactamente un objeto del codominio. Al aplicar esta observación a las funciones $f(x) = x + c$ y $g(x) = xc$, se obtienen las siguientes dos reglas, que son la base de nuestro desarrollo posterior.

Regla 1. Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

y

Regla 2. Si $a = b$ entonces $ac = bc$.

Otras reglas irán apareciendo a lo largo del texto, pero éstas son las fundamentales para comprender el resto de la exposición. Primero, asegurémonos de entender lo que dicen: la regla 1 nos dice que si tenemos dos expresiones iguales, al sumarles una tercera expresión

a cada una de ellas, se sigue conservando la igualdad. Esto debe ser claro cuando en ambos lados de la igualdad hay únicamente números. Por ejemplo: $5 = 5$ y por lo tanto $5 + 7 = 5 + 7$ (puesto que ambos lados dan 12). Veamos un caso menos obvio: $4 = 3 + 1$, de donde se tiene que $4 + 11 = 3 + 1 + 11$, lo cual se ve claramente al hacer las operaciones correspondientes: ambos lados dan 15. Ahora bien, los casos realmente útiles aparecen cuando en alguno de los dos lados aparecen una o más incógnitas. Un ejemplo de esto es el siguiente: $x - 8 = 10$. Observemos qué pasa si, de acuerdo a la regla 1 sumamos 8 a cada lado: $x - 8 + 8 = 10 + 8$. Dado que $-8 + 8 = 0$, se tiene que el lado izquierdo es simplemente x , mientras que el derecho es 18. Esto es, $x = 18$. En resumen, hemos hecho lo siguiente:

$$\begin{aligned}x - 8 &= 10 \\x - 8 + 8 &= 10 + 8 \\x + 0 &= 18 \\x &= 18\end{aligned}$$

En este ejemplo particular, sumar 8 a cada lado de la igualdad resultó útil porque permitió dejar a la x sola; es decir, permitió resolver la ecuación. En otros casos, el número que se deba sumar puede cambiar. Nuestro segundo ejemplo está dado por la ecuación $x + 4 = 17$. ¿Qué número tenemos que añadir para que al sumarlo con $x + 4$ nos dé simplemente x ? Esto es equivalente a preguntarse qué número añadirle a 4 para que dé 0. El número buscado es -4 . Se tiene entonces, añadiendo -4 a ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned}x + 4 &= 17 \\x + 4 + (-4) &= 17 + (-4) \\x + 0 &= 13 \\x &= 13\end{aligned}$$

Es decir, la solución de esta ecuación es $x = 13$.

Hay que notar también que la regla 1 es cierta independientemente de si su uso simplifica la resolución de la ecuación o no. En el caso anterior, podríamos haber sumado 5 de cada lado, obteniendo $x + 4 + 5 = 17 + 5$, que al hacer las operaciones se vuelve $x + 9 = 22$. La observación es que esta última expresión se dedujo correctamente de la ecuación original. Que no sea útil para resolverla no la hace menos válida. Esto es, al sumar cantidades iguales podemos simplificar la ecuación o no, pero en cualquier caso es posible seguir trabajando con la nueva igualdad para resolver la ecuación.

Veamos ahora otro caso un poco más elaborado. Intentemos resolver la ecuación $-5x = 9 - 6x$. Lo que se tiene que hacer aquí es sumar una expresión adecuada para eliminar el $-6x$ que aparece del lado derecho de la ecuación. Dicha expresión necesariamente involucra a x ,

porque si no, sería imposible que cancelara el término $-6x$. Sumemos $6x$ y observemos qué sucede. Se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} -5x &= 9 - 6x \\ -5x + 6x &= 9 - 6x + 6x \\ x &= 9 \end{aligned}$$

La ecuación está resuelta y la solución es $x = 9$.

Veamos ahora un ejemplo que requiera el uso de la regla 2. Resolvamos la ecuación $2x = 13$. La idea, análoga a la anterior, es multiplicar ambos lados de la ecuación para que desaparezca el 2 que multiplica a x . Tenemos entonces que encontrar un número que al multiplicarlo por 2 nos dé como resultado 1 (ya que $1x = x$). Dicho número es $1/2$, de modo que, usando la regla 2, se tiene $\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}13$, de donde se obtiene $x = \frac{13}{2}$. Es un ejercicio para el lector verificar que esto es una solución de la ecuación original.

La misma regla 2 sirve para resolver una ecuación como $\frac{x}{3} = 17$. En este caso necesitamos eliminar el 3 que divide a x . En otras palabras, necesitamos un número que al multiplicarlo por $1/3$ dé como resultado 1. Dicho número es 3. Se tiene entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= 17 \\ 3\left(\frac{x}{3}\right) &= 3(17) \\ 1x &= 51 \\ x &= 51. \end{aligned}$$

Una vez más, es tarea del lector verificar que $x = 51$ es realmente una solución de $\frac{x}{3} = 17$.

Finalmente, es posible combinar las dos reglas anteriores para resolver ecuaciones que involucren tanto suma como producto. Ilustremos esta idea resolviendo la ecuación $5x + 12 = 2x + 9$. La idea es desaparecer el 12 del lado izquierdo de la ecuación (sumando -12 de ambos lados) y luego desaparecer el $2x$ del lado derecho (sumando $-2x$ de ambos lados). Para esto, necesitamos usar dos veces la regla 1:

$$\begin{aligned} 5x + 12 &= 2x + 9 \\ 5x + 12 + (-12) &= 2x + 9 + (-12) \\ 5x &= 2x - 3 \\ 5x + (-2x) &= 2x - 3 + (-2x) \\ 3x &= -3. \end{aligned}$$

Para terminar, multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{3}$, obteniendo $x = -1$.

A.3.1. Ejercicios de la sección

Resuelve la siguientes ecuaciones con base en las reglas 1 y 2.

1. $2x - 1 = 4$

7. $-5x + \frac{1}{2} = x - 3$

2. $-2 = x - 7$

8. $-x + \frac{1}{3} = \frac{x + 4}{-1}$

3. $-7x + 8 = 0$

4. $5x + 1 = 2x - 8$

5. $\frac{x + 2}{3} = -4$

9. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}x + 3$

6. $\frac{x + 1}{2} = \frac{x - 2}{3}$

10. $7x - 1 = 8 + 7x$

A.4. Resolución de ecuaciones cuadráticas

Uno de las funciones más usadas en el texto es $f(x) = x^2$ y diferentes modificaciones de ella. En esta sección estudiamos cómo resolver ecuaciones cuadráticas, esto es, ecuaciones donde la x aparece elevada al cuadrado (y a ninguna potencia mayor).

La regla básica para tratar con este tipo de ecuaciones (además, por supuesto, de las dos anteriores) es la siguiente:

Regla 3. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Muchos de nosotros hemos cometido el error de pensar que $\sqrt{a^2} = a$. Esto es falso si $a < 0$. Por ejemplo, si $a = -1$, se tiene que $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.

La regla 3 nos permitirá convertir una ecuación cuadrática en una que involucre únicamente valor absoluto, de manera que será indispensable saber resolver ecuaciones que involucren esta expresión. Para esto, necesitamos la siguiente

Regla 4. Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$.

Esto quiere decir que la ecuación $|x| = a$ tiene dos soluciones (si $a \neq 0$), que son precisamente $x = a$ y $x = -a$. A veces resumimos estas dos expresiones escribiendo $x = \pm a$. Ejemplificando para aclarar, tenemos que si $|x| = 3$, entonces x puede tomar los valores 3 o -3 y hacer

cierta la igualdad; es decir, tanto 3 como -3 son soluciones de la ecuación $|x| = 3$. El razonamiento para resolver ecuaciones como $|2x + 1| = 7$ es similar, como se ve a continuación. Hay dos valores que puede tomar $2x + 1$ para que su valor absoluto sea 7: -7 y 7 . De aquí se tiene que $2x + 1 = 7$, o bien $2x + 1 = -7$. La ventaja es que ya sabemos cómo resolver estas ecuaciones, pues ya no involucran valor absoluto. De la primera se obtiene $x = 3$ y de la segunda $x = -4$ (es un ejercicio para el lector hacer los pasos que llevan a estas conclusiones). En resumen, la ecuación $|2x + 1| = 7$ tiene dos soluciones: $x = 3$ y $x = -4$.

Con esto en mente, podemos resolver ya algunas ecuaciones cuadráticas. Empecemos resolviendo $x^2 = 25$. Aplicando la observación 5, con la función raíz cuadrada, se tiene que $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$ y por lo tanto $|x| = 5$ (según la regla 3). De aquí que, aplicando la regla 4, se tenga $x = 5$ o $x = -5$.

El razonamiento para resolver ecuaciones como $(x - 2)^2 = 20$ es muy similar: primero aplicamos la función raíz cuadrada de ambos lados y luego resolvemos la ecuación con valor absoluto que resulta de ahí. En detalle, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &= 20 \\ \sqrt{(x - 2)^2} &= \sqrt{20} \\ |x - 2| &= \sqrt{20} \\ x - 2 &= \sqrt{20} \quad \text{o} \quad x - 2 = -\sqrt{20} \\ x &= \sqrt{20} + 2 \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{20} + 2 \end{aligned}$$

Ahora bien, ¿qué pasa al intentar resolver ecuaciones como $x^2 + 2x + 1 = 4$? La idea básica es modificar el lado izquierdo de la igualdad para llevarlo a la forma $(x + a)^2$, de modo que su resolución sea similar a la del último ejemplo. Recordemos que $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Esto quiere decir que, si esperamos que $(x + a)^2$ sea igual a $x^2 + 2x + 1$, entonces se debe tener también $x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 2x + 1$. Igualando los coeficientes de x y los términos independientes, se tiene que $2a = 2$ y $a^2 = 1$. De aquí que $a = 1$. Dicho de otra manera, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Esto es muy útil, porque quiere decir que la ecuación que estamos tratando de resolver es equivalente a $(x + 1)^2 = 4$ (en este ejemplo corrimos con suerte, puesto que pudimos factorizar el lado izquierdo de la ecuación sin modificarlo). Finalmente, podemos resolver esta ecuación con el método aprendido antes: aplicando raíz cuadrada de ambos lados y luego resolviendo la ecuación con valor absoluto que aparece. Retomando

desde el principio, tenemos:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= 4 \\(x + 1)^2 &= 4 \\\sqrt{(x + 1)^2} &= \sqrt{4} \\|x + 1| &= 2 \\x + 1 = 2 \quad \text{o} \quad x + 1 = -2 \\x = 1 \quad \text{o} \quad x = -3\end{aligned}$$

Falta por analizar el caso en el que hay que modificar el lado izquierdo de la ecuación para poder factorizar. Estudiemos el ejemplo $x^2 - 6x + 10 = 17$. Si quisiéramos ver al lado izquierdo de la forma $(x + a)^2$, deberíamos tener

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 + 2ax + a^2 \tag{A.1}$$

Entonces, deberíamos tener $2a = -6$ y $a^2 = 10$. Si resolvemos la primera ecuación, se tiene que $a = -3$ y entonces $a^2 = 9 \neq 10$. Si resolvemos la segunda, entonces $a = \sqrt{10}$ y por lo tanto $2a = 2\sqrt{10} \neq -6$. O sea que no es posible resolver ambas ecuaciones simultáneamente.

Pero, si modificamos adecuadamente el lado izquierdo, esto será posible. La observación crucial es que es más sencillo modificar el término independiente que el término lineal (ya que si modificamos este último, aparecerá una x en el lado derecho de la ecuación, complicando todo). Así, hagamos $a = -3$, que hace iguales los dos términos lineales que aparecen en A.1, entonces $a^2 = 9$. La pregunta es ¿qué tenemos que hacer para que aparezca un término independiente 9 en el lado izquierdo? Restar 1. Retomando la ecuación original, tenemos

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 10 &= 17 \\x^2 - 6x + 10 + (-1) &= 17 + (-1) \\x^2 - 6x + 9 &= 16 \\(x - 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

y a partir de este punto el camino ya es conocido: aplicamos la función raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación y luego resolvemos la ecuación con valor absoluto que resulta:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - 3)^2} &= \sqrt{16} \\|x - 3| &= 4 \\x - 3 = 4 \quad \text{o} \quad x - 3 = -4 \\x = 7 \quad \text{o} \quad x = -1\end{aligned}$$

El lector puede verificar que, efectivamente, $x = 7$ y $x = -1$ son soluciones de la ecuación original, $x^2 - 6x + 10 = 17$.

A.4.1. Ejercicios de la sección

Resuelve las siguientes ecuaciones con base en las reglas estudiadas.

1. $x^2 = 10$

6. $3x^2 + 12x = 4$

2. $-3x^2 = -48$

7. $x^2 + 6x + 10 = 0$

3. $-(x + 2)^2 = -1$

8. $4x^2 = -4x - 1$

4. $x^2 - 2x + 1 = 100$

9. $3x^2 + 1 = 2x^2 + 2x + 36$

5. $x^2 - 6x - 16 = 0$

10. $5x^2 + x + 5 = \frac{16x^2 + 21}{4}$

A.5. ¿Qué es una desigualdad?

Informalmente podemos decir que una desigualdad es una ecuación en donde el signo $=$ ha sido reemplazado por alguno de los siguientes: $<$, \leq , $>$, \geq . Ejemplos de desigualdades con una variable son: $x < 7$, $2x + 1 \leq 8x + 1$, $1 > 3 - 4x$, mientras que $x + y < 1$, $x \leq 2y^2 + 1$, $x - 3y \geq 4x - 12$ son ejemplos de desigualdades con dos variables.

A.6. ¿Qué significa resolver una desigualdad?

Análogamente al caso de las ecuaciones, encontrar una solución para una desigualdad consiste en encontrar valores para las incógnitas de manera que al sustituirlas la relación que se obtenga sea verdadera. Por ejemplo, $x = -3, -1, 0, 0.5$ son soluciones de $x < 1$ porque las desigualdades $-3 < 1$, $-1 < 1$, $0 < 1$, $0.5 < 1$ son verdaderas. Por otro lado, $x = 2$ no es solución porque la desigualdad $2 < 1$ es falsa.

Casi todas las desigualdades tienen un número infinito de soluciones, pero también existen aquellas que tienen exactamente una, o incluso ninguna. Veamos un ejemplo de cada caso:

Desigualdad con exactamente una solución

$x^2 \leq 0$ sólo tiene la solución: $x = 0$. Para cualquier otro valor de x , se tiene que $x^2 > 0$, de modo que la única solución es la mencionada, $x = 0$.

Desigualdad sin soluciones

Modificando ligeramente el ejemplo anterior se obtiene una desigualdad sin soluciones: $x^2 <$

-1 (dado que $x^2 \geq 0$, se concluye que para ningún valor de x se tiene $x^2 < -1$).

Ahora bien, cuando se pide resolver una desigualdad, lo que se debe entender es que se piden encontrar todas sus posibles soluciones. Por ejemplo, las soluciones de $x < 2$ consisten de todas las x que son menores que 2. Esto es, las soluciones de $x < 2$ son los elementos del intervalo abierto $(-\infty, 2)$.

Observa que al considerar la desigualdad $x \leq 2$ (con \leq en vez de $<$) se tiene que 2 sí es solución de esta nueva desigualdad, aunque no lo fuera de la anterior. De hecho, las soluciones de esta desigualdad son los elementos del intervalo $(-\infty, 2]$.

Al conjunto de todas las soluciones de una desigualdad, se le conoce como *conjunto solución* de dicha desigualdad. Lo más común es que el conjunto solución de una desigualdad se pueda describir como un intervalo o como unión de ellos.

La siguiente tabla especifica los conjuntos solución de las desigualdades más simples:

Desigualdad	Conjunto solución
$x < a$	$(-\infty, a)$
$x \leq a$	$(-\infty, a]$
$x > a$	(a, ∞)
$x \geq a$	$[a, \infty)$

A.7. Resolución de desigualdades lineales

Como en el caso de las ecuaciones, casi toda la teoría está basada en una observación, que se enuncia en seguida:

Observación 6. Si f es una función creciente, entonces f conserva desigualdades. Es decir, $a < b$ implica $f(a) < f(b)$.

Si f es una función decreciente, entonces f invierte desigualdades. Es decir, $a < b$ implica $f(a) > f(b)$.

Estas afirmaciones son una consecuencia inmediata (tautológica, de hecho) de las definiciones de función creciente y decreciente. De aquí se deducen, al igual que antes, dos reglas que nos permiten operar con desigualdades y resolver algunos casos sencillos. El caso de la suma es completamente análogo al de las ecuaciones, pero el de la multiplicación tiene un detalle diferente. Veamos:

Regla 5. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

Regla 6. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Estas reglas son una consecuencia de la observación 6 aplicadas a las funciones $f(x) = x + c$ (creciente siempre) y $g(x) = cx$, (creciente si $c > 0$ y decreciente si $c < 0$).

Nota que la segunda parte de la regla 6 pide que el sentido de la desigualdad se invierta al multiplicar por un número negativo. Esto tiene sentido: $3 < 5$ es una desigualdad verdadera, pero si multiplicamos ambos lados por un número negativo, digamos -1 , no se tiene $-3 < -5$ (que es falso), sino $-3 > -5$ (que es verdadero).

Estas dos reglas (junto con nuestra experiencia previa para resolver ecuaciones) nos permite resolver algunas desigualdades:

Ejemplo:

Resolver la desigualdad $5x + 1 < 12$.

Usando la regla 5, se tiene que $5x + 1 + (-1) < 12 + (-1)$, de donde se tiene que $5x < 11$. Luego, multiplicando por $1/5$ (que es > 0 y por lo tanto conserva el sentido de la desigualdad) se tiene $\frac{1}{5}5x < \frac{1}{5}11$, de donde se concluye $x < \frac{11}{5}$. Así, el conjunto solución de esta desigualdad es $\left(-\infty, \frac{11}{5}\right)$.

Ejemplo:

Resolver la desigualdad $3x + 1 \leq 5x - 7$.

Primero, usemos la regla 5 dos veces para juntar todos los términos con x del lado izquierdo y todos los términos independientes del lado derecho:

$$\begin{aligned} 3x + 1 + (-1) &\leq 5x - 7 + (-1) \\ 3x &\leq 5x - 8 \\ 3x + (-5x) &\leq 5x - 8 + (-5x) \\ -2x &\leq 8 \end{aligned}$$

En este punto es necesario usar la regla 6. Es necesario multiplicar por $-\frac{1}{2}$, que es menor que cero, de forma que el sentido de la desigualdad se invertirá:

$$\begin{aligned} -2x &\leq 8 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)(-2x) &\geq -\left(\frac{1}{2}\right)8 \\ x &\geq -4, \end{aligned}$$

lo que nos dice que el conjunto solución de la desigualdad original, $3x + 1 \leq 5x - 7$, es $[-4, \infty)$.

Ejemplo:

En el capítulo 1 se hizo la afirmación de que entre dos números reales distintos siempre existe una infinidad de números reales. En este ejercicio veremos que esto es cierto. Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, se tiene que $x + x < y + x$, de modo que $2x < x + y$ y por lo tanto $x < \frac{x+y}{2}$. De manera similar, $x < y$ implica $x + y < 2y$ y por lo tanto $\frac{x+y}{2} < y$. Juntando estas dos desigualdades se tiene que

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Así, ya encontramos un número $a = \frac{x+y}{2}$ entre x y y . Repitiendo este procedimiento para x y a , encontraremos otro número real b entre x y a . Repetimos una vez más el procedimiento, ahora para x y b . Continuando de esta forma, se verifica la afirmación deseada. La idea se ilustra en el siguiente dibujo:

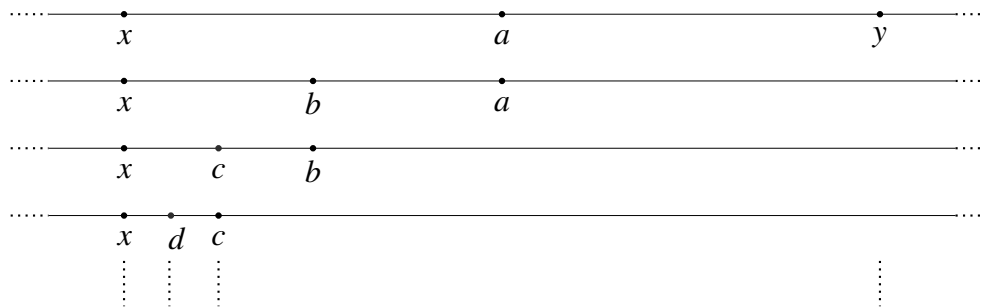


Figura A.1: $f(x) = |x|$

A.7.1. Ejercicios de la sección

Resuelve las siguientes desigualdades con base en las reglas estudiadas.

1. $3x + 1 \leq -2$

3. $x + 12 < 13 - 5x$

2. $1 - x \geq 1$

4. $7x - 2 < 13 - 5x$

5. $-4 - 2x < 10x + 8$

8. $\frac{5+x}{2} < \frac{1}{3}$

6. $5x - 2 + 7x \leq 0$

9. $\frac{3-x}{2} \leq 4 + \frac{1}{3}x$

7. $\frac{3-2x}{5} > 1$

10. $\frac{1-x}{3} \geq \frac{3-2x}{8}$

A.8. Desigualdades con valor absoluto

Las desigualdades que involucran valor absoluto aparecen con frecuencia en el estudio de la continuidad en cálculo diferencial. También son la base para un estudio más profundo de muchos temas de esta área.

Recordemos que la gráfica de la función $f(x) = |x|$ es como sigue:

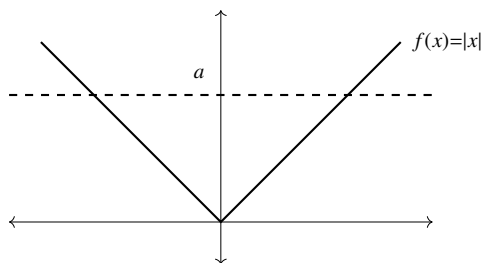


Figura A.2:

¿Cómo ayuda esto para resolver las desigualdades $|x| < a$ y $|x| > a$? Al resolver $|x| < a$ estamos buscando las x tales que su valor absoluto es menor que a . Esto es, buscamos las x cuya imagen queda por debajo de la recta horizontal $y = a$ que, de acuerdo a la gráfica, son las x que están entre $-a$ y a ; es decir, las x que cumplen las desigualdades $-a < x$ y $x < a$, que comúnmente abreviamos por $-a < x < a$. En otras palabras, las desigualdades $|x| < a$ y $-a < x < a$ son equivalentes.

Hagamos un análisis similar para la otra desigualdad que nos interesa: $|x| > a$. En este caso, buscamos las x cuya imagen queda por encima de la recta horizontal $y = a$, que de acuerdo a la gráfica son las x que cumplen $x < -a$ o $x > a$. Esto quiere decir que la desigualdad $|x| > a$ es equivalente a $x < -a$ o $x > a$.

En resumen, tenemos lo siguiente:

Regla 7. Si $|x| < a$ entonces $-a < x < a$.

Regla 8. Si $|x| > a$ entonces $x < -a$ o $x > a$.

Estas dos reglas son la base para resolver desigualdades más elaboradas que involucren valor absoluto. Por ejemplo, para resolver $|3x - 1| < 17$, usaremos la regla 7 para transformar la desigualdad en $-17 < 3x - 1 < 17$ (recordando que esta expresión es una abreviatura de las desigualdades $-17 < 3x - 1$ y $3x - 1 < 17$). Se resuelve esta última expresión usando las reglas ya conocidas:

$$\begin{array}{rcl} -17 < 3x - 1 < 17 \\ -17 + 1 < 3x - 1 + 1 < 17 + 1 \\ -16 < 3x < 18 \\ \frac{1}{3}(-16) < \frac{1}{3}3x < \frac{1}{3}18 \\ -\frac{16}{3} < x < 6. \end{array}$$

El último renglón muestra entonces que el conjunto solución de la desigualdad original es $\left(-\frac{16}{3}, 6\right)$.

La resolución de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ muestra el uso de la regla 8, que a veces resulta confuso por la “o” que involucra. Según la regla mencionada, esto se transforma en $2x + 3 < -9$ o $2x + 3 > 9$. Es posible resolver estas dos desigualdades con los métodos ya conocidos. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3 < -9 & \text{o} & 2x + 3 > 9 \\ 2x + 3 + (-3) < -9 + (-3) & \text{o} & 2x + 3 + (-3) > 9 + (-3) \\ 2x < -12 & \text{o} & 2x > 6 \\ \frac{1}{2}2x < \frac{1}{2}(-12) & \text{o} & \frac{1}{2}2x > \frac{1}{2}6 \\ x < -6 & \text{o} & x > 3 \end{array}$$

De donde se concluye que $x \in (-\infty, -6)$ o $x \in (3, \infty)$. Es decir, el conjunto solución de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ es $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$.

A.8.1. Ejercicios de la sección

Resuelve las siguientes desigualdades con base en las reglas estudiadas.

1. $|x| < 1$

3. $|x + 6| \leq 7$

2. $|x| \geq 2$

4. $|3 - x| > 8$

5. $|2x + 4| < 10$

8. $|5x + 2| \geq 0$

6. $\frac{|x - 1|}{3} \geq 9$

9. $\left|1 + \frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{3}$

7. $|2x + 1| \leq 0$

10. $\left|\frac{2x + 1}{3}\right| > 4$

A.9. Desigualdades cuadráticas

Sabiendo ya resolver desigualdades que involucran valor absoluto (al menos las que lo involucran en un solo lado de la expresión), estamos preparados para enfrentar desigualdades cuadráticas. La idea es esencialmente la misma que la que se usa para resolver ecuaciones cuadráticas: completar cuadrados y aplicar la raíz cuadrada, que se transforma, junto con el cuadrado, en un valor absoluto.

Falta tan solo analizar el comportamiento de la función $f(x) = \sqrt{x}$ al aplicarla a una desigualdad. Pero recordando que f es una función creciente, y haciendo uso de la observación 6 se tiene la siguiente

Regla 9. Si a y b son dos números no negativos tales que $a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Estamos listos, ahora sí, para resolver nuestro primer ejemplo de desigualdad cuadrática: $x^2 < 16$. Aplicando raíz cuadrada de ambos lados, y sabiendo que esta operación conserva la desigualdad, se tiene $\sqrt{x^2} < \sqrt{16}$. De aquí que $|x| < 4$ y por lo tanto $-4 < x < 4$. Se sigue que el conjunto solución es $(-4, 4)$.

Un ejemplo con un detalle más está dado por $x^2 - 2x + 1 \geq 20$. Al factorizar el lado izquierdo se tiene $(x - 1)^2 \geq 20$. Extrayendo raíz cuadrada en ambos lados, obtenemos $\sqrt{(x - 1)^2} \geq \sqrt{20}$; es decir, $|x - 1| \geq \sqrt{20}$. De aquí que $x - 1 \leq -\sqrt{20}$ o $x - 1 \geq \sqrt{20}$, y por lo tanto $x \leq -\sqrt{20} + 1$ o $x \geq \sqrt{20} + 1$. El conjunto solución es $(-\infty, -\sqrt{20} + 1) \cup (\sqrt{20} + 1, \infty)$.

Finalmente, veamos un caso en el que sea necesario completar el cuadrado para resolver la desigualdad: $x^2 + 6x + 1 \leq -2$. Como vimos en la parte de este apéndice correspondiente a ecuaciones, se busca modificar la expresión $x^2 + 6x + 1$ para que tenga la forma $x^2 + 2ax + a^2$. Esto obliga a hacer $a = 3$ y por lo tanto a sumar 8 en la desigualdad original (para completar

el cuadrado):

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 1 &\leq -2 \\x^2 + 6x + 1 + 8 &\leq -2 + 8 \\x^2 + 6x + 9 &\leq 6 \\(x + 3)^2 &\leq 6 \\\sqrt{(x + 3)^2} &\leq \sqrt{6} \\|x + 3| &\leq \sqrt{6},\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}-\sqrt{6} &\leq x + 3 \leq \sqrt{6} \\-3 - \sqrt{6} &\leq x \leq -3 + \sqrt{6}.\end{aligned}$$

De aquí se concluye que el conjunto solución es $[-3 - \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}]$.

A.9.1. Ejercicios de la sección

Resuelve las siguientes desigualdades con base en las reglas estudiadas.

1. $x^2 \leq 4$

2. $x^2 > 9$

3. $(x - 1)^2 < \frac{-1}{100}$

4. $(x + 2)^2 \geq \frac{1}{4}$

5. $x^2 + x + \frac{1}{4} \leq 1$

6. $x(x - 1) \leq \frac{15}{4}$

7. $4x^2 + 16x \geq -7$

8. $2x^2 - \frac{11}{4} < x^2 + 3x$

9. $(x - 1)(x + 2) \leq 1$

10. $2x^2 \leq \frac{24x + 245}{8}$

Bibliografía

- [1] Stitz, C., Zeager, J., PRECALCULUS, 2013,
www.stitz-zeager.com/szprecalculus07042013.pdf
- [2] Tradler, T., Carley, H., PRECALCULUS, 2012,
websupport1.citytech.cuny.edu/faculty/ttradler/Precalculus-Tradler-Carley.pdf
- [3] Collingwood, D., Prince, K., PRECALCULUS, 2010,
www.math.washington.edu/colling/HSMath120/TB201112.pdf
- [4] Chung, S. K., UNDERSTANDING BASIC CALCULUS, 2008,
www.mathdb.org/basic_calculus/BasicCalculus.pdf

Índice alfabético

- Cicloide, 171
- Codominio, 31
- Conjunto, 1
 - intersección, 14
 - potencia, 93
 - solución, 218
 - subconjunto, 11
 - unión, 14, 16
 - vacío, 2, 113
- Diferencia de conjuntos, 15, 17
- Divisor, 4
- Dominio, 31
 - natural, 36
- Ecuación, 209
- Ecuación, solución de una, 210
- Elipse, 171
- Función, 31
 - biyectiva, 115
 - como máquina, 32
 - constante, 34
 - continua, 48
 - creciente, 65
 - estrictamente creciente, 65
 - decreciente, 66
 - estrictamente decreciente, 66
 - derivada, 141
 - diagrama de, 32
 - discontinua, 48
 - ejemplos, 33
 - gráfica de una, 43
 - identidad, 34, 116, 192
 - impar, 73
 - inyectiva, 109
 - mayor entero, 38
 - par, 70
 - periódica, 158
 - periodo de una, 158
 - sobre, 110
 - sobreyectiva, 110
 - suprayectiva, 110
 - uno a uno, 109
 - valor absoluto, 38
- Gráfica, 43
 - desplazamiento horizontal, 60
 - desplazamiento vertical, 57
 - gráficas paralelas, 58
- Grado
 - binario, 168
 - centesimal, 168
 - minuto de, 169
 - segundo de, 169
- Grados
 - centígrados, 134
 - Fahrenheit, 134

Kelvin, 137

Identidad, 158
trigonométrica, 159
 cos de una suma, 170
 sen de una suma, 170
 del ángulo doble, 161

Imagen, 32
 de un punto, 32
 de un conjunto, 87

Incógnita, 209

Intersección de conjuntos, 16

Intervalo, 21
 abierto, 23
 cerrado, 23

Inverso
 aditivo, 185
 multiplicativo, 186

Número
 entero, 3
 natural, 3
 primo, 5

 racional, 6
 real, 7

Ordenada al origen, 126

Pendiente
 de una recta, 126
 dos rectas con la misma, 138, 139

Plano cartesiano, 29

Plano inclinado, 133

Preimagen, 98
 de un conjunto, 103
 de un punto, 98

Punto
 de intersección
 de dos rectas, 130

Radián, 146

Rango, 94

Recta
 tangente, 141

Rectas
 paralelas, 138, 139
 perpendiculares, 139, 140

Precálculo se terminó de imprimir en febrero de 2019,
en los talleres de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México,
San Lorenzo, 290, col. Del Valle, Del. Benito Juárez, C.P. 03100, México, DF.
El tiraje fue de 1000 ejemplares.
Cuidado de la edición: Ángeles Godínez Guevara
Diseño de la portada: Sergio Cortés Becerril
Difusión y distribución: Ana Beatriz Alonso Osorio



El autor de este libro tiene una maestría en matemáticas, que cursó en el Instituto de Matemáticas de la UNAM, y es pasante en filosofía por la misma universidad.

Desde 2006 pertenece a la planta de profesores-investigadores de la UACM, y piensa que el Taller de matemáticas debe ser una preparación para los cursos de cálculo más que un repaso de todo lo que se ha estudiado repetidas veces en la preparatoria. Esta idea —junto con el concepto matemático de función— es la espina vertebral de su curso, siendo este libro una formalización de las notas preparadas bajo este enfoque.

Este texto tiene como objetivo servir como auxiliar en el proceso de enseñanza-aprendizaje correspondiente al Programa de Integración de las carreras del Colegio de Ciencia y Tecnología de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, aunque su enfoque general espera que sea útil también en otros cursos preparatorios de otras instituciones, o como una introducción a temas básicos del Cálculo diferencial. El contenido del libro trata de familiarizar al lector con el concepto central de la materia: la función real de variable real. Para lograr esto, se le da prioridad a los ejemplos concretos, desarrollando algunos conceptos adicionales a partir de éstos.