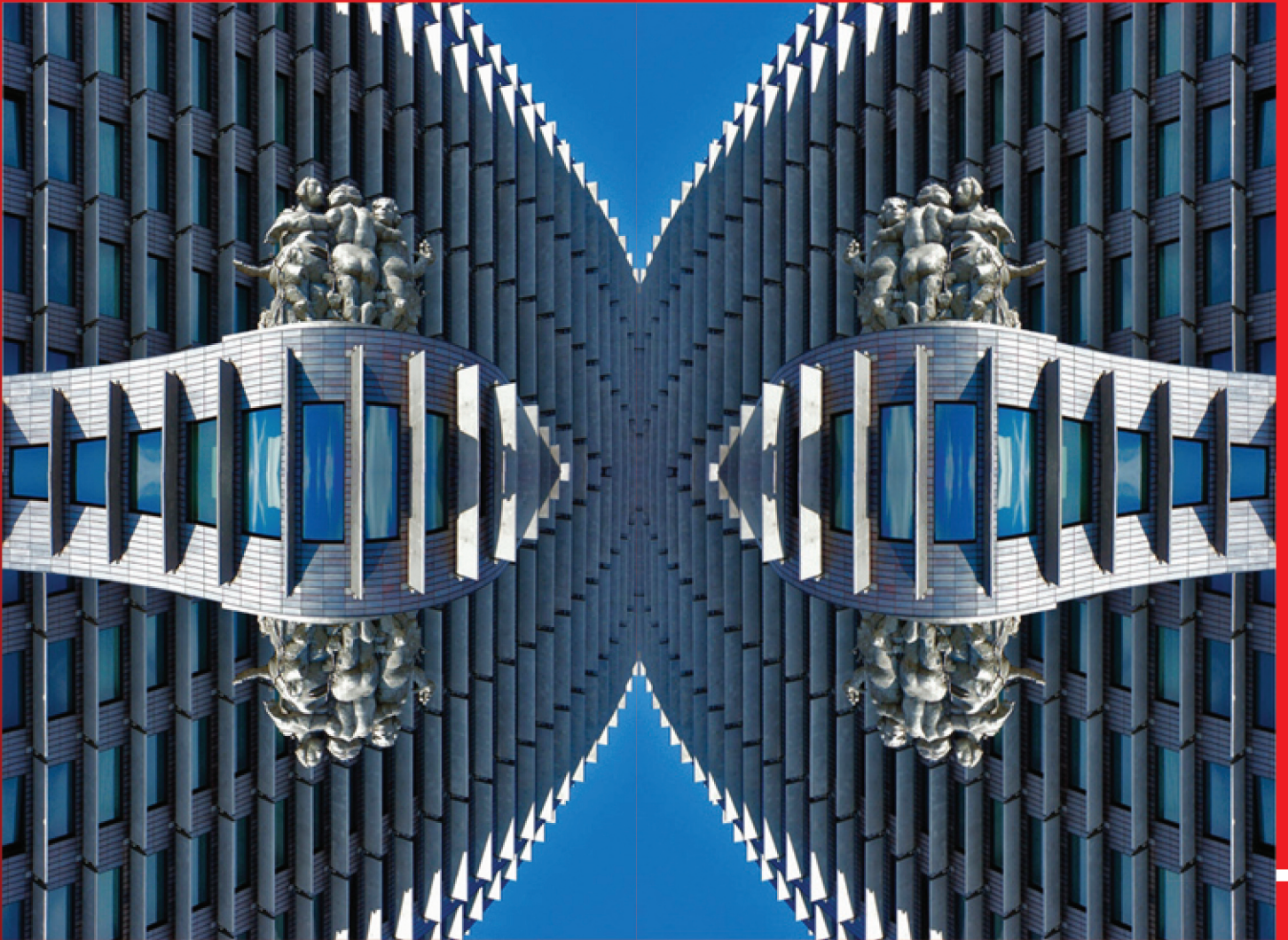


Problematario de Álgebra Lineal



Aarón Aparicio Hernández

Problematario de Álgebra Lineal

Problemario de Álgebra Lineal

Aarón Aparicio Hernández

UACM
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

Biblioteca
BE
del
Estudiante

Aparicio Hernández, Aarón, 1967- Problemario de álgebra lineal / Aarón Aparicio Hernández.– México, D.F. : UACM, Coordinación Académica, Colegio de Ciencia y Tecnología, Academia de Matemáticas, Ciclo Básico para Ingenierías, 2016.

187 p. : il. ; 27 cm. – (Biblioteca del estudiante)

“Distribución gratuita para los estudiantes de la UACM” – Reverso de la portada
Incluye índice y bibliografía 1. Álgebra lineal - Problemas, ejercicios, etc.

QA184.5 A63

Problemario de Álgebra Lineal
primera edición, 2016

© Aarón Aparicio Hernández

D.R. © Universidad Autónoma de la Ciudad de México
García Diego 168, Col. Doctores,
Del. Cuauhtémoc, C.P. 06720, México, D.F.

ISBN: 978-607-9465-20-9

Biblioteca del Estudiante: Biblioteca del Estudiante: [http://portal.uacm.edu.mx/
Estudiantes/BibliotecadelEstudiante/tabid/276/Default.aspx](http://portal.uacm.edu.mx/Estudiantes/BibliotecadelEstudiante/tabid/276/Default.aspx)

Material educativo universitario de distribución gratuita para estudiantes de la UACM.
Prohibida su venta

Hecho e impreso en México

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Dr. Vicente Hugo Aboites Aguilar
Rector

Lic. María Auxilio Heredia Anaya
Secretaria General

Dra. Micaela Rosalinda Cruz Monje
Coordinadora Académica

Mtro. Igor Peña Ibarra
Encargado de la Coordinación del Colegio de Ciencia y Tecnología

Eduardo Mosches Nitkin
Responsable de la Biblioteca del Estudiante

Al hacedor de sueños, por creer en los jóvenes

A Rose y Aarón Alberto, por alegrarme la vida

A mi abuelita Porfiria, por estar a mi lado y durante mi infancia

A mi madre y hermanos, por darme grandes momentos en la vida

A todos aquellos que me han acompañado en este viaje maravilloso...

Índice general

Introducción	II
1. Sistemas de ecuaciones lineales	1
1.1. Sistemas de ecuaciones lineales	1
1.2. Matriz inversa	7
1.3. Determinantes	16
1.4. Matriz adjunta	24
1.5. Aplicaciones de matrices inversas y determinantes	28
1.6. Aplicaciones prácticas de sistemas de ecuaciones lineales	47
1.7. Distribución de temperaturas	53
1.8. Balanceo de ecuaciones químicas	57
2. Vectores en el plano y en el espacio	63
2.1. Adición y sustracción de vectores	63
2.2. Magnitud y dirección de un vector	65
2.3. Ángulo formado por dos vectores	66
2.4. Producto vectorial	72
2.5. Planos en el espacio	77
3. Espacios vectoriales	81
3.1. Espacios vectoriales	81
3.2. Subespacios vectoriales	97

3.3. Combinación lineal y conjunto generador	102
3.4. Conjunto linealmente independiente y linealmente dependiente	109
3.5. Base y dimensión	112
3.6. Matriz de cambio de base	121
4. Transformaciones lineales	129
4.1. Transformaciones lineales	129
4.2. Núcleo de una transformación lineal	148
4.3. Imagen de una transformación lineal	151
4.4. Isomorfismos	155
5. Valores propios y vectores propios	167
5.1. Valores propios y vectores propios	167
5.2. Aplicaciones de valores propios y vectores propios	179
Bibliografía	185
Índice alfabético	187

Introducción

La presente obra tiene como propósito apoyar a los estudiantes de ingeniería del Colegio de Ciencia y Tecnología de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM). Durante los semestres que he impartido la materia de Álgebra lineal en esta casa de estudios, he observado que un porcentaje significativo de dichos estudiantes tienen problemas con los contenidos del programa de estudios y en parte se debe a que en el tema de sistemas de ecuaciones lineales, no logran aprender cómo escalonar matrices. El método de eliminación gaussiana es fundamental para abordar los temas subsecuentes, tales como: matriz inversa, rango e imagen de una matriz, diagonalización de matrices, etcétera; por consiguiente, este material ayudará al estudiante a fortalecer su aprendizaje. En él aparece una variedad de ejemplos resueltos con detalle, así como otros sin resolver y con alguna sugerencia al respecto. Es importante recalcar que, así como un gimnasta practica varias horas para perfeccionar sus técnicas, el estudiante deberá practicar con otros ejemplos y no conformarse con los que aparecen aquí. Cito unas palabras del matemático Alberto Barajas (1913-2004) «Jóvenes, las matemáticas no se aprenden viéndolas», decía en el salón de clases, «se aprenden haciéndolas. . . , el carpintero puede tener la mejor madera del mundo, pero no por ello hace los mejores muebles. . . , es un proceso continuo que se va mejorando todos los días, a base de trabajo, de imaginación y de un enorme esfuerzo, para lograr cada día mejores obras de arte».

A continuación presentamos un breve resumen de los temas que abarca el contenido de este libro:

El capítulo 1 trata los sistemas de ecuaciones lineales y se utilizan las matrices para determinar el conjunto solución. Además, se abordan otros métodos mediante la utilización de los determinantes y la matriz inversa, así como algunas aplicaciones en problemas de tránsito, circuitos eléctricos, temperatura y balanceo de ecuaciones químicas.

En el capítulo 2 se analizan los vectores en el plano y en el espacio. También se revisan algunos conceptos tales como: magnitud, dirección y ángulo entre dos vectores, así como el producto vectorial y la ecuación de un plano.

El capítulo 3 está dedicado a revisar los conceptos de espacio y subespacio vectorial, después se utilizan las combinaciones lineales y los conjuntos generadores para obtener

una base de un espacio vectorial. Todo ello para determinar la dimensión de un espacio vectorial; y finalizamos con la matriz de cambio de base.

El capítulo 4 comprende funciones entre espacios vectoriales, que se llaman transformaciones lineales, además, se define el núcleo y la imagen de una transformación lineal, para analizar mediante algún isomorfismo el tipo de estructura que tiene un espacio vectorial.

El capítulo 5 define los conceptos de valor propio y vector propio de una matriz a través de diversos ejemplos y finaliza con una aplicación.

Espero que este material les sea útil a todos ustedes.

Agradezco a la UACM y a la Biblioteca del Estudiante, por el apoyo que me brindaron para la impresión de este material, de manera especial a los profesores, Manuel Tec Canché y Rafael Torres Simón por la revisión y sugerencias valiosas que aportaron; cualquier error u omisión es exclusivamente de mi responsabilidad.

Aarón Aparicio Hernández

Sistemas de ecuaciones lineales

En este capítulo abordamos algunos temas que corresponden a los sistemas de ecuaciones lineales, analizamos los métodos más comunes para resolver sistemas de ecuaciones y mostramos una variedad de ejemplos.

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Uno de los temas más importantes de los cursos de Álgebra lineal es el de sistemas de ecuaciones lineales, de hecho, si bien existen varios métodos para resolverlos, iniciamos con el método básico pero muy importante y que se ocupa en los temas que se incluyen más adelante.

Operaciones elementales

- a) Intercambiar dos renglones cualesquiera.
- b) Multiplicar cualquier renglón por una constante (escalar) diferente de cero.
- c) Sumar o restar un múltiplo de uno de los renglones a otro renglón.

Cualquier sistema de ecuaciones lineales, por muy complicado que parezca, se le puede aplicar un número finito de operaciones elementales para resolverlo, como veremos a continuación. El método que veremos se le conoce como Eliminación Gaussiana (reducción o escalonamiento).

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, aplicando Eliminación Gaussiana, y diga si la solución es única o existe una infinidad de soluciones.

■ **Ejemplo 1.1.1.**

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 2x - y &= 9 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\therefore x = 5, y = 1$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 1(5) - 2(1) &= 5 - 2 = 3 \\ 2(5) - 1(1) &= 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.1.2.**

$$\begin{aligned} 6x + 5y &= -1 \\ x + y &= -1 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{interc. } r_1 \text{ y } r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - 6r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \therefore x = 4, y = -5$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 6(4) + 5(-5) &= 24 - 25 = -1 \\ 1(4) + 1(-5) &= 4 - 5 = -1 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.1.3.**

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\therefore x = 0, y = 0$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 1(0) - 2(0) &= 0 - 0 = 0 \\ 2(0) - 1(0) &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Observación: Cuando los valores encontrados son todos ceros, la solución se llama *trivial*.

■ **Ejemplo 1.1.4.**

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Analizando este sistema de ecuaciones, nos damos cuenta que, por lo menos, tiene la solución trivial, ¿habrá más soluciones?

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{interc. } r_1 \text{ y } r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} r_1 + 2r_2 \\ \frac{1}{10}r_2 \\ \frac{1}{5}r_3 \\ \frac{1}{7}r_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \therefore x = 0, y = 0$$

Comprobación:

$$3(0) + 4(0) = 0 + 0 = 0$$

$$1(0) - 2(0) = 0 - 0 = 0$$

$$2(0) + 1(0) = 0 + 0 = 0$$

$$2(0) + 3(0) = 0 + 0 = 0$$

Observación: En ocasiones, la columna de ceros no se incluye porque no afecta al aplicar las operaciones elementales, en caso contrario, deben colocarse en la matriz.

■ **Ejemplo 1.1.5.**

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 4y = 1$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{array} \right]$$

La segunda ecuación obtenida en el escalonamiento nos indica que $0(x) + 0(y) = -9$, lo cual es imposible porque $0 \neq -9$, por lo tanto, el sistema de ecuaciones no tiene solución y en algunas ocasiones se dice que el sistema de ecuaciones es inconsistente, nosotros diremos que no existe solución.

■ **Ejemplo 1.1.6.**

$$2x + y = 4$$

$$6x + 3y = 12$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Por lo tanto, $2x + y = 4 \Leftrightarrow y = -2x + 4$ y como x puede tomar cualquier valor, entonces el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones, más aún, si $x = t$ con $t \in \mathbb{R}$

entonces el conjunto solución está dado por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 4 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

■ **Ejemplo 1.1.7.**

$$\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - 2r_1, r_3 - 3r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & 7 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_1 - r_2, r_3 + 5r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{-1}{17}r_3, r_1 - 4r_3, r_2 + 3r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] & \begin{aligned} x &= 1 \\ \therefore y &= -1 \\ z &= -1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 1(1) + 1(-1) + 1(-1) &= 1 - 1 - 1 = -1 \\ 2(1) + 3(-1) - 1(-1) &= 2 - 3 + 1 = 0 \\ 3(1) - 2(-1) + 1(-1) &= 3 + 2 - 1 = 4 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.1.8.**

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 9 \\ -x + 2y + 5z &= -5 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 + 2r_3 \\ r_2 + 3r_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 11 & -8 \\ 0 & 7 & 13 & -6 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{interc.} \\ \text{renglones} \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & -8 \\ 0 & 7 & 13 & -6 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 3r_1 - 2r_2 \\ \sim \\ 3r_3 - 7r_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 11 & -8 \\ 0 & 0 & -38 & 38 \end{array} \right] \begin{array}{l} -r_1 \\ \sim \\ \frac{-1}{38}r_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 11 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - 7r_3 \\ r_2 - 11r_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{1}{3}r_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad \therefore \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2(2) - 1(1) + 1(-1) &= 4 - 1 - 1 = 2 \\ 3(2) + 1(1) - 2(-1) &= 6 + 1 + 2 = 9 \\ -1(2) + 2(1) + 5(-1) &= -2 + 2 - 5 = -5 \end{aligned}$$

■ Ejemplo 1.1.9.

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ \frac{1}{3}r_2 \\ r_3 - r_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} r_1 + 2r_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \therefore \quad \begin{array}{l} x + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = -3z \\ y = -z \end{array}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones y el conjunto solución está dado por:

$$\begin{cases} z = t & \text{con } t \in \mathbb{R} \\ y = -t \\ x = -3t \end{cases}$$

Si $t = 1$ entonces una solución particular del sistema es $x = -3$, $y = -1$, $z = 1$.

Comprobación:

$$1(-3) - 2(-1) + 1(1) = -3 + 2 + 1 = 0$$

$$2(-3) - 1(-1) + 5(1) = -6 + 1 + 5 = 0$$

$$1(-3) + 1(-1) + 4(1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

Es necesario aclarar que los sistemas homogéneos siempre tienen solución, a saber, la solución trivial. Sin embargo, en muchas ocasiones existen más soluciones.

■ Ejemplo 1.1.10.

$$x + y + z = 0$$

$$5x - 2y - 9z = 0$$

$$3x + y - z = 0$$

$$3x - 2y - 7z = 0$$

Solución: Se deja como ejercicio para el lector y el conjunto solución es

$$\begin{cases} z = t & \text{con } t \in \mathbb{R} \\ y = -2t \\ x = t \end{cases}$$

1.2. Matriz inversa

Calcule la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices.

■ Ejemplo 1.2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es importante señalar que, para calcular la inversa de una matriz utilizamos el Método de Gauss, de ahí la importancia en saber escalar matrices; aunque no es la única manera, como veremos más adelante.

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \underset{3r_2 - r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \underset{r_1 - 2r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\underset{\frac{1}{3}r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \quad \therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora, para ver que la matriz obtenida es la inversa de A , debemos verificar que $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 2-2 \\ -3+3 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore A^{-1}A = I.$$

$$\text{Por otra parte } AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & -6+6 \\ 1-1 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore AA^{-1} = I. \text{ Así } A \text{ tiene inversa y por consiguiente } A \text{ es invertible.}$$

■ Ejemplo 1.2.2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \underset{2r_2 - 5r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{array} \right] \underset{3r_1 - r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{array} \right]$$

$$\underset{\frac{1}{6}r_1}{\sim} \underset{\frac{1}{3}r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora veamos que se cumple $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

$$A^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8-5 & 4-4 \\ -10+10 & -5+8 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \therefore \quad A^{-1}A = I.$$

$$\text{Por otro lado } AA^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8-5 & -2+2 \\ 20-20 & -5+8 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \therefore \quad AA^{-1} = I. \text{ Por consiguiente } A \text{ tiene inversa.}$$

■ Ejemplo 1.2.3.

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1} .

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

■ Ejemplo 1.2.4.

Verifique que la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

■ Ejemplo 1.2.5.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1} .

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$$

■ Ejemplo 1.2.6.

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1} y utilícela para:

a) Obtener una matriz $X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AX = A$.

b) Obtener una matriz $Y \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AY = B$.

c) Obtener una matriz $Z \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = B$.

■ **Ejemplo 1.2.7.**

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$, resuelva cada una de las siguientes ecuaciones de matrices:

a) $AX + B = C$.

b) $XA + B = C$.

c) $AX + B = X$.

d) $XA + C = X$.

e) $AX + 2C = A$.

(Sugerencia: a) $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$).

■ **Ejemplo 1.2.8.**

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con $\Delta = ad - bc$. Demuestre que si $\Delta \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

■ **Ejemplo 1.2.9.**

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, halle A^{-1} .

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \underset{r_3 - 2r_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\underset{\substack{3r_1 - r_2 \\ 3r_3 + r_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 1 & 3 \end{array} \right] \underset{\substack{10r_1 + 7r_3 \\ 10r_2 - r_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 0 & 0 & -12 & -3 & 21 \\ 0 & 30 & 0 & 6 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{60}r_1 \\ \frac{1}{30}r_2 \\ \frac{-1}{10}r_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-12}{60} & \frac{-3}{60} & \frac{21}{60} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{30} & \frac{9}{30} & \frac{-3}{30} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{-3}{10} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{20} & \frac{7}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{-3}{10} \end{array} \right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{-1}{20} & \frac{7}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{-3}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

$$A^{-1}A = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 8 + 0 - 28 & 4 + 3 - 7 & 8 - 1 - 7 \\ -8 + 0 + 8 & -4 - 18 + 2 & -8 + 6 + 2 \\ -24 + 0 + 24 & -12 + 6 + 6 & -24 - 2 + 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \therefore A^{-1}A = I.$$

$$\text{Por otra parte } AA^{-1} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 8 - 4 - 24 & 2 - 6 + 4 & -14 + 2 + 12 \\ 0 - 12 + 12 & 0 - 18 - 2 & 0 + 6 - 6 \\ 16 - 4 - 12 & 4 - 6 + 2 & -28 + 2 + 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \therefore \quad AA^{-1} = I.$ Así A tiene inversa y por consiguiente A es invertible.

■ **Ejemplo 1.2.10.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} \text{interc.} \\ \text{renglones} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_2 \\ r_3 - 5r_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} 2r_1 + r_3 \\ 2r_2 + r_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}r_1 \\ \frac{1}{4}r_2 \\ \frac{-1}{2}r_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right] \\ & \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-9}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora veamos que se cumple $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 - 2 - 0 & 12 + 6 - 18 & 9 + 0 - 9 \\ 2 - 2 - 0 & 4 + 6 - 6 & 3 + 0 - 3 \\ -4 + 4 + 0 & -8 - 12 + 20 & -6 - 0 + 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \therefore \quad A^{-1}A = I.$$

$$\begin{aligned} \text{Por otra parte } AA^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6+4-6 & 4+8-12 & -18-12+30 \\ -3+3+0 & -2+6+0 & 9-9+0 \\ 0+2-2 & 0+4-4 & 0-6+10 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \therefore \quad AA^{-1} = I. \text{ Por lo tanto } A \text{ tiene inversa.}$$

■ **Ejemplo 1.2.11.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{interc.} \\ \text{renglones} \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \sim \begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} \\ r_3 + r_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} r_1 - 2r_3 \\ r_2 + r_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} -r_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ \therefore A^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio: Verifique que A^{-1} es la inversa de A .

■ **Ejemplo 1.2.12.**

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{interc.} \\ \text{renglones} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \sim \begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -13 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} 3r_1 + 2r_2 \\ 3r_3 - 5r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} r_1 + 4r_3 \\ r_2 + 8r_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 12 & -18 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 24 & -39 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{-1}{3}r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right] \\ & \therefore B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio: Verifique que B^{-1} es la inversa de B .

■ **Ejemplo 1.2.13.**

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 19 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ 3r_2 + r_1 \\ 3r_3 + 2r_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{l} 5r_1 + r_2 \\ \sim \\ r_3 - 2r_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 33 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r_1 - 11r_3 \\ 3r_2 - 8r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 6 & 69 & -33 \\ 0 & 15 & 0 & 3 & 57 & -24 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 3 \end{array} \right] \\
& \sim \begin{array}{l} \frac{1}{15}r_1 \\ \frac{1}{15}r_2 \\ \frac{1}{3}r_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{69}{15} & \frac{-33}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{15} & \frac{57}{15} & \frac{-24}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} & \frac{-11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{19}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-10}{5} & \frac{5}{5} \end{array} \right] \\
& \therefore C^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{5} & \frac{23}{5} & \frac{-11}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{19}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{-10}{5} & \frac{5}{5} \end{array} \right] = \frac{1}{5} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 23 & -11 \\ 1 & 19 & -1 \\ 0 & -10 & 5 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Ejercicio: Verifique que C^{-1} es la inversa de C .

■ **Ejemplo 1.2.14.**

Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, calcule D^{-1} .

Solución: $D^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$.

■ **Ejemplo 1.2.15.**

Dada la matriz $E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, obtenga E^{-1} .

Solución: $E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

■ **Ejemplo 1.2.16.**

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre A^{-1} .

Solución: $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$

■ **Ejemplo 1.2.17.**

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1} .

(Sugerencia: es trivial, $A^{-1} = A$).

1.3. Determinantes

Definición 1.3.1. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A es $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices:

■ **Ejemplo 1.3.1.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 1(2) = 4 - 2 = 2 \quad \therefore \quad |A| = 2.$$

■ **Ejemplo 1.3.2.**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 1(-1) = 2 + 1 = 3 \quad \therefore \quad |B| = 3.$$

■ **Ejemplo 1.3.3.**

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - (-5)(-7) = -6 - 35 = -41$$

$$\therefore \quad |C| = -41.$$

■ **Ejemplo 1.3.4.**

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det(D) = |D| = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 4(-3) - (0)(-7) = -12 - 0 = -12.$$

■ **Ejemplo 1.3.5.**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & 4 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(4) - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{3}{10} = \frac{71}{30} \quad \therefore \quad |A| = \frac{71}{30}.$$

■ **Ejemplo 1.3.6.**

$$B = \begin{bmatrix} 2^n & -3 \\ 3^{m-1} & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 2^n & -3 \\ 3^{m-1} & 2 \end{vmatrix} = 2^n(2) - 3^{m-1}(-3) = 2^{n+1} + 3^m$$

$$\therefore |B| = 2^{n+1} + 3^m.$$

■ **Ejemplo 1.3.7.**

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -14 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -14 \end{vmatrix} = 3(-14) - (-6)(7) = -42 + 42 = 0$$

$$\therefore |C| = 0.$$

Demuestre cada una de las siguientes propiedades.

■ **Ejemplo 1.3.8.**

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$ entonces $|A| = 0$.

■ **Ejemplo 1.3.9.**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

■ **Ejemplo 1.3.10.**

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

■ Ejemplo 1.3.11.

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

■ Ejemplo 1.3.12.

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix}$$

■ Ejemplo 1.3.13.

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

■ Ejemplo 1.3.14.

Encuentre el valor de x tal que $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow x(-1) - 3(2) = 5 \Rightarrow -x - 6 = 5 \Rightarrow x = -11 \quad \therefore \quad x = -11.$$

■ Ejemplo 1.3.15.

Halle los valores de x tal que $\begin{vmatrix} x-1 & 15 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Solución: Existen dos soluciones $x = -4$ y $x = 4$.

■ Ejemplo 1.3.16.

Calcule los valores de x tal que $\begin{vmatrix} x-4 & -2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$.

Solución: $x = 2$ y $x = 3$.

■ Ejemplo 1.3.17.

Halle los valores de x tal que $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} = 12$.

Solución: $x = -1$ y $x = 6$.

■ Ejemplo 1.3.18.

Encuentre el $\det(A)$ para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0 - 2) + 1(4 - 2) + 3(1 - 0) = -4 + 2 + 3 = 1 \quad \therefore |A| = 1. \end{aligned}$$

■ Ejemplo 1.3.19.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $|A|$.

Solución:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(3 - 1(-1)) - 1(0 - 4(-1)) + 2(0 - 12) = 2(3 + 1) - 1(0 + 4) + 2(-12) \\ &= 8 - 4 - 24 = -20 \quad \therefore |A| = -20. \end{aligned}$$

■ Ejemplo 1.3.20.

Considere la matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule $|B|$.

Solución:

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} + & - & + \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(1(4) - 2(0)) - 1(2(4) - 1(0)) - 1(2(2) - 1(1)) = 3(4 - 0) - 1(8 - 0) - 1(4 - 1) \\ &= 12 - 8 - 3 = 1 \quad \therefore |B| = 1. \end{aligned}$$

■ Ejemplo 1.3.21.

Considere la matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre $|B|$.

Solución: $|A| = 6$.

■ Ejemplo 1.3.22.

Dada la matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, obtenga $|C|$.

Solución: $|C| = 3$.

■ Ejemplo 1.3.23.

Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, calcule $|D|$.

Solución: $|D| = 14$.

■ **Ejemplo 1.3.24.**

Dada la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, halle $|E|$.

Solución: $|E| = -4$.

Demuestre cada una de las siguientes propiedades .

■ **Ejemplo 1.3.25.**

Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ entonces $|A| = 0$.

■ **Ejemplo 1.3.26.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

■ **Ejemplo 1.3.27.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

■ **Ejemplo 1.3.28.**

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

■ **Ejemplo 1.3.29.**

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

■ **Ejemplo 1.3.30.**

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

■ **Ejemplo 1.3.31.**

Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ entonces $\det(A) = adf$.

■ **Ejemplo 1.3.32.**

Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

■ **Ejemplo 1.3.33.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b). \text{ A este determinante se le llama } \textit{determinante de Vandermonde}.$$

■ **Ejemplo 1.3.34.**

Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix}$

Solución: $|E| = 70$. (Sugerencia: aplique el ejercicio anterior).

■ **Ejemplo 1.3.35.**

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Demuestre que $\det(A B) = \det(A) \det(B)$.

■ **Ejemplo 1.3.36.**

Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Demuestre que $\det(A^n) = [\det(A)]^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

■ **Ejemplo 1.3.37.**

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\det(kA) = k^n \det(A)$.

1.4. Matriz adjunta

Si A es una matriz de n renglones y n columnas, entonces la *matriz adjunta* de A es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores, esto es, $C = (c_{ij})$ donde $c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ y M_{ij} es la matriz que se obtiene al eliminar el renglón i y la columna j , por lo tanto $\text{adj}(A) = C^t$.

Se puede demostrar que, si A es una matriz invertible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ y por consiguiente, tenemos otra manera de calcular la inversa de una matriz. Veamos algunos ejemplos:

Calcule la inversa de cada una de las siguientes matrices, utilizando la matriz adjunta.

■ **Ejemplo 1.4.1.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Antes de calcular la matriz adjunta, primero debemos verificar que la matriz es invertible y para ello es suficiente ver que $\det(A) = |A| \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0 - 2) + 1(4 - 2) + 3(1 - 0) = -4 + 2 + 3 = 1 \quad \therefore |A| \neq 0. \text{ Ahora calculemos la} \\ &\text{matriz de cofactores.} \end{aligned}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2, \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2,$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, \quad c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 3) = 7,$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5, \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3,$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2, \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1,$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \quad \therefore C = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{por lo tanto } \text{Adj}(A) = C^t = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Ejemplo 1.4.2.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \det(B) = |B| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(4 - 0) - 1(8 - 0) - 1(4 - 1) = 12 - 8 - 3 = 1 \quad \therefore |B| \neq 0, \text{ ahora calculemos la} \\ &\text{matriz de cofactores.} \end{aligned}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4, \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 0) = -8,$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13, \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5,$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1, \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 2) = -2,$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \quad \therefore C = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -6 & 13 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{por lo tanto } \text{Adj}(B) = C^t = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Ejemplo 1.4.3.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, verifique que $Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ y encuentre la inversa de A , (sugerencia: $|A| = -20$).

■ Ejemplo 1.4.4.

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, encuentre A^{-1} .

(Sugerencia: $Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ y $|A| = 4$).

■ Ejemplo 1.4.5.

Dada la matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, obtenga C^{-1} . (Sugerencia: $|C| = 5$).

Solución: $C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 23 & -11 \\ 1 & 19 & -8 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix}$.

■ Ejemplo 1.4.6.

Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, encuentre D^{-1} . (Sugerencia: $|D| = 14$).

Solución: $D^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$.

■ **Ejemplo 1.4.7.**

Dada la matriz $E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule E^{-1} . (Sugerencia: $|E| = 3$).

Solución: $E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

■ **Ejemplo 1.4.8.**

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, obtenga A^{-1} .

(Sugerencia: $|A| = 6$ y $Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \end{bmatrix}$).

1.5. Aplicaciones de matrices inversas y determinantes

En la sección 1.1 vimos cómo se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales, ahora utilizaremos a las matrices inversas y los determinantes para ilustrar otras maneras de resolverlos.

Con ayuda de la matriz inversa resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

■ **Ejemplo 1.5.1.**

$$\begin{aligned} 6x + 5y &= 2 \\ x + y &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

El sistema de ecuaciones a considerar es de la forma $AX = B$, donde $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto si A tiene inversa, procedemos de la siguiente manera $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Por consiguiente, necesitamos conocer la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Es fácil ver

$$\begin{aligned} \text{que } A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(2) + (-5)(-3) \\ -1(2) + 6(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 15 \\ -2 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -20 \end{bmatrix} \quad \therefore x = 17 \text{ y } y = -20. \end{aligned}$$

Comprobación:

$$6(17) + 5(-20) = 102 - 100 = 2$$

$$1(17) + 1(-20) = 17 - 20 = -3$$

■ Ejemplo 1.5.2.

$$6x + 5y = -1$$

$$x + y = -1$$

Solución:

Por el ejercicio anterior $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, por lo tanto $X = A^{-1}B$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-1) + (-5)(-1) \\ -1(-1) + 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 5 \\ 1 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \therefore x = 4 \text{ y } y = -5.$$

Comprobación:

$$6(4) + 5(-5) = 24 - 25 = -1$$

$$1(4) + 1(-5) = 4 - 5 = -1$$

■ **Ejemplo 1.5.3.**

$$\begin{aligned}x + 2y &= 0 \\4x + 9y &= 1\end{aligned}$$

Solución:

Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9(0) + (-2)(1) \\ -4(0) + 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 2 \\ -0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = -2, y = 1$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}1(-2) + 2(1) &= -2 + 2 = 0 \\4(-2) + 9(1) &= -8 + 9 = 1\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.5.4.**

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 3 \\x + y &= 5\end{aligned}$$

Solución:

Por el ejercicio 1) de la sección 1.2, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ es la inversa de

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + (-2)(5) \\ -1(3) + 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 10 \\ -3 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = -7, y = 12$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}3(-7) + 2(12) &= -21 + 24 = 3 \\1(-7) + 1(12) &= -7 + 12 = 5\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.5.5.**

$$\begin{aligned} -4x + 3y &= 4 \\ -3x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

Por el ejercicio 3) de la sección 1.2, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ es la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) + (-3)(2) \\ 3(4) + (-4)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 6 \\ 12 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = 2, y = 4$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} -4(2) + 3(4) &= -8 + 12 = 4 \\ -3(2) + 2(4) &= -6 + 8 = 2 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.5.6.**

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 5x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

Por el ejercicio 2) de la sección 1.2, $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ es la inversa de

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4(3) + (-1)(6) \\ -5(3) + (2)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 6 \\ -15 + 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore x = 2, y = -1$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2(2) + 1(-1) &= 4 - 1 = 3 \\ 5(2) + 4(-1) &= 10 - 4 = 6 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.5.7.**

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 20 \\ 0x + 3y - z &= 40 \\ 4x + y + z &= 20 \end{aligned}$$

Solución:

Por el ejercicio 9) de la sección 1.2, $A^{-1} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ es la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } X = A^{-1}B = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4(20) + (1)(40) + (-7)(20) \\ -4(20) + (-6)(40) + (2)(20) \\ -12(20) + (2)(40) + (6)(20) \end{bmatrix} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 80 + 40 - 140 \\ -80 - 240 + 40 \\ -240 + 80 + 120 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} -20 \\ -280 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad x = 1, \quad y = 14, \quad z = 2$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2(1) + 1(14) + 2(2) &= 2 + 14 + 4 = 20 \\ 0(1) + 3(14) - 1(2) &= 0 + 42 - 2 = 40 \\ 4(1) + 1(14) + 1(2) &= 4 + 14 + 2 = 20 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.5.8.**

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 1 \\ -x + 3y - 0z &= 3 \\ 0x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

Solución:

Por el ejercicio 10) de la sección 1.2, $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ es la inversa de

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3(1) + (2)(3) + (-9)(5) \\ 1(1) + (2)(3) + (-3)(5) \\ -2(1) + (-4)(3) + (10)(5) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 + 6 - 45 \\ 1 + 6 - 15 \\ -2 - 12 + 50 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -36 \\ -8 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad x = -9, \quad y = -2, \quad z = 9
 \end{aligned}$$

La comprobación se deja como ejercicio para el lector.

■ **Ejemplo 1.5.9.**

$$\begin{aligned}
 2x - y + 3z &= 7 \\
 x + 0y + 2z &= 2 \\
 x + y + 4z &= -1
 \end{aligned}$$

Solución:

Por el ejercicio 11) de la sección 1.2, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ es la inversa de

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2(7) + (7)(2) + (-2)(-1) \\ -2(7) + (5)(2) + (-1)(-1) \\ 1(7) + (-3)(2) + (1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 + 14 + 2 \\ -14 + 10 + 1 \\ 7 - 6 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\therefore \quad x = 2, \quad y = -3, \quad z = 0.$ La comprobación se deja como ejercicio.

■ **Ejemplo 1.5.10.**

$$\begin{aligned}
 3x - y + 5z &= 1 \\
 -x + 2y + z &= 0 \\
 -2x + 4y + 3z &= -1
 \end{aligned}$$

Solución:

Por el ejercicio 13) de la sección 1.2, $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 23 & -11 \\ 1 & 19 & -8 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix}$ es la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 23 & -11 \\ 1 & 19 & -8 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{9}{5} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad x = \frac{13}{5}, \quad y = \frac{9}{5}, \quad z = -1.$$

La comprobación se deja como ejercicio para el lector.

■ **Ejemplo 1.5.11.**

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

a) Compruebe que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) Utilice A^{-1} para resolver $AX = B$ en cada caso.

i) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Solución: $x = 0, y = -1, z = 1.$

ii) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Solución: $x = -4, y = -2, z = 5.$

iii) $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Solución: $x = 0, y = 3, z = -2.$

Regla de Cramer

Uno de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones es el que se conoce como regla de Cramer, el cual utiliza determinantes. Veamos en qué consiste:

Consideremos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

si la matriz del sistema $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ tiene $\Delta = \det(A) \neq 0$, entonces

el sistema de ecuaciones tiene una única solución. Además, la solución está dada por

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

con Δ_k el determinante de la matriz que se obtiene reemplazando la k -ésima columna de A por la columna de las constantes.

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

■ **Ejemplo 1.5.12.**

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 1(2) = -3 - 2 = -5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 3(3) = 1 - 9 = -8$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-7} = \frac{8}{7},$$

por consiguiente, la única solución es $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{8}{7}$.

Comprobación:

$$1 \left(\frac{5}{7} \right) + 2 \left(\frac{8}{7} \right) = \frac{5}{7} + \frac{16}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

$$3 \left(\frac{5}{7} \right) - 1 \left(\frac{8}{7} \right) = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

■ **Ejemplo 1.5.13.**

$$\begin{aligned} 6x + 5y &= 2 \\ x + y &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - (-3)(5) = 2 + 15 = 17$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6(-3) - 1(2) = -18 - 2 = -20$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{17}{1} = 17, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-20}{1} = -20,$$

por consiguiente la única solución es $x = 17$, $y = -20$.

Comprobación:

$$6(17) + 5(-20) = 102 - 100 = 2$$

$$1(17) + 1(-20) = 17 - 20 = -3$$

■ **Ejemplo 1.5.14.**

$$6x + 5y = -1$$

$$x + y = -1$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - (-1)(5) = -1 + 5 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6(-1) - 1(-1) = -6 + 1 = -5$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{1} = -5,$$

por consiguiente la única solución es $x = 4$, $y = -5$.

Comprobación:

$$6(4) + 5(-5) = 24 - 25 = -1$$

$$1(4) + 1(-5) = 4 - 5 = -1$$

■ **Ejemplo 1.5.15.**

$$x + 2y = 0$$

$$4x + 9y = 1$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 0(9) - (1)(2) = -2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 4(0) = 1$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1,$$

por consiguiente la única solución es $x = -2$, $y = 1$.

Comprobación:

$$1(-2) + 2(1) = -2 + 2 = 0$$

$$4(-2) + 9(1) = -8 + 9 = 1$$

■ Ejemplo 1.5.16.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - (5)(2) = 3 - 10 = -7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - 1(3) = 15 - 3 = 12$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{1} = -7, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{1} = 12,$$

por consiguiente la única solución es $x = -7$, $y = 12$.

Comprobación:

$$3(-7) + 2(12) = -21 + 24 = 3$$

$$1(-7) + 1(12) = -7 + 12 = 5$$

■ **Ejemplo 1.5.17.**

$$-4x + 3y = 4$$

$$-3x + 2y = 2$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 9 = 1$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - (2)(3) = 8 - 6 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4(2) - (-3)(4) = -8 + 12 = 4$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4,$$

por consiguiente la única solución es $x = 2$, $y = 4$.

Comprobación:

$$-4(2) + 3(4) = -8 + 12 = 4$$

$$-3(2) + 2(4) = -6 + 8 = 2$$

■ **Ejemplo 1.5.18.**

$$2x + y = 3$$

$$5x + 4y = 6$$

Solución: Se deja como ejercicio para el lector $x = 2$, $y = -1$.

■ Ejemplo 1.5.19.

¿Para qué valores de a el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única?

$$\begin{aligned}2x + ay &= 1 \\5x + y &= 3\end{aligned}$$

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector, $a \neq \frac{2}{5}$ (Sugerencia: utilice el determinante del sistema).

■ Ejemplo 1.5.20.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}bx + 3y &= 2 \\2x + y &= 1\end{aligned}$$

¿Para qué valores de b el sistema de ecuaciones tiene:

- a) Solución única. (Solución: $b \neq 6$)
- b) Ninguna solución? (Solución: $b = 6$)

■ Ejemplo 1.5.21.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}ax + 3y &= 2 \\3x + ay &= 1\end{aligned}$$

¿Para qué valores de a el sistema de ecuaciones tiene:

- a) Solución única. (Solución: $b \neq -3$ y $b \neq 3$)
- b) Ninguna solución? (Solución: $b = -3$ y $b = 3$)

■ Ejemplo 1.5.22.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 4x + 3y + 2z &= 2 \\ 2x - y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0(-9 + 2) - 1(-6 - 0) + 1(-2 - 0) = 0 + 6 - 2 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2(-6 - 0) - 0(-12 - 4) + 1(0 - 4) = -12 - 0 - 4 = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(0 + 2) - 1(0 - 4) + 0(-4 - 6) = 4 + 4 + 0 = 8$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1,$$

por consiguiente la única solución es $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$, $z = -1$.

Comprobación:

$$2\left(\frac{-1}{2}\right) + 1(2) + 1(-1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

$$4\left(\frac{-1}{2}\right) + 3(2) + 2(-1) = -2 + 6 - 2 = 2$$

$$2\left(\frac{-1}{2}\right) - 1(2) - 3(-1) = -1 - 2 + 3 = 0$$

■ **Ejemplo 1.5.23.**

$$\begin{aligned}x + y + z &= 6 \\x - y + z &= 2 \\2x - y + 3z &= 6\end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6(-3 + 1) - 1(6 - 6) + 1(-2 + 6) = -12 - 0 + 4 = -8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1(6 - 6) - 6(3 - 2) + 1(6 - 4) = 0 - 6 + 2 = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1(-6 + 2) - 1(6 - 4) + 6(-1 + 2) = -4 - 2 + 6 = 0$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0,$$

por consiguiente la única solución es $x = 4$, $y = 2$, $z = 0$.

Comprobación:

$$1(4) + 1(2) + 1(0) = 4 + 2 + 0 = 6$$

$$1(4) - 1(2) + 1(0) = 4 - 2 + 0 = 2$$

$$2(4) - 1(2) + 3(0) = 8 - 2 + 0 = 6$$

■ **Ejemplo 1.5.24.**

$$\begin{aligned}2x - 3y + 4z &= 0 \\x + y - 3z &= 4 \\3x + 2y - z &= 0\end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 30$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3)(-4 - 0) + 4(8 - 0) = -12 + 32 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4 - 0) + 4(0 - 12) = -8 - 48 = -56$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(0 - 8) + 3(0 - 12) = -16 - 36 = -52$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-56}{30} = \frac{-28}{15}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-52}{30} = \frac{-26}{15},$$

por consiguiente la única solución es $x = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, $y = \frac{-28}{15}$, $z = \frac{-26}{15}$.

Comprobación:

$$2 \left(\frac{10}{15} \right) + (-3) \left(\frac{-28}{15} \right) + 4 \left(\frac{-26}{15} \right) = \frac{20}{15} + \frac{84}{15} - \frac{104}{15} = 0$$

$$\left(\frac{10}{15} \right) + \left(\frac{-28}{15} \right) - 3 \left(\frac{-26}{15} \right) = \frac{10}{15} - \frac{28}{15} + \frac{78}{15} = \frac{60}{15} = 4$$

$$3 \left(\frac{10}{15} \right) + (2) \left(\frac{-28}{15} \right) - \left(\frac{-26}{15} \right) = \frac{30}{15} + \frac{-56}{15} + \frac{26}{15} = 0$$

■ **Ejemplo 1.5.25.**

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -2 \\ x - 6y + 3z &= -2 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene solución única.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -18$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-30}{-6} = 5,$$

por consiguiente la única solución es $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$.

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2(1) - 3(3) + 1(5) &= 2 - 9 + 5 = -2 \\ 1(1) - 6(3) + 3(5) &= 1 - 18 + 15 = -2 \\ 3(1) + 3(3) - 2(5) &= 3 + 9 - 10 = 2 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.5.26.**

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 2y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, es fácil ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene sólo una solución.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -8$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2,$$

por consiguiente la única solución es $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

Comprobación:

$$1(1) + 2(1) + 1(2) = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$2(1) + 2(1) + 1(2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$1(1) + 2(1) + 3(2) = 1 + 2 + 6 = 9$$

■ **Ejemplo 1.5.27.**

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 5 \\ -2x + 2y - z &= -8 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante del sistema, se puede ver que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, por lo tanto $\Delta \neq 0$ y por consiguiente el sistema tiene sólo una solución.

Ahora calculemos Δ_i con $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 6$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2,$$

por consiguiente la única solución es $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$.

La comprobación se deja como ejercicio para el lector.

■ **Ejemplo 1.5.28.**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$ax + 0y + bz = 2$$

$$ax + ay + 4z = 4$$

$$0x + ay + 2z = b$$

¿Para qué valores de a y b el sistema de ecuaciones tiene:

- a) Solución única. (Solución: $a \neq 0$ y $b \neq 2$)
- b) Infinidad de soluciones. (Solución: $a = 0$ y $b = 2$)
- c) Ninguna solución? (Solución: $a = 0$ y $b \neq 2$)

■ **Ejemplo 1.5.29.**

Considere el sistema de ecuaciones:

$$2x - y + z = 8$$

$$4x + 3y + z = 7$$

$$6x + 2y + 2z = 15$$

- a) ¿Porqué no se puede aplicar la regla de Cramer?

b) Resuélvalo aplicando otro método.

■ **Ejemplo 1.5.30.**

Considere el sistema de ecuaciones:

$$x + 2y + 2z = -1$$

$$x + 3y + z = 4$$

$$x + 3y + 2z = 3$$

a) Resuélvalo aplicando la regla de Cramer.

(Solución: $x = -7$, $y = 4$, $z = -1$)

b) Resuélvalo aplicando Eliminación Gaussiana.

c) Resuélvalo aplicando Gauss-Jordan.

d) Resuélvalo aplicando la matriz inversa.

e) ¿Con cuál de los cuatro métodos se realizan menos cálculos?

1.6. Aplicaciones prácticas de sistemas de ecuaciones lineales

■ **Ejemplo 1.6.1. Manufactura de productos**

Una empresa produce tres tipos de botellas: aceptables, buenas y mejores. El costo por hacer cada tipo de botella es de \$4 , \$6 y \$7 respectivamente; las botellas se venden en \$6 , \$9 y \$12. Cada día, el costo de hacer 100 botellas es de \$520 y el ingreso diario por su venta es de \$810, ¿cuántas botellas de cada tipo se fabrican?

Solución:

Si representamos con x el número de botellas aceptables, con y el número de botellas buenas y con z la cantidad de botellas mejores, entonces tenemos que:

El número total de botellas es $x + y + z$.

El costo de hacer botellas aceptables es $4x$.

El costo de hacer botellas buenas es $6y$.

El costo de hacer botellas mejores es $7z$.

El ingreso por vender botellas aceptables es $6x$.

El ingreso por vender botellas buenas es $9y$.

El ingreso por vender botellas mejores es $12z$.

Ahora bien, el número total de botellas es 100, luego $x + y + z = 100$. Además, el costo total es de 520, luego $4x + 6y + 7z = 520$. Por otra parte, el ingreso total es de 810, por lo tanto $6x + 9y + 12z = 810$. Con este análisis se obtienen tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, es decir,

$$\begin{aligned}x + y + z &= 100 \\4x + 6y + 7z &= 520 \\6x + 9y + 12z &= 810\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio para el lector resolver por el método que crea conveniente el sistema de ecuaciones y los valores de las incógnitas son: $x = 50$, $y = 30$ y $z = 20$.

- i) ¿Qué significado tienen los valores obtenidos?
- ii) Verifique el resultado.

■ Ejemplo 1.6.2. Circulación del tránsito

En las calles que rodean al Plantel Centro Histórico de la UACM, el volumen de tránsito por hora promedio que entra y sale, está indicado en la siguiente figura. Determine la intensidad de tránsito en cada una de las cuatro intersecciones.

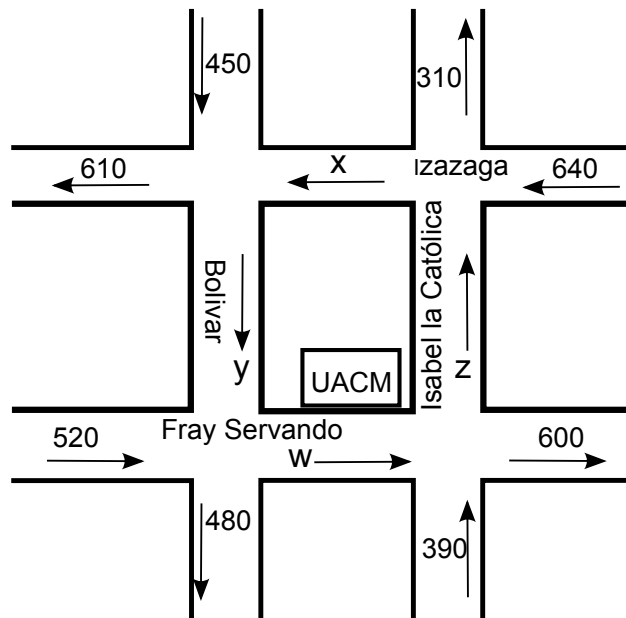


Figura 1.1: Circulación del tránsito.

Solución:

En cada intersección de las calles, el número de vehículos que entra debe ser el mismo el número de vehículos que salen de esa sección. Por ejemplo, en el cruce de Izazaga y Bolívar el número de automóviles que entran es $x + 450$ y el número de automóviles que salen es $y + 610$, luego

$$x + 450 = y + 610 \quad \therefore \quad x - y = 160$$

de manera análoga

$$y + 520 = w + 480 \quad \therefore \quad y - w = -40$$

$$w + 390 = z + 600 \quad \therefore \quad w - z = 210$$

$$z + 640 = x + 310 \quad \therefore \quad -x + z = -330$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que obtenemos es:

$$\begin{aligned}
 x - y + 0w + 0z &= 160 \\
 0x + y - w + 0z &= -40 \\
 0x + 0y + w - z &= 210 \\
 -x + 0y + 0w + z &= -330
 \end{aligned}$$

Ahora debemos escalar para resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -330 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 + r_2 \\ r_2 + r_3 \\ \sim \\ r_4 + r_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -170 \end{array} \right] \\
 &\begin{array}{l} r_1 + r_3 \\ \sim \\ r_4 + r_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} x - z = 330 \\ \therefore y - z = 170 \\ w - z = 210 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = z + 330 \\ \therefore y = z + 170 \\ w = z + 210 \end{array}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las expresiones obtenidas nos indican que existe una infinidad de soluciones, esto es, si la intensidad de tránsito entre las intersecciones de Isabel la Católica e Izazaga fuera en promedio de 20000 autos por hora, entonces $z = 20000$ y por consiguiente $x = 20330$, $y = 20170$, $w = 20210$.

■ Ejemplo 1.6.3. Redes eléctricas

En una red eléctrica es posible determinar la cantidad de corriente en cada nodo en términos de las resistencias y los voltajes. En la siguiente figura, el símbolo $\dashv\vdash$ representa una batería que conduce una carga y produce una corriente; la corriente saldrá de la terminal de la batería representada por la línea vertical más larga. El símbolo \mathbb{W} representa una resistencia y se mide en ohms, las letras mayúsculas representan nodos y las letras i representan las corrientes entre los nodos y se miden en amperes. Las flechas señalan la dirección de las corrientes, sin embargo, si una de las corrientes se vuelve negativa esto significaría que la corriente está en la dirección contraria a la flecha.

Para determinar las corrientes se aplican las *Leyes de Kirchhoff*:

- 1) En todos los nodos, la suma de las corrientes de entrada es igual a la suma de las corrientes de salida.

- 2) En todo ciclo cerrado, la suma algebraica de voltaje debe ser igual a la suma algebraica de las caídas de voltaje o tensión. Esto es, la suma algebraica de voltaje es cero. Además el sentido positivo de un ciclo es el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Las caídas de voltaje o tensión V de cada resistencia, están dadas por la *Ley de Ohm* $V = IR$, donde I representa la corriente y R la resistencia.

Determine las corrientes en la red representada en la siguiente figura.

Solución:

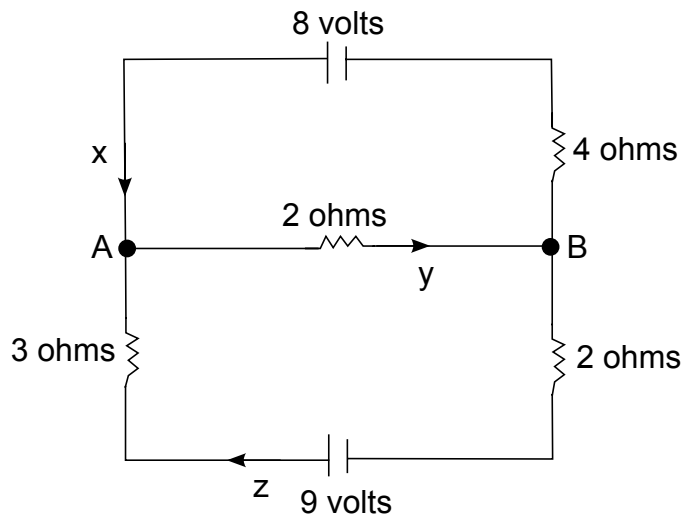


Figura 1.2: Circuito eléctrico.

Denotemos con i_1, i_2, i_3 a x, y, z respectivamente.

Aplicando la primera ley en los nodos A y B se tiene que:

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0 \quad (\text{nodo A})$$

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (\text{nodo B})$$

Aplicando la segunda ley en el ciclo superior y en el ciclo inferior obtenemos:

$$4i_1 + 2i_2 = 8 \quad (\text{ciclo superior})$$

$$2i_2 + 5i_3 = 9 \quad (\text{ciclo inferior})$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones obtenido es:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_2 + i_2 - i_3 &= 0 \\ 4i_1 + 2i_2 + 0i_3 &= 8 \\ 0i_1 + 2i_2 + 5i_3 &= 9 \end{aligned}$$

Ahora vamos a escalar para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ r_3 - 4r_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} \text{interc.} \\ r_2 \text{ y } r_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 2r_1 + r_2 \\ \sim \\ r_3 - 3r_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} \\ \\ \frac{-1}{19}r_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - 7r_3 \\ r_2 - 5r_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \\ \frac{1}{2}r_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \therefore \begin{array}{l} i_1 = 1 \text{ amper} \\ i_2 = 2 \text{ amperes} \\ i_3 = 1 \text{ amper} \end{array}$$

■ Ejemplo 1.6.4.

Calcule las corrientes de la red representada en la figura 1.3.

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $x = 3$ amper, $y = 5$ amper, $z = 2$ amper).

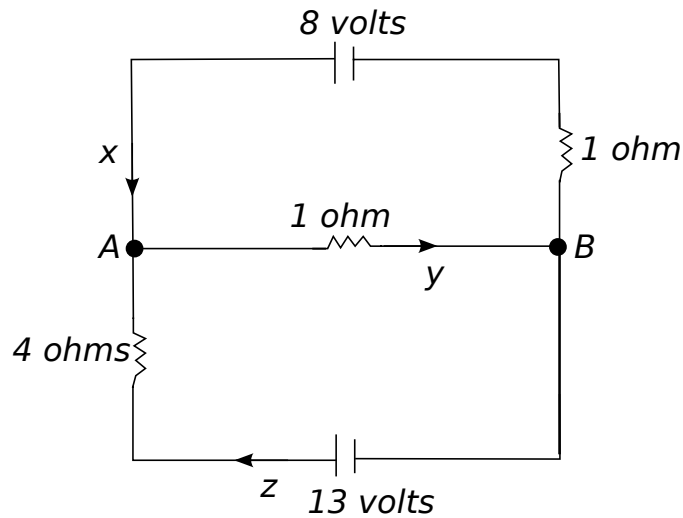


Figura 1.3: Circuito eléctrico.

■ Ejemplo 1.6.5.

Determine las corrientes de la red representada en la figura 1.4.

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector.

1.7. Distribución de temperaturas

Para esta aplicación consideramos una placa de cualquier metal donde se aplican varias temperaturas, el problema consiste en determinar la temperatura en un punto dado de la placa. Para ello suponemos que la distribución de temperatura es uniforme a lo largo de la placa, por consiguiente, la temperatura en un punto es el promedio de las temperaturas.

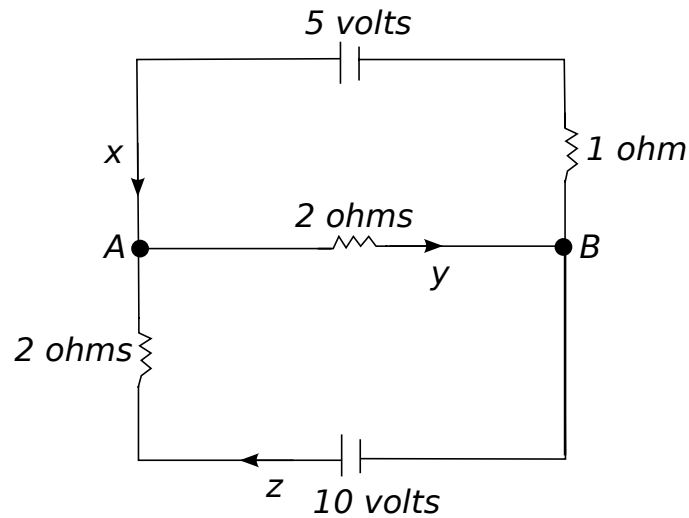


Figura 1.4: Circuito eléctrico.

■ Ejemplo 1.7.1.

Determinar la temperatura en el punto T_1 .

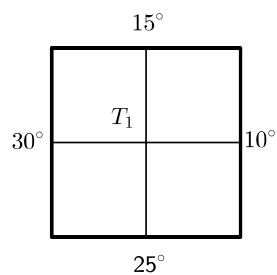


Figura 1.5: Temperatura promedio.

Solución:

Supongamos que la temperatura del punto T_1 es el promedio de las temperaturas alrededor de T_1 . Por consiguiente

$$T_1 = \frac{30^\circ + 15^\circ + 10^\circ + 25^\circ}{4} = 20^\circ \quad \therefore \quad T_1 = 20^\circ.$$

■ Ejemplo 1.7.2.

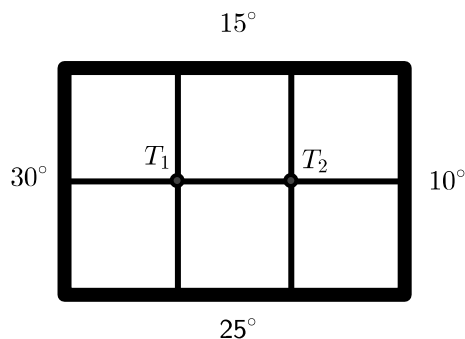


Figura 1.6: Temperatura promedio en T_1 y T_2 .

Obtenga la temperatura en cada uno de los puntos T_1 y T_2 de la figura 1.6.

Solución:

Supongamos que la temperatura del punto T_1 es el promedio de las temperaturas alrededor de T_1 . Por lo tanto

$$T_1 = \frac{30^\circ + 15^\circ + T_2 + 25^\circ}{4}$$

lo cual implica que $4T_1 = 70^\circ + T_2 \quad \therefore \quad 4T_1 - T_2 = 70^\circ$.

Análogamente

$$T_2 = \frac{T_1 + 15^\circ + 10^\circ + 25^\circ}{4}$$

lo cual implica que $4T_2 = 50^\circ + T_1 \quad \therefore \quad 4T_2 - T_1 = 50^\circ$.

Por consiguiente, obtuvimos un sistema de ecuaciones, a saber

$$\begin{aligned} 4T_1 - T_2 &= 70^\circ \\ -T_1 + 4T_2 &= 50^\circ \end{aligned}$$

cuya solución es $T_1 = 22^\circ$ y $T_2 = 18^\circ$.

■ Ejemplo 1.7.3.

Obtenga la temperatura en cada uno de los puntos T_1 , T_2 , T_3 y T_4 de la figura 1.7.

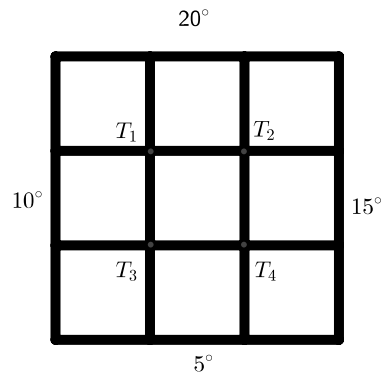


Figura 1.7: Temperatura promedio en T_1, T_2, T_3 y T_4 .

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector.

Sugerencia: El sistema de ecuaciones que modela el problema es

$$\begin{array}{rccccrcr} 4T_1 & - & T_2 & - & T_3 & & = & 30^\circ \\ -T_1 & + & 4T_2 & & & - & T_4 & = & 35^\circ \\ -T_1 & & & + & 4T_3 & - & T_4 & = & 15^\circ \\ & - & T_2 & - & T_3 & + & 4T_4 & = & 20^\circ \end{array}$$

cuya solución es $T_1 = 13 \cdot 75^\circ$, $T_2 = 15^\circ$, $T_3 = 10^\circ$ y $T_4 = 11 \cdot 25^\circ$.

■ Ejemplo 1.7.4.

Obtenga la temperatura en cada uno de los puntos T_1, T_2, T_3 y T_4 de la figura 1.8.

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $T_1 = 9 \cdot 375^\circ$, $T_2 = 13 \cdot 125^\circ$, $T_3 = 4 \cdot 375^\circ$ y $T_4 = 8 \cdot 125^\circ$).

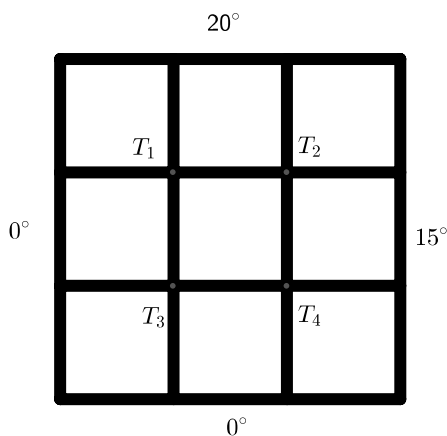


Figura 1.8: Temperatura promedio en T_1 , T_2 , T_3 y T_4 .

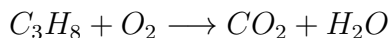
1.8. Balanceo de ecuaciones químicas

En química es frecuente trabajar con reacciones. Para ello se utiliza una expresión gráfica para representar una ecuación química. En la primera parte, expresamos los reactivos y en la segunda, los productos de la reacción.

Para balancear o equilibrar ecuaciones químicas existen diversos métodos. En todos, el objetivo que se persigue es que la ecuación química cumpla con la ley de la conservación de la materia, esto es, la materia no se crea ni se destruye, solamente se transforma.

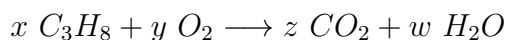
■ Ejemplo 1.8.1.

Balancear la ecuación química.



Solución:

Para balancear la ecuación debemos obtener valores x , y , z y w de tal manera que el número de átomos en ambos lados de la ecuación sea el mismo. Por lo tanto:



Con lo que obtenemos :

$$\begin{array}{lcl} \text{Carbono (C)} & : & 3x = z \\ \text{Hidrógeno (H)} & : & 8x = 2w \\ \text{Oxígeno (O)} & : & 2y = 2z + w \end{array}$$

El cual representa un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, esto es,

$$\begin{array}{rcl} 3x + 0y - z + 0w & = & 0 \\ 8x + 0y + 0z - 2w & = & 0 \\ 0x + 2y - 2z - w & = & 0 \end{array}$$

ahora debemos escalar para resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{\frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{lcl} \therefore & \begin{array}{l} 3x - z = 0 \\ 4x - w = 0 \\ -6x + 2y - w = 0 \end{array} & \begin{array}{l} z = 3x \\ w = 4x \\ 2y = 6x + w = 6x + 4x = 10x \end{array} \end{array}$$

así el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones y el conjunto solución está dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 5t \\ z = 3t \\ w = 4t \end{array} \right. \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Si $t = 2$ entonces una solución particular del sistema es: $x = 2$, $y = 10$, $z = 6$, $w = 8$. Por lo tanto la ecuación balanceada es:



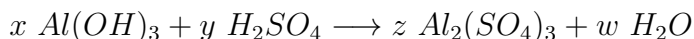
■ Ejemplo 1.8.2.

Balancear la siguiente ecuación química.



Solución:

Como en el ejemplo anterior debemos obtener valores x , y , z y w de tal manera que el número de átomos en ambos lados de la ecuación sea el mismo. Por lo tanto:



Con lo que obtenemos :

$$\begin{array}{lcl} \text{Aluminio (Al)} & : & x = 2z \\ \text{Oxígeno (O)} & : & 3x + 4y = 12z + w \\ \text{Hidrógeno (H)} & : & 3x + 2y = 2w \\ \text{Azufre (S)} & : & y = 3z \end{array}$$

El cual representa un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, esto es,

$$\begin{array}{rcl} x + 0y - 2z + 0w & = & 0 \\ 3x + 4y - 12z - w & = & 0 \\ 3x + 2y + 0z - 2w & = & 0 \\ 0x + y - 3z + 0w & = & 0 \end{array}$$

ahora debemos escalar para resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -12 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \\ \begin{array}{l} \sim \\ r_2 - 4r_4 \\ r_3 - 2r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \therefore \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} x - 2z = 0 \\ 6z - w = 0 \\ 2y + 6z - 2w = 0 \\ y - 3z = 0 \end{array} \therefore \begin{array}{l} x = 2z \\ w = 6z \\ y = 3z \end{array} \end{array}$$

así el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones y el conjunto solución está dado por:

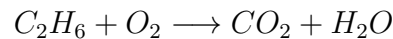
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = t \\ w = 6t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Si $t = 1$ entonces una solución particular del sistema es: $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$, $w = 6$. Por lo tanto la ecuación balanceada es:



■ **Ejemplo 1.8.3.**

Balancear la siguiente ecuación química.

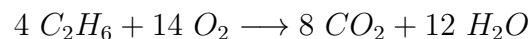


Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: el conjunto solución está dado por:

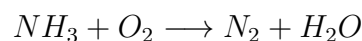
$$x = \frac{t}{3}, y = \frac{7t}{6}, z = \frac{2t}{6} \text{ y } w = t \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Si $t = 12$ entonces una solución particular del sistema es $x = 4$, $y = 14$, $z = 8$, y $w = 12$. Por lo tanto la ecuación balanceada es:



■ **Ejemplo 1.8.4.**

Balancear la siguiente ecuación química.



Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: el conjunto solución está dado por:

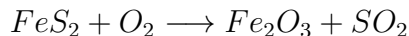
$$x = \frac{4t}{3}, y = t, z = \frac{2t}{3} \text{ y } w = 2t \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Si $t = 3$ entonces una solución particular del sistema es $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$, y $w = 6$. Por consiguiente la ecuación balanceada es:



■ **Ejemplo 1.8.5.**

Balancear la siguiente ecuación química.

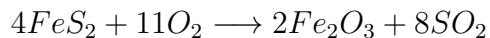


Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: el conjunto solución está dado por:

$$x = 2t, y = \frac{11t}{2}, z = t \text{ y } w = 4t \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Si $t = 2$ entonces una solución particular del sistema es $x = 4$, $y = 11$, $z = 2$, y $w = 8$. Por lo tanto la ecuación balanceada es:



Vectores en el plano y en el espacio

En este capítulo introducimos los vectores en el plano y en el espacio, definimos algunas operaciones entre ellos y precisamos algunos conceptos tales como: magnitud, dirección y ángulo entre dos vectores, además del producto vectorial y la ecuación de un plano.

2.1. Adición y sustracción de vectores

Geoméricamente los vectores se representan en el plano con flechas que parten del origen, como se observa en la figura 2.1.

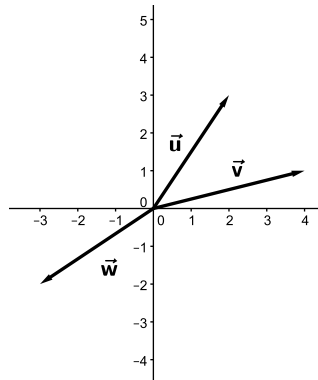


Figura 2.1: Vectores en el plano.

Ahora veamos qué podemos hacer con los vectores y si es posible darles algún tipo de estructura.

Definición 2.1.1. Si $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (a - c, b - d)$.



Figura 2.2: Suma y resta de vectores.

■ **Ejemplo 2.1.1.** Calcule $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$, donde $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$.

Solución:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (-1, 3) = (2 + (-1), 1 + 3) = (1, 4).$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (2, 1) - (-1, 3) = (2 - (-1), 1 - 3) = (3, -2).$$

Geoméricamente la suma y la diferencia se muestra en la figura 2.3.

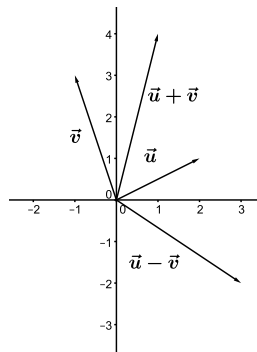


Figura 2.3: Suma y resta de vectores.

Es fácil ver que se tienen las siguientes propiedades para los vectores en el plano, esto es, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $r, s \in \mathbb{R}$ entonces:

$$1) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$2) \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$$

$$3) \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$$

$$4) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$5) r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$$

$$6) (r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$$

$$7) (rs)\vec{u} = r(s\vec{u}) = s(r\vec{u})$$

$$8) 1\vec{u} = \vec{u}$$

2.2. Magnitud y dirección de un vector

Definición 2.2.1. Si $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un vector en el plano, entonces la magnitud (norma o tamaño) de \vec{v} es $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Encuentre la magnitud de cada vector en el plano.

■ Ejemplo 2.2.1.

$$\vec{u} = (3, 4)$$

Solución:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

■ Ejemplo 2.2.2.

$$\vec{u} = (-\sqrt{3}, 1)$$

Solución:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

■ **Ejemplo 2.2.3.**

$$\vec{u} = (-2, -4)$$

Solución:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \\ &= \sqrt{4(5)} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \approx 4.47\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 2.2.4.**

$$\vec{u} = (5, 0)$$

Solución:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(5)^2 + (0)^2} = \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

■ **Ejemplo 2.2.5.**

$$\vec{u} = (0, 0)$$

Solución:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = 0$$

2.3. Ángulo formado por dos vectores

Es necesario obtener una expresión para calcular el ángulo entre dos vectores, para ello aplicamos la ley de los cosenos al triángulo formado por los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} - \vec{v}$, como se observa en la figura 2.4.

Por lo tanto $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta$, por otra parte

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, lo que implica $-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta = -2\vec{u} \cdot \vec{v}$, así $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$ y despejando $\cos \theta$ obtenemos,

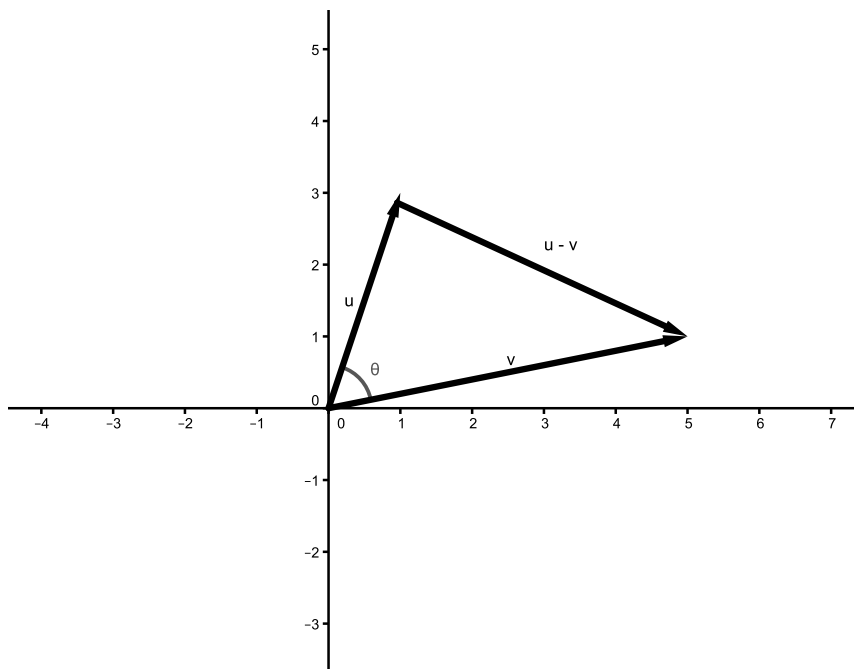


Figura 2.4: Ángulo entre u y v .

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Encuentre el ángulo formado por los vectores \vec{u} y \vec{v} en cada caso.

■ **Ejemplo 2.3.1.**

$$\vec{u} = (-1, 3) \text{ y } \vec{v} = (3, 3)$$

Solución:

Primero vamos a calcular la magnitud de cada vector.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{además } \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)(3) + (3)(3) = -3 + 9 = 6$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{6}{\sqrt{10}(3\sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$$

$$\therefore \cos \theta \approx 0.4472 \Rightarrow \theta = 63.43^\circ$$

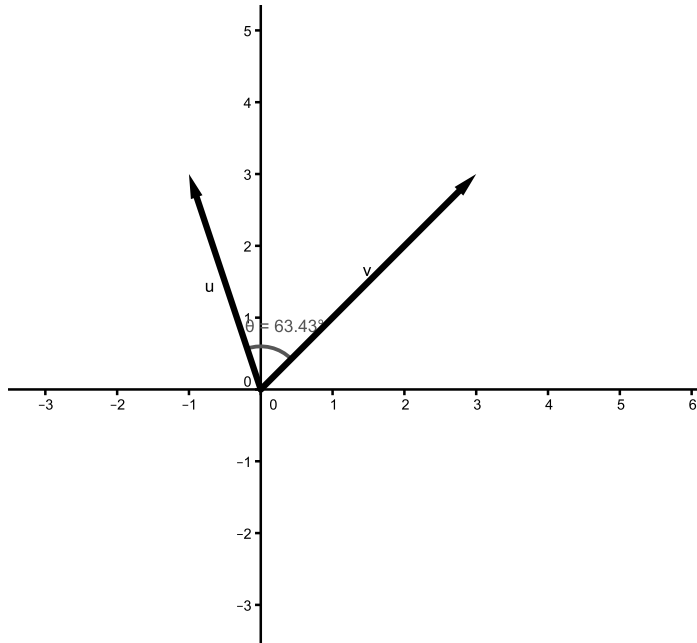


Figura 2.5: Ángulo entre u y v.

■ Ejemplo 2.3.2.

$$\vec{u} = (1, 3) \text{ y } \vec{v} = (5, -5)$$

Solución:

Calculemos la magnitud de cada vector.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{además } \vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(5) + (3)(-5) = 5 - 15 = -10$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-10}{\sqrt{10}(5\sqrt{2})} = \frac{-10}{\sqrt{500}} = \frac{-10}{10\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \approx -0.4472$$

$$\therefore \cos \theta \approx -0.4472 \Rightarrow \theta = 116.57^\circ$$

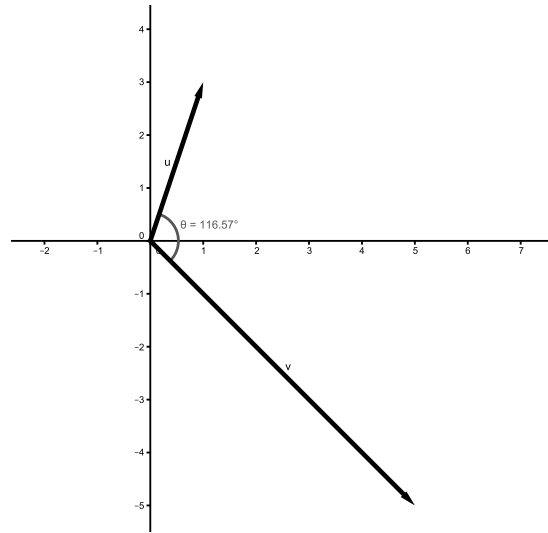


Figura 2.6: Ángulo entre u y v.

■ **Ejemplo 2.3.3.**

$$\vec{u} = (-2, 1) \text{ y } \vec{v} = (3, 1)$$

Solución:

Primero vamos a calcular la magnitud de cada vector.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\text{además } \vec{u} \cdot \vec{v} = (-2)(3) + (1)(1) = -6 + 1 = -5$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-5}{\sqrt{5}(\sqrt{10})} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \approx -0.7071$$

$$\therefore \cos \theta \approx -0.7071 \Rightarrow \theta = 135^\circ$$

■ **Ejemplo 2.3.4.**

Encuentre los ángulos interiores del triángulo formado por los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} - \vec{v}$, donde $\vec{u} = (1, 5)$ y $\vec{v} = (5, 4)$.

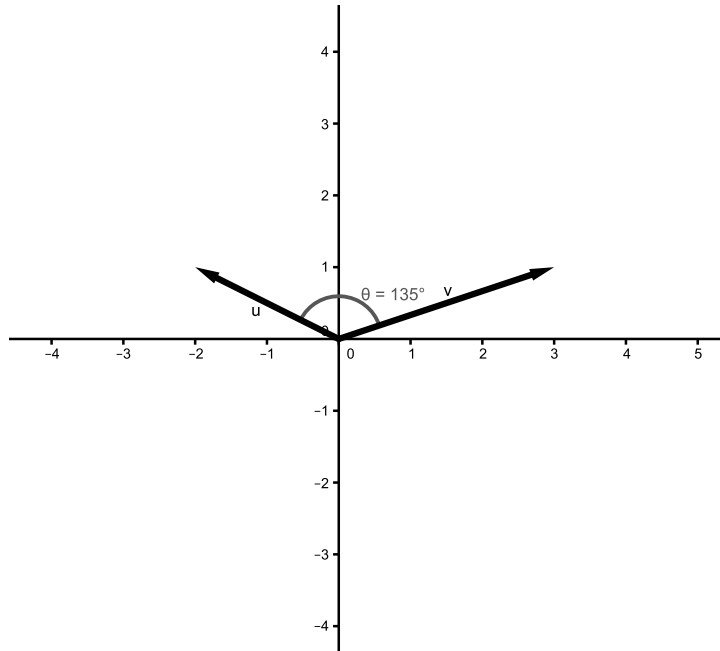


Figura 2.7: Ángulo entre u y v.

Solución:

Como $\vec{u} = (1, 5)$ y $\vec{v} = (5, 4)$, entonces $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - 5, 5 - 4) = (-4, 1)$.

Ahora vamos a calcular la magnitud de cada vector.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$\text{además } \vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(5) + (5)(4) = 5 + 20 = 25,$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1)(-4) + (5)(1) = -4 + 5 = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (5)(-4) + (4)(1) = -20 + 4 = -16$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{25}{\sqrt{26}(\sqrt{41})} = \frac{25}{\sqrt{1066}} \approx 0.7657$$

$$\therefore \cos \theta \approx 0.7657 \Rightarrow \theta = 40^\circ.$$

Ahora calculemos el ángulo entre \vec{u} y \vec{w} .

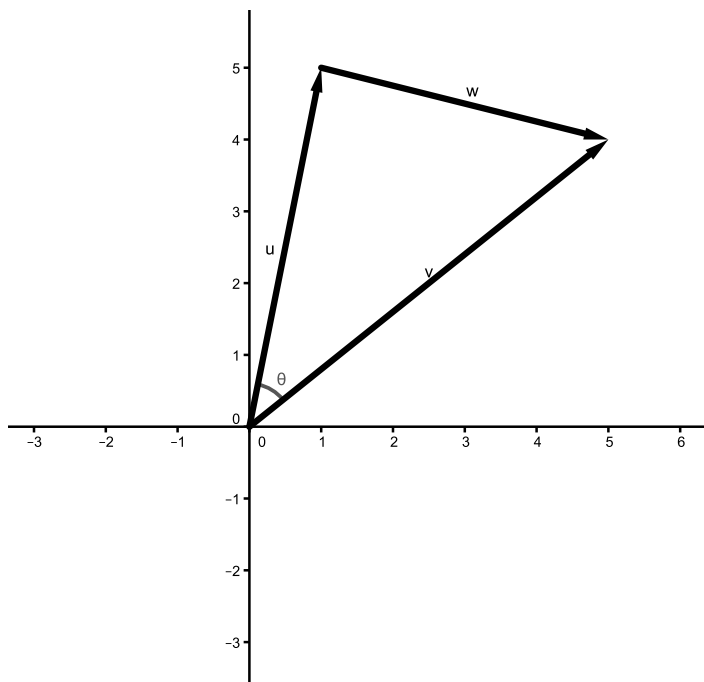


Figura 2.8: Triángulo formado por u, v y w.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{26}(\sqrt{17})} = \frac{1}{\sqrt{442}} \approx 0.0475$$

$$\therefore \cos \alpha \approx 0.0475 \Rightarrow \alpha = 87.27^\circ.$$

Ahora calculemos el ángulo entre \vec{v} y \vec{w} .

$$\cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{-16}{\sqrt{41}(\sqrt{17})} = \frac{-16}{\sqrt{697}} \approx -0.6060$$

$$\therefore \cos \beta \approx -0.6060 \Rightarrow \beta = 52.73^\circ.$$

Existe otra manera para calcular β , a partir de θ y α pues $\theta + \alpha + \beta = 180^\circ$, por consiguiente $\beta = 180^\circ - (\theta + \alpha) = 180^\circ - (40^\circ + 87.27^\circ) = 180^\circ - 127.27^\circ = 52.73^\circ$

$\therefore \beta = 52.73^\circ$, este resultado coincide con lo que habíamos hecho.

2.4. Producto vectorial

Definición 2.4.1. Si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ son vectores en el espacio, entonces el producto vectorial o producto cruz de \vec{u} y \vec{v} que denotamos con $\vec{u} \times \vec{v}$ es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

■ Ejemplo 2.4.1.

Sean $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 4, 7)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= i[3(7) - 4(5)] - j[2(7) - (-1)(5)] + k[2(4) - (-1)(3)] \\ &= i(21 - 20) - j(14 + 5) + k(8 + 3) = i - 19j + 11k = (1, -19, 11) \\ \therefore \vec{u} \times \vec{v} &= (1, -19, 11). \end{aligned}$$

■ Ejemplo 2.4.2.

Sean $\vec{u} = (2, 1, 5)$, $\vec{v} = (-1, 4, 3)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= i[1(3) - 4(5)] - j[2(3) - (-1)(5)] + k[2(4) - (-1)(1)] \\ &= i(3 - 20) - j(6 + 5) + k(8 + 1) = -17i - 11j + 9k = (-17, -11, 9) \\ \therefore \vec{u} \times \vec{v} &= (-17, -11, 9).\end{aligned}$$

Una pregunta natural es, ¿qué relación existe entre $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$?, para ello consideremos el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 2.4.3.**

Sean $\vec{u} = (2, 1, 5)$, $\vec{v} = (-1, 4, 3)$, calcular $\vec{v} \times \vec{u}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= i[4(5) - 1(3)] - j[(-1)(5) - 2(3)] + k[(-1)(1) - 2(4)] \\ &= i(20 - 3) - j(-5 - 6) + k(-1 - 8) = 17i + 11j - 9k = (17, 11, -9) \\ \therefore \vec{v} \times \vec{u} &= (17, 11, -9).\end{aligned}$$

Podemos observar del ejemplo anterior que $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

■ **Ejemplo 2.4.4.**

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, demuestre que $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: aplique propiedades de los determinantes).

■

Observación:

En el ejemplo 5.1.1 $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 4, 7)$ y $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -19, 11)$

$$\therefore \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 2(1) + 3(-19) + 5(11) = 2 - 57 + 55 = 0 \quad \text{y}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (-1)(1) + 4(-19) + 7(11) = -1 - 76 + 77 = 0$$

por lo tanto \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares a $\vec{u} \times \vec{v}$.

La interpretación geométrica de $\vec{u} \times \vec{v}$ aparece en la figura 2.9.

■ **Ejemplo 2.4.5.**

Sean $\vec{u} = (3, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, calcular $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= i(1 - 0) - j(3 + 1) + k(0 - 1) = i - 4j - k = (1, -4, -1) \end{aligned}$$

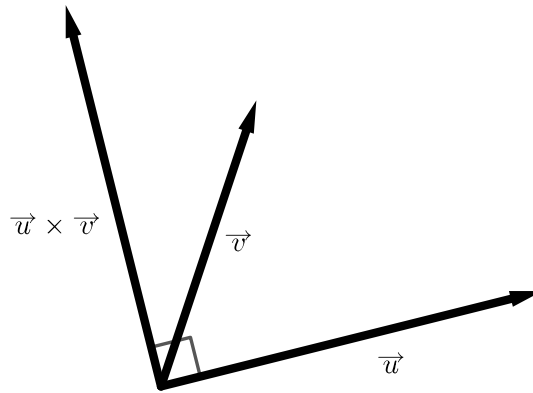


Figura 2.9: Producto cruz de \vec{u} y \vec{v} .

$$\therefore \vec{u} \times \vec{v} = (1, -4, -1)$$

■ **Ejemplo 2.4.6.**

Sean $\vec{u} = (1, 1, -1)$, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -4, -1)$).

■ **Ejemplo 2.4.7.**

Sean $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$, obtenga $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -2, 1)$).

La norma del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ cumple la ecuación $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$ y representa

el área del paralelogramo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} , como puede verse en la siguiente figura.

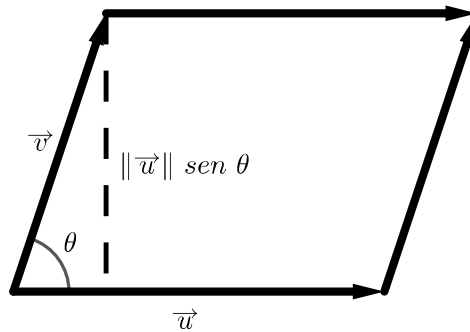


Figura 2.10: Área del paralelogramo que forman \vec{u} y \vec{v} .

■ **Ejemplo 2.4.8.**

Sean $\vec{u} = (2, 1, 5)$, $\vec{v} = (-1, 4, 3)$, demuestre que el área del paralelogramo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} es $\sqrt{491}$.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.2 $\vec{u} \times \vec{v} = (17, 11, -9)$.

$$\therefore \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(17)^2 + (11)^2 + (-9)^2} = \sqrt{491} \approx 22 \cdot 15$$

■

■ **Ejemplo 2.4.9.**

Sean $\vec{u} = (3, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, demuestre que el área del paralelogramo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} es $3\sqrt{2}$.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.5 $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -4, -1)$.

$$\therefore \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$$

■

■ Ejemplo 2.4.10.

Sean $\vec{u} = (4, 2, -2)$, $\vec{v} = (2, 0, 2)$, demuestre que el área del triángulo que forman los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} - \vec{v}$ es $2\sqrt{11}$.

Demostración:

Como $\vec{u} = (4, 2, -2)$ y $\vec{v} = (2, 0, 2)$, entonces $\vec{u} \times \vec{v} = (4, -12, -4)$.

\therefore el área del triángulo que forman los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} - \vec{v}$ es

$$\Delta = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{4\sqrt{11}}{2} = 2\sqrt{11} \approx 6.63$$

■

2.5. Planos en el espacio

Definición 2.5.1. Si \mathcal{P} es un plano y S es un punto en \mathcal{P} con n un vector normal a \mathcal{P} (véase figura 2.11), entonces $U \in \mathcal{P}$ si y solo si $(u - s) \cdot n = 0$ es una ecuación escalar o cartesiana de \mathcal{P} .

■ Ejemplo 2.5.1.

Encuentre una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} que pasa por el punto $S = (1, 3, 2)$ y cuyo vector normal es $n = (-1, 5, 1)$.

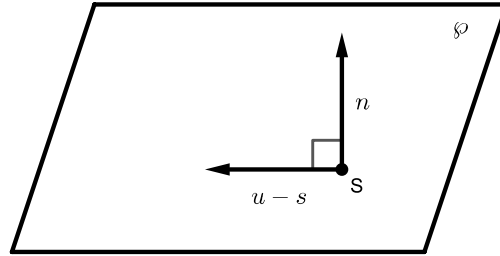


Figura 2.11: Un plano en el espacio.

Solución:

Sea $U = (x, y, z)$ algún punto de \mathcal{P} , entonces $U \in \mathcal{P}$ si y solo si $(u - s) \cdot n = 0$

$$\begin{aligned} \therefore (x - 1, y - 3, z - 2) \cdot (-1, 5, 1) &= -1(x - 1) + 5(y - 3) + 1(z - 2) \\ &= -x + 1 + 5y - 15 + z - 2 = -x + 5y + z - 16 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore -x + 5y + z - 16 = 0$ es la ecuación de \mathcal{P} .

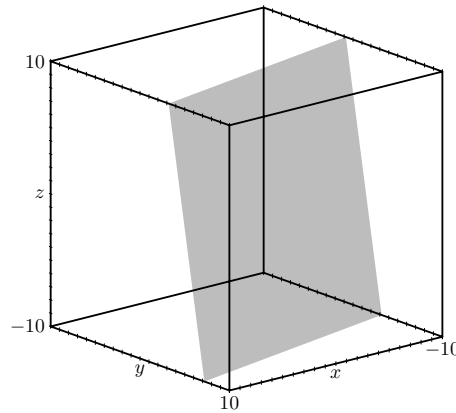


Figura 2.12: El plano $-x + 5y + z - 16 = 0$.

■ Ejemplo 2.5.2.

Calcule una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} que pasa por el punto $S = (2, -1, 4)$ y cuyo vector normal es $n = (6, 5, 1)$.

Solución:

Sea $U = (x, y, z)$ algún punto de \mathcal{P} , entonces $U \in \mathcal{P}$ si y solo si $(u - s) \cdot n = 0$.

$$\begin{aligned} \therefore (x - 2, y + 1, z - 4) \cdot (6, 5, 1) &= 6(x - 2) + 5(y + 1) + 1(z - 4) \\ &= 6x - 12 + 5y + 5 + z - 4 = 6x + 5y + z - 11 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore 6x + 5y + z - 11 = 0$ es la ecuación de \mathcal{P} .

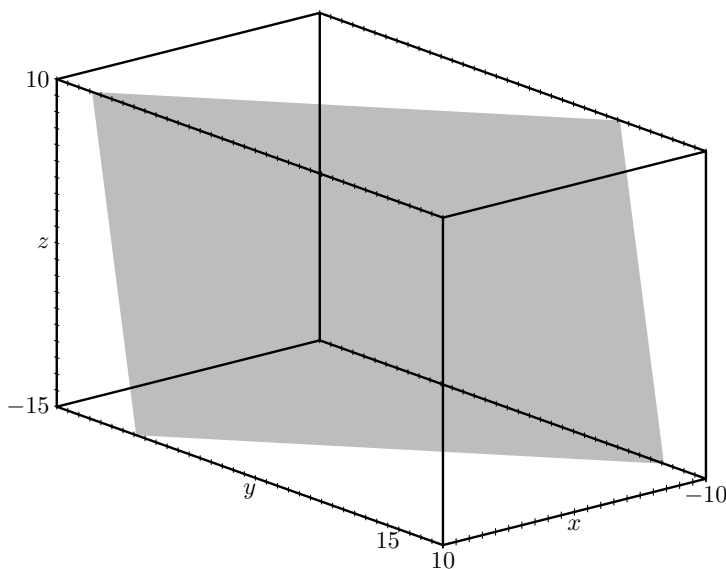


Figura 2.13: El plano $6x + 5y + z - 11 = 0$.

■ Ejemplo 2.5.3.

Encuentre una ecuación cartesiana del plano \mathcal{P} que pasa por los puntos $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, -1, 0)$ y $R = (2, 2, -1)$.

Solución:

Primero observemos que tenemos tres puntos, pero no conocemos un vector normal al plano, por consiguiente utilizando el producto cruz vamos a calcular n , esto es,

$$q - p = (3, -1, 0) - (1, 2, 3) = (2, -3, -3) \text{ y } r - p = (2, 2, -1) - (1, 2, 3) = (1, 0, -4)$$

$$\therefore n = (q - p) \times (r - p) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i(12 - 0) - j(-8 + 3) + k(0 + 3) = 12i + 5j + 3k = (12, 5, 3)$$

Sea $U = (x, y, z)$ algún punto de \mathcal{P} , entonces $U \in \mathcal{P}$ si y solo si $(u - p) \cdot n = 0$

$$\begin{aligned} \therefore (x - 3, y + 1, z - 0) \cdot (12, 5, 3) &= 12(x - 3) + 5(y + 1) + 3(z) \\ &= 12x - 36 + 5y + 5 + 3z = 12x + 5y + 3z - 31 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore 12x + 5y + 3z - 31 = 0$ es la ecuación de \mathcal{P} .

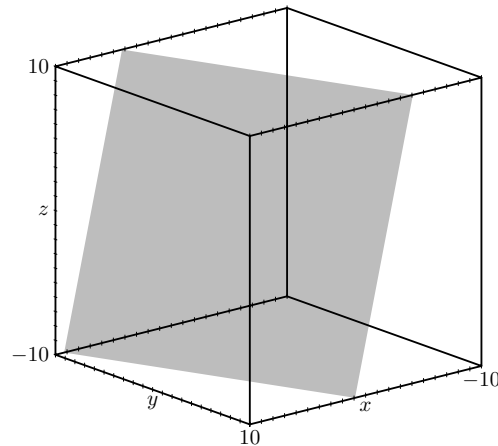


Figura 2.14: El plano que pasa por P, Q y R.

Espacios vectoriales

En este capítulo analizamos los conceptos de espacio vectorial y subespacio vectorial, además, definimos combinación lineal y conjunto generador de un espacio vectorial, para obtener el concepto de base y dimensión de un espacio vectorial.

3.1. Espacios vectoriales

Definición 3.1.1. *Un espacio vectorial V con coeficientes en un campo K que denotamos con $(V, +, \cdot)$, es un conjunto con una operación binaria llamada suma y una multiplicación escalar, que además cumple:*

i) si $\vec{u}, \vec{v} \in V$; $r \in K$ entonces $\vec{u} + \vec{v} \in V$

ii) si $r \in K$ entonces $r\vec{u} \in V$

Éstas operaciones deben satisfacer los siguientes axiomas y a los elementos de V se les llama vectores:

para cada $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$; $r, s \in K$

1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$

3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$

$$4) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$5) r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$$

$$6) (r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$$

$$7) (rs)\vec{u} = r(s\vec{u}) = s(r\vec{u})$$

$$8) 1\vec{u} = \vec{u}$$

Observación:

En ocasiones se omite la flecha para los vectores y se considera $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

■ **Ejemplo 3.1.1.**

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$, si $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)$ y $r\vec{u} = (ra, rb)$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ y $\vec{w} = (e, f)$; $r, s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 1) \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (a + c, b + d) + (e, f) && \text{por definición} \\
 &= ((a + c) + e, (b + d) + f) && \text{por definición} \\
 &= (a + (c + e), b + (d + f)) && \text{por asociatividad de } \mathbb{R} \\
 &= (a, b) + ((c + e), (d + f)) && \text{por definición} \\
 &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{u} + \vec{0} &= (a, b) + (0, 0) \\
 &= (a + 0, b + 0) && \text{por definición} \\
 &= (a, b) && \text{pues } 0 \text{ es neutro en } \mathbb{R} \\
 &= \vec{u} \\
 &= \vec{0} + \vec{u} && \text{por 4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \vec{u} + (-\vec{u}) &= (a, b) + (-a, -b) \\
 &= (a + (-a), b + (-b)) && \text{por definición} \\
 &= (0, 0) && \text{pues -a es inverso aditivo de a} \\
 &= \vec{0} \\
 &= (-\vec{u}) + \vec{u} && \text{por 4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \vec{u} + \vec{v} &= (a, b) + (c, d) \\
 &= (a + c, b + d) && \text{por definición} \\
 &= (c + a, d + b) && \text{por la conmutatividad en } \mathbb{R} \\
 &= \vec{v} + \vec{u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad r(\vec{u} + \vec{v}) &= r((a, b) + (c, d)) \\
 &= r(a + c, b + d) && \text{por definición} \\
 &= (r(a + c), r(b + d)) && \text{por definición} \\
 &= (ra + rc, rb + rd) && \text{por la distributividad en } \mathbb{R} \\
 &= (ra, rb) + (rc, rd) && \text{por definición} \\
 &= r\vec{u} + r\vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad (r + s)\vec{u} &= (r + s)(a, b) \\
 &= ((r + s)a, (r + s)b) && \text{por definición} \\
 &= (ra + sa, rb + sb) && \text{por la distributividad en } \mathbb{R} \\
 &= (ra, rb) + (sa, sb) && \text{por definición} \\
 &= r(a, b) + s(a, b) && \text{por definición} \\
 &= r\vec{u} + s\vec{u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \quad (rs)\vec{u} &= (rs)(a, b) \\
&= ((rs)a, (rs)b) \cdots * && \text{por definición} \\
&= (r(sa), r(sb)) && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
&= r(sa, sb) && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
&= r(s\vec{u}) \\
&= ((rs)a, (rs)b) && \text{por } * \\
&= ((sr)a, (sr)b) && \text{por la conmutatividad en } \mathbb{R} \\
&= (s(ra), s(rb)) && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
&= s(ra, rb) && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
&= s(r\vec{u})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad 1\vec{u} &= 1(a, b) \\
&= (1a, 1b) && \text{por definición} \\
&= (a, b) && \text{pues 1 es neutro multiplicativo en } \mathbb{R} \\
&= \vec{u}
\end{aligned}$$

por lo tanto $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. ■

Ahora vamos a considerar el siguiente ejemplo.

■ Ejemplo 3.1.2.

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $K = \mathbb{R}$, si $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ y $r\vec{u} = (rx_1, rx_2, rx_3)$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ y $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)$; $r, s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 1) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3) && \text{por definición} \\
 &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) && \text{por definición} \\
 &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)) && \text{por asoc. de } \mathbb{R} \\
 &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) && \text{por definición} \\
 &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{u} + \vec{0} &= (x_1, x_2, x_3) + (0, 0, 0) \\
 &= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) && \text{por definición} \\
 &= (x_1, x_2, x_3) && \text{pues } 0 \text{ es neutro en } \mathbb{R} \\
 &= \vec{u} \\
 &= \vec{0} + \vec{u} && \text{por 4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \vec{u} + (-\vec{u}) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) \\
 &= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3)) && \text{por definición} \\
 &= (0, 0, 0) && \text{pues } -a \text{ es inv. adit. de } a \\
 &= \vec{0} \\
 &= (-\vec{u}) + \vec{u} && \text{por 4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \vec{u} + \vec{v} &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \\
 &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) && \text{por definición} \\
 &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) && \text{por la conmutatividad en } \mathbb{R} \\
 &= \vec{v} + \vec{u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad r(\vec{u} + \vec{v}) &= r((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) \\
 &= r(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) && \text{por definición} \\
 &= (r(x_1 + y_1), r(x_2 + y_2), r(x_3 + y_3)) && \text{por definición} \\
 &= (rx_1 + ry_1, rx_2 + ry_2, rx_3 + ry_3) && \text{por la distrib. en } \mathbb{R} \\
 &= (rx_1, rx_2, rx_3) + (ry_1, ry_2, ry_3) && \text{por definición} \\
 &= r\vec{u} + r\vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad (r+s)\vec{u} &= (r+s)(x_1, x_2, x_3) \\
&= ((r+s)x_1, (r+s)x_2, (r+s)x_3) && \text{por definición} \\
&= (rx_1 + sx_1, rx_2 + sx_2, rx_3 + sx_3) && \text{por la distrib. en } \mathbb{R} \\
&= (rx_1, rx_2, rx_3) + (sx_1, sx_2, sx_3) && \text{por definición} \\
&= r(x_1, x_2, x_3) + s(x_1, x_2, x_3) && \text{por definición} \\
&= r\vec{u} + s\vec{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \quad (rs)\vec{u} &= (rs)(x_1, x_2, x_3) \\
&= ((rs)x_1, (rs)x_2, (rs)x_3) \cdots * && \text{por definición} \\
&= (r(sx_1), r(sx_2), r(sx_3)) && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
&= r(sx_1, sx_2, sx_3) && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
&= r(s\vec{u}) \\
&= ((rs)x_1, (rs)x_2, (rs)x_3) && \text{por } * \\
&= ((sr)x_1, (sr)x_2, (sr)x_3) && \text{por la conmutatividad en } \mathbb{R} \\
&= (s(rx_1), s(rx_2), s(rx_3)) && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
&= s(rx_1, rx_2, rx_3) && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
&= s(r\vec{u})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad 1\vec{u} &= 1(x_1, x_2, x_3) \\
&= (1x_1, 1x_2, 1x_3) && \text{por definición} \\
&= (x_1, x_2, x_3) && \text{pues 1 es neutro multiplicativo en } \mathbb{R} \\
&= \vec{u}
\end{aligned}$$

por lo tanto $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. ■

■ Ejemplo 3.1.3.

Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $K = \mathbb{R}$, si $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ y $r\vec{u} = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: verifique las ocho propiedades). ■

Observación:

Con el ejemplo anterior podemos afirmar que para cada número natural n obtenemos un espacio vectorial, en particular; $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6$, etc., son espacios vectoriales.

■ **Ejemplo 3.1.4.**

Sea $V = \{0\}$ y $K = \mathbb{R}$, si $\vec{u} = 0$ y $\vec{v} = 0$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = 0$ y $r\vec{u} = r(0) = 0$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: verifique las ocho propiedades), a este espacio vectorial se le llama *trivial*. ■

Observación:

Los vectores en \mathbb{R}^n los escribiremos indistintamente como vectores renglón o vectores columna.

■ **Ejemplo 3.1.5.**

Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx \text{ con } m \in \mathbb{R} \text{ fijo} \right\}$. V es el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen y $K = \mathbb{R}$.

Si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ entonces $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$; por lo tanto $y_1 + y_2 = mx_1 + mx_2 = m(x_1 + x_2) \therefore u + v \in V$. Además, si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in V$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces

$y_1 = mx_1$, así $ry_1 = r(mx_1) = m(rx_1) \therefore ru \in V$, por consiguiente se cumplen las cerraduras con la suma y múltiplo escalar.

Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: verifique las ocho propiedades). ■

■ **Ejemplo 3.1.6.**

Sea $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}$, V es el conjunto de todos los planos que pasan por el origen y $K = \mathbb{R}$.

Si $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in V$ entonces $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$, $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$;

por consiguiente

$$0 = 0 + 0 = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2)$$

$$\therefore u + v \in V. \text{ Además, si } u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in V \text{ y } r \in \mathbb{R} \text{ entonces } ax_1 + by_1 + cz_1 = 0,$$

así $r(ax_1 + by_1 + cz_1) = r(0) = 0$ y $a(rx_1) + b(ry_1) + c(rz_1) = 0 \therefore ru \in V$, por consiguiente se cumplen las cerraduras en la suma y múltiplo por un escalar.

Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: verifique las ocho propiedades). ■

Observación:

Para probar que un conjunto es un espacio vectorial, primero deben verificarse que se cumplen las cerraduras en la suma y múltiplo escalar, pues de lo contrario no tiene sentido verificar las ocho propiedades (éste es un error frecuente que cometen los estudiantes).

■ **Ejemplo 3.1.7.**

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de dos renglones y dos columnas y $K = \mathbb{R}$,

si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ entonces $A + B = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y

$rA = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 1) \quad (A + B) + C &= \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} && \text{por definición} \\
 &= \begin{bmatrix} (a + e) + i & (b + f) + j \\ (c + g) + k & (d + h) + l \end{bmatrix} && \text{por definición} \\
 &= \begin{bmatrix} a + (e + i) & b + (f + j) \\ c + (g + k) & d + (h + l) \end{bmatrix} && \text{por asociatividad de } \mathbb{R} \\
 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e + i & f + j \\ g + k & h + l \end{bmatrix} && \text{por definición} \\
 &= A + (B + C)
 \end{aligned}$$

- 2)
$$A + 0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{bmatrix} \quad \text{por definición}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{pues } 0 \text{ es neutro en } \mathbb{R}$$

$$= A$$

$$= 0 + A \quad \text{por 4)}$$
- 3)
$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+(-a) & b+(-b) \\ c+(-c) & d+(-d) \end{bmatrix} \quad \text{por definición}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pues } -a \text{ es inverso aditivo de } a$$

$$= \vec{0}$$

$$= (-A) + A \quad \text{por 4)}$$
- 4)
$$A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \quad \text{por definición}$$

$$= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix} \quad \text{por la conmutatividad en } \mathbb{R}$$

$$= B + A$$
- 5)
$$r(A + B) = r \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r(a+e) & r(b+f) \\ r(c+g) & r(d+h) \end{bmatrix} \quad \text{por definición}$$

$$= \begin{bmatrix} ra+re & rb+rf \\ rc+rg & rd+rh \end{bmatrix} \quad \text{por la distributividad en } \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} re & rf \\ rg & rh \end{bmatrix} \quad \text{por definición}$$

$$= rA + rB$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad (r+s)A &= (r+s) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (r+s)a & (r+s)b \\ (r+s)c & (r+s)d \end{bmatrix} && \text{por definición} \\
 &= \begin{bmatrix} ra+sa & rb+sb \\ rc+sc & rd+sd \end{bmatrix} && \text{por la distributividad en } \mathbb{R} \\
 &= \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sa & sb \\ sc & sd \end{bmatrix} && \text{por definición} \\
 &= rA + sA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad (rs)A &= (rs) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (rs)a & (rs)b \\ (rs)c & (rs)d \end{bmatrix} \cdots * && \text{por definición} \\
 &= \begin{bmatrix} r(sa) & r(sb) \\ r(sc) & r(sd) \end{bmatrix} && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
 &= r \begin{bmatrix} sa & sb \\ sc & sd \end{bmatrix} && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
 &= r(sA) \\
 &= \begin{bmatrix} (rs)a & (rs)b \\ (rs)c & (rs)d \end{bmatrix} && \text{por } * \\
 &= \begin{bmatrix} (sr)a & (sr)b \\ (sr)c & (sr)d \end{bmatrix} && \text{por la conmutatividad en } \mathbb{R} \\
 &= \begin{bmatrix} s(ra) & s(rb) \\ s(rc) & s(rd) \end{bmatrix} && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
 &= s \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
 &= s(rA)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad 1A &= 1 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1a & 1b \\ 1c & 1d \end{bmatrix} && \text{por definición} \\
 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} && \text{pues 1 es neutro multiplicativo en } \mathbb{R} \\
 &= A
 \end{aligned}$$

por lo tanto $(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un espacio vectorial. ■

■ Ejemplo 3.1.8.

Sea $V = \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de tres renglones y tres columnas y $K = \mathbb{R}$,

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ x & y & z \end{bmatrix} \text{ entonces } A + B = \begin{bmatrix} a+p & b+q & c+r \\ d+s & e+t & f+u \\ g+x & h+y & i+z \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}). \text{ Veamos que } (V, +, \cdot) \text{ es un espacio vectorial.}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: verifique las ocho propiedades). ■

■ Ejemplo 3.1.9.

Sea $V = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de m renglones y n columnas y $K = \mathbb{R}$,

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}). \text{ Veamos que } (V, +, \cdot) \text{ es un espacio}$$

vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: verifique las ocho propiedades). ■

Observación:

Con el ejemplo anterior podemos afirmar que para cada número natural m y n obtenemos un espacio vectorial, en particular, $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{4 \times 6}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$, etc., son espacios vectoriales.

■ Ejemplo 3.1.10.

Sea $V = \mathcal{P}_1 = \{p(x) \mid p(x) = a + bx \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que uno con coeficientes reales y $K = \mathbb{R}$. Si $p(x) = a + bx$ y $q(x) = c + dx$ entonces $p(x) + q(x) = (a + c) + (b + d)x$ y $rp(x) = (ra) + (rb)x$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $p(x) = a + bx$, $q(x) = c + dx$ y $t(x) = e + fx$; $r, s \in \mathbb{R}$.

- 1) $(p(x) + q(x)) + t(x) = ((a + c) + (b + d)x) + (e + fx)$ por definición
 $= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)x$ por definición
 $= (a + (c + e) + (b + (d + f))x$ por asoc. de \mathbb{R}
 $= (a + bx) + ((c + e) + (d + f)x)$ por definición
 $= p(x) + (q(x) + t(x))$
- 2) $p(x) + 0 = a + bx + o + ox$
 $= (a + 0) + (b + 0)x$ por definición
 $= a + bx$ pues 0 es neutro en \mathbb{R}
 $= p(x)$
 $= 0 + p(x)$ por 4)
- 3) $p(x) + (-p(x)) = (a + bx) + ((-a) + (-b)x)$
 $= (a + (-a)) + (b + (-b))x$ por definición
 $= 0 + 0x$ pues -a es inverso aditivo de a
 $= 0$
 $= (-p(x)) + p(x)$ por 4)
- 4) $p(x) + q(x) = a + bx + c + dx$
 $= (a + c) + (b + d)x$ por definición
 $= (c + a) + (d + b)x$ por la conmutatividad en \mathbb{R}
 $= q(x) + p(x)$
- 5) $r(p(x) + q(x)) = r((a + c) + (b + d)x)$
 $= (r(a + c)) + r(b + d)x$ por definición
 $= (ra + rc) + (rb + rd)x$ por la distributividad en \mathbb{R}
 $= (ra + rc) + (rb)x + (rd)x$ por la distributividad en \mathcal{P}_1
 $= (ra + (rb)x) + (rc + (rd)x)$ por definición
 $= rp(x) + rq(x)$

$$\begin{aligned}
 6) \quad (r+s)p(x) &= (r+s)(a+bx) \\
 &= ((r+s)a) + ((r+s)b)x && \text{por definición} \\
 &= (ra+sa) + (rb+sb)x && \text{por la distributividad en } \mathbb{R} \\
 &= (ra+sa) + (rb)x + (sb)x && \text{por la distributividad en } \mathcal{P}_1 \\
 &= (ra+(rb)x) + (sa+(sb)x) && \text{por definición} \\
 &= r(a+bx) + s(a+bx) && \text{por definición} \\
 &= rp(x) + sp(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad (rs)p(x) &= (rs)(a+bx) \\
 &= ((rs)a) + ((rs)b)x \cdots * && \text{por definición} \\
 &= (r(sa) + r(sb))x && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
 &= r(sa + (sb)x) && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
 &= r(sp(x)) \\
 &= ((rs)a) + ((rs)b)x && \text{por } * \\
 &= ((sr)a + ((sr)b)x && \text{por la conmutatividad en } \mathbb{R} \\
 &= (s(ra) + s(rb))x && \text{por la asociatividad en } \mathbb{R} \\
 &= s(ra + (rb)x) && \text{por definición de múltiplo escalar} \\
 &= s(rp(x))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad 1(p(x)) &= 1(a+bx) \\
 &= (1a) + (1b)x && \text{por definición} \\
 &= a + bx && \text{pues 1 es neutro multiplicativo en } \mathbb{R} \\
 &= p(x)
 \end{aligned}$$

por lo tanto $(\mathcal{P}_1, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. ■

■ **Ejemplo 3.1.11.**

Sea $V = \mathcal{P}_n = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \text{ con } a_i \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales y $K = \mathbb{R}$.

Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ entonces $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$ y $rp(x) = (ra_0) + (ra_1)x + \cdots + (ra_n)x^n$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

Observación:

Con el ejemplo anterior podemos afirmar que para cada número natural n obtenemos un espacio vectorial, en particular \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 , \mathcal{P}_5 , etc., son espacios vectoriales.

■ **Ejemplo 3.1.12.**

Sea $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función continua}\}$ el conjunto de funciones continuas y $K = \mathbb{R}$.

Si $f = f(x)$ y $g = g(x)$ entonces $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(rf)(x) = rf(x)$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 3.1.13.**

Sea $V = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi \text{ con } i^2 = -1\}$ el conjunto de los números complejos y $K = \mathbb{R}$.

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces $z + w = (a + c) + (b + d)i$ y $rz = (ra) + (rb)i$. Veamos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

3.2. Subespacios vectoriales

Definición 3.2.1. *Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V . W es un subespacio vectorial si W es un espacio vectorial, el cual denotamos con $W \leq V$.*

Observación:

El siguiente resultado que no probaremos caracteriza a los subespacios vectoriales.

Teorema 3.2.1.

Si V un espacio vectorial y W un subconjunto de V , entonces W es un subespacio vectorial, si y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) $0 \in W$
- 2) Si u y $v \in W$ entonces $u + v \in W$.
- 3) Si r es un escalar y $v \in W$ entonces $rv \in W$.

Es claro que todo espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios, a saber, V y el conjunto $\{0\}$. Analicemos otros ejemplos.

■ Ejemplo 3.2.1.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx \text{ con } m \in \mathbb{R} \text{ fijo} \right\}$ el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen. Veamos que $W \leq V$.

Demostración:

1) Es claro que $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, pues $0 = m \cdot 0$.

2) Si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ entonces $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$; por lo tanto

$$y_1 + y_2 = mx_1 + mx_2 = m(x_1 + x_2) \quad \therefore \quad u + v \in W.$$

3) Si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in W$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces $y_1 = mx_1$, así $ry_1 = r(mx_1) = m(rx_1)$ por consiguiente $ru \in W \quad \therefore \quad W \leq V$.

■

■ Ejemplo 3.2.2.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1 \right\}$. Veamos que W no es un subespacio vectorial de V .

Demostración:

1) Es claro que $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$, pues $0 \neq 0x + 1 \quad \therefore \quad W \not\leq V$.

■

■ Ejemplo 3.2.3.

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}$, W es el conjunto de todos los planos que pasan por el origen. Veamos que $W \leq V$.

Demostración:

1) Es claro que $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$, pues $a(0) + b(0) + c(0) = 0$.

2) Si $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ entonces

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0, \quad ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$$

por consiguiente

$$0 = 0 + 0 = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2)$$

$$\therefore u + v \in W$$

3) Si $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in W$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$,

así $r(ax_1 + by_1 + cz_1) = r(0) = 0$ y $a(rx_1) + b(ry_1) + c(rz_1) = 0$, por consiguiente $ru \in W \therefore W \leq V$.

■

■ Ejemplo 3.2.4.

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 3 \right\}$. Veamos que $W \not\leq V$.

Demostración:

1) Es claro que $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$, pues $0 = a(0) + b(0) + c(0) \neq 3 \therefore W \not\leq V$.

■

■ **Ejemplo 3.2.5.**

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $W = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right\}$. Veamos que $W \leq V$.

Demostración:

1) Es claro que $0 \in W$, pues $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$.

2) Si $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in W$ entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} a+c & 0+0 \\ 0+0 & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix} \in W.$$

2) Si $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in W$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces

$$rA = r \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & r0 \\ r0 & rb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & 0 \\ 0 & rb \end{bmatrix} \in W \quad \therefore W \leq V$$

■

■ **Ejemplo 3.2.6.**

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $W = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right\}$. Veamos que $W \leq V$.

Demostración:

1) Es claro que $0 \in W$, pues $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$.

2) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \in W$ entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0+0 & c+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix} \in W.$$

2) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in W$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces

$$rA = r \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ r0 & rc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ 0 & rc \end{bmatrix} \in W \quad \therefore W \leq V$$

■

■ Ejemplo 3.2.7.

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $W = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right\}$. Veamos que $W \not\leq V$.

Demostración:

1) Es claro que $0 \notin W$, pues $0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore W \not\leq V$

■

■ Ejemplo 3.2.8.

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $W = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es invertible}\}$. Veamos que $W \not\leq V$.

Demostración:

1) Es claro que $0 \notin W$, pues $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es invertible $\therefore W \not\leq V$

■

■ Ejemplo 3.2.9.

Sea $V = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $W = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es una matriz triangular superior}\}$. Demuestre que $W \leq V$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ Ejemplo 3.2.10.

Sea $V = \mathbb{C}$ y $W = \mathbb{R}$. Veamos que $W \leq V$.

Demostración:

- 1) Es claro que $0 \in W$, pues $0 \in \mathbb{R}$.
- 2) Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b \in \mathbb{R}$
- 2) Si $r, a \in \mathbb{R}$ entonces $ra \in \mathbb{R} \therefore W \leq V$ ■

■ Ejemplo 3.2.11.

Sea $V = \mathcal{P}_n$ y $W = \mathcal{P}_m$ con $0 \leq m < n$. Demuestre que $W \leq V$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

3.3. Combinación lineal y conjunto generador

Definición 3.3.1. Si V es un espacio vectorial con coeficientes en un campo K y v_1, v_2, \dots, v_n son vectores de V entonces $v \in V$ es una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n cuando $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ con c_i escalares.

■ **Ejemplo 3.3.1.**

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $z = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ son una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pues

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ **Ejemplo 3.3.2.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $z = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ son una combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ya que:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ **Ejemplo 3.3.3.**

Sea $V = \mathcal{P}_1$, $p(x) = 2 + 5x$ y $q(x) = -3 + 7x$ son una combinación lineal de 1 y x , pues

$$2 + 5x = 2(1) + 5x \quad \text{y} \quad -3 + x = -3(1) + 7x$$

■ **Ejemplo 3.3.4.**

Sea $V = \mathcal{P}_3$, $p(x) = 2 + 5x - 6x^2 + 3x^3$ y $q(x) = 3 + x - 2x^2 + 5x^3$ son una combinación lineal de 1 , x , x^2 y x^3 , pues

$$2 + 5x - 6x^2 + 3x^3 = 2(1) + 5x - 6x^2 + 3x^3 \quad \text{y} \quad 3 + x - 2x^2 + 5x^3 = 3(1) + 1x - 2x^2 + 5x^3$$

■ **Ejemplo 3.3.5.**

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ son una combinación lineal de

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, porque

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ **Ejemplo 3.3.6.**

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ son una combinación lineal de

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, pues

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ **Ejemplo 3.3.7.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $w = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $z = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$, demuestre que w es una combinación lineal

de $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, pero z no lo es.

Demostración:

Para que w sea una combinación lineal de u y v , deben existir escalares c_1 y c_2 tal que $w = c_1u + c_2v$, esto es,

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 6c_2 \\ 2c_1 + 4c_2 \\ -c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{array}{l} c_1 + 6c_2 = 9 \\ 2c_1 + 4c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = 7 \end{array}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones $c_1 = -3$ y $c_2 = 2 \quad \therefore \quad w = -3u + 2v$.

Análogamente para z obtenemos un sistema de ecuaciones que no tiene solución.

$$\begin{array}{l} c_1 + 6c_2 = 4 \\ 2c_1 + 4c_2 = -1 \\ -c_1 + 2c_2 = 8 \end{array} \quad \therefore \quad z = c_1u + c_2v \quad \text{es imposible.}$$

■

■ **Ejemplo 3.3.8.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $z = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$, demuestre que z es una combinación lineal de

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $c_1 = 1$, $c_2 = -4$ y $c_3 = 3$).

■

■ Ejemplo 3.3.9.

Sea $V = \mathcal{P}_2$ y $p(x) = 2 + 6x^2$, demuestre que $p(x)$ es una combinación lineal de $q(x) = 1 - x + 3x^2$, $r(x) = 2 + x + 4x^2$ y $t(x) = 3 + 2x + 5x^2$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ y $c_3 = -2$).

■

■ Ejemplo 3.3.10.

Sea $V = \mathcal{P}_2$ y $p(x) = 2 - x + 3x^2$, demuestre que $p(x)$ es una combinación lineal de $q(x) = 1 - x^2$, $r(x) = 2 + x$ y $t(x) = x^2$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $c_1 = 4$, $c_2 = -1$ y $c_3 = 7$).

■

■ Ejemplo 3.3.11.

Sea $V = \mathcal{P}_2$ y $p(x) = a + bx + cx^2$, demuestre que $p(x)$ es una combinación lineal de $q(x) = 1 - x^2$, $r(x) = 2 + x$ y $t(x) = x^2$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $c_1 = a - 2b$, $c_2 = b$, $c_3 = a - 2b + c$).

■

■ **Ejemplo 3.3.12.**

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, demuestre que $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

Definición 3.3.2. Si V es un espacio vectorial con coeficientes en un campo K y v_1, v_2, \dots, v_n son vectores de V entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a V si para cada $v \in V$ existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n tal que $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$. En tal caso $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto generador de V .

■ **Ejemplo 3.3.13.**

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de V y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es otro conjunto generador de V .

■ **Ejemplo 3.3.14.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de V .

Demostración:

Es claro pues, si $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ entonces $v = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ■

■ **Ejemplo 3.3.15.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de V .

Demostración:

Es claro pues, si $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ entonces $v = (x - y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (y - z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En particular, si $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ entonces $x - y = 3$, $y - z = -5$ y $z = 3$, por lo tanto

$$v = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

■ **Ejemplo 3.3.16.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, demuestre que $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de V .

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector.

■

■ **Ejemplo 3.3.17.**

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, demuestre que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de V .

Demostración:

Es claro, pues
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

■ Ejemplo 3.3.18.

Sea $V = \mathcal{P}_2$, demuestre que $\{1, x, x^2\}$ es un conjunto generador de V .

Demostración:

Es claro, porque si $p(x) = a + bx + cx^2$ entonces $p(x) = a(1) + b(x) + c(x^2)$.

■

■ Ejemplo 3.3.19.

Sea $V = \mathcal{P}_n$, demuestre que $\{1, x, \dots, x^n\}$ es un conjunto generador de V .

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector.

■

3.4. Conjunto linealmente independiente y linealmente dependiente

Definición 3.4.1. Si V es un espacio vectorial con coeficientes en un campo K y v_1, v_2, \dots, v_n vectores de V entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente si $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$, implica $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. En caso contrario el conjunto es linealmente dependiente.

■ **Ejemplo 3.4.1.**

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente de V .

Demostración:

Supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, entonces $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto $c_1 = c_2 = 0$, luego α es linealmente independiente. ■

■ **Ejemplo 3.4.2.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración:

Supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$, entonces $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, así $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, luego β es linealmente independiente. ■

Observación:

De acuerdo con la regla de Cramer, un sistema de ecuaciones tiene una única solución si el determinante del sistema es diferente de cero, pero cuando el sistema de ecuaciones es homogéneo la única solución es la trivial, por lo tanto, sólo necesitamos calcular el determinante.

■ **Ejemplo 3.4.3.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Supongamos que } c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0, \text{ entonces } c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_3 \\ -2c_1 + c_2 - 2c_3 \\ 3c_1 + 7c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{array}{l} c_1 + 2c_3 = 0 \\ -2c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ 3c_1 + 7c_2 = 0 \end{array} \quad \therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |A| = -37 \neq 0, \end{aligned}$$

así $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, luego β es linealmente independiente. ■

■ **Ejemplo 3.4.4.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\eta = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Supongamos que } c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0, \text{ entonces } c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 3c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_1 - c_2 \\ c_1 + 5c_2 - 3c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3c_1 + 2c_2 + 4c_3 &= 0 \\ \therefore c_1 - c_2 &= 0 \\ c_1 + 5c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \therefore A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y } |A| = 39 \neq 0,$$

así $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, luego η es linealmente independiente. ■

■ Ejemplo 3.4.5.

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $-3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$ y no todos los escalares son cero). ■

■ Ejemplo 3.4.6.

Sea $V = \mathbb{R}^4$, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración: Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: aplique la definición y resuelva el sistema de ecuaciones). ■

3.5. Base y dimensión

Definición 3.5.1. Si V es un espacio vectorial con coeficientes en un campo K y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores de V , entonces B es una base de V si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) B es linealmente independiente.
- 2) B genera a V .

■ **Ejemplo 3.5.1.**

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de V .

Demostración:

Es claro, pues α es linealmente independiente y genera a V .

■

■ **Ejemplo 3.5.2.**

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de V .

Demostración:

- 1) α es linealmente independiente.

Supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, entonces

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 = 0 \end{array}$$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $|A| = 1 \neq 0$, así $c_1 = c_2 = 0$, luego α es linealmente independiente.

- 2) α genera a V .

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 = v$, entonces

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} c_1 + c_2 = x \\ 2c_1 + 3c_2 = y \end{array}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |A| = 1 = \Delta \neq 0,$$

además por la regla de Cramer,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 3x - y \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix} = y - 2x$$

$$\therefore c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3x - y}{1} = 3x - y, \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y - 2x}{1} = y - 2x$$

por consiguiente $c_1 = 3x - y$ y $c_2 = -2x + y$ \therefore α genera a V .

■

■ Ejemplo 3.5.3.

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de V .

Demostración:

1) β es linealmente independiente.

Supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, entonces

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + c_2 \\ 2c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{array}{l} -c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{array}$$

$\therefore A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $|A| = -6 \neq 0$, así $c_1 = c_2 = 0$, luego β es linealmente independiente.

2) β genera a V

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 = v$, entonces

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + c_2 \\ 2c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} -c_1 + c_2 &= x \\ 2c_1 + 4c_2 &= y \end{aligned}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |A| = -6 = \Delta \neq 0,$$

además por la regla de Cramer,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 4x - y \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix} = -y - 2x$$

$$\therefore c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3x - y}{-6}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y - 2x}{-6}$$

por consiguiente $c_1 = \frac{3x - y}{-6}$ y $c_2 = \frac{y - 2x}{-6}$ $\therefore \beta$ genera a V .

■

■ Ejemplo 3.5.4.

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\eta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de V .

Demostración:

1) η es linealmente independiente.

Supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$, entonces

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 - c_2 + 3c_3 \\ c_1 + 2c_3 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 + 3c_3 &= 0 \\ \therefore \quad c_1 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \therefore \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |A| = 1 \neq 0,$$

así $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, luego η es linealmente independiente.

2) η genera a V

Sea $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y supongamos que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = v$, entonces

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 - c_2 + 3c_3 \\ c_1 + 2c_3 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 + 3c_3 &= x \\ \therefore \quad c_1 + 2c_3 &= y \\ c_1 + c_2 + 4c_3 &= z \end{aligned} \quad \therefore \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |A| = 1 = \Delta \neq 0,$$

además por la regla de Cramer,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ y & 0 & 2 \\ z & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2x + 7y - 2z, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & y & 2 \\ 1 & z & 4 \end{vmatrix} = -2x + 5y - z$$

$$\text{y} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = x - 3y + z, \quad \text{además } c_i = \Delta_i \text{ pues } \Delta = 1.$$

$$\therefore \quad c_1 = \Delta_1 = -2x + 7y - 2z, \quad c_2 = \Delta_2 = -2x + 5y - z, \quad c_3 = \Delta_3 = x - 3y + z$$

por consiguiente η genera a V . ■

■ Ejemplo 3.5.5.

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de V .

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. $\left\{ \text{Sugerencia: } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2. \right\}$

■

■ Ejemplo 3.5.6.

Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de V .

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector.

■

■ Ejemplo 3.5.7.

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,
demuestre que γ es una base de V .

Demostración:

1) γ es linealmente independiente.

Supongamos que $c_1M_1 + c_2M_2 + c_3M_3 + c_4M_4 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\therefore c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0, \text{ así } \gamma \text{ es linealmente independiente.} \end{aligned}$$

2) γ genera a V .

$$\text{Es claro, pues } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

■ Ejemplo 3.5.8.

Sea $V = \mathcal{P}_2$, demuestre que $\eta = \{1, x, x^2\}$ es una base de V .

Demostración:

1) η es linealmente independiente.

$$\text{Supongamos que } c_1v_1 + c_2v_2 = 0, \text{ entonces } c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) = 0$$

$$= 0 + 0x + 0x^2 \quad \therefore \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \text{ luego } \eta \text{ es linealmente independiente.}$$

2) η genera a V .

$$\text{Es claro, pues si } p(x) \in \mathcal{P}_2 \text{ entonces } p(x) = a + bx + cx^2.$$

■

■ Ejemplo 3.5.9.

Sea $V = \mathcal{P}_n$, demuestre que $\eta = \{1, x, \dots, x^n\}$ es una base de V .

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector.

■

Observación:

Con el ejemplo anterior podemos ver que $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ es una base de \mathcal{P}_6 , $\{1, x, \dots, x^{10}\}$ es una base de \mathcal{P}_{11} ; de hecho la base depende del valor de n , con $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.5.2. Si V es un espacio vectorial con coeficientes en un campo K y B es una base de V , entonces el número de elementos que tiene B es la dimensión de V y lo denotamos con $\dim V$.

■ **Ejemplo 3.5.10.**

Sea $V = \mathbb{R}^2$, demuestre que $\dim V = 2$.

Demostración:

Es claro pues $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de V , a α se le llama la base canónica. ■

■ **Ejemplo 3.5.11.**

Sea $V = \mathbb{R}^3$, demuestre que $\dim V = 3$.

Demostración:

Es claro pues $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de V , de hecho β es la base canónica. ■

Observación:

En \mathbb{R}^2 hay muchas bases, de hecho, se puede demostrar que cualesquiera dos vectores no paralelos forman una base de \mathbb{R}^2 ; en \mathbb{R}^3 ocurre lo mismo, cualesquiera tres vectores no paralelos forman una base de \mathbb{R}^3 .

■ **Ejemplo 3.5.12.**

Sea $V = \mathbb{R}^n$, demuestre que $\dim V = n$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: proponga la base canónica). ■

■ **Ejemplo 3.5.13.**

Sea $V = \mathcal{P}_2$, demuestre que $\dim V = 3$.

Demostración:

Es claro, porque $\alpha = \{1, x, x^2\}$ es una base de \mathcal{P}_2 . ■

■ **Ejemplo 3.5.14.**

Sea $V = \mathcal{P}_3$, demuestre que $\dim V = 4$.

Demostración:

Es claro porque $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de \mathcal{P}_3 . ■

■ Ejemplo 3.5.15.

Sea $V = \mathcal{P}_n$, demuestre que $\dim V = n + 1$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $\eta = \{1, x, \dots, x^n\}$ es una base). ■

■ Ejemplo 3.5.16.

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, demuestre que $\dim V = 4$.

Demostración:

Es claro, pues $\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de

V . A γ suele llamarse base canónica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. ■

■ Ejemplo 3.5.17.

Sea $V = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, demuestre que $\dim V = mn$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: proponga la base canónica). ■

3.6. Matriz de cambio de base

Sean $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vectores en el plano, por lo tanto $\alpha = \{u_1, u_2\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2 . Por otra parte, consideremos $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, estos vectores no son paralelos y por lo tanto son linealmente independientes, así $\beta = \{v_1, v_2\}$ es una base de \mathbb{R}^2 . Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y consideremos $v = x_1 u_1 + y_1 u_2$, lo cual quiere decir que v está representado en términos de la base α y escribimos $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Ahora como β es otra base de \mathbb{R}^2 , entonces existen escalares c_1, c_2 tales que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2$ y por consiguiente v se expresa en términos de la base β y se denota con $[v]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Para calcular los números c_1 y c_2 se expresan los elementos de la base α en términos de los elementos de la base β . Es fácil ver que

$$u_1 = \frac{3}{5}v_1 - \frac{2}{5}v_2 \quad y \quad u_2 = \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2$$

por lo tanto $[u_1]_\beta = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ y $[u_2]_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Además

$$\begin{aligned} v = x_1 u_1 + y_1 u_2 &= x_1 \left(\frac{3}{5}v_1 - \frac{2}{5}v_2 \right) + y_1 \left(\frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 \right) \\ &= \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1 \right) v_1 + \left(-\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1 \right) v_2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$c_1 = \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1 \quad y \quad c_2 = -\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1$$

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1 \\ -\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A v$$

por ejemplo si $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, entonces $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 1 \\ 2 + 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ lo cual significa que}$$

$$-2v_1 + 3v_2 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ -4 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = -5u_1 + 5u_2.$$

Definición 3.6.1. La matriz A del ejemplo anterior se llama matriz de cambio de base de α a β y se denota con $[v]_{\beta} = A [v]_{\alpha}$.

Observación:

Como habrán notado la matriz de cambio de base A es la inversa de la matriz formada por los elementos de la base β , es ahí donde radica la importancia de saber escalar matrices y sobre todo el cálculo de la matriz inversa.

■ **Ejemplo 3.6.1.**

Sean $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, hallar la matriz de cambio de base de α a β y determine $[v]_{\beta}$ sabiendo que $[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \underset{r_2 - 2r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right] \underset{5r_1 + r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\underset{\frac{1}{5}r_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 5 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \underset{\frac{1}{5}r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \quad \therefore \quad A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \text{ es la matriz de cambio de base.}$$

Por ejemplo si $[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$, entonces $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2 \\ -6 - 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ lo cual significa que}$$

$$2v_1 - 8v_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 8 \\ 6 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = 10u_1 - 10u_2.$$

■ **Ejemplo 3.6.2.**

Sean $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ hallar la matriz de cambio de base de α a β .

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ es la inversa).

■ **Ejemplo 3.6.3.**

Sean $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ hallar la

matriz de cambio de base de α a β .

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $A = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -6 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ es la inversa).

■ **Ejemplo 3.6.4.**

Sean $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ hallar la

matriz de cambio de base de α a β .

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ es la inversa).

Observación:

Cuando una de las bases es la canónica, para calcular la matriz de cambio de base es suficiente con encontrar la matriz inversa. Sin embargo, ¿si las dos bases que nos dan ninguna es la canónica, cómo le hacemos?. Este problema resulta un poco difícil, pero el trabajo realizado hasta ahora nos permite resolverlo.

■ **Ejemplo 3.6.5.**

Sean $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ hallar la matriz de cambio de base de α a β .

Solución:

Lo primero que hacemos es expresar los vectores de la base α como una combinación lineal de los vectores de la base β , esto es, deben existir escalares c_1, c_2, c_3, c_4 tales que $u_1 = c_1v_1 + c_2v_2$ y $u_2 = c_3v_1 + c_4v_2$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} \quad y$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 + c_4 \\ -c_3 + 2c_4 \end{pmatrix}$$

por consiguiente obtenemos dos sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 2 \\ -c_1 + 2c_2 & = & 1 \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} c_3 + c_4 & = & 1 \\ -c_3 + 2c_4 & = & 1 \end{array}$$

y las soluciones son $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_4 = \frac{2}{3}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ es la matriz de cambio}$$

de base de α a β .

Existe otra manera de hacerlo y para ello consideramos las dos matrices inducidas por las bases y escalonamos como si encontráramos la inversa, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] &\sim \begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right] \end{array} \quad 3r_1 - r_2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right] \\ \frac{1}{3}r_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right] \end{array} \quad \therefore A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ es la matriz de cambio de base.} \end{aligned}$$

■ Ejemplo 3.6.6.

Sean $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ hallar la matriz de cambio de base de α a β .

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $A = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}$).

■ Ejemplo 3.6.7.

Sean $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ hallar la matriz de cambio de base de α a β y determine $[v]_\beta$ sabiendo que $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Primero vamos a calcular la matriz de cambio de base.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -8 & 13 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -8 & 13 \\ 1 & 0 & 11 & -23 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 11 & -23 \\ 0 & 1 & -8 & 13 \end{array} \right] \quad \therefore \quad A = \begin{bmatrix} 11 & -23 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} \text{ es la matriz de cambio de base.} \\ & \text{Como } [v]_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ entonces } [v]_\beta = \begin{bmatrix} 11 & -23 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 + 23 \\ -32 - 13 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 67 \\ -45 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [v]_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [v]_\beta = \begin{pmatrix} 67 \\ -45 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.6.8.**

Sean $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ demuestre que la matriz de cambio de base de α a β es $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: aplique el proceso del ejemplo anterior). ■

■ **Ejemplo 3.6.9.**

Sean $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ demuestre que la matriz de

cambio de base de α a β es $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector.



Transformaciones lineales

En este capítulo se define el concepto de transformación lineal y posteriormente introducimos el núcleo y la imagen de una transformación lineal. Al final trabajamos con isomorfismos entre espacios vectoriales dando un enfoque geométrico y apoyado con ejemplos.

4.1. Transformaciones lineales

Definición 4.1.1. Sean U y V espacios vectoriales, una función $T : U \rightarrow V$ es una transformación lineal si se cumple las siguientes condiciones:

- 1) Para cada $u, v \in U$ $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- 2) Para cada $u \in U, r \in \mathbb{R}$ $T(ru) = rT(u)$.

■ **Ejemplo 4.1.1.**

Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

- 1) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $T(x + y) = x + y = T(x) + T(y) \therefore T(x + y) = T(x) + T(y)$.
- 2) Sean $r, x \in \mathbb{R}$, $T(rx) = rx = rT(x) \therefore T(rx) = rT(x)$.

Por lo tanto, T es una transformación lineal. A esta transformación se le llama identidad. ■

■ **Ejemplo 4.1.2.**

Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x - 1$, demuestre que T no es una transformación lineal.

Demostración:

1) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $T(x + y) = x + y - 1$ y $T(x) + T(y) = x - 1 + y - 1 \neq T(x + y)$
 $\therefore T(x + y) \neq T(x) + T(y)$ y por consiguiente T no es una transformación lineal. ■

Observación:

En el ejemplo anterior se observa que $T(0) = -1 \neq 0$, el siguiente resultado nos dice que esto no ocurre con las transformaciones lineales.

Si T es una transformación lineal, entonces $T(0) = 0$.

Demostración:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) \quad \therefore T(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Con este resultado antes de demostrar las dos condiciones para que una transformación sea lineal, primero es conveniente verificar que $T(0) = 0$.

■ **Ejemplo 4.1.3.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = x + y$, verifique que T es una transformación lineal.

Demostración:

$$\begin{aligned}
1) \text{ Sean } u &= (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ entonces } u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ por lo tanto } T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\
&= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = T(u) + T(v) \quad \therefore T(u + v) = T(u) + T(v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \text{ Sean } r \in \mathbb{R}, u &= (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ entonces } T(ru) = T(r(x, y)) = T(rx, ry) \\
&= (rx) + (ry) = r(x + y) = rT(x, y) = rT(u) \quad \therefore T(ru) = rT(u).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, T es una transformación lineal. ■

Observación:

En algunas ocasiones por abuso de notación se trabaja con X^t en lugar de X , esto es, en el ejemplo anterior se utiliza normalmente la siguiente expresión, sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$.

■ Ejemplo 4.1.4.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, verifique que T es una transformación lineal.

Demostración:

Antes de verificar si es una transformación lineal, veamos geoméricamente qué hace esta transformación.

$$1) \text{ Sean } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ entonces } u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore T(u + v) &= T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= T(u) + T(v).
\end{aligned}$$

$$2) \text{ Sean } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ y } r \in \mathbb{R}, \text{ entonces } ru = r \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T(ru) = T \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = rT \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = rT(u) \quad \therefore T(ru) = rT(u).$$

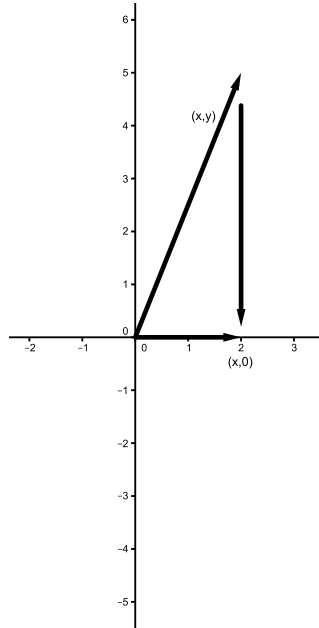


Figura 4.1: Proyección en el eje x .

Esta transformación lineal a cada punto del plano lo proyecta sobre el eje x .

■

■ **Ejemplo 4.1.5.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, verifique que T es una transformación lineal.

Demostración:

$$1) \text{ Sean } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ entonces } u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore T(u + v) &= T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

$$2) \text{ Sean } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ y } r \in \mathbb{R}, \text{ entonces } ru = r \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T(ru) = T\begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = rT\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = rT(u) \quad \therefore T(ru) = rT(u).$$

Esta transformación lineal a cada punto del plano lo deja igual, de hecho es la identidad. ■

■ **Ejemplo 4.1.6.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Antes de verificar si es una transformación lineal, veamos geoméricamente qué hace esta transformación.

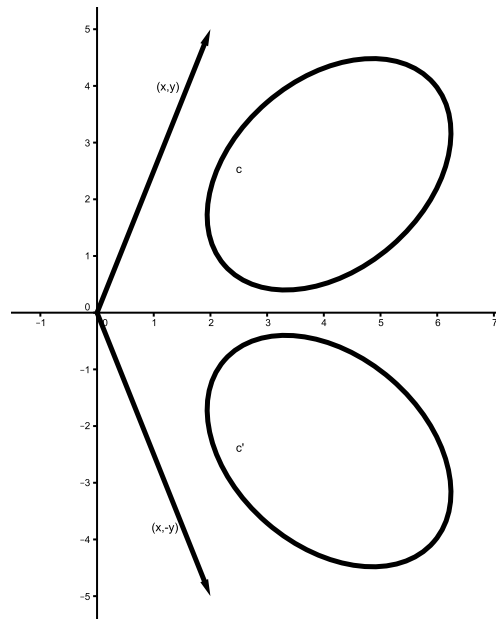


Figura 4.2: Reflexión en el eje x.

1) Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \therefore T(u+v) &= T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -y_1-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} \\ &= T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T(u) + T(v). \end{aligned}$$

$$2) \text{ Sean } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ y } r \in \mathbb{R}, \text{ entonces } ru = r \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T(ru) = T\begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ -ry_1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = rT\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = rT(u) \quad \therefore T(ru) = rT(u).$$

Esta transformación lineal a cada punto del plano lo refleja en el eje x , como se observa en la figura 4.2. ■

■ Ejemplo 4.1.7.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Antes de verificar si es una transformación lineal, veamos geoméricamente qué hace esta transformación.

$$1) \text{ Sean } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ entonces } u+v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_1+x_2) \\ -(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1-x_2 \\ -y_1-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

$$= T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T(u) + T(v).$$

$$2) \text{ Sean } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ y } r \in \mathbb{R}, \text{ entonces } ru = r \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T(ru) = T\begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rx_1 \\ -ry_1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = rT\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = rT(u) \quad \therefore T(ru) = rT(u).$$

Esta transformación lineal a cada punto del plano lo refleja con respecto al origen, como se observa en la figura 4.3. ■

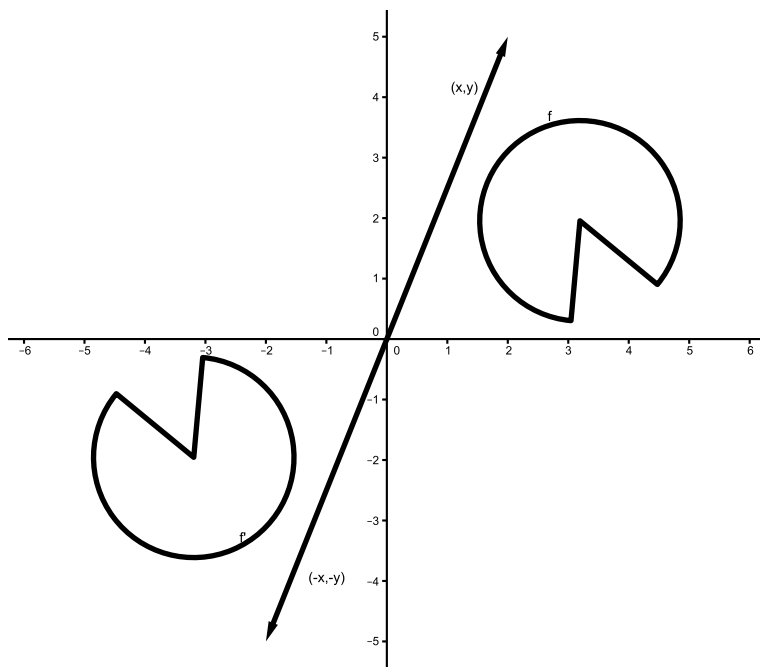


Figura 4.3: Reflexión con respecto al origen.

■ **Ejemplo 4.1.8.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Antes de verificar si es una transformación lineal, veamos geoméricamente qué hace esta transformación.

1) Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$$\therefore T(u + v) = T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T(u) + T(v).$$

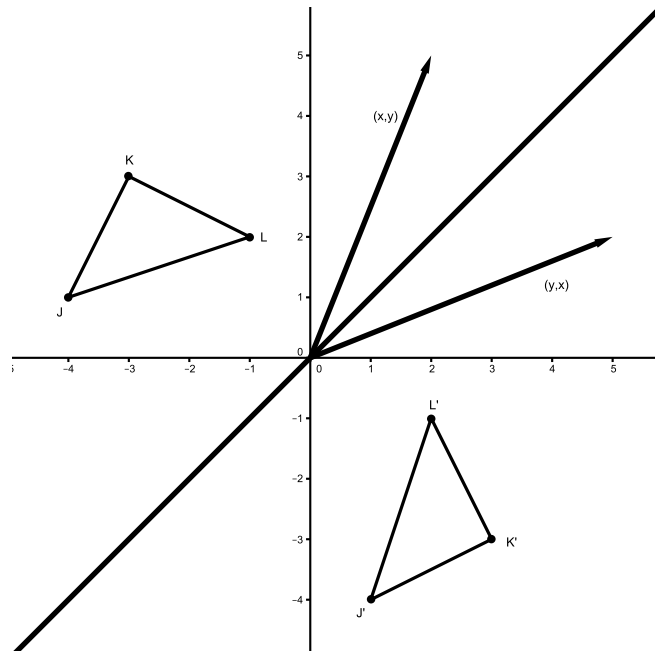


Figura 4.4: Reflexión con respecto a la recta $y = x$.

2) Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $ru = r \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix}$

$$\therefore T(ru) = T \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r y_1 \\ r x_1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = r T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = r T(u) \quad \therefore T(ru) = r T(u).$$

Esta transformación es una reflexión con respecto a la recta $y = x$, como se indica en la figura 4.4. ■

■ Ejemplo 4.1.9.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Antes de verificar si es una transformación lineal, veamos geoméricamente qué hace esta transformación.

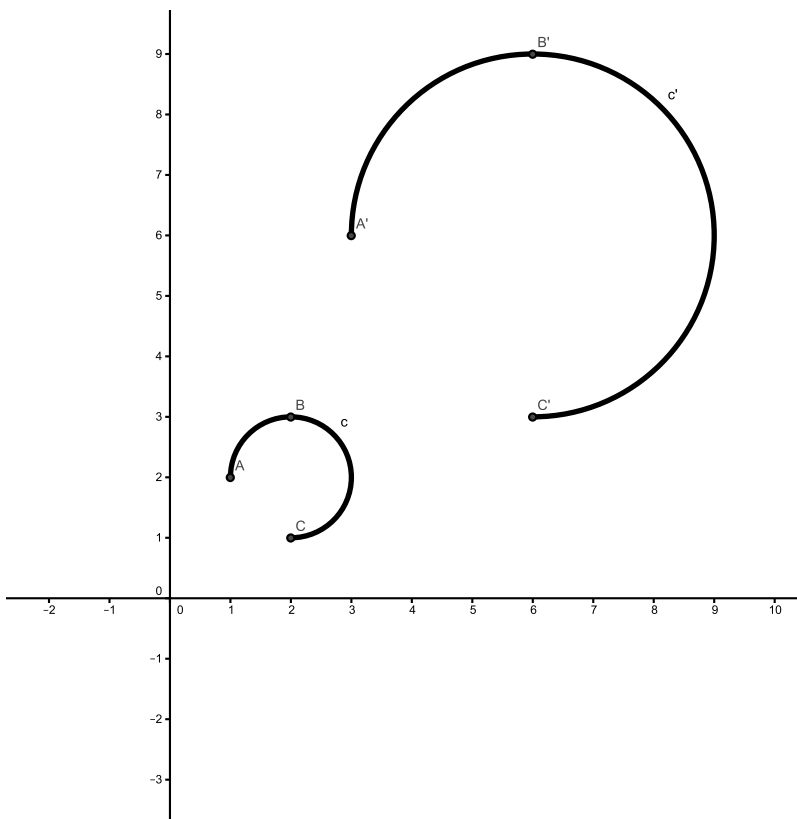


Figura 4.5: Dilatación por tres.

1) Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$$\therefore T(u + v) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T(u) + T(v).$$

2) Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $ru = r\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix}$

$$\therefore T(ru) = T\begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(rx_1) \\ 3(ry_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3r)x_1 \\ (3r)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r3)x_1 \\ (r3)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(3x_1) \\ r(3y_1) \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = r \cdot 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = rT \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = rT(u) \quad \therefore T(ru) = rT(u).$$

Esta transformación lineal a cada punto del plano lo estira tres veces, como se observa en la figura 4.5. ■

Una pregunta natural es, ¿cómo podemos generar transformaciones lineales? El siguiente resultado permite dar muchos ejemplos y determina la estrecha relación que existe con las matrices.

Teorema 4.1.1.

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces existe una única matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = AX \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:

Consideremos la base canónica $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ y apliquemos T a cada elemento de la base, esto es,

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, T(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, T(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{entonces } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ veamos que } T(X) = AX.$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \text{ entonces } T(X) = T(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n), \text{ pues } T \text{ es una transformación lineal. Por otra parte,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AX &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
 &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n)
 \end{aligned}$$

$$\therefore T(X) = AX$$

■

Definición 4.1.2. A la matriz A del teorema anterior se llama matriz estándar para T y en ocasiones se denota con A_T .

El siguiente resultado ayuda a obtener una cantidad importante de ejemplos.

Teorema 4.1.2.

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación, tal que $T(X) = AX \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$, con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, entonces T es una transformación lineal.

Demostración:

1) Sean $X, Y \in \mathbb{R}^n$, entonces $T(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = T(X) + T(Y)$

$$\therefore T(X + Y) = T(X) + T(Y).$$

2) Sean $r \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^n$ entonces $T(rX) = A(rX) = (Ar)X = (rA)X = r(AX) = rT(X) \quad \therefore T(rX) = rT(X)$, por consiguiente T es una transformación lineal.

■

■ **Ejemplo 4.1.10.**

Hallar la matriz estándar para $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución:

$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ \therefore $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz estándar y por consiguiente:

$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T(X)$, lo cual coincide con el teorema anterior; además A es la matriz identidad como era de esperarse, pues la transformación es la identidad.

■ **Ejemplo 4.1.11.**

Hallar la matriz estándar para $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$.

Solución:

$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 \therefore $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ es la matriz estándar para T .

■ **Ejemplo 4.1.12.**

Hallar la matriz estándar para $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Solución:

$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz estándar para T .

■ **Ejemplo 4.1.13.**

Hallar la matriz estándar para $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ z \\ x \end{bmatrix}$.

Solución:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y$$

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 \\ 0-0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz estándar para T .

■ **Ejemplo 4.1.14.**

Hallar la matriz estándar para $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz estándar para T .

■ **Ejemplo 4.1.15.**

Hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Por el teorema 4.4.1 la matriz estándar para T es $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore T(X) = AX \text{ implica } T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

por consiguiente $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ es la transformación solicitada.

■ **Ejemplo 4.1.16.**

Hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

Por el teorema 4.4.1 la matriz estándar para T es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore T(X) = AX \text{ implica } T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

por consiguiente $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ es la transformación buscada.

■ **Ejemplo 4.1.17.**

Hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Por el teorema 4.4.1 la matriz estándar para T es $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore T(X) = AX \text{ implica } T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$

por consiguiente $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \end{bmatrix}$ es la transformación pedida.

■ **Ejemplo 4.1.18.**

Sea $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T(a+bx+cx^2) = a+bx$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

1) Sean $p(x) = a + bx + cx^2$, $q(x) = d + ex + fx^2 \in \mathcal{P}_2$, entonces $p(x) + q(x) = (a + d) + (b + e)x + (c + f)x^2 \in \mathcal{P}_2$.

$$\therefore T(p(x) + q(x)) = T((a + d) + (b + e)x + (c + f)x^2) = (a + d) + (b + e)x = (a + bx) + (d + ex) = T(p(x)) + T(q(x)).$$

$$\therefore T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$$

2) Sean $r \in \mathbb{R}$ y $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$, entonces $rp(x) = r(a + bx + cx^2) = (ra) + (rb)x + (rc)x^2 \in \mathcal{P}_2$

$\therefore T(rp(x)) = T((ra) + (rb)x + (rc)x^2) = (ra) + (rb)x = r(a + bx) = rT(p(x))$ y por consiguiente $T(rp(x)) = rT(p(x))$.

$\therefore T$ es una transformación lineal. ■

■ Ejemplo 4.1.19.

Sea $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(p(x)) = xp(x)$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ Ejemplo 4.1.20.

Sea $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T(a+bx+cx^2) = b+cx$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ Ejemplo 4.1.21.

Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T(a) = a + ax$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

1) Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b \in \mathbb{R} \quad \therefore \quad T(a + b) = (a + b) + (a + b)x$
 $= (a + ax) + (b + bx) = T(a) + T(b)$ y por consiguiente $T(a + b) = T(a) + T(b)$.

2) Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $T(ra) = (ra) + (ra)x = r(a + ax) = rT(a)$.

$\therefore \quad T$ es una transformación lineal. ■

■ Ejemplo 4.1.22.

Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(a) = a + ax + ax^2$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ Ejemplo 4.1.23.

Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_3$ tal que $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ Ejemplo 4.1.24.

Sea $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ tal que $T(f) = f'$ es la derivada de f , demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

1) Sean $f, g \in C[a, b]$, entonces $f + g \in C[a, b]$ $\therefore T(f + g) = (f + g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$ y por consiguiente $T(f + g) = T(f) + T(g)$.

2) Sean $k \in \mathbb{R}$ y $f \in C[a, b]$, entonces $T(kf) = (kf)' = k(f') = kT(f)$.

$\therefore T$ es una transformación lineal. ■

■ **Ejemplo 4.1.25.**

Sea $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

1) Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

entonces $A + B = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$\therefore T(A + B) = (a + e) + (d + h) = (a + d) + (e + h) = T(A) + T(B)$ y por consiguiente $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

2) Sean $k \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, entonces $T(kA) = T\left(\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) = ka + kd = k(a + d) = kT(A)$.

$\therefore T$ es una transformación lineal. ■

■ **Ejemplo 4.1.26.**

Sea $T : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$ es la transpuesta de A , demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

1) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, entonces $A + B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

$\therefore T(A + B) = (A + B)^t = A^t + B^t = T(A) + T(B)$ y por consiguiente $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

2) Sean $k \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, entonces $T(kA) = (kA)^t = k(A^t) = kT(A)$.

$\therefore T$ es una transformación lineal. ■

■ **Ejemplo 4.1.27.**

Sea $T : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \det(A)$ es el determinante de A , verifique que T no es una transformación lineal.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 4.1.28.**

Sea $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b + c + d & a + b + c \\ a + b & a \end{bmatrix}$, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 4.1.29.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = AX$ donde $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ es la matriz de rotación, demuestre que T es una transformación lineal.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

4.2. Núcleo de una transformación lineal

Definición 4.2.1. Si V y W son espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces el núcleo de T es $Nuc(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ y la dimensión del núcleo de T es $\nu(T)$, esto es, $\nu(T) = \dim(Nuc(T))$.

■ Ejemplo 4.2.1.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ hallar $Nuc(T)$.

Solución:

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = 0$, entonces $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore Nuc(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\} = \text{eje } y, \text{ así } \nu(T) = 1.$$

■ Ejemplo 4.2.2.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hallar $Nuc(T)$.

Solución:

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = 0$, entonces $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore x = 0, y = 0 \text{ y por consiguiente } Nuc(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ luego } \nu(T) = 0.$$

■ Ejemplo 4.2.3.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, demuestre que $Nuc(T) = \text{eje } x$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ Ejemplo 4.2.4.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ hallar $Nuc(T)$.

Solución:

Sea $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = 0$, entonces $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore x = 0, y = 0$ y z es libre $\therefore Nuc(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0 \right\} = \text{eje } z$, por lo tanto $\nu(T) = 1$.

■ Ejemplo 4.2.5.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ hallar $Nuc(T)$.

Solución:

Sea $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = 0$, entonces $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore y = 0$, x y z son libres $\therefore Nuc(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \right\} = \text{plano } xz$ y por

consiguiente $\nu(T) = 2$.

■ **Ejemplo 4.2.6.**

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$, demuestre que $Nuc(T) = \text{eje } x$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 4.2.7.**

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, demuestre que $Nuc(T) = \text{plano } yz$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 4.2.8.**

Sea $T : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$, hallar $Nuc(T)$.

Solución:

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t = 0$, entonces $A^t = 0 \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$
 $\therefore Nuc(T) = \{0\}$ y por consiguiente $\nu(T) = 0$.

■ **Ejemplo 4.2.9.**

Sea $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a + bx$, hallar $Nuc(T)$.

Solución:

Sea $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$ tal que $T(p(x)) = a + bx = 0 = 0 + 0x$, entonces $a = b = 0 \quad \therefore \quad Nuc(T) = \{p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2 \mid p(x) = cx^2\}$, así $\nu(T) = 1$.

■ **Ejemplo 4.2.10.**

Sea $T : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2$, demuestre que $Nuc(T) = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3 \mid p(x) = dx^3\}$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

4.3. Imagen de una transformación lineal

Definición 4.3.1. Si V y W son espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces la imagen de T es:

$$Im(T) = \{w \in W \mid w = T(v) \text{ para alguna } v \in V\}$$

la dimensión de la imagen de T es $\rho(T)$, esto es, $\rho(T) = \dim(Im(T))$.

Antes de dar ejemplos, es conveniente enunciar un teorema muy importante, el cual caracteriza la dimensión de una transformación lineal, más precisamente.

Teorema 4.3.1. (Teorema de la dimensión)

Si V y W son espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, con $\dim(V) = n$, entonces $\rho(T) + \nu(T) = n$.

Observación:

Dado $\nu(T)$ el teorema de la dimensión permite calcular $\rho(T)$, esto es, $\rho(T) = n - \nu(T)$ y recíprocamente.

■ **Ejemplo 4.3.1.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ hallar $Im(T)$.

Solución:

Por el ejemplo 4.2.1 $\nu(T) = 1$ y $n = 2 \quad \therefore \quad \rho(T) = n - \nu(T) = 2 - 1 = 1$

$$\therefore \quad Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\} = \text{eje } x.$$

■ **Ejemplo 4.3.2.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hallar $Im(T)$.

Solución:

Por el ejemplo 4.2.2 $\nu(T) = 0$ y $n = 2 \quad \therefore \quad \rho(T) = n - \nu(T) = 2 - 0 = 2$

$$\therefore \quad Im(T) = \mathbb{R}^2.$$

■ **Ejemplo 4.3.3.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, demuestre que $Im(T) = \text{eje } y$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ Ejemplo 4.3.4.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ hallar $Im(T)$.

Solución:

Por el ejemplo 4.2.4 $\nu(T) = 1$ y $n = 3 \quad \therefore \quad \rho(T) = n - \nu(T) = 3 - 1 = 2$

$$\therefore Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\} = \text{plano } xy.$$

■ Ejemplo 4.3.5.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ hallar $Im(T)$.

Solución:

Por el ejemplo 4.2.5 $\nu(T) = 2$ y $n = 3 \quad \therefore \quad \rho(T) = n - \nu(T) = 3 - 2 = 1$

$$\therefore Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0 \right\} = \text{eje } y.$$

■ Ejemplo 4.3.6.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$, demuestre que $Im(T) = \text{plano } yz$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 4.3.7.**

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, demuestre que $Im(T) = \text{eje } x$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 4.3.8.**

Sea $T : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$, hallar $Im(T)$.

Solución:

Por el ejemplo 4.2.8 $\nu(T) = 0$ y $dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})) = mn$

$$\therefore \rho(T) = dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})) - \nu(T) = mn - 0 = mn$$

$$\therefore Im(T) = \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

■ **Ejemplo 4.3.9.**

Sea $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a + bx$, hallar $Im(T)$.

Solución:

Por el ejemplo 4.2.9 $\nu(T) = 1$ y $n = 3 \quad \therefore \rho(T) = n - \nu(T) = 3 - 1 = 2$

$$\therefore Im(T) = \mathcal{P}_1$$

■ Ejemplo 4.3.10.

Sea $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(a+bx+cx^2+dx^3) = a+bx+cx^2$, demuestre que $Im(T) = \mathcal{P}_2$.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

4.4. Isomorfismos

Definición 4.4.1. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, T es inyectiva si $\forall u, v \in V \quad T(u) = T(v)$, entonces $u = v$.

Observación:

En algunas ocasiones en vez de utilizar la definición anterior, se utiliza su contrapuesta, esto es, T es inyectiva cuando $u \neq v$, implica $T(u) \neq T(v)$.

■ Ejemplo 4.4.1.

Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x$, demuestre que T es inyectiva.

Demostración:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $T(x) = T(y)$, entonces $x = T(x) = T(y) = y$
 $\therefore x = y$ y por consiguiente T es inyectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.2.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, demuestre que T es inyectiva.

Demostración:

Sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = T(v)$, entonces

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ y por consiguiente } x_1 = x_2 \text{ y } y_1 = y_2$$

$\therefore u = v$, luego T es inyectiva. ■

Antes de dar más ejemplos, es conveniente enunciar un resultado importante, el cual caracteriza la inyectividad de la transformación mediante su núcleo.

Teorema 4.4.1.

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces T es inyectiva, si y solo si, $Nuc(T) = \{0\}$.

■ Ejemplo 4.4.3.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, demuestre que T es inyectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 4.2.2 $\nu(T) = 0 \quad \therefore \quad Nuc(T) = \{0\}$ y por el teorema anterior T es inyectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.4.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$, demuestre que T es inyectiva.

Demostración:

1) Primera demostración:

Para ver que T es inyectiva, es suficiente probar que $Nuc(T) = \{0\}$.

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = 0$, entonces $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{matrix} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix} \quad \therefore \quad x = 0, y = 0 \text{ y por consiguiente } Nuc(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) Segunda demostración:

Queda como ejercicio para el lector utilizando la definición. ■

Observación:

En algunas ocasiones es más fácil ver cuando $T : V \rightarrow W$ no es inyectiva, pues es suficiente con exhibir $u \neq v$ y $T(u) = T(v)$.

■ Ejemplo 4.4.5.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix}$, demuestre que T es inyectiva.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: pruebe que $Nuc(T) = \{0\}$). ■

■ Ejemplo 4.4.6.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$, demuestre que T no es inyectiva.

Demostración:

1) Primera demostración.

Dados $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, cumplen $u \neq v$ y $T(u) = T(v) \quad \therefore \quad T$ no es inyectiva.

2) Segunda demostración.

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: pruebe que $Nuc(T) \neq \{0\}$). ■

■ Ejemplo 4.4.7.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, demuestre que T no es inyectiva.

Demostración:

1) Primera demostración:

Por el ejemplo 4.2.1 $\nu(T) = 1 \quad \therefore \quad Nuc(T) \neq \{0\}$ y por el teorema anterior T no es inyectiva.

2) Segunda demostración:

Dados $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, cumplen $u \neq v$ y $T(u) = T(v)$ y por lo tanto T no es inyectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.8.

Sea $T : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$, demuestre que T es inyectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 4.2.8 $\nu(T) = 0 \quad \therefore \quad \text{Nuc}(T) = \{0\}$ y por el teorema anterior T es inyectiva. ■

Definición 4.4.2. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, T es suprayectiva o sobreyectiva si $\forall w \in W$ existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, es decir, $\text{Im}(T) = W$.

Observación:

Por el teorema de la dimensión $T : V \longrightarrow W$ es suprayectiva si $\rho(T) = \dim(W)$. Además, $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\nu(T) = 0$, si y solo si, T es suprayectiva, pues $\rho(T) = n$.

■ Ejemplo 4.4.9.

Sea $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x$, demuestre que T es suprayectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.1 T es inyectiva y por la observación anterior T es suprayectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.10.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, demuestre que T es suprayectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.2 T es inyectiva y por la observación anterior T es suprayectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.11.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, demuestre que T es suprayectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.3 T es inyectiva y por la observación anterior T también es suprayectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.12.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$, demuestre que T es suprayectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.4 T es inyectiva y por la observación anterior T es suprayectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.13.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix}$, demuestre que T es suprayectiva.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: pruebe que T es inyectiva y utilice la observación anterior). ■

■ Ejemplo 4.4.14.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$, demuestre que T no es suprayectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.6 T no es inyectiva y por la observación anterior T no es suprayectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.15.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, demuestre que T no es suprayectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 5.2.1 T no es inyectiva y por la observación anterior T no es suprayectiva. ■

■ Ejemplo 4.4.16.

Sea $T : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$, demuestre que T es suprayectiva.

Demostración:

Por el ejemplo 5.2.2 T es inyectiva y por lo tanto $\nu(T) = 0$, así $\rho(T) = nm$ y por consiguiente $Im(T) = \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \quad \therefore \quad T$ es suprayectiva. ■

Definición 4.4.3. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, T es un isomorfismo si T es inyectiva y suprayectiva.

Observación:

Cuando $T : V \rightarrow W$ es un isomorfismo, se dice que los espacios vectoriales V y W son isomorfos (tienen la misma forma) y lo denotamos con $V \cong W$.

■ **Ejemplo 4.4.17.**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

Por el ejemplo 5.1.3 y el ejemplo 5.1.3 T es inyectiva y suprayectiva, por lo tanto T es un isomorfismo. ■

Observación:

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente teorema, además la transformación lineal es la identidad.

Teorema 4.4.2.

Si V y W son espacios vectoriales, con $\dim(V) = \dim(W) = n$ y $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, tal que $T(v) = v$ entonces T es un isomorfismo.

Demostración:

Como $T(v) = v$ es la identidad, entonces $\text{Nuc}(T) = \{0\}$ y por lo tanto T es inyectiva y como $\dim(V) = \dim(W)$, por lo tanto $\text{Im}(T) = W$ y por consiguiente T es suprayectiva, así T es un isomorfismo. ■

■ **Ejemplo 4.4.18.**

Sea $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(a + bi) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

1) Veamos primero que T es inyectiva.

Sea $v = a + bi \in \mathbb{C}$ tal que $T(v) = 0$, entonces $T(a + bi) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore a = 0, b = 0$ y por consiguiente $Nuc(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \therefore T$ es inyectiva.

2) Es claro que T es suprayectiva pues $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ existe $a + bi \in \mathbb{C}$ tal que $T(a + bi) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \therefore T$ es suprayectiva y por consiguiente T es un isomorfismo.

$\therefore \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Este resultado nos demuestra que la estructura de \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 como conjuntos son muy parecidos. ■

■ Ejemplo 4.4.19.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

1) Veamos primero que T es inyectiva.

Supongamos que $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx = 0 = 0 + 0x \therefore a = 0, b = 0$, así $Nuc(T) = \{0\}$

y por consiguiente T es inyectiva.

2) Es claro que T es suprayectiva, pues si $p(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1$, entonces $p(x) = T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, esto implica que T es suprayectiva, luego T es un isomorfismo $\therefore \mathbb{R}^2 \cong \mathcal{P}_1$. ■

Observación:

En los dos ejemplos anteriores demostramos que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 \cong \mathcal{P}_1$, por lo tanto $\mathbb{C} \cong \mathcal{P}_1$. Esto es una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 4.4.3.

Si $T : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow Z$ son isomorfismos, entonces la composición $S \circ T : V \rightarrow Z$ es un isomorfismo.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

■ **Ejemplo 4.4.20.**

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: considere el ejemplo anterior). ■

■ **Ejemplo 4.4.21.**

Sea $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n$ tal que $T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

1) Veamos primero que T es inyectiva.

Supongamos que $T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$, esto es, $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$. Por lo tanto $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_n = 0$, así $\text{Nuc}(T) = \{0\}$ y por consiguiente T es inyectiva.

2) Es claro que T es suprayectiva, pues si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{P}_n$, entonces

$p(x) = T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, por lo tanto T es un isomorfismo y por consiguiente $\mathbb{R}^n \cong \mathcal{P}_{n-1}$.

■

■ Ejemplo 4.4.22.

Sea $T : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

Por el ejemplo 5.2.2 T es inyectiva y por el ejemplo 4.4.16 T es suprayectiva, por lo tanto T es un isomorfismo.

■

■ Ejemplo 4.4.23.

Sea $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ invertible y $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = AB$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

1) Veamos primero que T es inyectiva.

Sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = 0$, entonces $AB = 0$ y como B es invertible $A = (AB)B^{-1} = 0B^{-1} = 0$ y por consiguiente $A = 0 \quad \therefore \quad \text{Nuc}(T) = \{0\}$, así T es inyectiva.

2) Es claro que T es suprayectiva, pues $\dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 2^2 = 4$,

$\therefore \quad \text{Im}(T) = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, por consiguiente T es suprayectiva y por lo tanto T es un isomorfismo. ■

El resultado del ejemplo anterior se puede extender a matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

■ Ejemplo 4.4.24.

Sea $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertible y $T : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = AB$, demuestre que T es un isomorfismo.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector. ■

Valores propios y vectores propios

A lo largo de este capítulo, retomamos algunos temas y analizamos con ejemplos los valores propios y vectores propios de una matriz, luego concluimos con una aplicación elemental.

5.1. Valores propios y vectores propios

Definición 5.1.1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si $Av = \lambda v$ y $v \neq 0$. El vector v es un vector propio de A inducido por λ .

■ **Ejemplo 5.1.1.**

Hallar los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$.

Solución:

1) Calculemos los valores propios.

Para ello primero vamos a calcular el polinomio característico, esto es,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(8 - \lambda) - (-2)(-2)$$

$$= 40 - 5\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 \quad \therefore \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36.$$

Ahora, encontremos las raíces del polinomio característico y por consiguiente los valores propios.

Si $p(\lambda) = 0$ entonces $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0 \quad \therefore \quad \lambda - 4 = 0, \lambda - 9 = 0$, por consiguiente $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 9$ son los valores propios de la matriz A .

2) Calculemos los vectores propios.

Para cada valor propio debemos resolver $(A - \lambda I)v = 0$ donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 8 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 4$.

$$\begin{bmatrix} 5 - 4 & -2 \\ -2 & 8 - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente $\begin{matrix} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{matrix}$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones.

$$\therefore \quad x = 2, \quad y = 1, \text{ así } v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

ii) Ahora, calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 9$.

$$\begin{bmatrix} 5 - 9 & -2 \\ -2 & 8 - 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente $\begin{matrix} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{matrix}$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones.

$$\therefore \quad x = -1, \quad y = 2, \text{ así } v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

Además podemos formar una matriz C con los vectores propios de A , esto es,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y es fácil ver que } C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ por otra parte calculemos}$$

$$\begin{aligned}
 C^{-1}AC &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

¡ Se sorprendió ! ¿Será casualidad?

■ Ejemplo 5.1.2.

Encuentre los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución:

1) Calculemos los valores propios.

Para ello primero calculamos el polinomio característico de A , esto es,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(5 - \lambda) - (-1)(-1)$$

$$= 25 - 5\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 \quad \therefore \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 24.$$

Ahora, encontremos las raíces del polinomio característico y por consiguiente los valores propios.

Si $p(\lambda) = 0$ entonces $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 4)(\lambda - 6) = 0 \quad \therefore \quad \lambda - 4 = 0, \lambda - 6 = 0$, por consiguiente $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 6$ son los valores propios de la matriz A .

2) Calculemos los vectores propios.

Para cada valor propio debemos resolver $(A - \lambda I)v = 0$ donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 4$.

$$\begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ -1 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente $\begin{matrix} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{matrix}$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$\therefore \quad x = 1, \quad y = 1, \quad \text{así } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

ii) Ahora, calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 6$.

$$\begin{bmatrix} 5-6 & -1 \\ -1 & 5-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente $\begin{matrix} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{matrix}$ y el sistema claramente tiene una infinidad de soluciones.

$$\therefore \quad x = -1, \quad y = 1, \quad \text{así } v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

Además podemos formar una matriz C con los vectores propios de A , esto es,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y es fácil ver que } C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por otra parte calculemos}$$

$$C^{-1}AC = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

■ Ejemplo 5.1.3.

Calcule los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector. (Sugerencia: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$ son valores propios y $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores propios de A).

■ **Ejemplo 5.1.4.**

Encuentre los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

1) Calculemos los valores propios.

Para ello primero calculamos el polinomio característico de A , esto es,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)[(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1] - (-1)[(-1)(1 - \lambda) - 0] + 0 \\ &= (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) - (1 - \lambda) - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) - 2(1 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda \\ &\therefore p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda. \end{aligned}$$

Ahora, encontremos las raíces del polinomio característico y por consiguiente los valores propios.

Si $p(\lambda) = 0$, entonces $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \therefore \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$
 $= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \therefore \lambda = 0, \lambda - 1 = 0, \lambda - 3 = 0$, por consiguiente $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$
y $\lambda_3 = 3$ son los valores propios de la matriz A .

2) Calculemos los vectores propios.

Para cada valor propio debemos resolver $(A - \lambda I)v = 0$ donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 - 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - y = 0$$

por consiguiente $-x + 2y - z = 0$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$-y + z = 0$$

$$\therefore x = 1, y = 1, z = 1, \text{ así } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

ii) Ahora, calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-y = 0$$

por consiguiente $-x + y - z = 0$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$-y = 0$$

$\therefore x = -1, y = 0, z = 1$, así $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A .

iii) Ahora, calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ 0 & -1 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x - y = 0$$

por consiguiente $-x - y - z = 0$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$-y - 2z = 0$$

$\therefore x = 1, y = -2, z = 1$, así $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A .

Además podemos formar una matriz C con los vectores propios de A , esto es,

$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y es fácil ver que $C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, por otra parte calculemos

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

■ **Ejemplo 5.1.5.**

Encuentre los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Solución:

1) Calculemos los valores propios.

Para ello primero calculemos el polinomio característico, esto es,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda)[(2 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2] - (-1)[3(-1 - \lambda) + 2] + 4[3 - 2(2 - \lambda)]$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

$$\therefore p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6.$$

Ahora, encontremos las raíces del polinomio característico y por consiguiente los valores propios.

Si $p(\lambda) = 0$, entonces $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$.

$\therefore \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \therefore \lambda + 2 = 0, \lambda - 1 = 0, \lambda - 3 = 0$, por consiguiente $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$ son los valores propios de la matriz A .

2) Calculemos los vectores propios.

Para cada valor propio debemos resolver $(A - \lambda I)v = 0$ donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) Calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -2$.

$$\begin{bmatrix} 1 - (-2) & -1 & 4 \\ 3 & 2 - (-2) & -1 \\ 2 & 1 & -1 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x - y + 4z = 0$$

por consiguiente $3x + 4y - z = 0$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$2x + y + z = 0$$

$$\therefore x = 1, y = -1, z = -1, \text{ así } v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

ii) Ahora, calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 - 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-y + 4z = 0$$

por consiguiente $3x + y - z = 0$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$2x + y - 2z = 0$$

$\therefore x = -1, y = 4, z = 1$, así $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A .

iii) Ahora, calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente $\begin{matrix} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{matrix}$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$\therefore x = 1, y = 2, z = 1$, así $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A .

Además podemos formar una matriz C con los vectores propios de A , esto es,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y es fácil ver que } C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

por otra parte calculemos:

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

■ **Ejemplo 5.1.6.**

Halle los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

1) Calculemos los valores propios.

Para ello primero vamos a calcular el polinomio característico, esto es,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

es fácil ver que $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$.

Ahora, encontremos las raíces del polinomio característico y por consiguiente los valores propios.

Si $p(\lambda) = 0$ entonces $-(\lambda + 1)^2(\lambda - 8) = 0$

$\therefore (\lambda + 1)^2 = 0$, $\lambda - 8 = 0$, por consiguiente $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 8$ son valores propios de la matriz A .

2) Calculemos los vectores propios.

Para cada valor propio debemos resolver $(A - \lambda I)v = 0$ donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) Calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 3 - (-1) & 2 & 4 \\ 2 & 0 - (-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x + 2y + 4z = 0$$

por consiguiente $2x + y + 2z = 0$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$4x + 2y + 4z = 0$$

$$\therefore x = 1, y = -2, z = 0, \text{ así } v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

Ahora, como tenemos un valor propio que se repite, debemos elegir una solución diferente a la obtenida en el caso *i*), esto es, cualquier vector no paralelo a v y que satisfaga el sistema de ecuaciones es un vector propio de A . Por lo tanto $x = 0, y = 2, z = -1$ es otra solución del sistema de ecuaciones, así $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A .

ii) Calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 8$.

$$\begin{bmatrix} 3 - 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0 - 8 & 2 \\ 4 & 2 & 3 - 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5x + 2y + 4z = 0$$

por consiguiente $2x - 8y + 2z = 0$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$4x + 2y - 5z = 0$$

$$\therefore x = 2, y = 1, z = 2, \text{ así } v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

Además podemos formar una matriz C con los vectores propios de A , esto es,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y es fácil ver que } C^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

por otra parte calculemos:

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 16 \\ 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2. Aplicaciones de valores propios y vectores propios

■ Ejemplo 5.2.1.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcular A^n .

Solución:

1) Calculemos los valores propios.

Para ello primero vamos a calcular el polinomio característico, esto es,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (0 - \lambda)(3 - \lambda) - 1(-2)$$

$$= -\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \quad \therefore \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Ahora, encontremos las raíces del polinomio característico y por consiguiente los valores propios.

Si $p(\lambda) = 0$, entonces $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \therefore \quad \lambda - 1 = 0, \lambda - 2 = 0$, por consiguiente $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ son los valores propios de la matriz A .

2) Calculemos los vectores propios.

Para cada valor propio debemos resolver $(A - \lambda I)v = 0$ donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 0 - \lambda & -2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) Calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 0 - 1 & -2 \\ 1 & 3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente $\begin{matrix} -x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{matrix}$ y el sistema tiene una infinidad de soluciones

$$\therefore \quad x = 2, \quad y = -1, \quad \text{así } v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

ii) Ahora, calculemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$.

$$\begin{bmatrix} 0 - 2 & -2 \\ 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente $\begin{matrix} -2x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}$ y el sistema claramente tiene una infinidad de soluciones.

$$\therefore \quad x = -1, \quad y = 1, \quad \text{así } v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de } A.$$

Además podemos formar una matriz C con los vectores propios de A , esto es,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y es fácil ver que } C^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ por otra parte calculemos}$$

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \therefore C^{-1}AC = D \quad \therefore A = CDC^{-1}$$

por consiguiente $A^n = CDC^{-1} CDC^{-1} \dots CDC^{-1} = CD^nC^{-1}$

$$\therefore A^n = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2^n & 2^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 2^n & 2 - 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & -1 + 2^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \text{ tenemos que } A^n = \begin{bmatrix} 2 - 2^n & 2 - 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & -1 + 2^{n+1} \end{bmatrix}$$

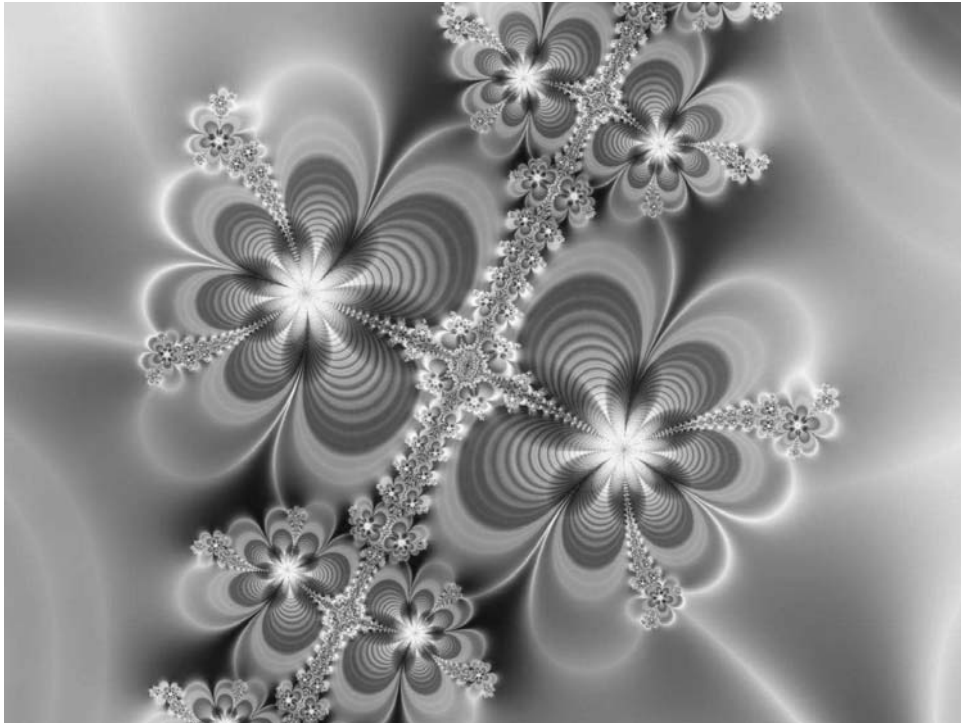
■ Ejemplo 5.2.2.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ calcular A^n .

Solución:

Se deja como ejercicio para el lector, de hecho,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 2(5^n) - 2(-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 2(5^n) + (-1)^n \end{bmatrix}$$



Lista de símbolos

\therefore	por lo tanto
\forall	para todo
\exists	existe
\in	pertenece
\ni	tal que
\perp	perpendicular
\parallel	paralelo
\neq	diferente
■	fin de una demostración
$\ \vec{v}\ $	magnitud de \vec{v}
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	producto escalar
$\vec{u} \times \vec{v}$	producto cruz
Δ	área del paralelogramo formado por \vec{u} y \vec{v}
\mathbb{N}	conjunto de números naturales
\mathbb{Z}	conjunto de números enteros
\mathbb{Q}	conjunto de números racionales
\mathbb{R}	conjunto de números reales
\mathbb{C}	conjunto de números complejos
$ A $	determinante de A
$adj(A)$	matriz adjunta de A
A^t	matriz transpuesta de A
A^{-1}	matriz inversa de A
I_n	matriz identidad de n renglones y n columnas
\mathbb{R}^n	espacio euclidiano de dimensión n
\mathcal{P}_n	conjunto de polinomios de grado menor o igual que n
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$	conjunto de matrices de m renglones y n columnas
$C[a, b]$	conjunto de funciones continuas en $[a, b]$

Bibliografía

- [1] H. Anton, *Introducción al álgebra lineal*, Limusa, (1991).
- [2] S. I. Grossman, *Álgebra lineal*, Mac Graw Hill, (2008).
- [3] D. C. Lay, *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Prentice Hall, (2001).
- [4] S. J. León, *Álgebra lineal con aplicaciones*, Cecsá, (1993).
- [5] D. Poole, *Álgebra lineal. Una introducción moderna*, Cengage Learning, (2011).
- [6] Research Education Association, *Problem solvers linear algebra*, Cecsá, (2007).
- [7] W. Wooton, et al; *Geometría analítica moderna*, Publicaciones Cultural, (1979).

Índice alfabético

- base, 112
- combinación lineal, 102
- conjunto generador, 107
- conjunto linealmente independiente, 109
- determinante, 16
 - aplicaciones, 28
 - propiedades, 22
- dimensión, 119
- eliminación gaussiana, 1
- espacio vectorial, 81
- matriz, 2
 - adjunta, 24
 - aplicaciones, 28
 - cambio de base, 123
 - estándar, 139
 - identidad, 8
 - inversa, 7
- plano en el espacio, 77
- regla de Cramer, 35
- sistemas de ecuaciones lineales
 - aplicaciones, 47
 - balanceo de ecuaciones químicas, 57
 - distribución de temperaturas, 53
- subespacio vectorial, 97
- transformación lineal, 129
 - imagen, 151
 - inyectiva, 155
 - isomorfismo, 161
 - núcleo, 148
 - suprayectiva, 159
- valor propio, 167
- vector, 63
 - ángulo, 66
 - magnitud, 65
 - producto vectorial, 72
 - propio, 167
 - aplicación, 179

Acerca del Autor



AARÓN APARICIO HERNÁNDEZ (Oaxaca, México 1967) estudió la licenciatura y la maestría en matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Ha sido profesor en la Facultad de Ciencias y en la Facultad de Contaduría y Administración de la UNAM; en el Instituto Tecnológico Autónomo de México, en la Universidad Anáhuac México Norte y actualmente es profesor-investigador de tiempo completo en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM). Ha participado como conferencista en varios congresos nacionales de ma-

temáticas de la Sociedad Matemática Mexicana. Ha organizado en varias ocasiones la Semana de las Matemáticas en la UACM.

Probleuario de Álgebra Lineal,
de Aarón Aparicio Hernández,
se terminó de imprimir en diciembre de 2016,
en los talleres de impresión de la
Universidad Autónoma de la Ciudad de México,
San Lorenzo 290, Col. del Valle, Del. Benito Juárez, C.P. 03100,
con un tiraje de 2000 ejemplares.
Cuidado de la edición: Ángeles Godínez Guevara
Formación de interiores: Aarón Aparicio Hernández
Diseño de la portada: Sergio Cortés Becerril
Difusión y distribución: Ana Beatriz Alonso Osorio

El presente *Problemario de Álgebra Lineal* reúne una serie de ejercicios pensados para fortalecer las habilidades de los estudiantes de ingeniería en la aplicación práctica de los conceptos básicos de matemáticas. Los problemas han sido agrupados dentro de los siguientes capítulos: sistemas de ecuaciones lineales, vectores en el plano y en el espacio, espacios vectoriales, transformaciones lineales, valores propios y vectores propios. Durante los semestres en los que se ha impartido la materia de Álgebra Lineal en la UACM he observado que un porcentaje significativo de estudiantes tiene problemas con los contenidos del programa de estudios, y en parte, se debe a que en el tema de sistemas de ecuaciones lineales no logran aprender cómo escalonar matrices. El método de eliminación gaussiana es fundamental para abordar los temas subsecuentes: matriz inversa, rango e imagen de una matriz, diagonalización de matrices, entre otros temas. Este material ayudará al estudiante de ingeniería del Colegio de Ciencia y Tecnología a fortalecer su aprendizaje.

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

Biblioteca
BE
del
Estudiante

ISBN 978-6079465209



9 786079 465209