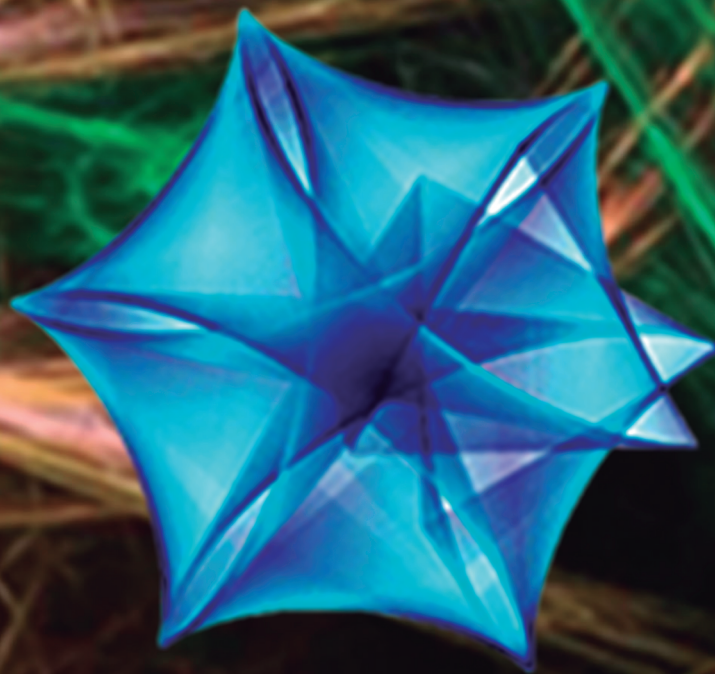


# **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

**UN TRATADO ELEMENTAL EN EL CÁLCULO**

**Rafael Torres Simón**



**UACM**

Universidad Autónoma  
de la Ciudad de México

*Nada humano me es ajeno*





# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

UN TRATADO ELEMENTAL EN EL CÁLCULO

Rafael Torres Simón

## **Universidad Autónoma de la Ciudad de México**

Dr. Hugo Aboites Aguilar  
Rector

Mtra. Fabiana Medina Núñez  
Coordinadora Académica

Dr. Koulsy Lamko  
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión Universitaria

Dr. Igor Peña Ibarra  
Encargado del despacho del Colegio de Ciencia y Tecnología

Eduardo Mosches Nitkin  
Responsable de la Biblioteca del Estudiante

# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

UN TRATADO ELEMENTAL EN EL CÁLCULO

Rafael Torres Simón

FICHA CATALOGRÁFICA E-S/N

---

Torres Simón, Rafael

Funciones trigonométricas: un tratado elemental en el cálculo / Rafael Torres Simón. — México : Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2017

280 p. : il. ; 27 cm.

Biblioteca del Estudiante (Portada)

ISBN 978-607-9465-38-4

1. Trigonometría — Estudio y enseñanza (Superior). — I. t.

LC QA531

Dewey 516.24

---

*Funciones trigonométricas. Un tratado elemental en el cálculo,*  
primera edición, 2017

© Rafael Torres Simón

D.R. ©Universidad Autónoma de la Ciudad de México  
Dr. García Diego 168, Col. Doctores,  
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06720, México, D.F.

ISBN 978-607-9465-38-4

© Imagen de portada: Amaranta Márquez Villanueva

Representación gráfica de un hipotrocoide, que es una ruleta trazada por un punto conectado a un círculo de radio  $r$ , rodando alrededor del interior de un círculo fijo de radio  $R$ , donde el punto está a una distancia  $d$  desde el centro del círculo interior. Su expresión matemática es una ecuación paramétrica. A los patrones geométricos resultantes se les conoce como guilliches y, por su belleza, han sido utilizados ampliamente en las artes decorativas durante siglos.

Biblioteca del Estudiante: [biblioteca.del.estudiante@uacm.edu.mx](mailto:biblioteca.del.estudiante@uacm.edu.mx)  
<http://portal.uacm.edu.mx/Estudiantes/BibliotecadelEstudiante/tabid/276/Default.aspx>

Material educativo universitario de distribución gratuita para estudiantes de la UACM.  
Prohibida su venta

Hecho e impreso en México / Printed in Mexico





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1. Geometría Plana</b>	<b>13</b>
1.1. Las nociones básicas . . . . .	13
1.2. Triángulos . . . . .	23
1.3. Congruencia de triángulos . . . . .	30
1.4. Teoremas de Thales . . . . .	34
1.5. Semejanza de triángulos . . . . .	38
1.6. Teorema de Pitágoras . . . . .	47
1.7. Recíproco del teorema de Pitágoras . . . . .	49
<b>2. Trigonometría</b>	<b>53</b>
2.1. Ángulos . . . . .	53
2.2. Relaciones trigonométricas de ángulos . . . . .	59
2.3. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo . . . . .	67
2.4. Ley de senos y cosenos . . . . .	80
2.5. Funciones trigonométricas de números reales . . . . .	86
2.6. Funciones trascendentes . . . . .	102
2.7. Funciones hiperbólicas básicas . . . . .	114
<b>3. Aplicaciones de la trigonometría en el cálculo</b>	<b>125</b>
3.1. Introducción a los límites de funciones . . . . .	125
3.2. Límites trigonométricos . . . . .	139
3.3. Derivadas trigonométricas . . . . .	148
3.4. Regla de L'Hôpital . . . . .	169
3.5. Introducción a la integral definida . . . . .	177
3.6. La integral indefinida . . . . .	195
3.7. Integrales impropias . . . . .	212
3.8. Longitud de arco . . . . .	222
3.9. Ecuaciones paramétricas . . . . .	226
3.10. Coordenadas polares . . . . .	245

<b>Apéndice</b>	<b>267</b>
<b>A. Principio de Inducción</b>	<b>267</b>
<b>Referencias</b>	<b>272</b>
<b>Sitios web consultados</b>	<b>274</b>

## Introducción

La motivación de escribir este libro ha sido en base a la experiencia de los cursos de matemáticas del ciclo básico que he impartido en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, y darme cuenta de las principales necesidades que han requerido los estudiantes de esta universidad, sobre todo, de aquellos que cursan alguna de las carreras de ingeniería. Los temas que se abordan cubren nociones elementales de geometría y trigonometría, temas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, haciendo un análisis básico en el estudio de las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas. El libro contiene un capítulo de geometría plana, uno de trigonometría y uno de aplicaciones de la trigonometría al cálculo.

El origen de la geometría se remonta al Medio Oriente (Antiguo Egipto), a partir de la necesidad de medir predios agrarios y en la construcción de pirámides y monumentos. Estos conocimientos se extendieron a los griegos y fue Thales de Mileto quien inició la geometría desde un punto de vista formal. Las propiedades se demostraban por medio de razonamientos lógicos. Posteriormente, el gran matemático griego Euclides quien en su famosa obra titulada *Elementos* recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de la geometría. Una limitación del trabajo de Euclides fue no reconocer la posibilidad de sistemas geométricos perfectamente consistentes, donde el quinto postulado no era válido (por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada). De esta forma, para Euclides y los geómetras posteriores hasta el siglo XVIII pasó inadvertida la posibilidad de geometrías no euclidianas, hasta los trabajos de Lobatschevsky, Gauss y Riemann.

En cuanto a la trigonometría, fueron los babilonios y egipcios los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas. Con el estudio de la astronomía, la trigonometría tuvo un desarrollo sustancial mediante sus numerables aplicaciones como: la predicción de los movimientos y posiciones de los cuerpos celestes; otras aplicaciones fueron el mejoramiento a la exactitud en las rutas de navegación; en el cálculo del tiempo y en los calendarios, etcétera.

Los temas que se abordan en este libro son ampliamente conocidos. Estos se estudian generalmente en alguna unidad o en algún(os) subtema(s) de algunas materias de las carreras de Ingeniería de la UACM, como son: Álgebra y Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial, entre otras. Por ejemplo, en Álgebra y Geometría Analítica se da una introducción a la trigonometría y se estudia el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas del triángulo rectángulo y la ley de senos y cosenos. En el contexto del Cálculo Diferencial se estudian las propiedades de las funciones trigonométricas y de la función exponencial y logaritmo. Las coordenadas y gráficas polares en Cálculo Integral, etcétera.

Regularmente, estos temas se encuentran dispersados en diferentes bibliografías de acuerdo con las necesidades que tiene cada autor para o de acuerdo con la materia referente. La intención de este libro es integrar los temas fundamentales relacionados con la trigonometría en un solo ejemplar.

Antes de entrar al estudio de la trigonometría, es importante estudiar con detenimiento algunos temas relacionados con la geometría plana, como son: razones y proporciones, semejanza y congruencia de triángulos. Estos explican el porqué del uso de las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos y de aquí también la deducción de las leyes de seno y cosenos. Por esta razón el libro comienza su primer capítulo con geometría plana.

El segundo capítulo de este libro aborda el estudio de la trigonometría. Aquí se definen las funciones trigonométricas, la ley de senos y cosenos, las inversas de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas y las funciones trascendentes (logaritmo y exponencial).

En el tercer capítulo se aplica lo aprendido de los dos primeros a límites, derivadas e integrales. También se incluye una sección a las coordenadas polares y como éstas se relacionan con las coordenadas rectangulares, así como las versiones en forma polar de algunas fórmulas conocidas en el cálculo.

En cada una de las secciones se expone un amplio número de ejemplos, y para poner en práctica los temas que se vayan estudiando, se propone una serie de actividades a resolver antes de una lista de ejercicios propuestos al final de cada sección. Estas actividades tienen la finalidad de comprender, retener y madurar los conceptos fundamentales estudiados en ese momento antes de avanzar con el estudio de otros temas.

Para enriquecer el aprendizaje del estudiante, se demuestran con detalle la mayoría de los teoremas y proposiciones expuestos en este libro para una mayor comprensión en los temas y de esta forma evitar la mecanización en el aprendizaje.

Por último, queda por agradecer a todas aquellas personas que contribuyeron a la mejora de esta obra y de manera muy especial a Catalina Trevilla, Claudia América Serrano Liceaga y Fausto Jarquín por ser ellos quienes revisaron minuciosamente cada detalle de este libro. También debo agradecer a Ana Beatriz Alonso por todo el apoyo editorial brindado.

Espero que este libro tenga la utilidad que se requiere para el aprovechamiento de un mejor aprendizaje en los temas que se exponen, sobre todo para los estudiantes de ingeniería y de modelación matemática de la UACM en quienes con mucho cariño se escribió la presente obra.

**Rafael Torres Simón**

# Capítulo 1

## Geometría Plana

### 1.1. Las nociones básicas

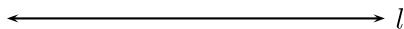
La geometría plana es una rama de la geometría que estudia las figuras cuyos puntos están contenidos en un plano, como la recta, el triángulo o el círculo. Esta parte de la geometría también se conoce como geometría euclídea, en honor al matemático griego Euclides, el primero en estudiarla en el siglo IV a.C. Su extenso tratado *Elementos de Geometría* se mantuvo como texto autorizado de geometría hasta la aparición de las llamadas Geometrías no euclídeas en el siglo XIX.

Se comenzará explicando algunos conceptos básicos de la geometría.

- Por **punto** se entiende a aquel ente que no se divide en partes, es decir, el punto no posee magnitud ni tamaño. Para representar puntos se emplearán letras mayúsculas:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , etcétera.



- Por **línea**<sup>1</sup> se entiende a aquel ente que tiene longitud pero carece de ancho y se extiende de manera indefinida en dos direcciones. En lo sucesivo, se empleará la letra  $l$  para representar a una línea recta.



- Por **plano** se entiende a aquel ente que tiene una superficie uniformemente distribuida con líneas que se cruzan sobre él. Un plano tiene área pero carece de volumen.



---

<sup>1</sup>Una línea no necesariamente es recta.

**Nota:** Se debe tener presente que ninguno de los enunciados anteriores de punto, recta y plano constituyen una definición, son sencillamente explicaciones o ideas de lo que nos imaginamos acerca de estos conceptos.

**Actividad 1.** Considera  $A$  y  $B$  dos puntos.

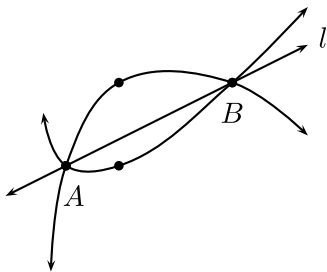
(a) ¿Cuántas líneas pasan por los dos puntos?

(b) ¿Cuántas de estas líneas son rectas?



Seguramente, habrás contestado que por  $A$  y  $B$  pasa una única línea recta. De esta manera, se puede decir que una **línea recta** o simplemente **recta**, es la que está determinada por dos de sus puntos.

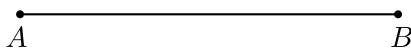
Observemos la figura:



Por  $A$  y  $B$  pasa una infinidad de líneas, pero solo una es línea recta. En esta figura,  $A$  y  $B$  determinan la recta  $l$ .

**Nota:** Una recta divide al plano en tres partes: la recta y dos semiplanos.

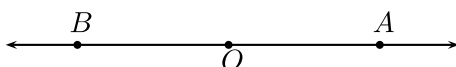
Por **segmento**, se entiende como la porción de una recta. Es decir, si  $A$  y  $B$  son dos puntos sobre una recta, al pedazo de recta comprendido entre estos puntos, incluyendo los puntos, es el segmento  $AB$ .



En general, el segmento  $AB$  es igual que al segmento  $BA$ . En algunos casos, se consideran **segmentos dirigidos**, es decir, dado un segmento  $AB$ , se le puede asociar un sentido, por ejemplo

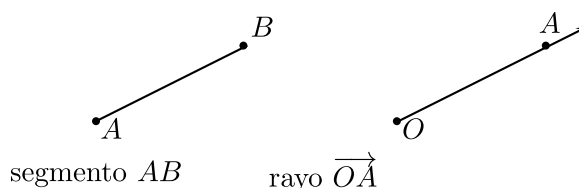
de  $A$  a  $B$ . En este caso, el segmento  $AB$  es un segmento dirigido y  $BA$  tendrá el sentido opuesto. Así, se tendría la igualdad  $BA = -AB$ .

De igual manera, se entenderá por **rayo** a una porción de recta que tiene un punto inicial y se extiende de manera indefinida hacia una dirección. De esta manera, cada punto  $O$  de una recta, divide a esta en dos rayos.

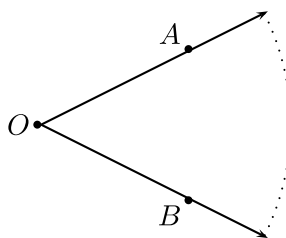


De esta figura se tienen dos rayos:  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$ .

**Nota:** Un segmento tiene dos extremos, mientras que un rayo sólo tiene un punto inicial.



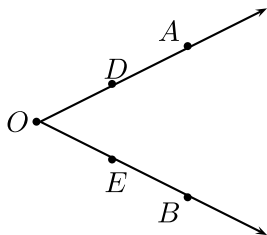
Cuando dos rayos tienen un punto inicial en común, se dice que forman un **ángulo** entre ellos. De esta manera, un ángulo, se puede definir como la parte común de dos semiplanos. El borde del ángulo, también llamado **lados del ángulo**, lo forman los dos rayos, mientras que el punto inicial común de los rayos es el **vértice** del ángulo.



En esta figura se puede apreciar el ángulo  $AOB$  o  $BOA$ , donde  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$  son los lados del ángulo y  $O$  es el vértice. Es indiferente qué lado se nombra primero, más aún, no importa qué punto se nombra en cada uno de los dos lados.

Para representar al ángulo  $AOB$  o  $BOA$  se indicará mediante la notación:

$\sphericalangle AOB$  y  $\sphericalangle BOA$  respectivamente.

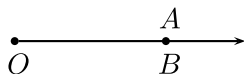


En esta figura, el ángulo correspondiente se puede designar por:  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle DOB$ ,  $\sphericalangle AOE$ , etcétera, o sencillamente como  $\sphericalangle O$ , cuando se conocen los lados en referencia.

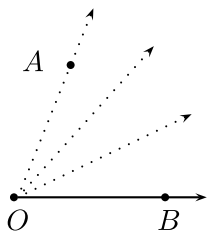
Más adelante, en el estudio de la trigonometría, la definición de ángulo aparecerá de manera diferente puesto que importará qué lado del ángulo se nombre primero. Esto es, se distinguirá entre el  $\sphericalangle AOB$  y  $\sphericalangle BOA$ . En el ángulo  $\sphericalangle AOB$ ,  $\overrightarrow{OA}$  es el lado inicial y  $\overrightarrow{OB}$  el lado terminal, mientras que en el ángulo  $\sphericalangle BOA$ ,  $\overrightarrow{OB}$  es el lado inicial y  $\overrightarrow{OA}$  el lado terminal. Estos tipos de ángulos se llaman **ángulos orientados**. Por el momento, los ángulos orientados no se emplearán para la geometría plana puesto que no se necesitan.

Para entender más el concepto de ángulo, veamos cómo se puede asociar con una cantidad de rotación entre dos rayos:

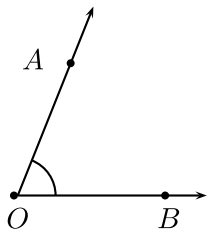
1. El rayo  $\overrightarrow{OA}$  coincide con el rayo  $\overrightarrow{OB}$ .



2. Se hace girar el rayo  $\overrightarrow{OA}$  para formar el ángulo  $AOB$ .



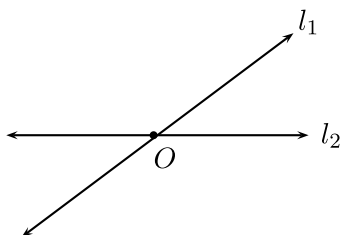
3. Se tiene finalmente el ángulo  $AOB$ .



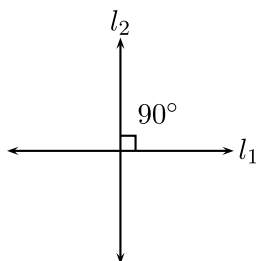
La cantidad de rotación que asocia un ángulo, se mide en el intervalo de 0 a 360. Para entender este hecho, recordemos que con la ayuda de un transportador podemos medir el valor de cierto ángulo. Para distinguir la cantidad de rotación de un ángulo con un número real, se usa el símbolo:  $a^\circ$ , donde  $a$  es un número entre 0 y 360. De esta forma, un ángulo se medirá de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Si hay  $a$  grados en el ángulo  $AOB$ , se escribirá:

$$\sphericalangle AOB = a^\circ.$$

Dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  son **secantes** o se **intersectan** si éstas se cortan en algún punto. En la siguiente figura se muestran dos rectas cuyo punto de intersección es el punto  $O$ .

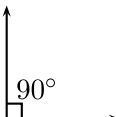
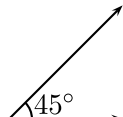
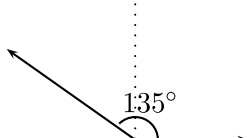

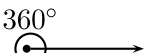


Cuando  $l_1$  y  $l_2$  se intersectan para formar cuatro ángulos iguales, se dice que las rectas son **perpendiculares** y los cuatro ángulos son **ángulos rectos**.



Un ángulo menor a un ángulo recto se llama **ángulo agudo** y uno mayor a un ángulo recto se llama **ángulo obtuso**.

**Actividad 2.** Clasifica los siguientes ángulos en: ángulo recto, agudo u obtuso, según corresponda.

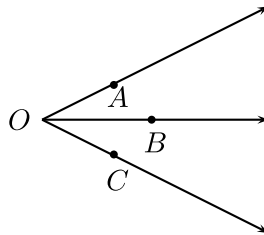
 ángulo .....	 ángulo .....	 ángulo .....
 ángulo .....		 ángulo .....

Si la suma de dos ángulos es  $90^\circ$ , los ángulos son **complementarios** y cada ángulo es el complemento del otro; mientras que si la suma es  $180^\circ$ , se dice que los ángulos son **suplementarios** y cada ángulo es el suplemento del otro.

**Actividad 3.** Completa las siguientes frases:

1. El complemento de  $22^\circ$  es \_\_\_\_\_ porque  $22^\circ + \text{_____} = \text{_____}$
2. Si  $x < 90^\circ$ , el complemento de  $x$  es \_\_\_\_\_ porque  $x + \text{_____} = \text{_____}$
3. El suplemento de  $45^\circ$  es \_\_\_\_\_ porque  $45^\circ + \text{_____} = \text{_____}$
4. Si  $x > 90^\circ$ , el suplemento de  $x$  es \_\_\_\_\_ porque  $x + \text{_____} = \text{_____}$

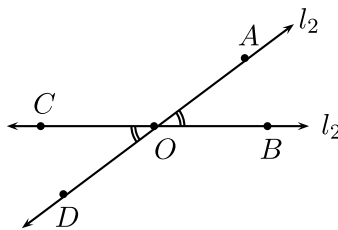
**1.1.1. Definición.** Si tres rayos  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  y  $\overrightarrow{OC}$  tienen el vértice  $O$  en común, y el rayo  $\overrightarrow{OB}$  está dentro del ángulo  $AOC$  entonces los ángulos  $AOB$  y  $BOC$  se llaman **ángulos adyacentes**.



**Nota:** Si los dos ángulos adyacentes son iguales, se dice que el rayo  $\overrightarrow{OB}$  **bisecta** al ángulo  $AOC$ , y  $\overrightarrow{OB}$  se llama la **bisectriz del ángulo**.

**Actividad 4.** Escribe los pasos a seguir para trazar la bisectriz de un ángulo dado, utilizando una regla y compás sin graduar.

Si dos rectas se intersectan en un punto  $O$ , quedan determinados cuatro ángulos, de ellos, cuatro pares son adyacentes. En este caso, cualesquiera dos pares de ángulos adyacentes suman  $180^\circ$ . Los ángulos no consecutivos:  $\angle AOB$  y  $\angle COD$  se llaman **ángulos opuestos**.



**Actividad 5.** En la figura anterior, los ángulos:  $\angle AOB$  y  $\angle AOC$  son adyacentes. Hay tres pares más de ángulos adyacentes. ¿Cuáles son?

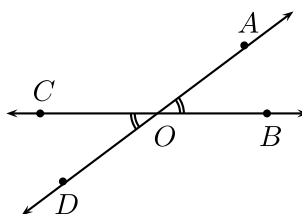
**Actividad 6.** Si el suplemento del ángulo  $\alpha$  es  $153^\circ$  y el complemento del ángulo  $\beta$  es  $56^\circ$ , determina:

(a)  $(\alpha - 2\beta)^2$                       (b)  $(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)$ .

**1.1.2. Proposición. (Propiedad de los ángulos opuestos por el vértice)** *Los ángulos opuestos por el vértice tienen medidas iguales.*

**Demostración:**

Se consideran los ángulos opuestos  $\sphericalangle AOB$  y  $\sphericalangle COD$ . Se comprobará que estos ángulos son iguales.



1.  $\sphericalangle COD + \sphericalangle COA = 180^\circ$  por ser ángulos adyacentes.  
Despejando el ángulo  $\sphericalangle COD$ :  
 $\sphericalangle COD = 180^\circ - \sphericalangle COA$  .....(I)
2.  $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COA = 180^\circ$  por ser ángulos adyacentes.  
Despejando el ángulo  $\sphericalangle AOB$ :  
 $\sphericalangle AOB = 180^\circ - \sphericalangle COA$  ..... (II)

Comparando<sup>2</sup> las igualdades (I) y (II), se tiene que

$$\sphericalangle COD = \sphericalangle AOB. \quad \square$$

**Actividad 7.** Considerando la figura anterior de la proposición 1.1.2, comprueba que los ángulos opuestos  $\sphericalangle AOC$  y  $\sphericalangle DOB$  son iguales. Completa lo siguiente para tal fin.

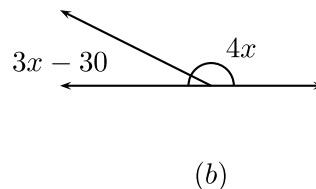
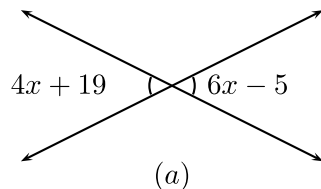
1.  $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COD = 180^\circ$  por ser ángulos adyacentes.  
Despejando el ángulo \_\_\_\_\_,  
se tiene \_\_\_\_\_:.....(I)
2.  $\sphericalangle DOB +$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_ por ser ángulos adyacentes.  
Despejando el ángulo  $\sphericalangle DOB$ ,  
se tiene \_\_\_\_\_: ..... (II)

Comparando las igualdades (I) y (II), se concluye que \_\_\_\_\_

---

<sup>2</sup>Para la comprobación de este resultado, se hizo uso de una propiedad de igualdad: Si  $a = b$  y  $a = c$  entonces  $b = c$ .

**1.1.3. Ejemplo.** Encuentra la medida de los ángulos de las siguientes figuras.



**Solución:**

- (a) Por ser ángulos opuestos, se tiene que  $4x + 19 = 6x - 5$ . Se resuelve esta ecuación para encontrar el valor de  $x$ .

$$\begin{aligned} 4x - 6x &= -5 - 19 \\ -2x &= -24 \\ x &= \frac{-24}{-2} = 12. \end{aligned}$$

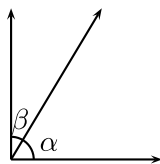
Se sustituye el valor de  $x$  en los dos ángulos:  $4(12) + 19 = 48 + 19 = 67$  y  $6(12) - 5 = 72 - 5 = 67$ . Así que el valor de los ángulos opuestos mide  $67^\circ$ .

- (b) Por ser ángulos suplementarios se tiene que  $3x - 30 + 4x = 180$ . Resolviendo esta ecuación se tiene:

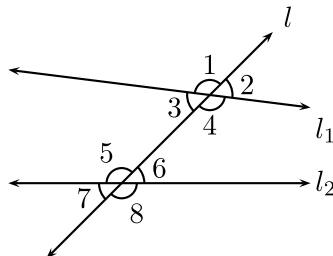
$$\begin{aligned} 7x - 30 &= 180 \\ 7x &= 180 + 30 = 210 \\ x &= \frac{210}{7} = 30. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $x$  en los dos ángulos se tiene:  $3(30) - 30 = 90 - 30 = 60$  y  $4(30) = 120$ . Por lo que los valores de los ángulos suplementarios son:  $60^\circ$  y  $120^\circ$ . ■

**Actividad 8.** Encuentra la medida de los siguientes ángulos complementarios, donde  $\alpha = 12x$  y  $\beta = 2x + 20$ .



Una recta  $l$  es **transversal** cuando corta a dos rectas.



En esta figura,  $l$  es una transversal porque corta a las rectas  $l_1$  y  $l_2$ .

Los ángulos:  $\sphericalangle 3$ ,  $\sphericalangle 4$ ,  $\sphericalangle 5$  y  $\sphericalangle 6$  se llaman **ángulos internos**.

Los ángulos:  $\sphericalangle 1$ ,  $\sphericalangle 2$ ,  $\sphericalangle 7$  y  $\sphericalangle 8$  se llaman **ángulos externos**.

Dos ángulos no opuestos (interno y externo) en lados opuestos por la transversal  $l$  se llaman **ángulos alternos**, por ejemplo:  $\sphericalangle 8$  y  $\sphericalangle 3$  o  $\sphericalangle 2$  y  $\sphericalangle 5$ .

Dos ángulos internos no consecutivos y opuestos por la transversal  $l$  se llaman **ángulos alternos internos**, por ejemplo:  $\sphericalangle 6$  y  $\sphericalangle 3$ .

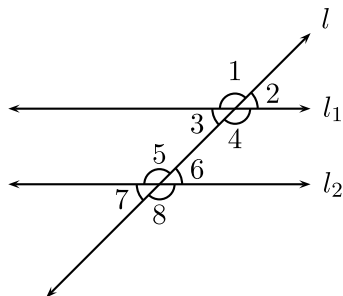
Dos ángulos externos no consecutivos y opuestos por la transversal  $l$  se llaman **ángulos alternos externos**, por ejemplo:  $\sphericalangle 8$  y  $\sphericalangle 1$ .

Los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal como por ejemplo:  $\sphericalangle 8$  y  $\sphericalangle 4$  o  $\sphericalangle 6$  y  $\sphericalangle 2$  se llaman **ángulos correspondientes**.

**Actividad 9.** Apoyándote en la figura anterior,

1. Enlista todos los pares de ángulos alternos.
2. Enlista todos los pares de ángulos alternos internos.
3. Enlista todos los pares de ángulos alternos externos.
4. Enlista todos los pares de ángulos correspondientes.

**Actividad 10.** Dados  $l_1$ ,  $l_2$  dos rectas paralelas,<sup>3</sup>  $l$  una transversal y los 8 ángulos que se forman como en la siguiente figura:



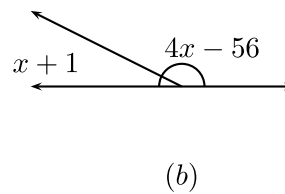
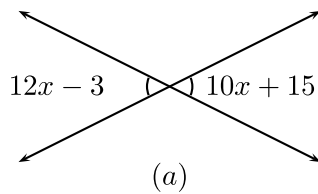
<sup>3</sup>Se dice que dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  son paralelas cuando no se cortan.

- (a) Enlista todos los pares de ángulos iguales (en total son 8).
- (b) Enlista todos los pares de ángulos que suman  $180^\circ$  que no sean suplementarios (en total son 8).

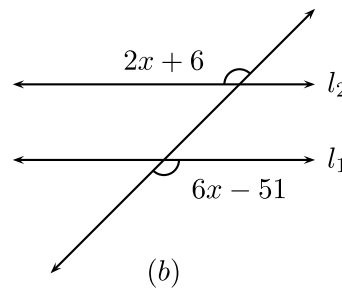
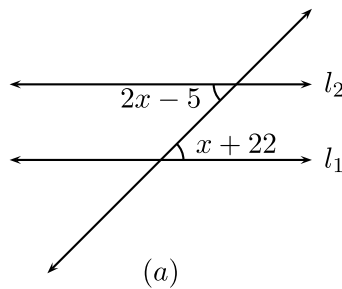
**Observación:** Los pares de ángulos alternos internos son iguales. De manera similar, los pares de ángulos alternos externos coinciden.

### LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 1.1

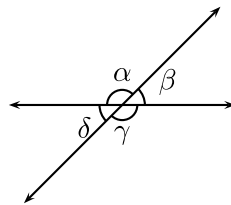
1. Encuentra la medida de los ángulos en las siguientes figuras:



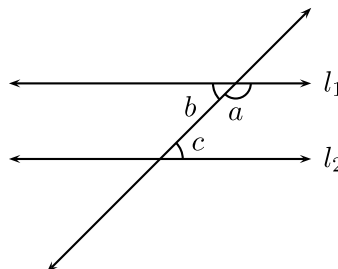
2. Si  $l_1$  es paralela a  $l_2$ , determina el valor de los ángulos de las siguientes figuras.



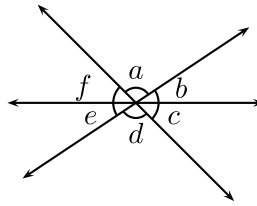
3. Si  $\alpha = 110^\circ$ , ¿cuáles son los valores de  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ ?



4. Si  $l_1$  y  $l_2$  son paralelas, determina la medida de los ángulos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , donde  $a = 180 - y$ ,  $b = 90 + x$  y  $c = 2x$ .

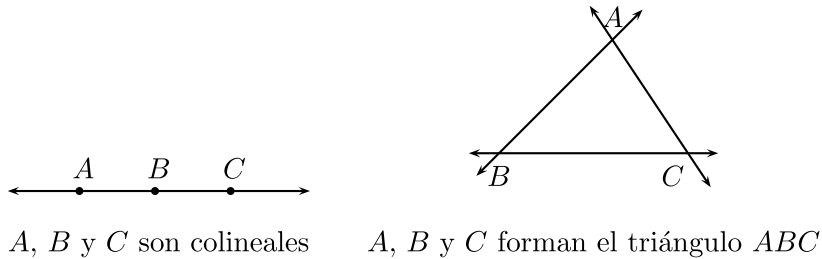


5. Si  $a = 85^\circ$  y  $e = 30^\circ$ , halle las medidas de los ángulos  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $f$ .

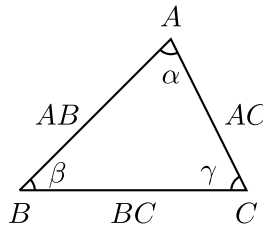


### 1.2. Triángulos

Por un punto  $A$  pasa una infinidad de rectas y dados dos puntos  $A$  y  $B$ , determinan una única recta. Dados tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , estos determinan una o tres rectas. Si los tres puntos están sobre una recta se llaman **colineales**. Si los tres puntos no son colineales, forman un **triángulo** con las tres rectas que estos determinan. Las siguientes figuras ilustran estos hechos.

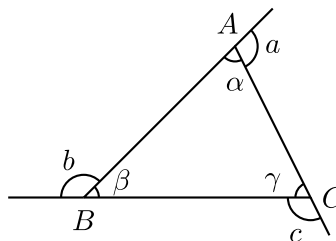


En la figura de la derecha se forma el triángulo  $ABC$ . Los segmentos  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$  son los lados del triángulo;  $A$ ,  $B$  y  $C$  son sus **vértices** y  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle BCA$  y  $\sphericalangle CAB$ , sus ángulos (interiores).



En esta figura se puede apreciar el triángulo  $ABC$ , donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son sus ángulos interiores.

Si se prolongan los lados de un triángulo, quedan determinados todos sus ángulos: **interiores** y **exteriores**.



En esta figura, los ángulos  $a$ ,  $b$  y  $c$  son ángulos exteriores del triángulo  $ABC$ . De esta manera se tiene que un ángulo exterior de un triángulo, es aquel ángulo que es adyacente a un ángulo interior del mismo triángulo, es decir, son suplementarios.

**Actividad 11.** ¿Cuántos ángulos exteriores en total se pueden formar de un triángulo  $ABC$ ?  
¿Todos estos ángulos son distintos?

Para la clasificación de los triángulos, se toman en cuenta dos hechos fundamentales: **ángulos** y **lados**.

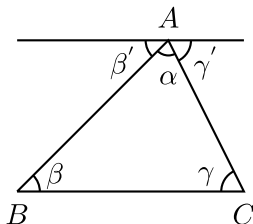
### CLASIFICACIÓN DE ACUERDO CON SUS ÁNGULOS

- **Triángulo rectángulo:** el que tiene un ángulo recto.
- **Triángulo acutángulo:** el que tiene todos sus ángulos agudos.
- **Triángulo obtusángulo:** el que tiene un ángulo obtuso.

### CLASIFICACIÓN DE ACUERDO CON SUS LADOS

- **Triángulo equilátero:** el que tiene todos sus lados iguales.
- **Triángulo isósceles:** el que tiene dos lados iguales.
- **Triángulo escaleno:** el que no tiene lados iguales.

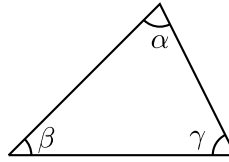
**1.2.1. Teorema.** *La suma de los ángulos interiores de un triángulo  $ABC$  es  $180^\circ$ .*



#### Demostración:

1. Se traza una recta paralela al lado  $BC$ , pasando por el vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ .
2. El ángulo  $\beta$  es igual al ángulo  $\beta'$  y el ángulo  $\gamma$  es igual al ángulo  $\gamma'$ , por ser ángulos alternos internos.
3. Por lo tanto,  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ$ .  $\square$

**1.2.2. Ejemplo.** Encuentra la medida de los ángulos del triángulo como se muestra en la siguiente figura, donde  $\alpha = x + 20$ ,  $\beta = x$  y  $\gamma = 210 - 3x$ .



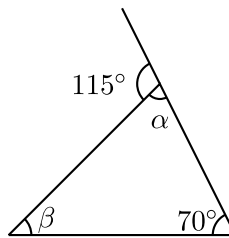
**Solución:** Se sabe que  $x + 20 + x + 210 - 3x = 180$ . Al resolver esta ecuación se obtiene  $x = 50$ . Por lo tanto, la medida de los ángulos son:

$$\alpha = x + 20 = 50 + 20 = 70^\circ$$

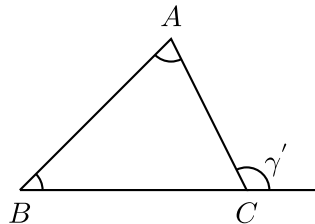
$$\beta = x = 50^\circ$$

$$\gamma = 210 - 3x = 210 - 3(50) = 210 - 150 = 60^\circ. \blacksquare$$

**Actividad 12.** Determina la medida de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  del siguiente triángulo:



**1.2.3. Corolario.** En cualquier triángulo  $ABC$  se tiene que el ángulo exterior  $\gamma'$  es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a  $\gamma'$ .



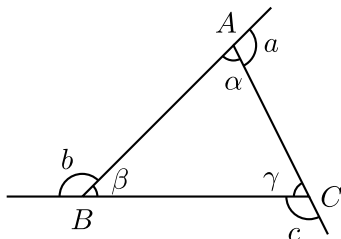
**Demostración:**

1. Sea  $\gamma'$  el ángulo exterior al vértice  $C$  (la argumentación es la misma si es considerado otro vértice).
2. Se tiene que  $\gamma' + \angle BCA = 180^\circ$ , por ser ángulos suplementarios.
3. Por el teorema 1.2.1,  $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ . Así que se tiene la igualdad:

$$\gamma' + \angle BCA = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB.$$

4. De donde  $\gamma' = \angle ABC + \angle CAB$ .  $\square$

**1.2.4. Teorema.** *La suma de los ángulos exteriores de todo triángulo  $ABC$  es igual a  $360^\circ$ .*



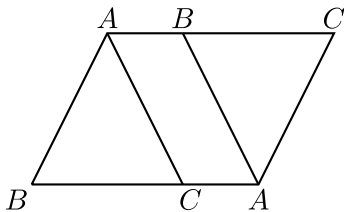
**Demostración:**

1. Utilizando el corolario 1.2.3, se tiene que  $a = \beta + \gamma$ ,  $b = \alpha + \gamma$  y  $c = \alpha + \beta$ .
2. Sumando los tres ángulos anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} a + b + c &= \beta + \gamma + \alpha + \gamma + \alpha + \beta \\ &= \alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma \\ &= 180^\circ + 180^\circ \\ &= 360^\circ. \end{aligned}$$

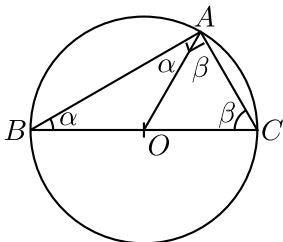
3. Se tiene así que  $a + b + c = 360^\circ$ .  $\square$

Antes de continuar con más ejemplos, notemos que en todo triángulo isósceles  $ABC$ , donde  $AB = AC$  se tiene que  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ . Para comprobar este hecho, observemos la siguiente figura:



Se ha trazado dos veces el triángulo isósceles  $ABC$  de tal forma que el lado  $AC$  debe ser paralelo a  $AB$  para formar un cuadrilátero como se muestra en el dibujo. De esta forma, los ángulos  $\sphericalangle ABC$  y  $\sphericalangle ACB$  deben ser iguales.

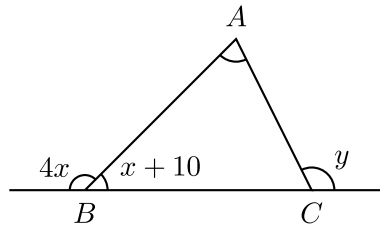
**1.2.5. Teorema.** *Si  $A$  es un punto de la circunferencia de diámetro  $BC$  distinto de  $B$  y  $C$ , entonces el triángulo  $ABC$  es un triángulo rectángulo.*



**Demostración:**

1. Si  $O$  el centro de la circunferencia entonces los segmentos  $OB$ ,  $OC$  y  $OA$  son iguales.
2. Los triángulos  $ABO$  y  $AOC$  son isósceles.
3. La suma de los ángulos del triángulo  $ABC$  cumple  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ . De aquí se deduce que  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .  $\square$

**1.2.6. Ejemplo.** Considera el triángulo  $ABC$ , de manera que  $AB = BC$ . Calcula la medida de  $\sphericalangle y$ .

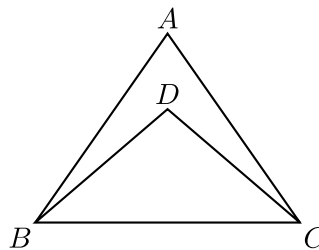


**Solución:**

1. Sea  $\beta = \sphericalangle BAC$ . Como  $AB = BC$ , el triángulo es isósceles, por lo tanto,  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$ .
2. Por el corolario 1.2.3 se tiene que  $4x = 2\beta$  que es equivalente a tener  $2x = \beta$ .
3. Por otra parte,  $4x + x + 10 = 180^\circ$ . Resolviendo esta ecuación se obtiene  $x = 34$ .
4. Sustituyendo el valor de  $x$  en el ángulo  $\beta$ , se obtiene  $2(34) = 68^\circ = \beta$ .

Así que entonces se tiene  $y + 68^\circ = 180^\circ$ , y por lo tanto  $y = 112^\circ$ .  $\blacksquare$

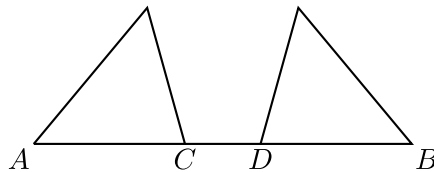
**1.2.7. Ejemplo.** En la siguiente figura se tiene que  $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB$  y  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ . Comprueba que  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ .



**Solución:**

1. Como dato se tiene que  $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB$  y  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ .
2. Sumando estas dos igualdades se tiene  $\sphericalangle DBC + \sphericalangle ABD = \sphericalangle DCB + \sphericalangle ACD$ .
3. Por lo tanto,  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ .  $\blacksquare$

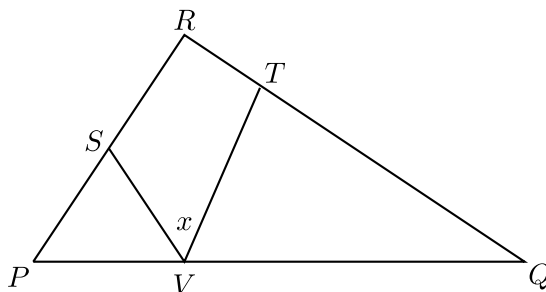
**1.2.8. Ejemplo.** Considera los siguientes triángulos, donde  $AD = CB$ . Comprueba que  $AC = DB$ .



**Solución:**

1. Se sabe que  $AC + CD = AD$  y  $CD + DB = CB$ .
2. Como dato se tiene que  $AD = CB$ , por lo que  $AC + CD = CD + DB$ .
3. Cancelando términos en la igualdad anterior se concluye que  $AC = DB$ . ■

**1.2.9. Ejemplo.** En el triángulo  $PQR$ , el ángulo en el vértice  $R$  es un ángulo recto,  $QT = QV$  y  $PS = PV$ . Comprueba que  $x = 45^\circ$ .

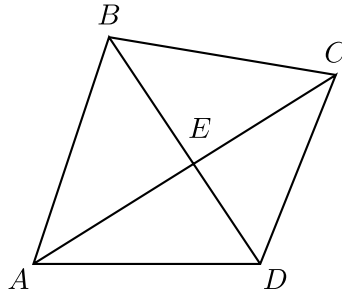


**Solución:**

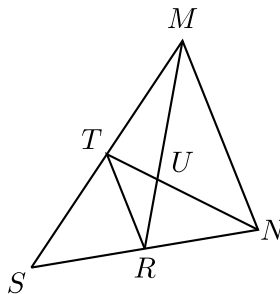
1. Sean  $\angle RPQ = \alpha$ ,  $\angle PQR = \beta$ ,  $\angle PVS = y$  y  $\angle TVQ = z$ .
2. Se sabe que  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , porque el triángulo  $PQR$  es un triángulo rectángulo.
3. Como  $QT = QV$  y  $PS = PV$ , los triángulos  $PSV$  y  $VTQ$  son isósceles. Así, se tiene que  $2y + \alpha = 180^\circ$  y  $2z + \beta = 180^\circ$ .
4. Sumando las dos igualdades anteriores se tiene,  $2y + 2z + \alpha + \beta = 360^\circ$ .
5. Sustituyendo el valor de  $\alpha + \beta$  obtenido en el paso (2) en la igualdad del paso anterior y simplificando, se tiene que  $y + z = 135^\circ$ .
6. Finalmente, como  $y + x + z = 180^\circ$ , entonces  $x = 45^\circ$ . ■

LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 2.1

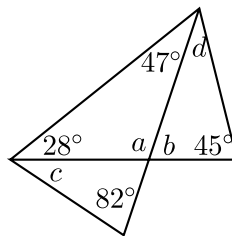
1. Nombra todos los triángulos de la figura siguiente (hay más de cuatro).



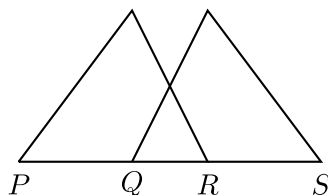
2. Nombra todos los triángulos de la siguiente figura. Una manera de abordar el problema es escribir *SRTMUN* y, luego, escribir todas las combinaciones de tres letras y cotejar cada combinación con la figura.



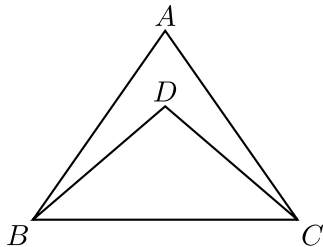
3. Determina la medida de los ángulo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  de la figura:



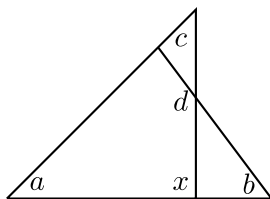
4. Si  $PQ = RS$ , comprueba que  $PR = QS$ .



5. Si  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$  y  $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB$ , comprueba que  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ .



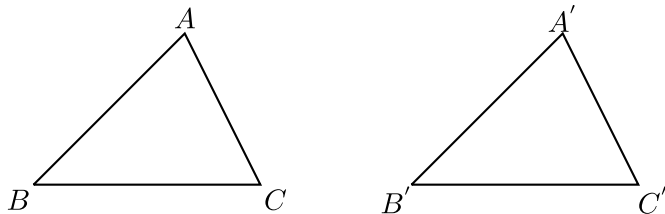
6. Si  $\sphericalangle a = \sphericalangle b$  y  $\sphericalangle c = \sphericalangle d$ , comprueba que el ángulo  $x$  es recto.



### 1.3. Congruencia de triángulos

El concepto de **congruencia** está emparentado con el de **igualdad**. En geometría es común que se hable de congruencia en vez de igualdad. Por ejemplo, dos segmentos son congruentes si y sólo si tienen la misma medida, y lo mismo es cierto para ángulos, pero en el caso de dos triángulos, la definición es más complicada puesto que no hay una medida (número) que defina a un triángulo.

Se ha visto que hay diversas clasificaciones de triángulos que dan cuenta de su diversidad de formas, es por eso que una noción previa a la definición de congruencia de triángulos es la de **correspondencia**; y esto, porque un triángulo (y cualquier polígono) es una configuración que consiste de puntos y segmentos de recta (lados) que unen pares de esos puntos. Decir que el triángulo  $ABC$  está en correspondencia con el triángulo  $A'B'C'$ , significa que la correspondencia entre sus vértices es:  $A - A'$ ,  $B - B'$ ,  $C - C'$ ; y en esta correspondencia, queda implícita la correspondencia entre sus lados:  $AB - A'B'$ ,  $BC - B'C'$  y  $CA - C'A'$ , y entre sus ángulos: el ángulo  $\sphericalangle ABC$  es congruente con el ángulo  $\sphericalangle A'B'C'$ , etcétera.



De hecho, dos triángulos son congruentes cuando se hacen coincidir uno sobre el otro mediante algún giro, translación y/o reflexión. Sin embargo, este hecho no se empleará para decidir si dos

triángulos son congruentes, en vez de esto, se emplean criterios sobre sus ángulos y lados.

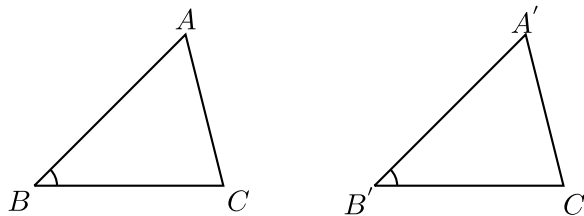
La definición formal utilizada en geometría es como sigue: dos triángulos son congruentes si en la correspondencia entre sus vértices resultan iguales los lados correspondientes y los ángulos correspondientes. Esto es, los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son congruentes si  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  y  $AC = A'C'$ ; y los ángulos en  $A$ ,  $B$  y  $C$  son iguales a los ángulos en  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .

Entonces en una congruencia de triángulos se tienen seis igualdades: tres correspondientes a los lados y tres a los ángulos. Debido a que son demasiadas igualdades, resulta muy útil tener criterios que nos digan si dos triángulos son congruentes sin tener que verificarlas todas. El criterio (principio) de congruencia más básico, es posiblemente el denominado criterio *LAL* (lado-ángulo-lado) que nos dice que si, en una correspondencia de triángulos, dos lados de uno y el ángulo comprendido entre ellos son iguales a sus correspondientes elementos en el otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Algunos textos de geometría, los más formales en el sentido lógico, toman este criterio como axioma y demuestran los dos restantes, el *ALA* (ángulo-lado-ángulo) y el *LLL* (lado-lado-lado). Otros textos, la mayoría, postulan como verdaderos los tres criterios. Es recomendable entonces tomar los tres como postulados ya que de cualquier manera se va a tomar uno como postulado.

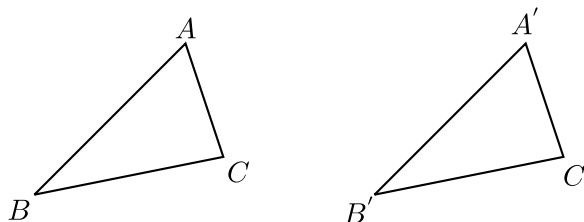
### CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

1. **Lado-Ángulo-Lado** (*LAL*). Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos, respectivamente iguales.



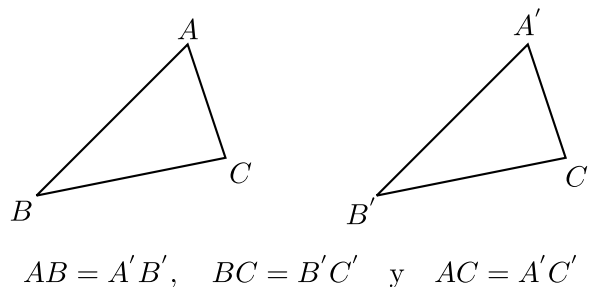
Por ejemplo:  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  y  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$

2. **Ángulo-Lado-Ángulo** (*ALA*). Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado entre ellos respectivamente iguales.



Por ejemplo:  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ ,  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$  y  $BC = B'C'$

3. **Lado-Lado-Lado (LLL).** Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.



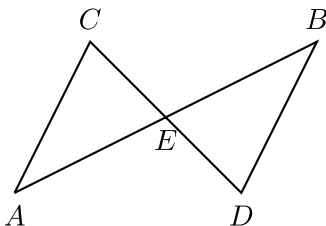
Estos criterios que se acaban de enunciar, ayudan a decidir si dos triángulos son congruentes sin necesidad de verificar las seis igualdades que dan razón a una congruencia.

Para poder ver la congruencia es necesario buscarla, es decir, en el enunciado de un problema (una frase, un dato,...) debe sugerir implícitamente qué criterio se puede usar para su solución.

Si  $ABC$  es cualquier triángulo, se usará de aquí en adelante y cuando se necesite, el símbolo  $\triangle ABC$ , para denotar dicho triángulo. Si  $\triangle A'B'C'$  denota el triángulo  $A'B'C'$ , el símbolo  $\cong$  denotará la congruencia entre los dos triángulos:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

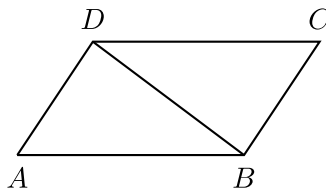
- 1.3.1. Ejemplo.** Dada la siguiente figura, si  $AE = EB$ ,  $CE = ED$ , comprueba que  $\triangle AEC \cong \triangle EDB$ .



**Solución:**

1.  $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$  por ser ángulos opuestos.
2. De los datos se sabe que  $AE = EB$  y  $CE = ED$ .
3. Entonces, por el criterio  $LAL$  se tiene que  $\triangle AEC \cong \triangle EDB$ . ■

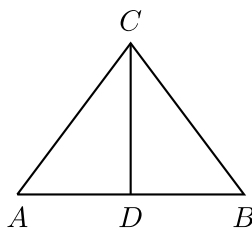
- 1.3.2. Ejemplo.** Si en el paralelogramo  $ABCD$  se tiene que  $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBC$  y  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$ , comprueba que  $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ .



**Solución:**

1. Como  $DB$  es común en los dos triángulos, se tiene que  $DB = DB$ .
2. De los datos se sabe que  $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBC$  y  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$ .
3. Entonces se cumple el criterio  $ALA$ , y por lo tanto,  $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ . ■

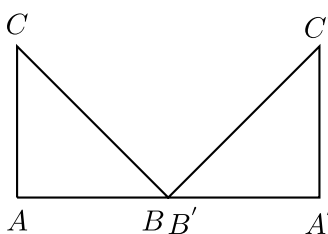
**1.3.3. Ejemplo.** Si en el triángulo isósceles  $ABC$  se tiene que  $AC = BC$  y  $AD = DB$ , es decir,  $D$  es el punto medio de  $AB$ , comprueba que  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ .



**Solución:**

1. Como  $DC$  es lado común de los dos triángulos, se tiene  $DC = DC$ .
2. De los datos se sabe que  $AC = BC$  y  $AD = DB$ .
3. Por lo tanto se cumple el criterio  $LLL$  y  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ . ■

**Actividad 13.** Si en los triángulo rectángulos:  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$ , se tiene que  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$  y  $BC = B'C'$ , comprueba que  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .



## 1.4. Teoremas de Thales

Los teoremas de Thales tienen diversas aplicaciones en la geometría, en especial para la semejanza de triángulos. Antes de enunciar estos teoremas se darán algunas definiciones y resultados.

Dado un triángulo  $ABC$ , la **altura**<sup>4</sup> desde el vértice  $A$ , es la perpendicular  $AD$  al lado  $BC$  que pasa por  $A$ . En este caso, el punto de intersección  $D$ , de la altura con  $BC$ , se llama **pie de la altura**, y en este caso,  $BC$  es la **base** del triángulo  $ABC$ .

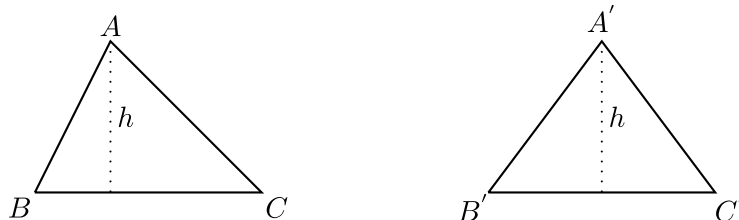


Se observa que el pie de la altura  $D$ , se encuentra dentro del segmento  $BC$  o bien en la prolongación de  $BC$ .

El **área** de un triángulo  $ABC$ , es la mitad del producto de su base por la altura correspondiente. Por ejemplo, si  $BC$  es la base y  $AD$  la altura, entonces el área del triángulo  $ABC$  denotado por  $a(\triangle ABC)$  es:

$$a(\triangle ABC) = \frac{BC \cdot AD}{2}$$

**1.4.1. Proposición.** Si dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen una misma altura, entonces, la razón<sup>5</sup> entre sus áreas es igual a la razón de sus bases donde se levanta la altura.



**Demostración:**

1. Sea  $h$  la altura común de los triángulos. Entonces,

$$a(\triangle ABC) = \frac{BC \cdot h}{2}$$

$$a(\triangle A'B'C') = \frac{B'C' \cdot h}{2}$$

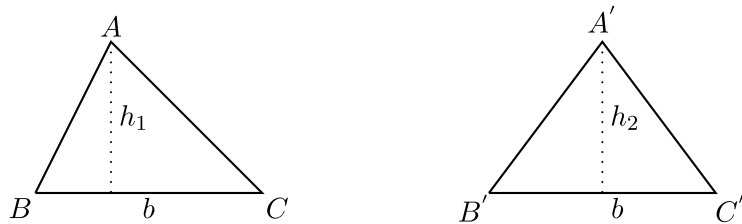
<sup>4</sup>La altura de un triángulo  $ABC$  se puede definir desde cualesquiera de sus tres vértices:  $A$ ,  $B$  o  $C$ .

<sup>5</sup>Al cociente  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son números positivos se le llama **razón**. Cuando dos razones son iguales, se dice que hay una **proporción**.

2. Por lo tanto,

$$\frac{a(\triangle ABC)}{a(\triangle A'B'C')} = \frac{(BC \cdot h)/2}{(B'C' \cdot h)/2} = \frac{BC}{B'C'}. \quad \square$$

**1.4.2. Proposición.** *Si los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen una base igual, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón entre las alturas que se levantan sobre la base igual.*



**Demostración:**

1. Sean  $b$  la base común de los triángulos,  $h_1$  la altura del triángulo  $ABC$  y  $h_2$  la altura del triángulo  $A'B'C'$ . Entonces,

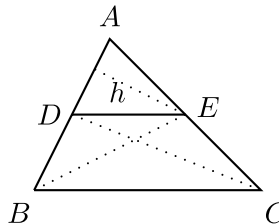
$$\begin{aligned} a(\triangle ABC) &= \frac{b \cdot h_1}{2} \\ a(\triangle A'B'C') &= \frac{b \cdot h_2}{2} \end{aligned}$$

2. Por lo tanto,

$$\frac{a(\triangle ABC)}{a(\triangle A'B'C')} = \frac{(b \cdot h_1)/2}{(b \cdot h_2)/2} = \frac{h_1}{h_2}. \quad \square$$

**1.4.3. Teorema. (Primer teorema de Thales)** *En el triángulo  $ABC$ , sean  $D$  y  $E$  puntos de  $AB$  y  $AC$  respectivamente y tales que  $DE$  es paralelo a  $BC$ . Entonces,*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$



**Demostración:**

1. Se observa que los triángulos  $ADE$  y  $ABE$  tienen la misma altura desde el vértice  $E$ . Luego, usando la proposición 1.4.1 se tiene que la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases:

$$\frac{a(\triangle ABE)}{a(\triangle ADE)} = \frac{AB}{AD}.$$

2. También los triángulos  $ADE$  y  $ADC$  tienen la misma altura desde el vértice  $D$ , por lo que

$$\frac{a(\triangle ADC)}{a(\triangle ADE)} = \frac{AC}{AE}.$$

3. Los triángulos  $DBE$  y  $DCE$  tienen a  $DE$  como base común, y como  $DE$  es paralelo a  $BC$ , las alturas de estos triángulos son iguales sobre la base común. Por lo tanto,

$$\frac{a(\triangle DBE)}{a(\triangle DCE)} = 1.$$

De aquí se deduce que  $a(\triangle DBE) = a(\triangle DCE)$ .

4. De esto se tiene la siguiente igualdad:

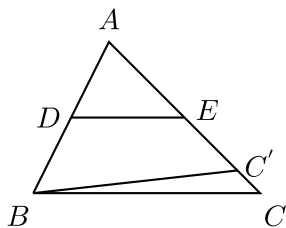
$$\begin{aligned} a(\triangle ABE) &= a(\triangle ADE) + a(\triangle DBE) \\ &= a(\triangle ADE) + a(\triangle DCE) \\ &= a(\triangle ADC). \end{aligned}$$

5. Sustituyendo esto último en el paso (1) y comparando con la igualdad del paso (2), se concluye que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}. \quad \square$$

El recíproco de este teorema también es cierto.

**1.4.4. Teorema.** Si en el triángulo  $ABC$ ,  $D$  y  $E$  son puntos sobre  $AB$  y  $AC$ , tales que  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ , entonces  $DE$  es paralelo a  $BC$ .



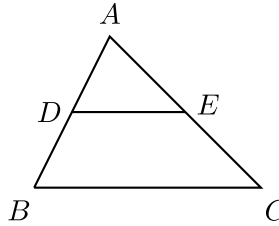
**Demostración:**

1. Supongamos que  $DE$  no es paralelo a  $BC$ . Sea  $C'$  sobre  $AC$  tal que  $DE$  es paralelo a  $BC'$ .
2. Por el teorema 1.4.3 se tiene que  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$ .
3. Por otra parte, se sabe que  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ .
4. Comparando los resultados de los pasos (2) y (3) se tiene la igualdad:

$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}$$

De aquí se deduce que  $AC = AC'$  y  $DE$  es paralelo a  $BC$ .  $\square$

En el primer teorema de Thales se ha visto que se cumple la relación  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ , donde  $DE$  es paralelo a  $BC$  en el triángulo  $ABC$ .



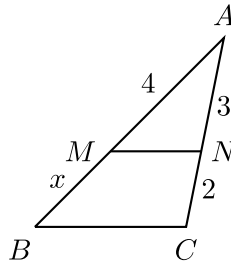
Como  $AB = AD + DB$  y  $AC = AE + EC$ , la relación anterior, se puede reducir a

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}.$$

Esta última igualdad, también es equivalente a  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ . Así que en el primer teorema de Thales, en el triángulo  $ABC$ , si  $DE$  es paralelo a  $BC$ , se cumplen cualesquiera de las relaciones:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \circ \quad \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} \quad \circ \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

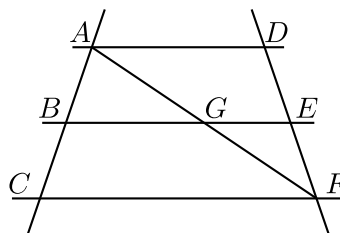
**1.4.5. Ejemplo.** Encuentra el valor de  $x$  en el siguiente triángulo, donde  $MN$  es paralelo a  $BC$ .



**Solución:**

Aplicando el primer teorema de Thales, se tiene  $\frac{4}{x} = \frac{3}{2}$ . Despejando  $x$  se obtiene  $x = \frac{8}{3}$ . ■

**1.4.6. Teorema. (Segundo teorema de Thales)** Si se tienen tres rectas y dos transversales a éstas, de tal forma que  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son paralelas, entonces  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ . Recíprocamente, si  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$  y dos de las rectas  $AD$ ,  $BE$  o  $CF$  son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.



**Demostración:**

1. Se traza la transversal  $AF$  a las tres rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$ , y sea  $G$  el punto de intersección de  $AF$  con  $BE$ .
2. Debido a que  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son paralelas, se puede aplicar el teorema de Tales a los triángulos  $ACF$  y  $FDA$ , para tener

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF} \quad \text{y} \quad \frac{FE}{ED} = \frac{FG}{GA}.$$

La última igualdad también se puede escribir como:  $\frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF}$ .

3. Comparando la primera y tercera igualdad, se concluye finalmente que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

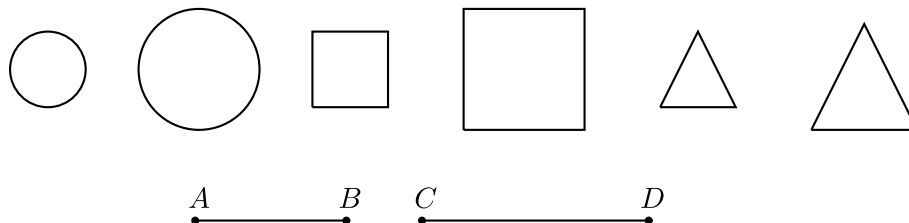
Para comprobar el recíproco, se procede como sigue:

1. Supongamos que  $BE$  y  $CF$  son paralelas. Entonces,  $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}$ .
2. Por hipótesis,  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ .
3. Comparando las dos igualdades anteriores se concluye que  $\frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF}$ .
4. De esta igualdad se tiene por el recíproco del primer teorema de Tales que  $GE$  es paralelo a  $AD$ , es decir,  $BE$  es paralelo a  $AD$  y las tres rectas son paralelas.  $\square$

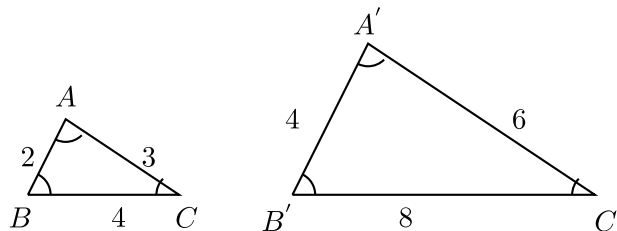
**Actividad 14.** Con la ayuda de una regla sin medida y un compás, divide un segmento de recta  $AB$  en cuatro partes iguales. Cómo generalizarías lo anterior para dividir el segmento  $AB$  en  $n$  partes iguales?

## 1.5. Semejanza de triángulos

En términos generales, dos figuras geométricas son **semejantes**, si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Otra manera de expresar que dos figuras son semejantes es, si una de ellas es un modelo de escala de la otra. Por ejemplo, dos circunferencias cualesquiera son semejantes; dos cuadrados cualesquiera son semejantes; dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes; dos segmentos cualesquiera son semejantes, etcétera.



El siguiente es un ejemplo de dos triángulos semejantes:



El triángulo  $ABC$  es semejante al triángulo  $A'B'C'$ , debido a que la longitud de cada lado del segundo triángulo es dos veces la del lado correspondiente del primero. Nombremos  $a = 2$ ,  $b = 4$  y  $c = 3$  la longitud de los lados del triángulo  $ABC$  y  $a' = 4$ ,  $b' = 8$  y  $c' = 6$  para el triángulo  $A'B'C'$ . De esta forma,

$$a' = 2a, \quad b' = 2b \quad \text{y} \quad c' = 2c,$$

o dicho a la inversa, cada número de la primera terna es exactamente la mitad del número correspondiente de la segunda terna:

$$a = \frac{1}{2}a', \quad b = \frac{1}{2}b' \quad \text{y} \quad c = \frac{1}{2}c'.$$

De esta forma, se tiene:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

porque cada una de las fracciones es igual a 2; y

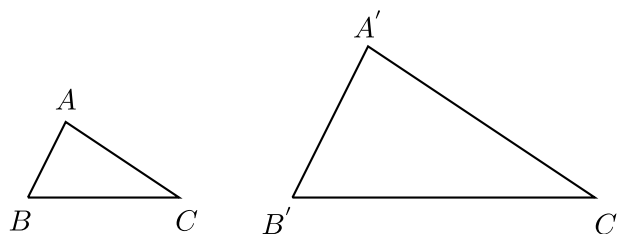
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

porque cada una de estas fracciones es igual a  $\frac{1}{2}$ . En este caso, se dice que las ternas  $a, b, c$  y  $a', b', c'$ , son **proporcionales**.

Finalmente, para que dos triángulos sean semejantes, se debe cumplir necesariamente que los ángulos correspondientes sean iguales.

**1.5.1. Definición.** *Se dice que dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes; en símbolos:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales.*

Ilustración de la definición:



Los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes, si y sólo si

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A', \quad \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B',$$

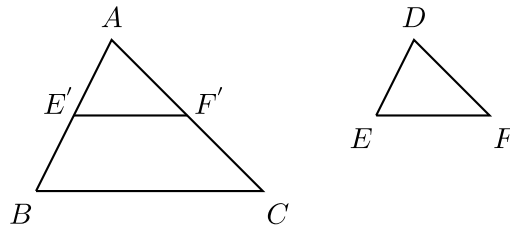
$$\text{y } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Así que para que dos triángulos sean semejantes, se deben verificar dos condiciones:

- Sus ángulos correspondientes deben ser iguales. En este caso, se escribe ángulo-ángulo-ángulo o simplemente como AAA.
- Sus lados correspondientes deben ser proporcionales. En este caso, se escribe lado-lado-lado o simplemente LLL.

De hecho, si alguna de las condiciones es verdadera, se cumple automáticamente la otra, es decir, si los ángulos correspondientes son iguales AAA, entonces sus lados correspondientes son proporcionales LLL y viceversa. Se prueba este resultado en el siguiente teorema.

**1.5.2. Teorema. (Teorema de semejanza AAA)** *Si dos triángulos  $ABC$  y  $DEF$  tienen sus ángulos correspondientes iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*



**Demostración:**

Se debe comprobar que los lados correspondientes son proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

1. Sean  $E'$  y  $F'$  puntos sobre  $AB$  y  $AC$  respectivamente, tales que  $AE' = DE$  y  $AF' = DF$ .
2. Por el criterio de congruencia  $LAL$ , se tiene que los triángulos  $AE'F'$  y  $DEF$  son congruentes.
3. Por lo tanto,  $E'F'$  es paralelo a  $BC$ , y aplicando el primer teorema de Thales se tiene:

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

4. Como  $AE' = DE$  y  $AF' = DF$ , la igualdad anterior se transforma en

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

5. De la misma forma, se puede comprobar que  $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ . Finalmente, se concluye que

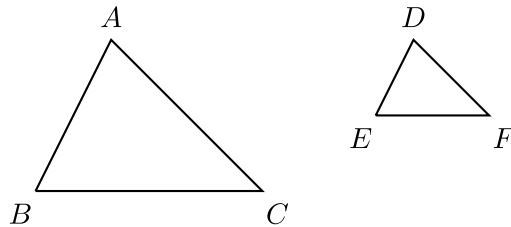
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}. \quad \square$$

**Actividad 15.** Comprueba el paso (5) de la demostración del teorema anterior, es decir:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}.$$

El teorema que se acaba de comprobar, tiene una consecuencia importante que dice que si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  son iguales, entonces los triángulos son semejantes, es decir, basta con que dos pares de ángulos sean iguales para que dos triángulos sean semejantes. Se enuncia formalmente este resultado en el siguiente corolario.

**1.5.3. Corolario. ( Criterio de semejanza AA)** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  son iguales, entonces los triángulos son semejantes.*



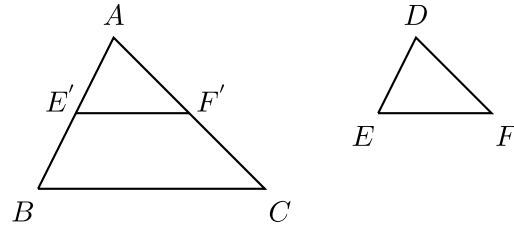
**Demostración:**

1. Supongamos que  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$  y  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle EFD$  son los dos pares de ángulos correspondientes iguales.
2. Por otro lado, se sabe que

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB &= 180^\circ \\ \sphericalangle DEF + \sphericalangle EFD + \sphericalangle FDE &= 180^\circ. \end{aligned}$$

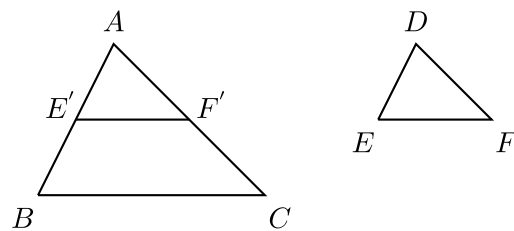
3. Por lo tanto, de los pasos (1) y (2), se concluye que  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$ , y por el teorema de semejanza AAA, los triángulos son semejantes.  $\square$

**1.5.4. Teorema. (Teorema de semejanza LAL)** *Si los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre estos es igual, entonces los triángulos son semejantes.*

**Demostración:**

1. Sean  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$  y  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$  los lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido iguales.
2. Sean  $E'$  y  $F'$  sobre  $AB$  y  $AC$ , tales que  $AE' = DE$  y  $AF' = DF$ .
3. Por el criterio de congruencia  $LAL$ , los triángulos  $AE'F'$  y  $DEF$  son congruentes. Por lo tanto,  $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$ .
4. Por el recíproco del primer teorema de Tales, se tiene que  $E'F'$  es paralelo a  $BC$ .
5. Luego, los ángulos  $\sphericalangle ABC$  y  $\sphericalangle DEF$  son iguales, y por hipótesis, los ángulos en los vértices en  $A$  y  $D$  son iguales, entonces por el criterio de semejanza  $AA$ , los triángulos  $AE'F'$  y  $ABC$  son semejantes.
6. Finalmente, como los triángulos  $AE'F'$  y  $DEF$  son congruentes, véase el paso (3), entonces los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  son semejantes.<sup>6</sup>  $\square$

**1.5.5. Teorema. (Teorema de semejanza LLL)** Si los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

**Demostración:**

1. Por hipótesis se tiene que  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ .
2. Sean  $E'$  y  $F'$  los puntos en  $AB$  y  $AC$  respectivamente, tales que  $DE = AE'$  y  $DF = AF'$ .  
Sustituyendo estas igualdades en el paso (1) se tiene:

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

---

<sup>6</sup>Si los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes y  $A'B'C'$  es congruente a  $DEF$ , entonces el triángulo  $ABC$  es semejante con  $DEF$ .

3. Como los triángulos  $ABC$  y  $AE'F'$  comparten el ángulo en el vértice  $A$ , se sigue del teorema de semejanza LAL que los triángulos  $ABC$  y  $AE'F'$  son semejantes.
4. Ahora, por definición de semejanza, se tiene que  $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$ , de donde

$$E'F' = BC \frac{AE'}{AB} = BC \frac{DE}{AB}.$$

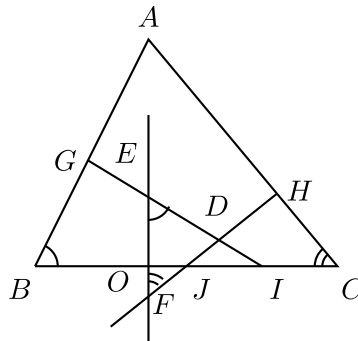
5. Por otro lado, en el paso (1) se tiene

$$EF = BC \frac{DE}{AB}.$$

Por lo tanto, de los pasos (4) y (5) se concluye que  $E'F' = EF$ .

6. Entonces, por el criterio de congruencia  $LLL$ , los triángulos  $AE'F'$  y  $DEF$  son congruentes.
7. Finalmente, los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  son semejantes; véase los pasos (3) y (6).  $\square$

**1.5.6. Ejemplo.** Si los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  son tales que  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  son perpendiculares a las rectas  $DE$ ,  $EF$  y  $FD$  respectivamente, entonces los triángulos son semejantes.



**Solución:**

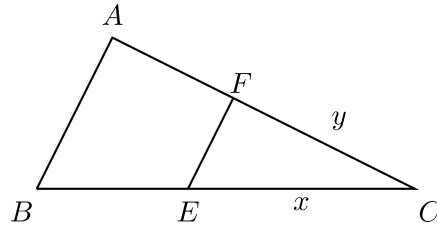
En la figura se tiene que los triángulos rectángulos  $BGI$  y  $EOI$ , son semejantes por tener el ángulo común en el vértice  $I$ , y un ángulo recto (Criterio de semejanza AA). Por consiguiente,  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle IEO$ .

Por otra parte, los triángulos  $OJF$  y  $HJC$  son semejantes, puesto que  $\sphericalangle OJF = \sphericalangle HJC$ , por ser ángulos opuestos por el vértice. De aquí se deduce que

$$\sphericalangle OFJ = \sphericalangle HCJ = \sphericalangle ACB.$$

De esta forma se tiene que los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  tienen dos pares de ángulos iguales, y por el criterio de semejanza AA se concluye que los triángulos son semejantes.  $\blacksquare$

**1.5.7. Ejemplo.** Determina la medida de los lados faltantes de los siguientes triángulos semejantes, donde  $AB = 8$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 11$ ,  $EF = 4$  y el segmento  $AB$  es paralelo a  $FE$ .

**Solución:**

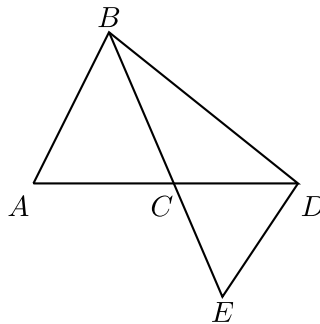
Como los triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, por lo que

$$\frac{11}{y} = \frac{8}{4}, \quad \text{entonces } y = \frac{11}{2}.$$

También se tiene que

$$\frac{12}{x} = \frac{8}{4}, \quad \text{entonces } x = 6. \quad \blacksquare$$

**1.5.8. Ejemplo.** En la siguiente figura,  $AB = BC = 12$ ,  $\angle BDC = \angle CDE$ ,  $BD = 16$  y  $CE = 8$ . Halla la longitud de  $DE$ .

**Solución:**

Como  $AB = BC$ , el triángulo  $ABC$  es isósceles. Luego,  $\angle BAC = \angle BCA = \angle DCE$ .

Por hipótesis,  $\angle BDC = \angle CDE$ , por lo tanto, los triángulos  $ABD$  y  $CDE$  son semejantes puesto que tienen dos ángulos iguales. Así, se tiene que

$$\frac{DE}{16} = \frac{8}{12}.$$

Despejando se concluye que  $DE = \frac{32}{3}$ .  $\blacksquare$

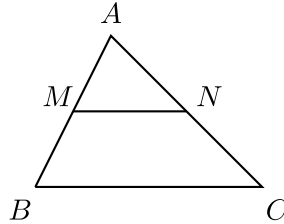
**LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 1.3, 1.4 y 1.5**

1. En cada una de las siguientes proporciones, determina el valor de  $x$ :

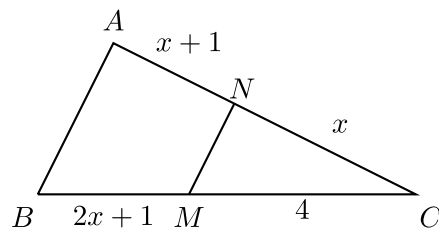
$$(a) \frac{x}{2} = \frac{3}{4} \quad (b) \frac{5}{x} = \frac{4}{7} \quad (c) \frac{5}{4} = \frac{2x}{13} \quad (d) \frac{2}{3} = \frac{11}{x+3}$$

2. Si  $\frac{x}{40} = \frac{y}{50} = \frac{30}{20}$ , ¿cuáles son los valores de  $x$  y  $y$ ?

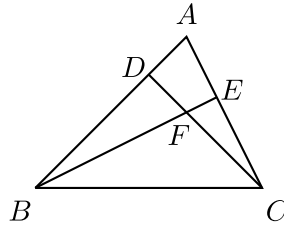
3. Si  $\frac{3}{p} = \frac{5}{q} = \frac{r}{26} = \frac{q}{20}$ , ¿cuáles son los valores de  $p$ ,  $q$  y  $r$ ?
4. Considera el triángulo  $ABC$ , donde  $AB = 12$ ,  $AC = 15$  y  $BC = 15$ . Si  $MN$  es paralelo a  $BC$ , determina la longitud de  $NC$ .



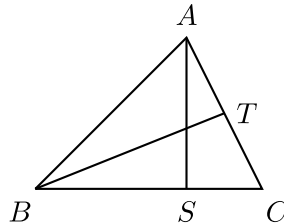
5. Sea  $ABC$  el triángulo, cuyo segmento  $MN$  es paralelo a  $AB$ . Determina el valor de  $x$ .



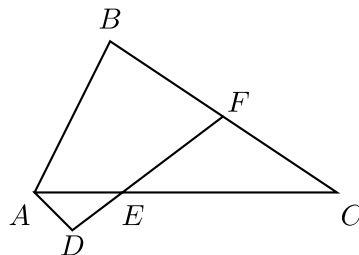
6. Considera el triángulo  $ABC$ , donde  $BD = 2$ ,  $EC = \frac{3}{2}$ ,  $EF = \frac{1}{2}$ ,  $\angle ADF = \angle AEF = 90^\circ$ . Halla la longitud del segmento  $DF$ .



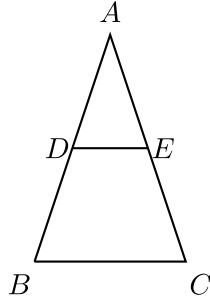
7. En el triángulo  $ABC$ ,  $AS$  es la altura correspondiente al lado  $BC$ ,  $BT$  la altura correspondiente al lado  $AC$ ,  $BC = 8$ ,  $AS = 9$  y  $BT = 6$ . Determina la longitud del segmento  $AC$ .



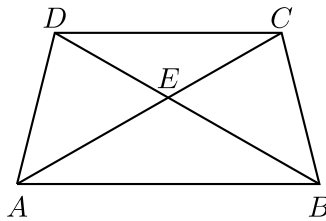
8. En el triángulo  $ABC$ , supón que  $AB = AD + 10$ ,  $EC = 12$ ,  $AC = 20$ ,  $EF = FC$ ,  $\angle BAC = \angle EAD$ . Determina la longitud del segmento  $AD$ .



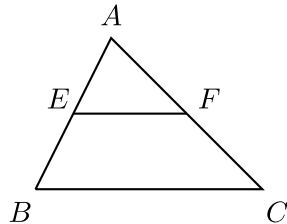
9. En el triángulo  $ABC$ ,  $AD = DB$  y  $AE = EC$ . Comprueba que  $DE$  es paralelo a  $BC$ .



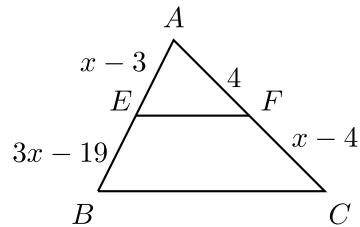
10. En el trapecio  $ABCD$ ,  $AB$  es paralelo a  $DC$  y los triángulos  $AED$  y  $BEC$ , son semejantes. Comprueba que  $AD = BC$ . [Sugerencia: ¿Qué otros triángulos son semejantes?].



11. En el triángulo  $ABC$ ,  $AB = 16$ ,  $AC = 30$ ,  $AE = 11$ ,  $AF = 25$ . Es  $EF$  paralelo a  $BC$ ? Justifica tu respuesta.

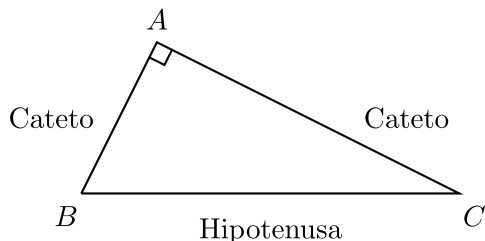


12. En el triángulo  $ABC$ ,  $EF$  es paralelo a  $BC$ . Determina todos los valores de  $x$ .



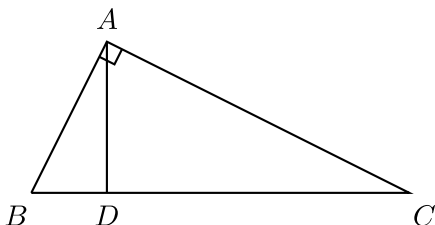
## 1.6. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se conoce como la **hipotenusa**, y a los lados adyacentes al ángulo recto como los **catetos** del triángulo.



El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Para la demostración<sup>7</sup> de este teorema se empleará la semejanza de triángulos.

**1.6.1. Proposición.** *En un triángulo rectángulo ABC, la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él.*



### Demostración:

1. Sea  $AD$  la altura del triángulo  $ABC$  sobre la hipotenusa  $BC$ .
2. El triángulo  $ABC$  es semejante al triángulo  $DBA$  puesto que ambos son triángulos rectángulos y tienen un ángulo común en el vértice  $B$ .
3. También los triángulos rectángulos  $ABC$  y  $DCA$ , son semejantes puesto que el ángulo en el vértice  $C$  es común. Por lo tanto, los dos triángulos rectángulos que dividen al triángulo  $ABC$  son semejantes a él.  $\square$

### OBSERVACIONES:

- De la semejanza entre los triángulos  $ABC$  y  $DBA$ , se sigue que  $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{AB}$ . Por lo tanto,  $AB^2 = DB \cdot CB$ .

<sup>7</sup>A lo largo de la historia han sido muchas las demostraciones (más de 300 pruebas) que matemáticos y amantes de las matemáticas han proporcionado sobre este teorema.

- De la semejanza entre los triángulos  $ABC$  y  $DAC$ , se tiene que  $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$ . Por lo tanto,  $CA^2 = CD \cdot CB$ .

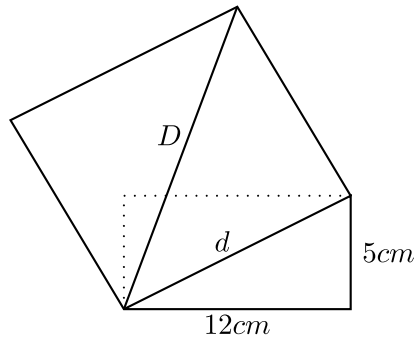
Sumando las dos igualdades anteriores, se tiene:

$$AB^2 + CA^2 = DB \cdot CB + CD \cdot CB = (CD + DB)CB = CB^2.$$

Esto se puede resumir en el siguiente teorema:

**1.6.2. Teorema. (Teorema de Pitágoras)** *En un triángulo rectángulo  $ABC$ , el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

**1.6.3. Ejemplo.** La diagonal de un rectángulo de lados  $5\text{cm}$  y  $12\text{cm}$  es igual al lado de un cuadrado. ¿Cuánto mide la diagonal de ese cuadrado?

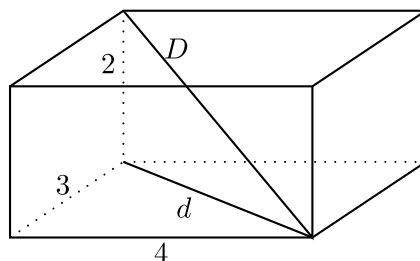


**Solución:**

Primero se determina la longitud de la diagonal  $d$  del rectángulo. Por el teorema de Pitágoras se tiene  $d^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ . Por lo que  $d = \sqrt{169} = 13\text{cm}$ . Ahora, se puede obtener la longitud de la diagonal  $D$  del cuadrado al emplear otra vez el teorema de Pitágoras. Esto es,  $D^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 = 2(13)^2 = 338$ . Se tiene así que  $D = \sqrt{338} \approx 18.38\text{cm}$ . ■

**Actividad 16.** Una escalera de  $10\text{m}$  de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista  $6\text{m}$  de esa pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre esa pared?

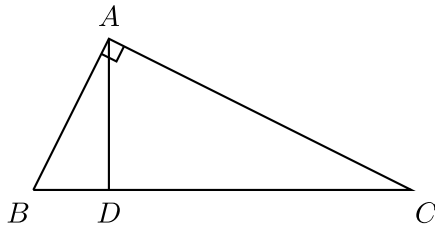
**Actividad 17.** Calcula la longitud de la diagonal  $D$  del ortoedro como se muestra en la figura.



## 1.7. Recíproco del teorema de Pitágoras

**1.7.1. Definición.** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números positivos y  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ , entonces  $b$  es la **media geométrica** o **media proporcional** de  $a$  y  $c$ , es decir,  $b = \sqrt{ac}$ .

**1.7.2. Proposición.** En un triángulo rectángulo  $ABC$ , la altura sobre la hipotenusa, es la media proporcional de los dos segmentos en que se divide la hipotenusa por el pie de la altura.



**Demostración:**

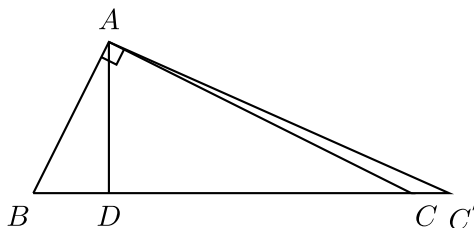
1. Se sabe que el triángulo  $ABC$ , es semejante tanto de  $DBA$  como de  $DCA$ .
2. Por lo tanto, los triángulos rectángulos  $DBA$  y  $DAC$  también son semejantes. Así, se tiene que

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{AD}.$$

3. Despejando  $AD$  de la igualdad anterior, se tiene que  $AD^2 = DB \cdot CD$ , es decir,

$$AD = \sqrt{DB \cdot CD}. \quad \square$$

**1.7.3. Lema.** Sea  $ABC$  un triángulo, donde los ángulos en los vértices  $B$  y  $C$  son menores a  $90^\circ$ , y sea  $D$  el pie de la altura de  $A$  sobre  $BC$ . Si  $AD^2 = BD \cdot DC$ , entonces el triángulo  $ABC$  es rectángulo.

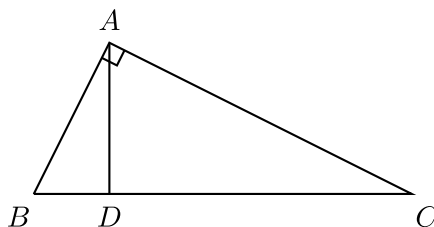


**Demostración:**

1. Se traza la perpendicular a  $AB$  que pasa por  $A$ . Ésta, corta a la recta  $BC$  en un punto  $C'$  (si no fuera el caso, entonces tal recta sería paralela a  $BC$ , resultando que  $B = D$ , por lo que  $AD^2 = BD \cdot DC$  sería falso).

2. Se tiene entonces que el triángulo  $ABC'$  es rectángulo, con ángulo recto en el vértice  $A$ .
3. Por la proporción 1.7.2 se tiene que  $AD^2 = BD \cdot DC'$ .
4. Por otro lado, por hipótesis se tiene que  $AD^2 = BD \cdot DC$ .
5. Se sigue de las dos igualdades anteriores que  $DC' = DC$  y  $C' = C$ . Lo que demuestra que el triángulo  $ABC$  es rectángulo.  $\square$

**1.7.4. Teorema. (Recíproco del teorema de Pitágoras)** *Si en un triángulo rectángulo  $ABC$ , el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.*



**Demostración:**

1. Supongamos que en el triángulo  $ABC$ , se tiene  $BC^2 = AB^2 + CA^2$ .
2. Como  $BC > AB$  y  $BC > CA$ , entonces los ángulos en  $B$  y  $C$  son menores a  $90^\circ$ .
3. Sea  $D$  el pie de la perpendicular de  $A$  sobre  $BC$ . Entonces, los triángulos  $ABD$  y  $ADC$  son rectángulos, con ángulo recto en el vértice  $D$ , y por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad \text{y} \quad CA^2 = AD^2 + DC^2.$$

4. Sumando las dos igualdades anteriores se tiene lo siguiente:

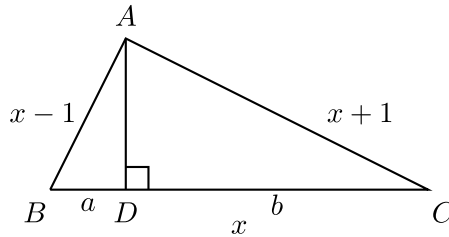
$$\begin{aligned} AB^2 + CA^2 &= BD^2 + 2AD^2 + DC^2 \\ &= BC^2 \\ &= (BD + DC)^2 \\ &= BD^2 + 2BD \cdot DC + DC^2. \end{aligned}$$

5. De esta serie de igualdades, se tiene

$$BD^2 + 2AD^2 + DC^2 = BD^2 + 2BD \cdot DC + DC^2.$$

6. Eliminando términos se tiene que  $AD^2 = BD \cdot DC$ , y por el lema anterior se tiene el resultado.  $\square$

**1.7.5. Ejemplo.** En la siguiente figura, comprueba que  $b - a = 4$ , donde  $a + b = x$ .



**Solución:**

Sea  $h = AD$ . Entonces, por el teorema de Pitágoras se tiene

$$(x + 1)^2 = h^2 + b^2 \quad \text{y} \quad (x - 1)^2 = h^2 + a^2.$$

Despejando  $h^2$  e igualando, se tiene  $(x + 1)^2 - b^2 = (x - 1)^2 - a^2$ . Desarrollando los binomios y simplificando se tiene que  $4x - b^2 = -a^2$ . Cambiando de signo ambos lados y tomando en cuenta que  $a + b = x$ , la igualdad anterior se transforma en

$$b^2 - 4(a + b) = a^2.$$

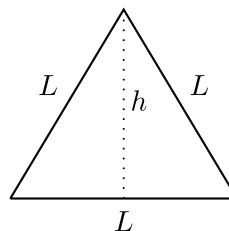
Quitando paréntesis e igualando a cero lo anterior, se tiene  $b^2 - a^2 - 4a - 4b = 0$ . Factorizando la expresión del lado izquierdo, se tiene

$$(b - a)(b + a) - 4(a + b) = (b + a)(b - a - 4) = 0.$$

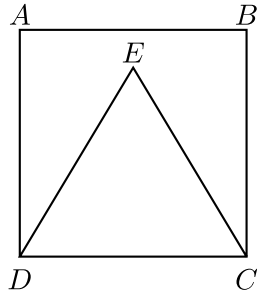
De aquí se deduce que  $b + a = 0$  o  $b - a - 4 = 0$ . Luego,  $b + a = 0$  no puede suceder, por lo tanto,  $b - a - 4 = 0$  y  $b - a = 4$ . ■

**LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 1.6 y 1.7**

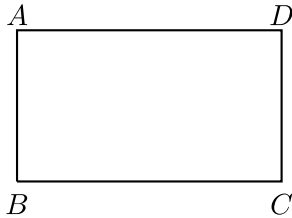
1. En la siguiente figura se representa un triángulo equilátero, en el que la longitud del lado  $L$ , supera  $2\text{cm}$  a la longitud de su altura  $h$ . Calcula el perímetro del triángulo.



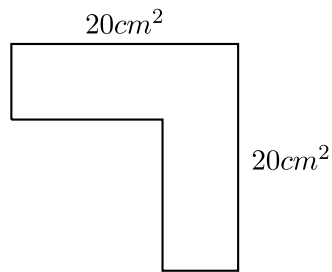
2. En la siguiente figura, la diferencia entre las áreas del cuadrado  $ABCD$  y del triángulo equilátero  $DEC$ , es de  $13\text{cm}^2$ . Calcula el perímetro del triángulo.



3. El rectángulo  $ABCD$ , tiene perímetro de  $24\text{cm}$ , y el largo supera al ancho en  $5\text{cm}$ . Calcula el área del rectángulo.



4. Una escuadra de carpintero con ancho constante, tiene un área de  $111\text{cm}^2$ . Calcula el ancho de la escuadra.



5. Calcula el área de un triángulo isósceles  $ABC$ , donde la base  $BC$  mide  $3\text{cm}$  y la altura  $h$  mide  $4\text{cm}$ .
6. Calcula el área de un triángulo equilátero  $ABC$ , donde la longitud de uno de sus lados mide  $L = 1\text{cm}$ .

## Capítulo 2

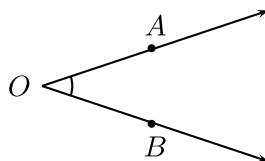
# Trigonometría

### 2.1. Ángulos

La trigonometría se remonta a la antigua ciudad de Babilonia. Es una rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna.

Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas<sup>1</sup> en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo, en el estudio de fenómenos periódicos, como es el de flujo de corriente alterno.

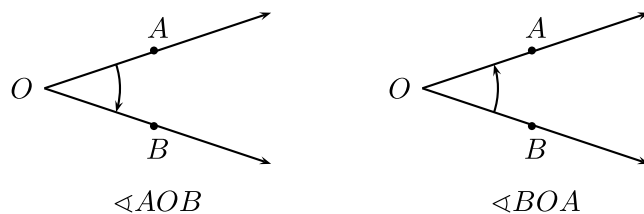
En geometría, un **ángulo** se definió como la parte común de dos semiplanos formados por dos rayos  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$  (**lados del ángulo**), que tienen un punto inicial en común en  $O$ , llamado **vértice**. El ángulo en este caso es  $\sphericalangle AOB$  o  $\sphericalangle BOA$ . De esta forma, no importa qué lado del ángulo se nombra primero.



Sin embargo, para el estudio de la trigonometría, sí importa qué lado del ángulo se nombra primero, es decir, hay distinción entre los ángulos  $\sphericalangle AOB$  y  $\sphericalangle BOA$ . En el ángulo  $\sphericalangle AOB$ ,  $\overrightarrow{OA}$  es el **lado inicial** y  $\overrightarrow{OB}$  el **lado terminal**, mientras que en el ángulo  $\sphericalangle BOA$ ,  $\overrightarrow{OB}$  es el **lado inicial** y  $\overrightarrow{OA}$  el **lado terminal**.

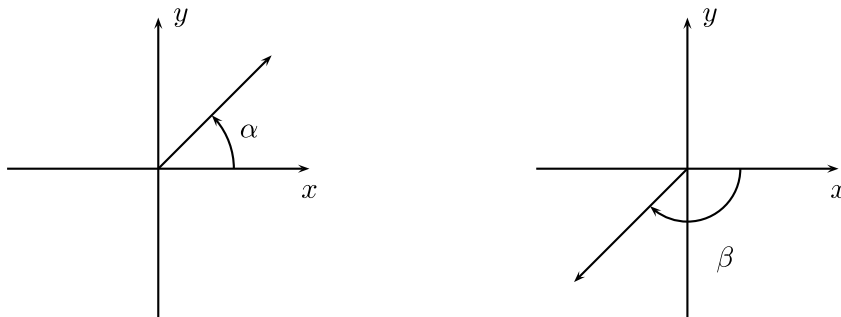
---

<sup>1</sup>Son seis las funciones trigonométricas básicas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Las últimas cuatro están en función de las dos primeras.



Los ángulos  $\sphericalangle AOB$  y  $\sphericalangle BOA$  así definidos, se llaman **ángulos orientados**.

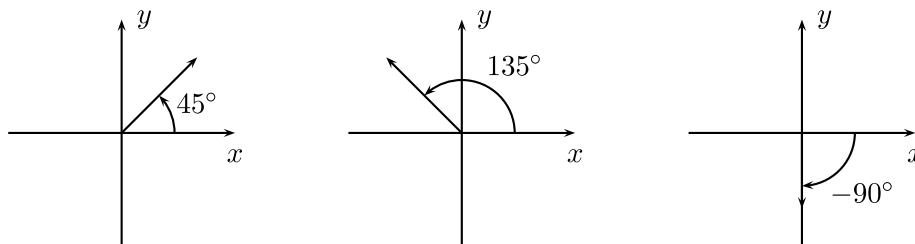
Aquí, se va a considerar un sistema de coordenadas cartesianas para ubicar a un ángulo, donde la posición estándar para el vértice del ángulo será el origen. Si el lado inicial de un ángulo coincide con el eje  $x$  positivo, y éste gira en dirección contraria a las manecillas del reloj hasta la posición del lado terminal del ángulo, entonces tal ángulo se considera **positivo**. Si el lado inicial gira en dirección a las manecillas del reloj hasta la posición del lado terminal del ángulo, entonces dicho ángulo se considera **negativo**. Comúnmente, la notación que se usa para los ángulos, son las letras griegas:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , etcétera.



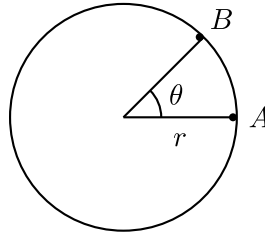
En esta figura, el ángulo  $\alpha$  es positivo, mientras que el ángulo  $\beta$  es negativo.

Una unidad de medida para los ángulos es el **grado**. Para la medida de ángulos en grados, se utiliza el sistema **sexagesimal**, donde grado sexagesimal se entiende como la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

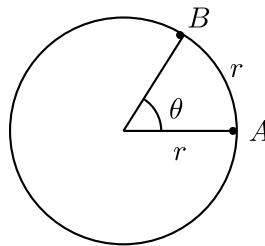
Ejemplos:



La medida en grados para los ángulos, se usa en actividades aplicadas como agrimensura, navegación y diseño de equipo mecánico. En aplicaciones científicas que requieren cálculo, se acostumbra utilizar **radianes**.



En esta figura se tiene una circunferencia de radio  $r$ , con un ángulo central  $\theta$ , cuyo vértice es el centro de la circunferencia. La porción de círculo del punto  $A$  al punto  $B$  se llama **arco**  $AB$ , denotado por  $\widehat{AB}$ . También se dice que el arco  $\widehat{AB}$  **subtiende** el ángulo central  $\theta$ . Si la longitud de  $\widehat{AB}$  es igual al radio  $r$  de la circunferencia, entonces se dice que  $\theta$  mide **un radian**.



**2.1.1. Definición.** *Un radián es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.*

Se puede ver que en cualquier circunferencia de radio  $r$ , caben aproximadamente 6.28 radianes, es decir, el radio de la circunferencia<sup>2</sup> cabe exactamente 6 veces y sobra aproximadamente 0.28. Con lo cual, se tiene la relación

$$360^\circ = 2\pi \approx 6.28 \text{ radianes.}$$

Si se divide entre dos en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene

$$180^\circ = \pi \approx 3.14 \text{ radianes.}$$

Ahora, si se divide ambos miembros entre  $\pi$ , se concluye que

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 1 \text{ radian} \approx 57.2958^\circ.$$

Entonces, hay una relación entre grados y radianes de un ángulo. Para convertir un ángulo  $\theta$  medido en grados a radianes se usa la fórmula:

$$\theta = \theta \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right).$$

Análogamente, si se tiene  $x\pi$  radianes, donde  $x \in \mathbb{R}$ , para convertir a grados, se usa la fórmula:

$$x\pi = x\pi \left( \frac{180^\circ}{\pi} \right) = x \cdot 180^\circ.$$

---

<sup>2</sup>También se puede comprobar que el diámetro  $D$  de una circunferencia de radio  $r$ , cabe en la circunferencia exactamente 3 veces y sobra aproximadamente .1416. Luego, como el diámetro  $D$  es dos veces el radio  $r$ , nuevamente se desprende que el radio cabe en la circunferencia aproximadamente 6.28 veces.

Por ejemplo,

1.  $45^\circ$  a radianes corresponde a:

$$45^\circ = 45^\circ \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

2.  $\frac{5\pi}{6}$  radianes a grados corresponde a:

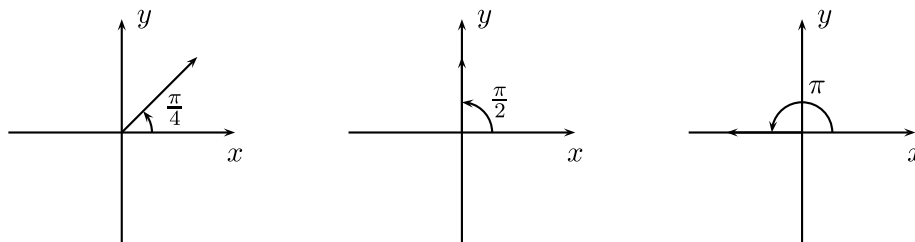
$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \left( \frac{180^\circ}{\pi} \right) = 150^\circ.$$

Esta técnica se puede usar siempre que se quiera hacer una conversión de grados a radianes o viceversa.

La siguiente tabla muestra algunos ángulos con los valores correspondientes a grados y radianes.

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$2\pi$
Grados	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$360^\circ$

Geoméricamente, también se puede mostrar la posición de un ángulo en radianes.



Se ha visto que un ángulo se puede expresar de dos formas: **grados** y **radianes**. Para convertir un ángulo de radianes a grados junto con los minutos y segundos, se debe tener en cuenta que un grado tiene 60 minutos ( $'$ ) y un minuto tiene 60 segundos ( $''$ ).

$$1^\circ = 60' = 3600'' \quad \text{y} \quad 1' = 60''.$$

De la misma forma,

$$1' = \left( \frac{1}{60} \right)^\circ \quad \text{y} \quad 1'' = \left( \frac{1}{60} \right)' = \left( \frac{1}{3600} \right)^\circ.$$

**2.1.2. Ejemplo.** Realiza las siguientes conversiones.

1. Expresa el ángulo  $\theta = 2$  en grados, minutos y segundos.

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 \theta &= 2 \left( \frac{180^\circ}{\pi} \right) \\
 &\approx 114.5915^\circ \\
 &= 114 + (.5915)(60') \\
 &= 114 + 35.49' \\
 &= 114 + 35' + (.49)(60'') \\
 &= 114 + 35' + 29.4'' \\
 &\approx 114^\circ 35' 29''. \blacksquare
 \end{aligned}$$

2. Expresa el ángulo  $110^\circ 25' 24''$  como decimal, al diezmilésimo de grado más cercano.

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 110^\circ 25' 24'' &= 110^\circ + \left( \frac{25}{60} \right)^\circ + \left( \frac{24}{3600} \right)^\circ \\
 &\approx 110^\circ + .4166^\circ + .0066^\circ \\
 &= 110.4232^\circ. \blacksquare
 \end{aligned}$$

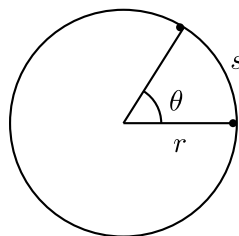
Las calculadoras graficadoras cuentan con funciones que facilitan las conversiones de grados a radianes y viceversa; la conversión de un ángulo que está en radianes, a grados minutos y segundos, y convierte una medida decimal que está en grados, a grados, minutos y segundos. Es importante saber utilizar estas calculadoras para aplicar estos tipos de conversiones.

**2.1.3. Teorema.**

(a) Si un arco de longitud  $s$  de una circunferencia de radio  $r$  subtiende un ángulo central de  $\theta$  radianes, entonces  $s = r\theta$ .

(b) Si  $A$  es el área del sector circular determinado por  $\theta$ , entonces  $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ .

**Demostración:** Consideremos la figura:



(a) Como la longitud de arco es proporcional a su ángulo central, entonces

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1}.$$

De aquí se desprende que  $s = r\theta$ .

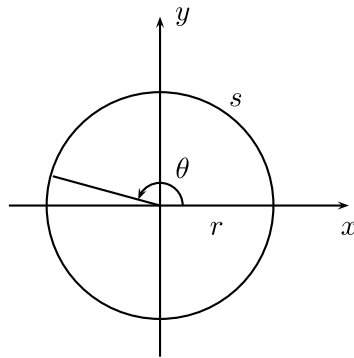
(b) Como el área del sector circular es proporcional a su ángulo central, entonces

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Por lo tanto,  $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ .  $\square$

**2.1.4. Ejemplo.** Si un arco de circunferencia de longitud  $s = 7.5\text{cm}$ , subtiende un ángulo central  $\theta$  de una circunferencia de  $3\text{cm}$  de radio, determina:

- (a) La medida de  $\theta$  en grados.
- (b) El área el sector circular determinado por  $\theta$ .



**Solución:**

- (a) Se sabe que  $s = r\theta$ . Despejando  $\theta$  y sustituyendo los valores respectivos de  $s$  y  $r$ , se tiene

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{7.5}{3} = 2.5.$$

Este es el valor de  $\theta$  en radianes. Entonces, al cambiar a grados se obtiene

$$\theta = 2.5 \left( \frac{180^\circ}{\pi} \right) = \frac{450^\circ}{\pi} \approx 143.24^\circ.$$

- (b) Utilizando la fórmula de área del sector circular y sustituyendo los valores respectivos, se tiene

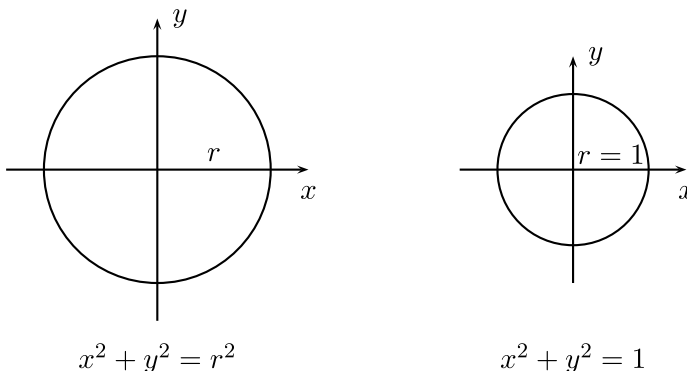
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2(2.5) = 11.25\text{cm}^2. \quad \blacksquare$$

## 2.2. Relaciones trigonométricas de ángulos

Se sabe que la ecuación de la **circunferencia de radio  $r$**  con centro en el origen es:

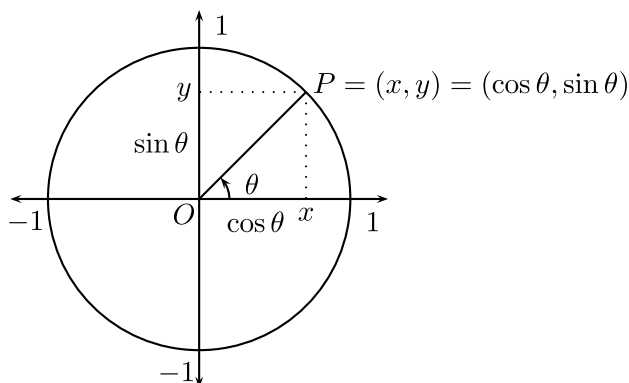
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Cuando  $r = 1$ , la circunferencia se llama **circunferencia unitaria**.



**Nota:** Cualquier punto  $(x, y)$  de la circunferencia de radio  $r$ , **satisface** la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ , y cualquier punto  $(x, y)$  que satisface la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ , es un punto de la circunferencia de radio  $r$ .

Consideremos la siguiente circunferencia unitaria, un punto  $P = (x, y)$  sobre su circunferencia y  $\theta$ , el ángulo formado entre el eje  $x$  al segmento  $OP$ .



**2.2.1. Definición.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces

1. El **coseno** de  $\theta$ , denotado por  $\cos \theta$ , se define como la coordenada  $x$ , es decir,

$$\cos \theta = x.$$

2. El **seno** de  $\theta$ , denotado por  $\sin \theta$ , se define como la coordenada  $y$ , es decir,

$$\sin \theta = y.$$

Esta definición dice que cada coordenada  $(x, y)$  de la circunferencia unitaria, se puede escribir como  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , es decir,

$$(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Por otra parte, se observa que si  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$  es un punto de la circunferencia unitaria para cierto ángulo  $\theta$ , entonces satisface la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . Por lo tanto, se tiene la **identidad fundamental**:<sup>3</sup>

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad (2.1)$$

**2.2.2. Teorema.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

De la identidad fundamental, se obtienen las siguientes igualdades:

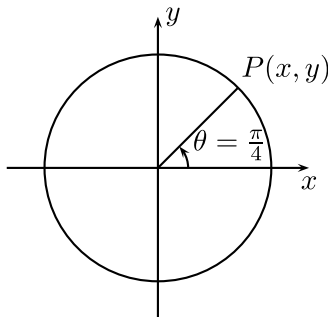
$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \text{y} \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta.$$

Equivalentemente,

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}.$$

**2.2.3. Ejemplo.** Calcula  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , donde  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**Solución:** Para determinar el seno y coseno del ángulo  $\theta$ , se emplea la circunferencia unitaria y se usa la definición anterior.



El ángulo  $\theta = \frac{\pi}{4}$  radianes bisecta el primer cuadrante. Por lo tanto, el punto  $P(x, y)$  se encuentra en la recta  $y = x$ . Como  $P(x, y)$  es un punto de la circunferencia unitaria, satisface la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . Como  $y = x$ , entonces

$$x^2 + x^2 = 1 \quad \text{o} \quad 2x^2 = 1.$$

Al despejar  $x$  y observar que  $x > 0$ , se obtiene  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Así que  $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Por lo tanto,  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ . ■

**Nota:** Para determinar el valor de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  en este ejemplo, bastó con saber las coordenadas del punto  $P$  al ángulo correspondiente  $\theta = \frac{\pi}{4}$  en la circunferencia unitaria.

---

<sup>3</sup>Más adelante mencionaremos otras identidades fundamentales.

**Actividad 18.** Por medio de una circunferencia unitaria, determina los valores de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , donde  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  y  $2\pi$ .

¿Para qué valores de  $\theta$ ,  $\sin \theta = 0$  y  $\cos \theta = 0$ ?

Es claro que  $\sin \theta = 0$ , siempre y cuando se está situado en la coordenada  $(1, 0)$  o  $(-1, 0)$  de la circunferencia unitaria. Pero esto se logra, cuando los valores de  $\theta$  son múltiplos de  $\pi$ , es decir:  $\theta = \dots - 3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , etcétera. Por lo tanto,

$$\sin \theta = 0 \text{ si, y solo si } \theta \in \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}.$$

De la misma forma, para que  $\cos \theta = 0$ , es necesario que se esté situado en el punto  $(0, 1)$  o  $(0, -1)$  de la circunferencia unitaria. Los valores de  $\theta$  donde se cumple esto, son:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$$

Y lo mismo sucede, si los valores anteriores de  $\theta$ , tienen signo negativo. Esto se resume como sigue:

$$\cos \theta = 0 \text{ si, y solo si } \theta \in \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

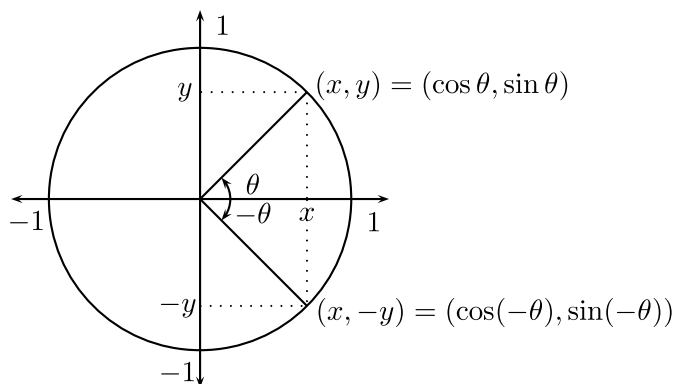
**2.2.4. Proposición.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces

1.  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  y  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$
2.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
3.  $\cos(-\theta) = \cos \theta$
4. Si  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta$  y  $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$ .

**Demostración:**

En el inciso (1), dice que tanto  $\sin \theta$  como  $\cos \theta$  no pueden pasar de  $-1$  y  $1$ , es decir, sus valores siempre oscilarán entre  $-1$  y  $1$  para cualquier valor de  $\theta$ . Esto resulta claro puesto que si  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , es un punto de la circunferencia unitaria, entonces se satisfacen las desigualdades anteriores.

Para comprobar los incisos<sup>4</sup> (2) y (3), se considera la figura:



<sup>4</sup>Cuando se cumple la igualdad del inciso (2), se dice que  $\sin \theta$  es **par**. De igual forma, cuando se cumple la igualdad del inciso (3), se dice que  $\cos \theta$  es **impar**.

Se observa que  $\cos \theta = x$  y  $\cos(-\theta) = x$ . Por lo tanto,  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ .

Por otra parte, también se tiene que  $\sin \theta = y$  y  $\sin(-\theta) = -y$ . De esta última igualdad se puede multiplicar por un signo negativo ambos lados, reduciéndose a  $-\sin(-\theta) = y$ . Por consiguiente, se tiene que  $-\sin(-\theta) = \sin(\theta)$ . Esto último es equivalente a

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta,$$

y se concluye la comprobación de los dos incisos.

El inciso (4) se cumple, puesto que si el ángulo  $\theta$  se le suma  $2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces se regresa a la misma posición del ángulo y por consiguiente al punto  $(x, y)$ . De esta forma se cumplen las dos igualdades.  $\square$

**Nota:** Las propiedades del inciso (4), se expresan diciendo que  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  son **funciones periódicas** de periodo  $2\pi$ .

**2.2.5. Definición.** Sean  $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}$  y  $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ . Se definen las funciones:

(a) *Función tangente:*  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ; donde  $\theta \in D_1$

(b) *Función cotangente:*  $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ ; donde  $\theta \in D_2$

(c) *Función secante:*  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ ; donde  $\theta \in D_1$

(d) *Función cosecante:*  $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ ; donde  $\theta \in D_2$ .

**Nota:** estas funciones tienen periodo  $2\pi$ . Más aún,  $\pi$  es un periodo para  $\tan \theta$  y  $\cot \theta$ , puesto que:

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\sin(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta.$$

De igual forma,  $\cot(\theta + \pi) = \cot \theta$ .

**Actividad 19.** Completa todos los pasos para comprobar que en efecto:

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta \quad \text{y} \quad \cot(\theta + \pi) = \cot \theta.$$

**2.2.6. Proposición.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces

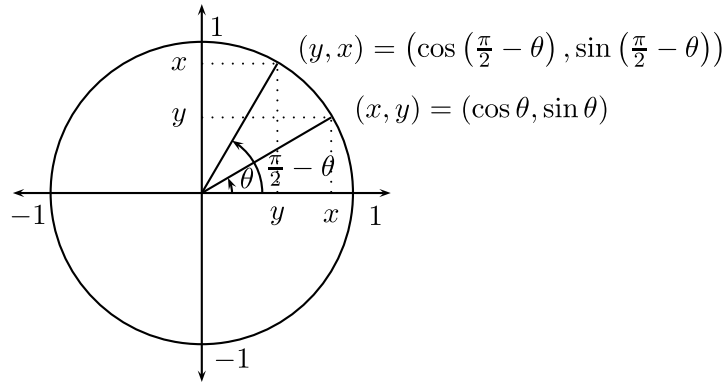
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$  y  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

- $\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2$

3.  $\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \sin \theta_2 \cos \theta_1$ .

**Demostración:**

Para comprobar el inciso (1), se considera la figura:



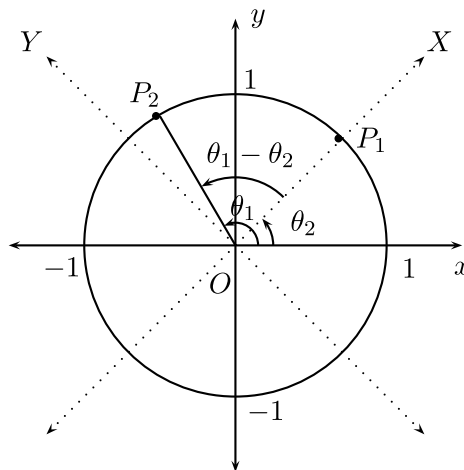
Se observa que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta.$$

(2) Primero se comprueba que

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Consideremos la figura:



Se sabe que  $P_1 = (x_1, y_1) = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$  y  $P_2 = (x_2, y_2) = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ . La distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  es:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, se tiene

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 \\
 &= \cos^2 \theta_1 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \\
 &= 1 + 1 - 2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\
 &= 2 - 2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2).
 \end{aligned}$$

Ahora, se rotan los ejes  $x$  y  $y$  de tal modo que el eje  $x$  coincida con el rayo  $OP_1$ . Es claro que la longitud de  $P_1$  a  $P_2$  no cambia; sin embargo, las coordenadas de  $P_1$  y  $P_2$  con respecto a los nuevos ejes  $X$  y  $Y$  son:

$$P_1 = (x'_1, y'_1) = (1, 0) \quad \text{y} \quad P_2 = (x'_2, y'_2) = (\cos(\theta_1 - \theta_2), \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Por lo que la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  es:

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \\
 &= \sqrt{(\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1)^2 + (\sin(\theta_1 - \theta_2) - 0)^2}.
 \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1)^2 + (\sin(\theta_1 - \theta_2) - 0)^2 \\
 &= \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \\
 &= 1 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 1 \\
 &= 2 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2).
 \end{aligned}$$

Por lo que al comparar los dos resultados para  $d^2$ , se tiene que

$$2 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 2 - 2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2).$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Ahora es fácil comprobar que  $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$ . Se observa que

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1 - (-\theta_2)) \\
 &= \cos \theta_1 \cos(-\theta_2) + \sin \theta_1 \sin(-\theta_2) \\
 &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Con esto se comprueba el inciso (2) de la proposición. Es decir:

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Para comprobar el inciso (3), primero se observa que:

$$\begin{aligned}
 \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \theta_2)\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 - \theta_2\right) \\
 &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) - \theta_2\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) \cos \theta_2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) \sin \theta_2 \\
 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sin(\theta_1 - \theta_2) &= \sin(\theta_1 + (-\theta_2)) \\
 &= \sin \theta_1 \cos(-\theta_2) + \cos \theta_1 \sin(-\theta_2) \\
 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2.
 \end{aligned}$$

Finalmente, juntando las dos igualdades anteriores de  $\sin(\theta_1 + \theta_2)$  y  $\sin(\theta_1 - \theta_2)$ , se tiene que:

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \sin \theta_2 \cos \theta_1. \quad \square$$

**2.2.7. Ejemplo.** Comprueba las siguientes igualdades para la suma y diferencia de ángulos en la función tangente.

1.  $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}$
2.  $\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$ .

**Solución:**

(1) Se empieza desarrollando la parte derecha de la igualdad, y con una serie de pasos verdaderos, se comprueba que es equivalente a la parte izquierda.

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} &= \frac{\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} + \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2}}{1 - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}} = \frac{\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}}{\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}} \\
 &= \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2} \\
 &= \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} = \tan(\theta_1 + \theta_2). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Actividad 20.** Comprueba el inciso (2) del ejemplo 2.2.7.

De las identidades de la Proposición 2.2.6, se deducen las así llamadas **identidades del ángulo doble** e **identidades del ángulo mitad**. Estos se enuncian en el siguiente teorema:

**2.2.8. Teorema.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$1. \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$2. \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$3. \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$4. \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$5. \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$6. \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$7. \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$8. \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

**Demostración:** (1) Para comprobar esta propiedad, se descompone  $2\theta = \theta + \theta$ , y se aplica la propiedad (2) de la proposición 2.2.6. Así,

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

(2) Se deja como ejercicio para el lector.

(3) Se desprende inmediatamente del primer inciso. Esto es,

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

(4) Se comprueba igual que el inciso (1), es decir,  $2\theta = \theta + \theta$  y se aplica la igualdad (3) de la proposición 2.2.6.

(5) Para la comprobación de este inciso, se observa que

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (\cos 2\theta + \sin^2 \theta) = 1 - \cos 2\theta - \sin^2 \theta.$$

Luego, se tiene que  $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ . Por lo tanto,

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

(6) Se deja como ejercicio.

(7) Se aplica el inciso (6), sustituyendo en  $\theta$  por  $\frac{\theta}{2}$ .

(8) Se aplica el inciso (5), sustituyendo en  $\theta$  por  $\frac{\theta}{2}$ .  $\square$

También se puede obtener un resultado para el ángulo doble y mitad en la función tangente. Se observa que

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} &= \frac{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}.$$

Por otra parte, no es difícil comprobar que

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Existen tres **identidades fundamentales**, de las cuales, la primera ya se había mencionado. Estas son:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta.$$

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta.$$

La segunda identidad fundamental es cierta, puesto que

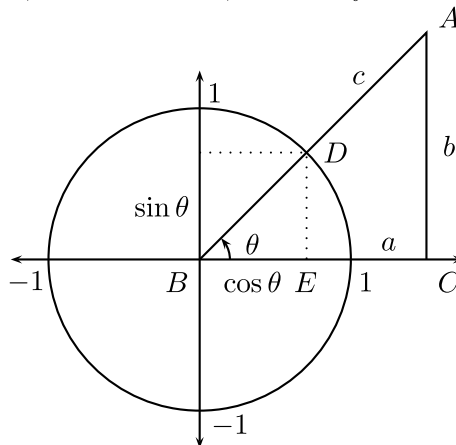
$$\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta.$$

De la misma forma se comprueba la tercera identidad fundamental, y se deja como ejercicio para el lector.

### 2.3. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Ahora se estudiará la trigonometría usual de triángulos rectángulos, en la que se habla de senos y cosenos de ángulos. La importancia de esta sección, es que se verá la relación que hay entre las razones trigonométricas de ángulos y el triángulo rectángulo.

Consideremos la siguiente figura, donde  $AB = c$ ,  $BC = a$  y  $AC = b$ .



Se observa que los triángulos  $ABC$  y  $DBE$  son semejantes. Por consiguiente, se tiene la proporción  $\frac{c}{BD} = \frac{b}{DE}$ , que es equivalente a  $\frac{DE}{BD} = \frac{b}{c}$ . Como  $BD = 1$ , entonces

$$DE = \frac{b}{c} = \frac{\text{Cateto opuesto a } \theta}{\text{Hipotenusa}}.$$

Por otra parte, se sabe que  $\sin \theta = DE$ . Así, se tiene que

$$\sin \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{DE}{BD}.$$

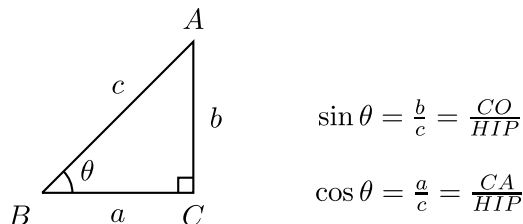
También se cumple la proporción  $\frac{c}{BD} = \frac{a}{BE}$ , que es equivalente a  $\frac{BE}{BD} = \frac{a}{c}$ . Luego, como  $BD = 1$ , entonces

$$BE = \frac{a}{c} = \frac{\text{Cateto adyacente a } \theta}{\text{Hipotenusa}}.$$

Por otra parte, se sabe que  $BE = \cos \theta$ . Por lo tanto,

$$\cos \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{BE}{BD}.$$

**2.3.1. Definición.** Dado un triángulo rectángulo  $ABC$ , se tienen las siguientes relaciones:



Donde:  $CO$  = Cateto Opuesto,  $CA$  = Cateto Adyacente e  $HIP$  = Hipotenusa.

Considerando el mismo triángulo, se pueden también definir las funciones:  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  y  $\csc \theta$ , como sigue:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{CO}{HIP}}{\frac{CA}{HIP}} = \frac{CO}{CA} = \frac{b}{a}.$$

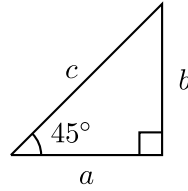
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{CO}{HIP}} = \frac{HIP}{CO} = \frac{c}{b}.$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\frac{CA}{HIP}} = \frac{HIP}{CA} = \frac{c}{a}.$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{CA}{HIP}}{\frac{CO}{HIP}} = \frac{CA}{CO} = \frac{a}{b}.$$

**2.3.2. Ejemplo.** Halle los valores trigonométricos de  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $60^\circ$ .

**Solución:** Consideremos el siguiente triángulo rectángulo, cuyos lados en los catetos miden  $a = 1$ ,  $b = 1$  e hipotenusa  $c$ .



Por el teorema de Pitágoras, se tiene que  $c^2 = a^2 + b^2$ . Sustituyendo los valores de  $a$ ,  $b$  y reduciendo, se tiene  $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ . Por lo que  $c = \sqrt{2}$ . Entonces,

$$\sin 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

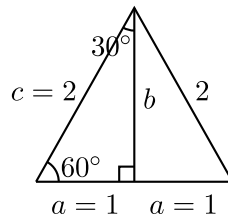
$$\cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1.$$

Para hallar los valores trigonométricos de  $\theta = 30^\circ$  y  $\theta = 60^\circ$ , se dibuja un triángulo equilátero de lados de longitud 2.



Aplicando el teorema de Pitágoras, se determina que  $b = \sqrt{3}$ . De esta forma, los valores trigonométricos de  $\theta = 60^\circ$  son:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

De la misma forma, los valores trigonométricos de  $\theta = 30^\circ$  son:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

**2.3.3. Ejemplo.** Determina  $\sin 75^\circ$  y  $\cos 75^\circ$ .

**Solución:**

Se observa que  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ . Como  $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

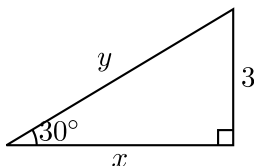
Notemos que para determinar estos valores, se tuvo que recurrir a las propiedades de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  de la Proposición 2.2.6, incisos (2) y (3). ■

**Actividad 21.** Determina  $\sin 15^\circ$  y  $\cos 15^\circ$ . Observa que  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

Se resumen los valores trigonométricos del ejemplo 2.3.2 en una tabla para una referencia posterior, ya que se presentan con frecuencia en las aplicaciones.

$\theta$ (radianes)	$\theta$ (grados)	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
$\frac{\pi}{6}$	$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

**2.3.4. Ejemplo.** En el siguiente triángulo, determina los valores de los lados que faltan.



**Solución:**

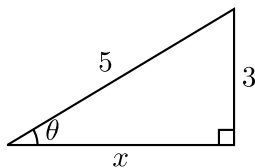
$$\sin 30^\circ = \frac{3}{y}, \text{ entonces } y = \frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{1/2} = 6.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{y} = \frac{x}{6}, \text{ entonces } x = 6 \cos 30^\circ = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

**2.3.5. Ejemplo.** Supón que  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ . Calcula los valores de las otras funciones trigonométricas y el ángulo  $\theta$ .

**Solución:**

Como  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ , entonces el cateto opuesto e hipotenusa del triángulo rectángulo en el ángulo  $\theta$ , tienen valores 3 y 5 respectivamente. Así, se tiene la siguiente situación:



Para encontrar  $x$ , el cateto adyacente, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

De esta forma, se tiene que

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \tan \theta = \frac{3}{4}, \quad \csc \theta = \frac{5}{3},$$

$$\sec \theta = \frac{5}{4} \quad \text{y} \quad \cot \theta = \frac{4}{3}. \quad \blacksquare$$

**Nota:** Para determinar el valor del ángulo  $\theta$ , uno se puede auxiliar de una calculadora como sigue:

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \text{entonces} \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{4}{5} \right) \approx 36.86^\circ.$$

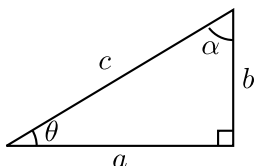
En lugar de  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ , se pudo haber empleado también cualquiera de las otras razones trigonométricas que se calcularon, llegando exactamente al mismo resultado. Por ejemplo, si se hubiera elegido la tangente, se tendría

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \quad \text{entonces} \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{3}{4} \right) \approx 36.86^\circ.$$

**Nota 1:** La notación  $\cos^{-1}$  o  $\tan^{-1}$ , hace referencia a la función **inversa** del coseno y tangente, respectivamente. En la sección 2.5, se estudiará con detalle la inversa de cada una de las razones trigonométricas para una mayor comprensión.

**Nota 2:** Algunas calculadoras tienen una tecla marcada como  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  o  $\tan^{-1}$  que ayudan a resolver el problema de encontrar el valor del ángulo que se esté buscando; en otras, puede requerirse otra tecla o una secuencia de tecleo como *inv* – sin, *inv* – cos o *inv* – tan (se debe consultar el manual de usuario de la calculadora).

**2.3.6. Ejemplo.** En el siguiente triángulo rectángulo,  $b = 4\text{cm}$  es el valor de un cateto y  $c = 6\text{cm}$ , la hipotenusa. Determina el valor del otro cateto y los ángulos agudos  $\theta$  y  $\alpha$ .



**Solución:**

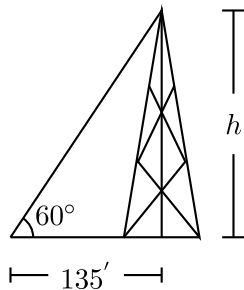
Por el teorema de Pitágoras, se tiene que  $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$ . Por lo tanto,  $a \approx 4.47\text{cm}$ . Luego,

$$\sin \theta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \text{entonces} \quad \theta = \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \approx 41.81^\circ.$$

Ahora, se puede emplear por ejemplo el coseno para determinar el ángulo  $\alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \text{entonces} \quad \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \approx 48.18^\circ. \quad \blacksquare$$

**2.3.7. Ejemplo.** Desde un punto al nivel del suelo y a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es de  $60^\circ$ . Calcula la altura de la torre.



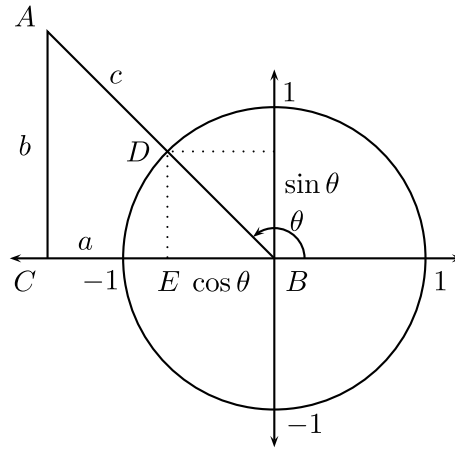
**Solución:**

Se observa que conviene aplicar la función trigonométrica  $\tan \theta$ , puesto que involucra la altura  $h$  y el lado adyacente 135 pies del ángulo  $\theta = 60^\circ$ . De esta manera, se tiene

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{135}.$$

Despejando  $h$  se tiene  $h = 135 \tan 60^\circ = 135 (\sqrt{3}) \approx 233.82$  pies.  $\blacksquare$

Se ha aprendido a obtener los valores trigonométricos de un ángulo  $\theta$  en un triángulo rectángulo, donde  $0 < \theta < 90^\circ$ . ¿Qué pasa cuando el ángulo  $\theta$  es mayor a  $90^\circ$ ? Consideremos la siguiente figura:



Los triángulos  $ABC$  y  $DBE$  son semejantes. De acuerdo con esto se tienen las siguientes proporciones:

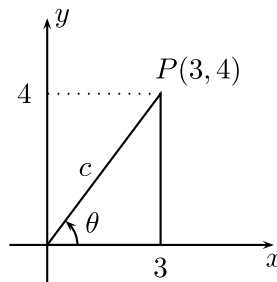
$$\frac{a}{\cos \theta} = \frac{c}{1} \quad \text{entonces} \quad \cos \theta = \frac{a}{c}.$$

$$\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{1} \quad \text{entonces} \quad \sin \theta = \frac{b}{c}.$$

Se tiene entonces que para calcular las razones trigonométricas del ángulo  $\theta$  cuando  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , el triángulo rectángulo a considerar es  $ABC$ .

**2.3.8. Ejemplo.** Calcula las razones trigonométricas del ángulo  $\theta$  en el punto  $P$  donde se indica.

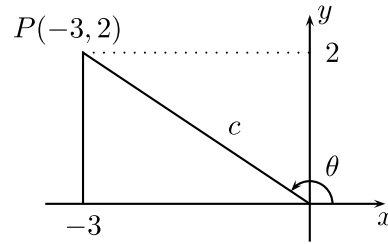
1.  $P = (3, 4)$ .



**Solución:** Por el teorema de Pitágoras, se tiene que  $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ . Entonces,

$$\begin{array}{lll} \sin \theta = \frac{4}{5} & \cos \theta = \frac{3}{5} & \tan \theta = \frac{4}{3} \\ \csc \theta = \frac{5}{4} & \sec \theta = \frac{5}{3} & \cot \theta = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare \end{array}$$

2.  $P = (-3, 2)$ .

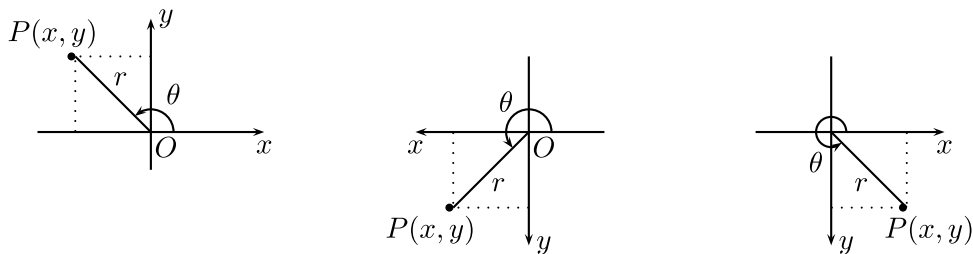


**Solución:** Por el teorema de Pitágoras, se tiene que  $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ . Las razones trigonométricas de  $\theta$  son:

$$\begin{array}{lll} \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}} & \cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{13}} & \tan \theta = -\frac{2}{3} \\ \csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{2} & \sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{-3} & \cot \theta = -\frac{3}{2}. \quad \blacksquare \end{array}$$

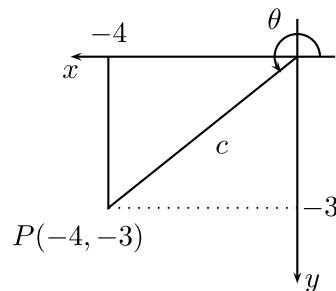
También se pueden obtener las razones trigonométricas de cualquier punto  $P = (x, y)$  cuando éste se encuentra en el tercero o cuarto cuadrante. En este caso, el ángulo  $\theta$  oscila entre  $180^\circ$  y  $270^\circ$  o de  $270^\circ$  a  $360^\circ$  respectivamente.

**2.3.9. Definición.** Consideremos las siguientes figuras, donde  $P = (x, y)$  es un punto del plano cartesiano,  $\theta$  el ángulo cuyo lado terminal es  $OP$  y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , la longitud de  $OP$ , entonces los valores de las razones trigonométricas son como sigue:



$$\begin{array}{lll} \sin \theta = \frac{y}{r} & \cos \theta = \frac{x}{r} & \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \\ \csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) & \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) & \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0). \end{array}$$

**2.3.10. Ejemplo.** Calcula las razones trigonométricas de  $\theta$ , si  $P = (-4, -3)$ .



**Solución:** Por el teorema de Pitágoras, se tiene que  $c = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ . Por lo tanto,

$$\begin{array}{lll} \sin \theta = \frac{-3}{5} & \cos \theta = \frac{-4}{5} & \tan \theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \\ \csc \theta = \frac{5}{-3} & \sec \theta = \frac{5}{-4} & \cot \theta = \frac{4}{3}. \quad \blacksquare \end{array}$$

**Actividad 22.** Calcula las razones trigonométricas de  $\theta$ , si  $P = (2, -3)$ .

**2.3.11. Ejemplo.** Supongamos que  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ , donde  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ . Calcula las razones trigonométricas restantes del ángulo  $\theta$ .

**Solución:**

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \frac{4}{5}.$$

Como  $\theta$  está en el segundo cuadrante,  $\cos \theta$  tiene signo negativo, por lo tanto,

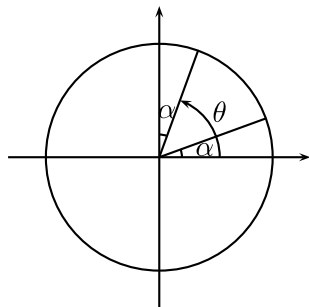
$$\cos \theta = -\frac{4}{5}.$$

Luego,

$$\tan \theta = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

Para concluir con esta sección, proporcionaremos algunas técnicas que son importantes considerar para el cálculo de ciertas razones trigonométricas de ángulos. Más adelante, también veremos que éstas se emplean regularmente cuando se desea escribir una expresión a otra equivalente o para simplificar expresiones que involucren estas igualdades.

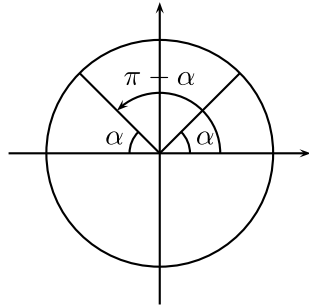
### 1. Ángulos complementarios ( $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ).



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

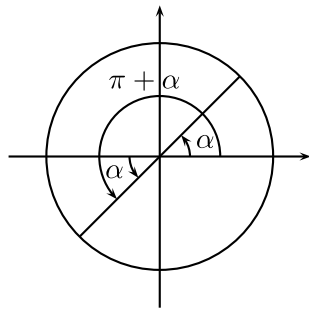
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$$

2. **Ángulos suplementarios.**

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

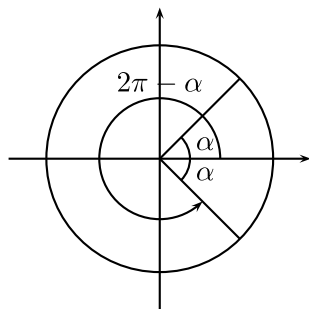
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

3. **Ángulos que difieren en 180°.**

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

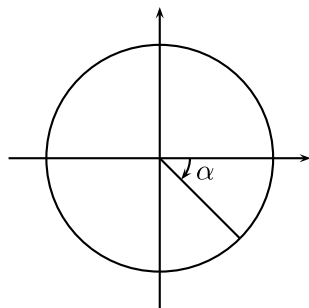
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

4. **Ángulos opuestos.**

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

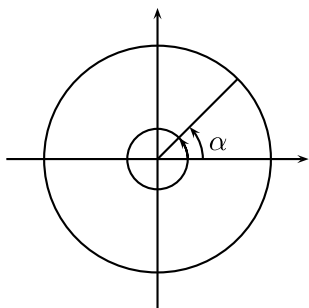
5. **Ángulos negativos.**

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

6. **Ángulos mayores de 360°.**

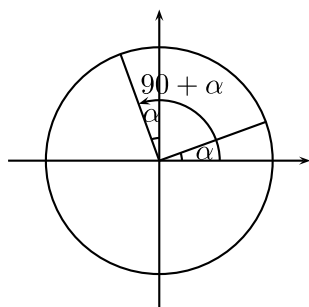


$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha; \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha.$$

7. Ángulos que difieren en  $90^\circ$ .

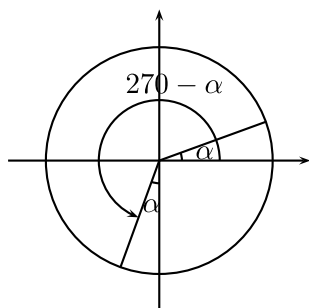


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha.$$

8. Ángulos que suman en  $270^\circ$ .

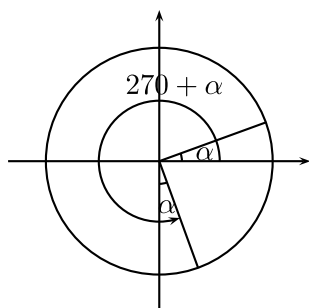


$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$$

9. Ángulos que difieren en  $270^\circ$ .



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha.$$

**2.3.12. Ejemplo.** Calcula las razones trigonométricas de los ángulos:  $330^\circ$ ,  $765^\circ$  y  $300^\circ$ .

**Solución:**

Para el ángulo  $330^\circ$ , se escribe  $330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$ . Utilizando la conversión de los **ángulos opuestos**, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sin 330^\circ &= \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cos 330^\circ &= \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 330^\circ &= \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Para el ángulo  $765^\circ$ , se escribe  $765^\circ = 2(360^\circ) + 45^\circ$ . De esta forma se puede utilizar la conversión de los **ángulos mayores de  $360^\circ$** , obteniéndose:

$$\begin{aligned}\sin 750^\circ &= \sin(2(360^\circ) + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 750^\circ &= \cos(2(360^\circ) + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 750^\circ &= \tan(2(360^\circ) + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1.\end{aligned}$$

Por último, se observa que  $300^\circ = 270^\circ + 30^\circ$ . Aquí se puede emplear la conversión de los **ángulos que difieren en  $270^\circ$** , para obtener:

$$\begin{aligned}\sin 300^\circ &= \sin(270^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 300^\circ &= \cos(270^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \tan 300^\circ &= \tan(270^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

### LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 2.1, 2.2 y 2.3

1. Expresa en radianes los siguientes ángulos.

$$316^\circ, \quad 10^\circ, \quad 127^\circ, \quad 100^\circ, \quad \text{y} \quad 72^\circ.$$

2. Expresa en grados los siguientes ángulos.

$$\frac{11\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{-7\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{9} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{16}.$$

3. Si un arco de circunferencia de longitud  $s$  subtiende el ángulo central  $\theta$  en un círculo, halla el radio de la circunferencia, si

a)  $s = 10\text{cm}$ ;  $\theta = 4$

b)  $s = 3\text{km}$ ;  $\theta = 20^\circ$ .

4. a) Indica los radianes y grados del ángulo central  $\theta$  subtendido por el arco de longitud  $s$  en una circunferencia de radio  $r$ , donde

1)  $s = 7\text{cm}$ ;  $r = 4\text{cm}$

2)  $s = 3$  pies;  $r = 20$  pulgadas.

b) Determina el área del sector determinado por  $\theta$ .

5. Determina la longitud de arco que subtiende el ángulo central  $\theta$  de una circunferencia de diámetro  $d$  y halla el área del sector determinado por  $\theta$ , si

a)  $\theta = 50^\circ$ ;  $d = 16\text{cm}$

b)  $\theta = 2.2$ ;  $d = 120\text{cm}$ .

6. La distancia entre dos puntos  $A$  y  $B$  en la tierra se mide a lo largo de una circunferencia cuyo centro es  $C$ , situado en el centro del globo, donde el radio es igual a la distancia de  $C$  a la superficie. Si el diámetro del planeta es aproximadamente de 8000 millas, calcula la distancia entre  $A$  y  $B$ , si  $\sphericalangle ACB$  mide:

a)  $60^\circ$

b)  $10^\circ$ .

7. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos:

$$225^\circ, \quad 330^\circ, \quad 2655^\circ, \quad -840^\circ, \quad -150^\circ \quad \text{y} \quad 1740^\circ.$$

8. Calcula las otras razones trigonométricas, si

a)  $\cos \theta = \frac{1}{4}$  y  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

b)  $\tan \theta = 2$  y  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

c)  $\sec \theta = 2$  y  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

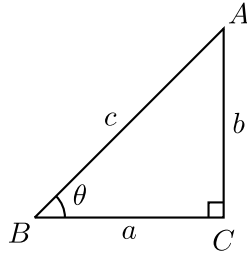
9. Comprueba las siguientes identidades trigonométricas:

a)  $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \csc \theta$

b)  $\cot \theta \sec \theta = \csc \theta$

c)  $\sec^2 \theta + \csc^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$ .

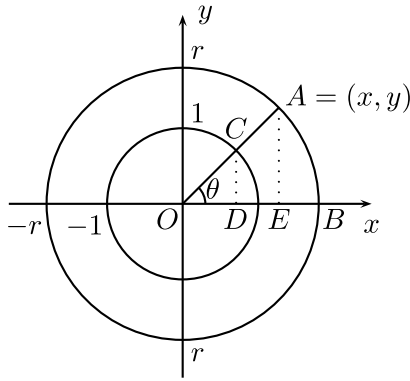
10. En el siguiente triángulo rectángulo  $ABC$ , determina los lados faltantes o el ángulo  $\theta$ , según corresponda, si



- a)  $c = 5\text{cm}$  y  $\theta = 41.7^\circ$
- b)  $b = 3\text{cm}$  y  $\theta = 54.6^\circ$
- c)  $b = 4\text{cm}$  y  $c = 6\text{cm}$ .
11. Un árbol de  $50\text{m}$  de alto proyecta una sombra de  $60\text{m}$  de largo. Encuentra el ángulo de elevación del sol en ese momento.
12. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de  $30^\circ$  y si nos acercamos  $10\text{m}$ , bajo un ángulo de  $60^\circ$ .
13. Un dirigible que está volando a  $800\text{m}$  de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de  $12^\circ$ . ¿A qué distancia del pueblo se halla?
14. Calcula el área de una parcela triangular, sabiendo que sus lados miden  $80\text{m}$  y  $130\text{m}$ , y forman entre ellos un ángulo de  $70^\circ$ .
15. Tres pueblos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , están unidos por carreteras rectas. La distancia de  $A$  a  $C$  es de  $6\text{km}$ , mientras que de  $B$  a  $C$  es de  $9\text{km}$ . El ángulo que forman estas carreteras es de  $120^\circ$ . ¿Cuánto distan  $A$  y  $B$ ?
16. Calcula el radio de una circunferencia, sabiendo que una cuerda de  $24.6\text{cm}$ , tiene como arco correspondiente uno de  $70^\circ$ .

## 2.4. Ley de senos y cosenos

Las leyes seno y coseno se aplican para resolver problemas relacionados con los triángulos. En particular, la ley de los cosenos es una generalización del teorema de Pitágoras. Primero se verá que si  $A$  un punto de la circunferencia con centro en el origen y de radio  $r$ , donde  $\sphericalangle AOB = \theta$  y  $B = (0, r)$ , entonces las coordenadas de  $A$  están dadas por  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Consideremos la siguiente figura:



Sea  $C$  el punto de intersección de la recta  $OA$  con el círculo unitario. Entonces,

$$C = (\cos \theta, \sin \theta).$$

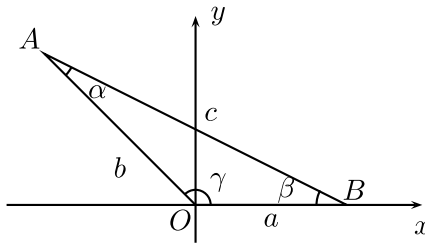
Por otro lado, se tiene que los triángulos  $COD$  y  $AOE$  son semejantes. Por lo tanto,

$$\frac{r}{1} = \frac{y}{\sin \theta} \quad \text{y} \quad \frac{r}{1} = \frac{x}{\cos \theta}.$$

De aquí, se deduce que  $y = r \sin \theta$  y  $x = r \cos \theta$ . Por lo tanto,  $A = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

Una famosa relación que se llama **Ley de los cosenos** puede obtenerse ahora fácilmente:

Consideremos un triángulo oblicuo  $AOB$ , cuyos lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente y  $\sphericalangle AOB = \gamma$ , como en la siguiente figura:



El vértice  $O$  del triángulo  $AOB$  coincide con el origen, y el eje  $x$ , con el lado  $OB$ . Entonces,  $A$  estará en una circunferencia de radio  $b$  y con centro en el origen. Por lo tanto, las coordenadas de  $A$  son:

$$A = (b \cos \gamma, b \sin \gamma).$$

Por otro lado, las coordenadas de  $B$ , son  $(a, 0)$ .

Por la fórmula de la distancia entre los puntos de  $A$  a  $B$ , se tiene

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b \cos \gamma)^2 + (-b \sin \gamma)^2 \\ &= a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma \\ &= a^2 + b^2(\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) - 2ab \cos \gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene la relación (Ley de los cosenos):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

De la misma forma, se puede comprobar (intercambiando  $\alpha$  y  $\beta$  por  $\gamma$ ) que

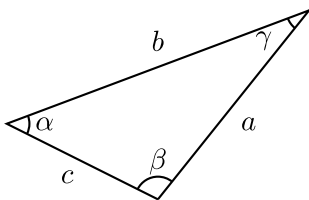
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Las aplicaciones que tiene la ley de los cosenos para determinar el valor de todos sus ángulos y lados de un triángulo, son:

- (a) Cuando se conocen los tres lados
- (b) Cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman.

**2.4.1. Ejemplo.** Resuelve<sup>5</sup> el siguiente triángulo donde  $a = 1200m$ ,  $c = 700m$  y  $\beta = 108^\circ$ .



**Solución:**

En este caso, se conocen dos lados:  $a$  y  $c$ , y el ángulo que forman:  $\beta$ . Esto permite conocer el tercer lado. La fórmula a utilizar es  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ . Entonces

$$b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2(1200)(700) \cos 108^\circ} = 1564.97m.$$

Con esta información se puede calcular el valor del ángulo  $\gamma$ . La fórmula a utilizar es  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ . De aquí, se obtiene

$$\cos \gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}.$$

Sustituyendo los valores respectivos, se obtiene

$$\cos \gamma = \frac{700^2 - 1200^2 - (1564.97)^2}{-2(1200)(1564.97)} \approx 0.905.$$

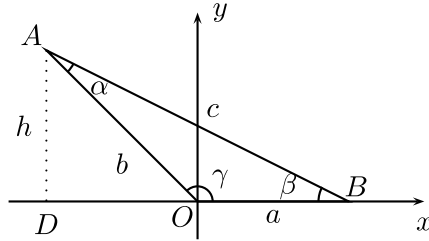
Finalmente, se concluye que  $\gamma = \cos^{-1} 0.90 \approx 25.176^\circ$ . Ahora es fácil calcular el valor del ángulo  $\alpha$ :

$$\alpha = 180^\circ - (108^\circ + 25.176^\circ) = 46.82^\circ. \quad \blacksquare$$

---

<sup>5</sup>Resolver un triángulo significa determinar la longitud de sus lados y valor de sus ángulos desconocidos a partir de ciertos datos conocidos del triángulo, que generalmente son tres.

Hay otra relación llamada **Ley de los senos**, que al igual que la ley de los cosenos, permite determinar los lados y ángulos faltantes de un triángulo cuando se conocen ciertos datos de dicho triángulo. Consideremos el siguiente triángulo oblicuo  $AOB$ :



Supongamos que los lados del triángulo  $AOB$  miden:  $AB = c$ ,  $OB = a$  y  $AO = b$ . Sea  $CD$  la perpendicular con el eje  $x$ , y  $h$  la longitud de  $AD$ . Se tiene que

$$\sin \gamma = \frac{h}{b}, \quad \text{entonces} \quad h = b \sin \gamma.$$

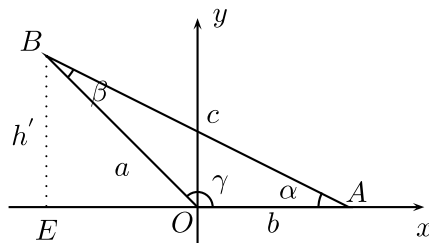
En el triángulo rectángulo  $ADB$  también se tiene

$$\sin \beta = \frac{h}{c}, \quad \text{entonces} \quad h = c \sin \beta.$$

De las dos expresiones de  $h$ , se concluye que  $c \sin \beta = b \sin \gamma$ . Entonces,

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Ahora, si se hace coincidir el eje  $x$  con el lado  $OA$ , se tiene la siguiente situación:



$$\sin \gamma = \frac{h'}{a} \quad \text{entonces} \quad h' = a \sin \gamma$$

$$\sin \alpha = \frac{h'}{c} \quad \text{entonces} \quad h' = c \sin \alpha.$$

Comparando las dos expresiones de  $h'$ , se concluye que  $c \sin \alpha = a \sin \gamma$ . De aquí, se sigue que

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Por lo tanto,

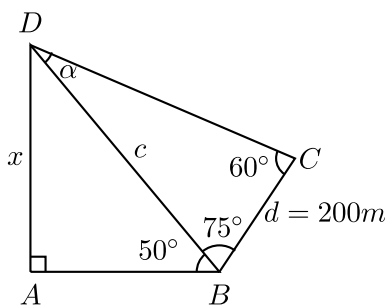
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Esta última relación es lo que se denomina: **ley de los senos**.

La ley de los senos se aplica para determinar todos los lados y ángulos faltantes de un triángulo, cuando:

- (a) Se conocen dos ángulos y un lado
- (b) Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

**2.4.2. Ejemplo.** Con los datos que se dan en la siguiente figura, calcula la longitud del lado  $AD$ .



**Solución:**

1. Se calcula el ángulo  $\alpha$ :  $\alpha = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ .
2. En el triángulo  $BCD$  se aplica la ley de los senos para determinar  $c$ .

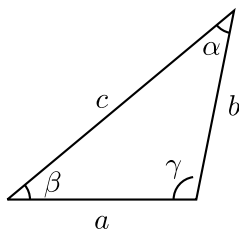
$$\frac{\sin 60^\circ}{c} = \frac{\sin 45^\circ}{200}, \quad \text{entonces} \quad c = \frac{200 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 245m.$$

3. En el triángulo rectángulo  $ABD$ , se calcula el valor de  $x$ .

$$\sin 50^\circ = \frac{x}{c} = \frac{x}{245}.$$

Por lo tanto,  $x = 245 \sin 50^\circ = 188m$ . ■

**2.4.3. Ejemplo.** Resuelve el siguiente triángulo, donde  $a = 4cm$ ,  $b = 5cm$  y  $\beta = 30^\circ$ .



**Solución:** Al conocer dos lados y el ángulo opuesto a  $b$ , se puede calcular el ángulo  $\alpha$ :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}, \quad \text{entonces} \quad \frac{\sin \alpha}{4} = \frac{\sin 30^\circ}{5}.$$

Despejando, se tiene:

$$\sin \alpha = \frac{4(\sin 30^\circ)}{5} = \frac{4(.5)}{5} = 0.4.$$

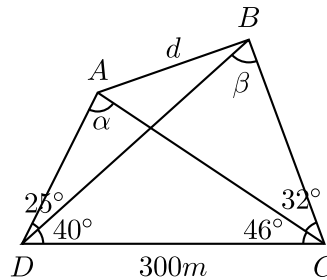
Por lo tanto,  $\alpha = \sin^{-1}(.4) \approx 23.578^\circ$  y  $\gamma = 180^\circ - (23.578^\circ + 30^\circ) = 126.422^\circ$ . Entonces,

$$\frac{\sin 126.422^\circ}{c} = \frac{\sin 30^\circ}{5}.$$

Por lo tanto,

$$c = \frac{5(\sin 126.422^\circ)}{\sin 30^\circ} \approx 8.1 \text{ cm.} \quad \blacksquare$$

**2.4.4. Ejemplo.** En la siguiente figura, calcula la distancia  $d$  entre los puntos  $A$  y  $B$ .



**Solución:**

1. En el triángulo  $ADC$ , se tiene que  $\alpha = 180^\circ - (65^\circ + 46^\circ) = 69^\circ$ . Ahora, por la ley de los senos se tiene:

$$\frac{\sin 65^\circ}{AC} = \frac{\sin 69^\circ}{300}, \quad \text{entonces} \quad AC = \frac{300 \sin 65^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 291.2 \text{ m.}$$

2. En el triángulo  $BDC$ , se tiene que  $\beta = 180^\circ - (40^\circ + 78^\circ) = 62^\circ$ , y por la ley de los senos,

$$\frac{\sin 62^\circ}{300} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 62^\circ}, \quad \text{entonces} \quad BC = \frac{300 \sin 40^\circ}{\sin 62^\circ} \approx 218.4 \text{ m.}$$

3. Por último, aplicando la ley de los cosenos en el triángulo  $ACB$ , se obtiene:

$$d^2 = (218.4)^2 + (291.2)^2 - 2(218.4)(291.2) \cos 32^\circ = 24627.53.$$

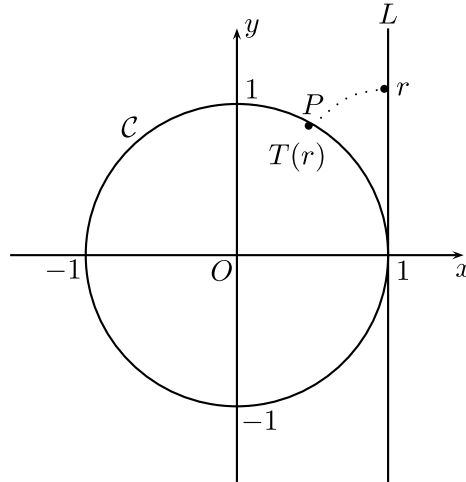
Entonces,  $d = 156.9 \text{ m.}$   $\blacksquare$

## 2.5. Funciones trigonométricas de números reales

En la sección 2.1, se definieron las razones trigonométricas de ángulos. En esta sección se estudiarán a las funciones trigonométricas desde el punto de vista analítico. En lugar de ángulo se hablará de números reales. Por ejemplo, en lugar de escribir  $\sin \theta$ , ahora se escribirá  $\sin x$ , donde  $x$  hace referencia a un número real. De hecho, todas las propiedades de las razones trigonométricas que ya se estudiaron, se siguen cumpliendo si en lugar de  $\theta$ , ahora se sustituye por  $x$ , con  $x \in \mathbb{R}$ .

En el plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , consideremos la circunferencia unitaria  $\mathcal{C}$  con centro en el origen. Se traza por el punto  $(1, 0)$  una recta  $L$ , paralela al eje de las ordenadas (eje  $y$ ). Esta recta  $L$ , hará las veces de recta real  $\mathbb{R}$ .

**2.5.1. Definición.** Sea  $r \in \mathbb{R}$  (o sea, si  $r \in L$ ). Se define la función  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$  de tal manera que  $T(r) = P$ , donde  $P$  es el punto de  $\mathcal{C}$  a donde va a caer  $r$  al enrollarse la recta  $L$  sobre la circunferencia  $\mathcal{C}$ , siendo la parte positiva de  $\mathbb{R}$  enrollada en sentido contraria a las manecillas del reloj, mientras que la parte negativa de  $\mathbb{R}$  se enrolla en sentido contrario a las manecillas.



Por ejemplo,  $T(0) = (1, 0)$  y como la longitud de  $\mathcal{C}$  es  $2\pi$ , se tiene que  $T(2\pi) = (1, 0)$ . De la misma forma,

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1), \quad T\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 1), \quad T(\pi) = (-1, 0), \quad T\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1).$$

Se observa que  $T$  manda a cada número real  $r$  a un punto  $(x, y)$  de  $\mathcal{C}$ , y que cada una de sus coordenadas  $x$  y  $y$ , dependen de  $r$ .

**2.5.2. Definición.** Sea  $r \in \mathbb{R}$  y supongamos que  $T(r) = (x, y)$  es un punto de la circunferencia unitaria. La función **coseno** del número real  $r$ , se define como la coordenada  $x$ , es decir:

$$\cos r = x.$$

La función **seno** del número real  $r$ , se define como la coordenada  $y$ , es decir:

$$\sin r = y.$$

De acuerdo con esta definición, para cada  $r \in \mathbb{R}$ ,  $T(r) = (\cos r, \sin r)$ . De hecho, cada coordenada de  $T(r)$  es en sí una función de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , es decir,

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

**2.5.3. Teorema.** Si  $r \in \mathbb{R}$ , se tiene:

(a)  $|\sin r| \leq 1, \quad |\cos r| \leq 1.$

(b)  $\sin^2 r + \cos^2 r = 1.$

(c)  $\sin(-r) = -\sin r, \quad \cos(-r) = \cos r.$

(d) Para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sin(r + 2k\pi) = \sin r \quad \text{y} \quad \cos(r + 2k\pi) = \cos r.$$

(e)  $\sin r = 0$  si y sólo si, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = n\pi$

$\sin r = 1$  si y sólo si, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$\sin r = -1$  si y sólo si, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$

(f)  $\cos r = 0$  si y sólo si, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$\cos r = 1$  si y sólo si, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = 2n\pi$

$\cos r = -1$  si y sólo si, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = \pi + 2n\pi.$

(g)  $r \in (0, \frac{\pi}{2})$ , entonces  $0 < \sin r < 1$  y  $0 < \cos r < 1$

$r \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , entonces  $0 < \sin r < 1$  y  $-1 < \cos r < 0$

$r \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ , entonces  $-1 < \sin r < 0$  y  $-1 < \cos r < 0$

$r \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ , entonces  $-1 < \sin r < 0$  y  $0 < \cos r < 1.$

(h)  $\sin(\frac{\pi}{2} - r) = \cos r, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - r) = \sin r$

$\sin(\frac{\pi}{2} + r) = \cos r, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + r) = -\sin r$

$\sin(\pi - r) = \sin r, \quad \cos(\pi - r) = -\cos r$

$\sin(\pi + r) = -\sin r, \quad \cos(\pi + r) = -\cos r$

$\sin(\frac{3\pi}{2} - r) = -\cos r, \quad \cos(\frac{3\pi}{2} - r) = -\sin r$

$\sin(\frac{3\pi}{2} + r) = -\cos r, \quad \cos(\frac{3\pi}{2} + r) = \sin r.$

**Demostración:** Sea  $r \in \mathbb{R}$ . Como  $T(r) = (\cos r, \sin r) \in \mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}$  tiene por ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ , resulta que  $\cos^2 r + \sin^2 r = 1$ . De aquí se deduce que  $0 \leq \cos^2 r \leq 1$  y  $0 \leq \sin^2 r \leq 1$ . Por lo tanto,

$$|\cos r| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\sin r| \leq 1.$$

Así se han comprobado (a) y (b).

Para demostrar (c), se observa que si  $T(r) = (x, y)$ , entonces  $T(-r) = (x, -y)$  puesto que  $T(r)$  y  $T(-r)$  son simétricos con respecto al eje  $x$ . Por consiguiente,

$$(\cos(-r), \sin(-r)) = T(-r) = (x, -y) = (\cos r, -\sin r).$$

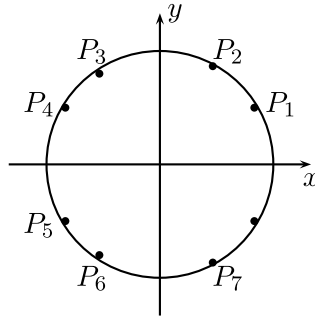
De aquí se sigue que en efecto

$$\cos(-r) = \cos r \quad \text{y} \quad \sin(-r) = -\sin r.$$

(d) Es fácil convencerse de que  $T(r + 2\pi) = T(r)$  y que  $T(r - 2\pi) = T(r)$ , puesto que  $r + 2\pi$  va a caer en  $T(r)$  al enrollarse  $L$  en  $\mathcal{C}$ , pero con una vuelta completa más a  $\mathcal{C}$ , y  $r - 2\pi$  también va a dar a  $T(r)$  pero con una vuelta completa en el sentido de las manecillas del reloj. Para completar la prueba, se aplica inducción matemática. Convencerse de la validez de (e), (f) y (g) es también sencillo si se usa la definición de la función  $T$ .

(h) Supongamos que  $T(r) = P_1 = (x, y)$ . Entonces, por simetrías con los ejes  $x$  o  $y$ , se tendrá (ver figura):

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\pi}{2} - r\right) &= P_2 = (y, x), & T\left(\frac{\pi}{2} + r\right) &= P_3 = (-y, x) \\ T(\pi - r) &= P_4 = (-x, y), & T(\pi + r) &= P_5 = (-x, -y) \\ T\left(\frac{3\pi}{2} - r\right) &= P_6 = (-y, -x), & T\left(\frac{3\pi}{2} + r\right) &= P_7 = (y, -x). \end{aligned}$$



Y con esto se demuestra el inciso (h).  $\square$

**Nota:** La propiedad (c) de este teorema, se expresa diciendo que la función seno es **impar**, mientras que la función coseno es **par**. La propiedad (d) se expresa diciendo que las funciones seno y coseno, son funciones **periódicas** de periodo  $2\pi$ .

**2.5.4. Definición.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

1. Si  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces se dice que  $f$  es par
2. Si  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces se dice que  $f$  es impar.

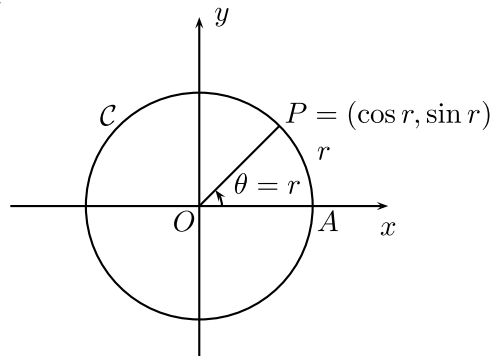
Geoméricamente, una función par tiene la propiedad de que su gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ , mientras que una función impar, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Esto se aplicará cuando se estudien las gráficas de las funciones trigonométricas.

**2.5.5. Definición.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **periódica** si existe  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + c) = f(x)$ . Un número  $c$  que satisface esta condición se llama un **periodo** de  $f$ .

Antes de estudiar las gráficas de las funciones seno y coseno, se verá la relación que existe entre un arco de una circunferencia de radio 1 y el ángulo central que subtiende él mismo. Recordemos que si un arco de longitud  $s$  de una circunferencia de radio  $r$ , subtiende un ángulo central de  $\theta$  radianes, entonces

$$s = r\theta, \quad \text{es decir,} \quad \theta = \frac{s}{r}.$$

Es claro que si  $r = 1$ , es decir, si la circunferencia es de radio 1, entonces  $\theta = s$ . Así, si un ángulo subtiende un arco de longitud  $s$  en una circunferencia de radio 1, se dice que ese ángulo mide  $s$  radianes. En particular, si  $\mathcal{C}$  es la circunferencia unitaria en el plano cartesiano con centro en el origen y  $A$  es la intersección de  $\mathcal{C}$  con el eje  $x$  (o sea  $A = (1, 0)$ ) y  $P = (\cos r, \sin r)$  es un punto de  $\mathcal{C}$ , se puede considerar a  $r$  como la medida del ángulo  $AOP$  en radianes o como la longitud del arco circular de  $A$  a  $P$  en  $\mathcal{C}$ .



De esta forma, se habla de seno y coseno del ángulo  $r$ . Nuevamente, se observa que

$$\sin r = 0 \quad \text{cuando} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi; n \in \mathbb{R}\}, \quad y$$

$$\cos r = 0 \quad \text{cuando} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se definen las otras funciones trigonométricas que tienen relación directa con las funciones seno y coseno.

**2.5.6. Definición.** Sean  $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}$  y  $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ . Se definen las funciones:

(a) *Tangente:*

$$\tan : D_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \tan r = \frac{\sin r}{\cos r}$$

(b) *Cotangente:*

$$\cot : D_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \cot r = \frac{\cos r}{\sin r}$$

(c) *Secante:*

$$\sec : D_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \sec r = \frac{1}{\cos r}$$

(d) *Cosecante:*

$$\csc : D_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \csc r = \frac{1}{\sin r}.$$

Los conjuntos  $D_1$  y  $D_2$  son los **dominios** respectivos de cada función trigonométrica. Se observa que si  $r \in D_1$ , entonces

$$\tan(-r) = \frac{\sin(-r)}{\cos(-r)} = \frac{-\sin r}{\cos r} = -\tan r.$$

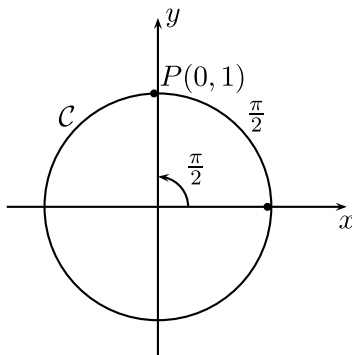
Por lo tanto, la función tangente es impar. También se tiene que

$$\csc(-r) = -\csc r, \quad \sec(-r) = \sec r \quad \text{y} \quad \cot(-r) = -\cot r,$$

donde  $r$  pertenece al dominio respectivo de cada función trigonométrica.

Otra característica importante que tienen estas funciones trigonométricas es que las funciones tangente y cotangente tienen periodo  $\pi$ ; mientras que las funciones secante y cosecante tienen periodo  $2\pi$ . Se deja como ejercicio para el lector comprobar estos hechos.

**2.5.7. Ejemplo.** Determina los valores de las funciones trigonométricas, donde  $r = \frac{\pi}{2}$ .



**Solución:** El punto  $P$  en  $C$  que corresponde a  $r = \frac{\pi}{2}$ , tiene coordenadas  $(0, 1)$ . Por lo tanto,

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{y} \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

De aquí, se deduce que la función tangente no está definida en  $\frac{\pi}{2}$ , puesto que

$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}.$$

De manera similar, la función secante tampoco está definida en  $\frac{\pi}{2}$ , puesto que

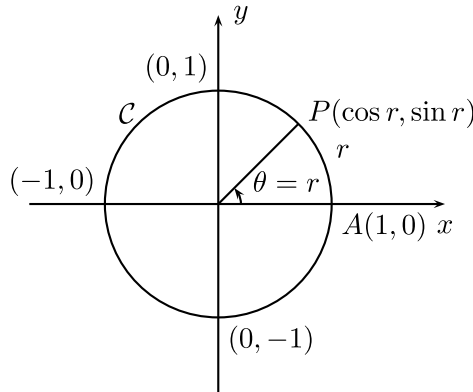
$$\sec \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}.$$

Sin embargo,  $\csc \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$  y  $\cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$ . ■

**Nota:** Si uno intenta con ayuda de una calculadora evaluar  $\tan \frac{\pi}{2}$  o  $\sec \frac{\pi}{2}$ , marcará **error**. Esto coincide con el hecho de que  $\frac{\pi}{2}$  no pertenece a  $D_1$ , es decir, al dominio de la tangente y secante.

### GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si  $P(x, y)$  es el punto de  $\mathcal{C}$  que corresponde a  $r$ , entonces por definición se tiene que  $x = \cos r$  y  $y = \sin r$ .



Sea  $r > 0$ . Si  $r$  aumenta de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , el punto  $P(\cos r, \sin r)$  varía a través de  $\mathcal{C}$  desde el punto  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$  en sentido contrario a las manecillas del reloj. De manera consecuente,  $\cos r$  disminuye de 1 a 0 ( $1 \rightarrow 0$ ); mientras que  $\sin r$  aumenta de 0 a 1 ( $0 \rightarrow 1$ ). Si  $r$  aumenta de  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$ , el punto  $P(\cos r, \sin r)$  viaja a través de  $\mathcal{C}$  en sentido contrario a las manecillas del reloj de  $(0, 1)$  a  $(-1, 0)$ . De esta forma, la función  $\cos r$  disminuye de 0 a  $-1$ ; mientras que  $\sin r$  disminuye de 1 a 0.

Se usa también la notación  $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  para denotar que  $r$  aumenta de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ ;  $(1, 0) \rightarrow (0, 1)$  para denotar que  $P(\cos r, \sin r)$  varía de  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$  sobre  $\mathcal{C}$ .

Se obtiene así una tabla como sigue:

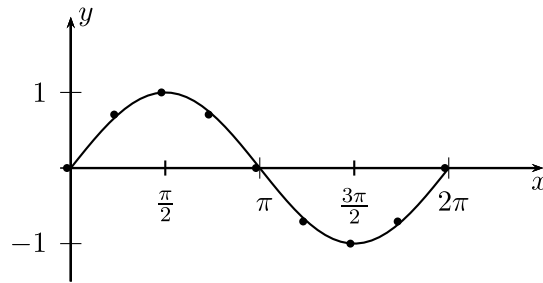
$t$	$P(\cos r, \sin r)$	$\cos r$	$\sin r$
$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$(1, 0) \rightarrow (0, 1)$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$(0, 1) \rightarrow (-1, 0)$	$0 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 0$
$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$(-1, 0) \rightarrow (0, -1)$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$
$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$	$(0, -1) \rightarrow (1, 0)$	$0 \rightarrow 1$	$-1 \rightarrow 0$

Recordemos que  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de tal forma que para cada  $r \in \mathbb{R}$ , se tiene como imagen  $\sin r$  para la función seno, y  $\cos r$  para la función coseno. Sin embargo, en lugar de la variable  $r$ , se usará de aquí en adelante la variable  $x$ , esto debido a que las gráficas de las funciones seno y coseno, estarán en el plano cartesiano. De esta forma, se puede hablar de  $f(x) = \sin x$  y  $f(x) = \cos x$ , o de manera similar, de las ecuaciones  $y = \sin x$  y  $y = \cos x$ .

Junto con la información que ya se tiene acerca de la función seno, la siguiente tabla muestra algunas coordenadas para obtener la gráfica de  $f(x) = \sin x$ .

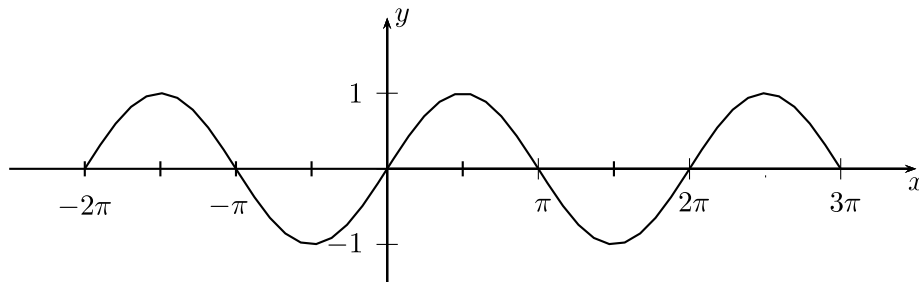
$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$	0

En esta tabla, se muestran algunas coordenadas de puntos para la gráfica de  $f(x) = \sin x$ , donde  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Si a esto se añade que  $\sin x$  crece en  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , decrece en  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  y  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ , y crece en  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ , se obtiene la gráfica:



De esta forma, se ha obtenido la gráfica de  $f(x) = \sin x$ , donde  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Ahora, si se toma en cuenta que la función seno tiene periodo  $2\pi$  y que es una función impar, es decir su gráfica es **simétrica con respecto al origen**, se obtiene la gráfica completa de  $f(x) = \sin x$ .

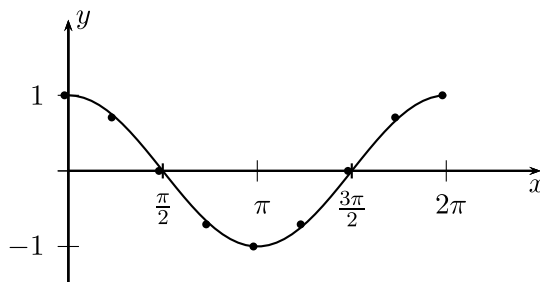


Se observa que  $f(x) = \sin x$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , es decir, su dominio es  $\mathbb{R}$ . La imagen está definida en el intervalo  $[-1, 1]$ . Por lo tanto,  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ .

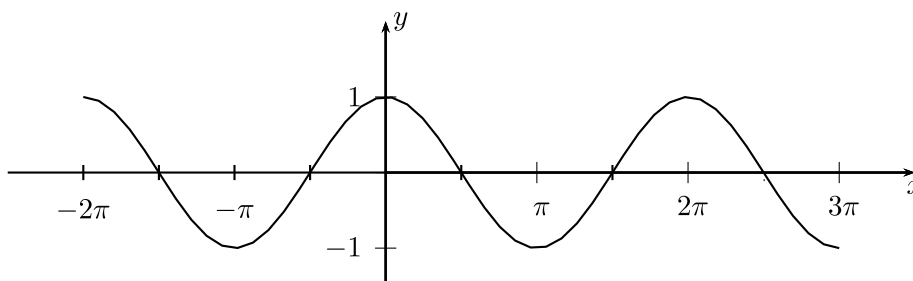
Ahora se estudiará la gráfica de  $f(x) = \cos x$ . La siguiente tabla permite conocer algunas coordenadas de puntos por donde pasará dicha gráfica, donde  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$	1

Si se toma en cuenta también que  $\cos x$  decrece de  $[0, \pi/2]$ ,  $[\pi/2, \pi]$  y crece en  $[\pi, 3\pi/2]$ ,  $[3\pi/2, 2\pi]$ , se obtiene la gráfica:



Se completa la gráfica de  $f(x) = \cos x$ , al tomar en cuenta que el coseno también tiene periodo  $2\pi$  y que es par (su gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ ).



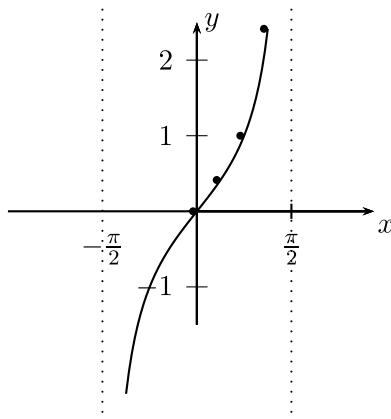
$f(x) = \cos x$  tiene dominio  $\mathbb{R}$  e imagen en el intervalo  $[-1, 1]$ , es decir  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ .

Para obtener la gráfica de  $f(x) = \tan x$ , se debe tener más cuidado debido a que su dominio no es todo  $\mathbb{R}$ . La función tangente no está definida en los puntos:

$$\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

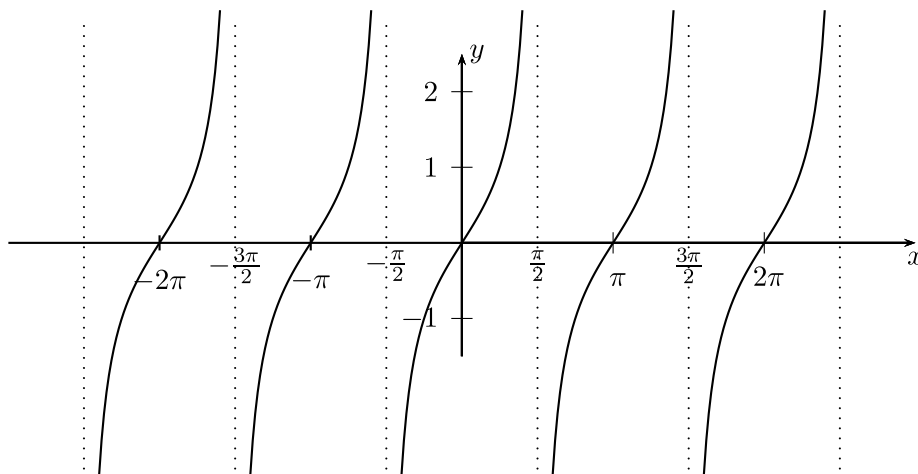
Primero se analiza su gráfica en el intervalo  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . Sin embargo, al ser la tangente una función impar (su gráfica es simétrica con respecto al origen), basta ver el comportamiento en el intervalo  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ . Con la siguiente tabla de valores se obtienen algunos puntos para esbozar la gráfica de  $f(x) = \tan x$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x) = \tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$	1	$\sqrt{3} \approx 1.7$



Esta gráfica tiene la propiedad de que a medida que  $x$  se aproxima a  $\frac{\pi}{2}$ , los valores de  $f(x) = \tan x$  aumentan muy rápido. Por ejemplo, si se toma en cuenta que  $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ , entonces  $\tan 1.57060 \approx 5093.5$ ,  $\tan 1.57070 \approx 10381.3$ ,  $\tan 1.57079 \approx 158057.9$ . Más aún,<sup>6</sup> si  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ ,  $\tan x \rightarrow \infty$ . Esto se debe a que  $\sin x \rightarrow 1$  y  $\cos x \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ . De igual manera, por simetría se deduce que a medida que  $x$  se aproxima a  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $\tan x$  decrece cada vez más. Es decir,<sup>7</sup> si  $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+$ ,  $\tan x \rightarrow -\infty$ . Por lo tanto, la imagen de la función tangente en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ , está definida en todo  $\mathbb{R}$ . Las líneas  $x = -\frac{\pi}{2}$  y  $x = \frac{\pi}{2}$  son las **asíntotas verticales** para esta gráfica.

Para completar la gráfica de la función tangente en todo su dominio, se aplica el hecho de que tiene periodo  $\pi$ . De esta forma, la gráfica de  $f(x) = \tan x$ , queda de la siguiente forma:

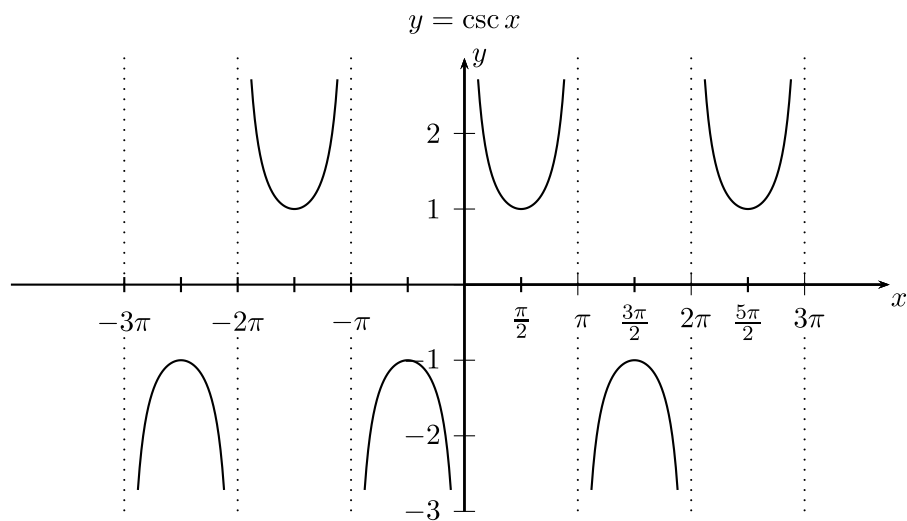


Por último, se darán a conocer las gráficas de las funciones  $y = \csc x$ ,  $y = \sec x$  y  $y = \cot x$ . Recordemos que la función cotangente tiene periodo  $\pi$  e impar; la función cosecante es impar y

<sup>6</sup>  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ , significa que  $x$  tiende a  $\frac{\pi}{2}$  por la izquierda.

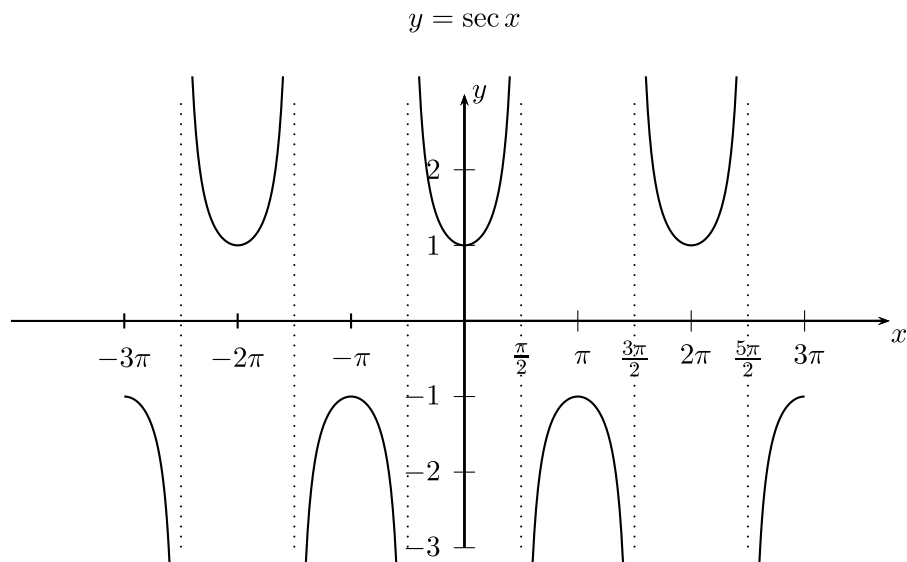
<sup>7</sup>  $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+$ , significa que  $x$  tiende a  $-\frac{\pi}{2}$  por la derecha. En general, si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow a^-$ , significa que  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda y  $x \rightarrow a^+$ , significa que  $x$  tiende a  $a$  por la derecha. En el capítulo 3, se explican más a fondo estos conceptos.

tiene periodo  $2\pi$ ; mientras que la función secante es par y de periodo igual que la cosecante. Con esta información, se obtienen las siguientes gráficas:



En el intervalo  $(0, \pi)$  se observa que si  $x \rightarrow \pi^-$ ,  $\sin x \rightarrow 0$ . De esta manera se tiene que si  $x \rightarrow \pi^-$ ,  $\csc x = \frac{1}{\sin x} \rightarrow \infty$ . Análogamente, si  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\sin x \rightarrow 0$ . Entonces, si  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\csc x = \frac{1}{\sin x} \rightarrow \infty$ . Luego, en el intervalo  $(0, \pi)$  se dice que hay una **rama superior** en la gráfica de la cosecante, y las rectas:  $x = 0$  y  $x = \pi$  son las asíntotas verticales. En el intervalo  $(-\pi, 0)$  sucede algo similar debido a que la gráfica de la cosecante es simétrica con respecto al origen. Se obtiene así que si  $x \rightarrow -\pi^+$ ,  $\csc x \rightarrow -\infty$  y si  $x \rightarrow 0^-$ ,  $\csc x \rightarrow -\infty$ . En el intervalo  $(-\pi, 0)$  se dice que hay una **rama inferior** en la gráfica; mientras que las rectas  $x = -\pi$  y  $x = 0$  son las asíntotas verticales. En general, esto se vuelve a repetir en cada periodo  $2\pi$ . Las rectas  $x = n\pi$ ;  $n \in \mathbb{Z}$  son las asíntotas verticales. La **imagen** de la función cosecante es el intervalo  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

La gráfica de las funciones secante y cotangente quedan de la siguiente manera:



En esta gráfica, se observa que

$$\text{si } x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow \infty,$$

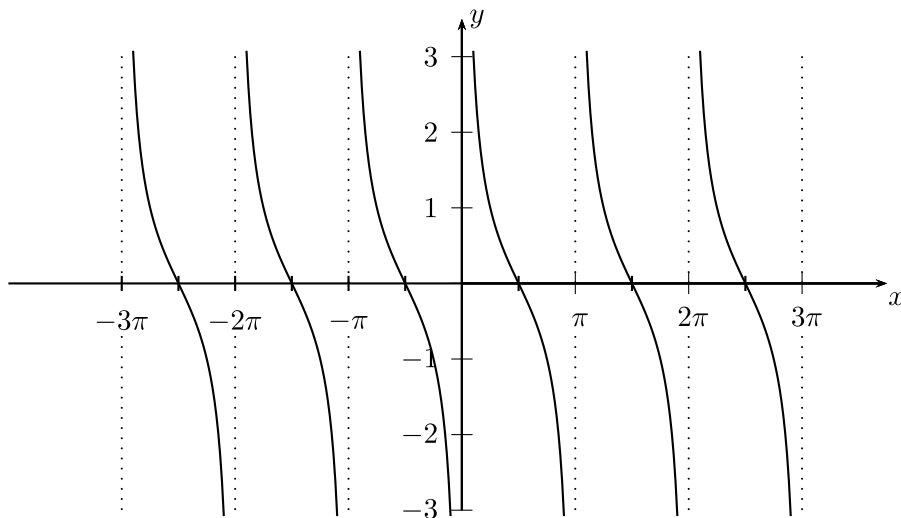
$$\text{si } x \rightarrow -\frac{\pi^+}{2}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow \infty,$$

$$\text{si } x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow -\infty,$$

$$\text{si } x \rightarrow \frac{3\pi^-}{2}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow -\infty.$$

Esta situación se repetirá en todo el dominio de la función secante por la simetría de la gráfica con respecto al eje  $y$  y por el hecho de tener periodo  $2\pi$ . La imagen de esta función es el intervalo  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

$$y = \cot x$$



En el intervalo  $0 < x < \pi$ , la gráfica de la cotangente cumple lo siguiente:

$$\text{si } x \rightarrow 0^+, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow \infty.$$

$$\text{si } x \rightarrow \pi^-, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow -\infty.$$

Por la simetría que posee esta gráfica con respecto al origen y por su periodo  $\pi$ , esta situación se repetirá en todo su dominio. La imagen de la función cotangente está definida en todo  $\mathbb{R}$ .

**2.5.8. Ejemplo.** Comprueba lo siguiente:

1.  $\csc x = \sin x$ , si y sólo si,  $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$

2. No existe  $x \in D_2$  tal que  $\csc x \in (-1, 1)$ .

**Solución:**

1.  $\csc x = \sin x$ , si y sólo si,  $\frac{1}{\sin x} = \sin x$ . De aquí se deduce que  $1 = \sin^2 x$ . Esto último equivale a resolver  $\pm 1 = \sin x$ . Los valores de  $x$  que satisfacen esta igualdad son:

$$\dots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Por lo tanto,  $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

2. Supongamos que existe  $x \in D_2$  tal que  $\csc x = \frac{1}{\sin x} \in (-1, 1)$ . Entonces  $-1 < \frac{1}{\sin x} < 1$ . Esto último equivale a resolver  $-1 < \frac{1}{\sin x}$  y  $\frac{1}{\sin x} < 1$ .

a) Si  $\sin x > 0$ , entonces  $\sin x > -1$  y  $1 < \sin x$

b) Si  $\sin x < 0$ , entonces  $\sin x < -1$  y  $1 > \sin x$ .

En cualquiera de los dos casos se llega a una contradicción y por lo tanto, la cosecante no toma valores en el intervalo  $(-1, 1)$ . ■

**Actividad 23.** Comprueba lo siguiente:

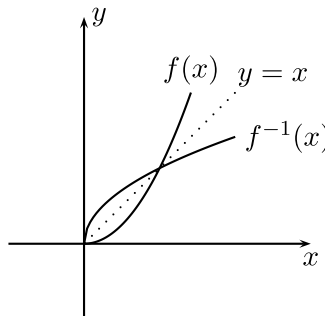
1.  $\sec x = 1$ , si y sólo si,  $x = n\pi$ ;  $n \in \mathbb{Z}$

2. No existe  $x \in D_1$  tal que  $\sec x \in (-1, 1)$ .

Para concluir esta sección, se estudiarán las **inversas** de las funciones trigonométricas. Recordemos que si  $f(x)$  es una función inyectiva en algún intervalo  $I$ , donde  $I$  es cerrado, abierto, semicerrado o semiabierto, entonces  $f(x)$  tiene inversa  $f^{-1}(x)$  en  $I$ , tal que para todo  $x \in I$ ,

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{y} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Geoméricamente, las gráficas de  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$  son simétricas con respecto a la recta  $y = x$ . Además, si  $Dom f = A$  y  $Im f = B$ , entonces  $Dom f^{-1} = B$  y  $Im f^{-1} = A$ .

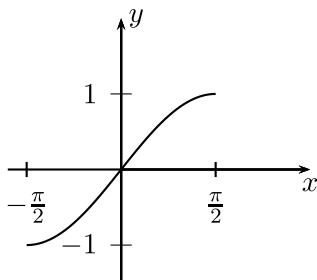


### Inversa de la función seno

La función  $f(x) = \sin x$  no es inyectiva en todo su dominio, sin embargo lo es en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$  y es aquí donde tiene inversa  $f^{-1}(x)$ , denotada por

$$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

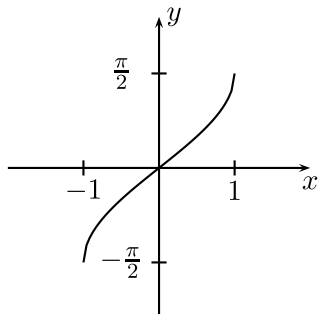
Gráfica de  $f(x) = \sin x$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$ .



$$\text{Dom} f = [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\text{Im} f = [-1, 1]$$

Gráfica de  $f^{-1}(x) = \arcsin x$ .



$$\text{Dom} f^{-1} = [-1, 1]$$

$$\text{Im} f^{-1} = [-\pi/2, \pi/2]$$

Por definición de composición e inversa de una función, se tienen que:

1. Si  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ , entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sin x) = \arcsin(\sin x) = x.$$

2. Si  $x \in [-1, 1]$ , entonces

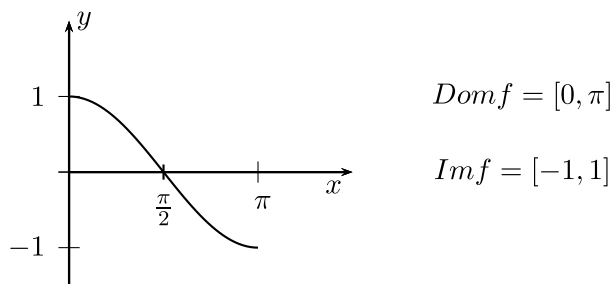
$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

### Inversa de la función coseno

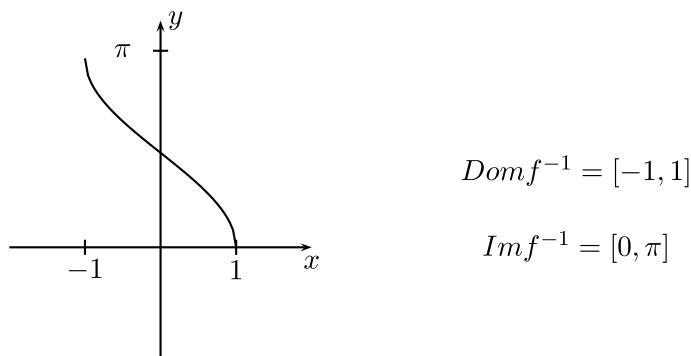
La función  $f(x) = \cos x$ , tampoco es inyectiva en todo su dominio, sin embargo lo es en el intervalo  $[0, \pi]$  y aquí es donde tiene inversa  $f^{-1}(x)$ , denotado por

$$f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x) \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = \arccos x.$$

Gráfica de  $f(x) = \cos x$  en  $[0, \pi]$ .



Gráfica de  $f^{-1}(x) = \arccos x$ .



1. Si  $x \in [0, \pi]$ , entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x.$$

2. Si  $x \in [-1, 1]$ , entonces

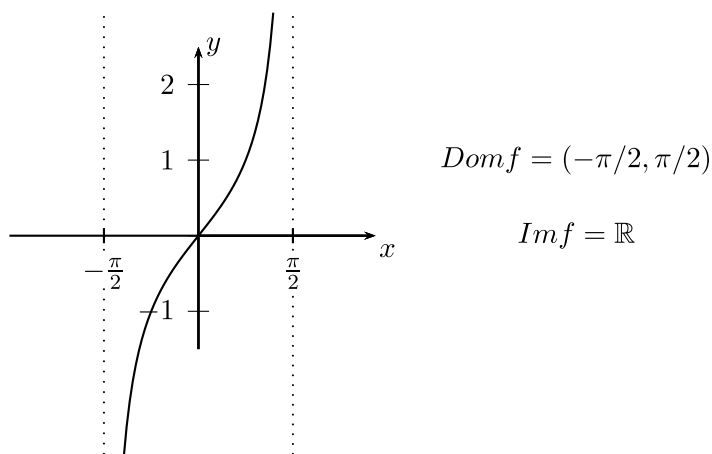
$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\arccos x) = \cos(\arccos x) = x.$$

**Inversa de la función tangente**

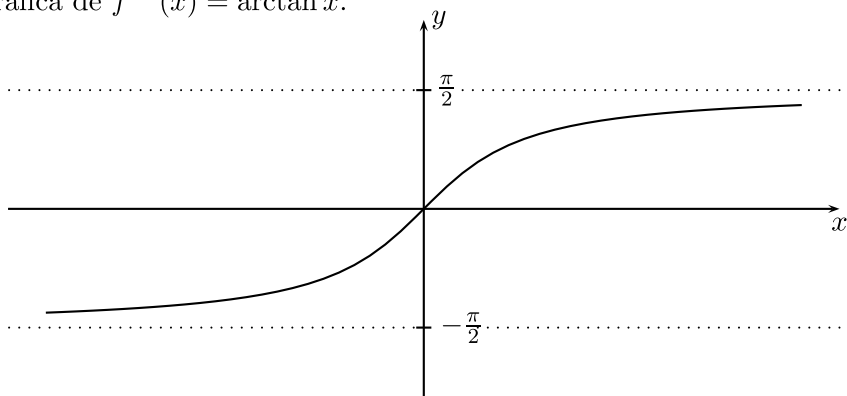
$f(x) = \tan x$  es inyectiva en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Por lo tanto, tiene inversa  $f^{-1}(x)$  en este intervalo, denotado por

$$f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = \arctan x.$$

Gráfica de  $f(x) = \tan x$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$ .



Gráfica de  $f^{-1}(x) = \arctan x$ .



$$\text{Dom} f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} f = (-\pi/2, \pi/2)$$

1. Si  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\tan x) = \arctan(\tan x) = x.$$

2. Si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\arctan x) = \tan(\arctan x) = x.$$

La gráfica de  $f^{-1}(x) = \arctan x$  está acotada de  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Las rectas  $y = -\pi/2$  y  $y = \pi/2$  son sus asíntotas horizontales.

**Actividad 24.** Dibuja la gráfica de  $f(x)$  y de su inversa  $f^{-1}(x)$ , donde

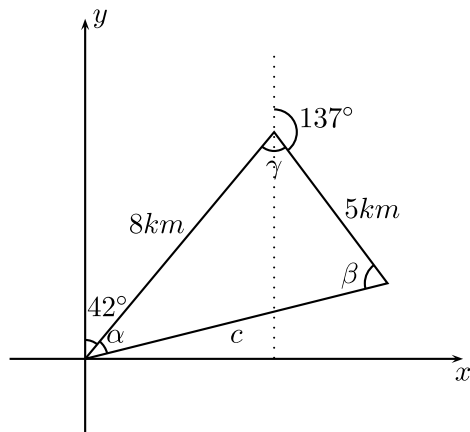
1.  $f(x) = \csc x$ ;  $x \in (0, \pi/2)$
2.  $f(x) = \sec x$ ;  $x \in (0, \pi/2)$
3.  $f(x) = \cot x$ ;  $x \in (0, \pi)$ .
4. ¿Por qué  $f(x) = \sin x$  no tiene inversa en  $[0, \pi]$ ?

### LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 2.4 y 2.5

1. Aplica la ley de senos o cosenos para determinar los lados o ángulos faltantes de un triángulo, donde
  - a)  $\alpha = 48^\circ$ ,  $\gamma = 57^\circ$  y  $b = 47m$
  - b)  $\beta = 20^\circ$ ,  $\gamma = 31^\circ$  y  $b = 210m$

- c)  $\alpha = 51^\circ$ ,  $\gamma = 71^\circ$  y  $c = 537m$
- d)  $\alpha = 65^\circ$ ,  $a = 21.3m$ ,  $b = 18.9m$
- e)  $\beta = 30^\circ$ ,  $a = 35.8m$  y  $b = 17.9m$
- f)  $\gamma = 54^\circ$ ,  $b = 240m$  y  $c = 398m$
- g)  $a = 1792m$ ,  $b = 4231m$  y  $c = 3164m$
- h)  $a = 10cm$ ,  $b = 15cm$  y  $c = 12cm$
- i)  $b = 12cm$ ,  $c = 8cm$  y  $\alpha = 150^\circ$
- j)  $a = 72m$ ,  $b = 57m$  y  $\gamma = 75.78^\circ$ .

2. Sean  $A$  y  $B$  dos puntos, de los cuales, no se puede acceder al segundo. Tomando otro punto  $C$ , que dista del primero  $42.6m$ , se dirigen visuales a  $B$ , desde los puntos  $A$  y  $C$ , que forman con el segmento  $AC$  ángulos:  $\sphericalangle BAC = 53.7^\circ$  y  $\sphericalangle BCA = 64^\circ$ . Halla la distancia entre  $A$  y  $B$ .
3. Sean  $A$  y  $B$  dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles  $C$  y  $D$ , separados por la longitud  $73.2m$ . Suponiendo que los ángulos  $\sphericalangle ACD = 80.2^\circ$ ,  $\sphericalangle BCD = 43.5^\circ$ ,  $\sphericalangle BDC = 32^\circ$  y  $\sphericalangle ADC = 23.23^\circ$ . Determina la distancia entre  $A$  y  $B$ .
4. El radio de una circunferencia mide  $25m$ . Calcula el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud  $36m$ .
5. Un teleférico transporta pasajeros desde un punto  $A$  al nivel del suelo, y que está a 1.2 millas de un punto  $B$  que se halla en la base de una montaña, hasta un punto  $P$  de la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de  $P$  desde  $A$  y  $B$  son  $21^\circ$  y  $65^\circ$ , respectivamente.
  - a) Calcula la distancia entre  $A$  y  $P$
  - b) Calcula la altura de la montaña.
6. Los ángulos de elevación de un globo desde dos puntos  $A$  y  $B$  que están a nivel del suelo son de  $24^\circ$  y  $47^\circ$ , respectivamente. La distancia entre  $A$  y  $B$  es de 8.4 millas. Si el globo se encuentra entre ambos puntos en un mismo plano vertical, calcula la altura del globo sobre el suelo.
7. Las medidas de un terreno triangular son:  $42m$ ,  $35m$  y  $18m$ . Calcula el ángulo más grande entre los lados.
8. En el siguiente triángulo, calcula los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , y el lado  $c$ .



9. Comprueba las siguientes identidades trigonométricas.

a)  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

b)  $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

c)  $\tan(x + \pi) = \tan x$

d)  $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

e)  $1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

f)  $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

g)  $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

h)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$

i)  $(\sec x + \tan x)(1 - \sin x) = \cos x$

j)  $\frac{\tan x + \cos x}{\sin x} = \sec x + \cot x$

k)  $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \frac{1}{\sec^2 x}$

l)  $(1 - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) = 1.$

10. Desarrolla  $\cos(x + y + z)$ .

[Sugerencia]. Observa que  $(x + y + z) = [x + (y + z)]$ .

11. Comprueba que  $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ .

[Sugerencia]. Escribe  $3x = 2x + x$

12. Determina los valores de  $x$  tales que  $\csc x = 1$ ,  $\csc x = -1$ ,  $\cot x = 0$  y  $\tan x = 0$ .

## 2.6. Funciones trascendentes

En esta sección se estudiarán las funciones: **exponencial y logaritmo**. Uno de los propósitos, es llegar a dar el significado de  $a^x$ , donde  $x$  es cualquier número real y  $a > 0$ . Para este fin, se darán las ideas principales, sin proporcionar todos los detalles que se requieren, ya que va más allá del tratamiento en curso. Se comenzará definiendo  $a^n$  con  $a \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , como sigue:

**2.6.1. Definición.** Sean  $a \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

(a)  $a^1 = a$

(b)  $a^{n+1} = a^n \cdot a$  para toda  $n \in \mathbb{N}$

(c) Si  $a \neq 0$ ,  $a^0 = 1$ .

En la definición anterior, se dice que  $a$  es la **base** y  $n$  el **exponente**.

**2.6.2. Teorema.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $m, n \in \mathbb{N}$ . Entonces

1.  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2.  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

3.  $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

4. a) Si  $a > 1$  y  $n < m$  entonces  $a^n < a^m$

b) Si  $0 < a < 1$  y  $n < m$  entonces  $a^m < a^n$ .

**Demostración:**

El inciso (1), se comprueba haciendo inducción sobre  $m$  (véase apéndice):

Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $A = \{m \in \mathbb{N} \mid a^n \cdot a^m = a^{n+m}\}$ .

(i)  $1 \in A$ , puesto que por definición,  $a^n \cdot a^1 = a^{n+1}$ .

(ii) Supongamos que  $m \in A$ , entonces se cumple  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ . Por consiguiente,  $a^n \cdot a^{m+1} = a^n \cdot (a^m \cdot a) = (a^n \cdot a^m) \cdot a = a^{n+m} \cdot a = a^{(n+m)+1} = a^{n+(m+1)}$ .

Así que,  $m + 1 \in A$  y  $A = \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Finalmente, puesto que se eligió arbitrariamente  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene el resultado.

Los incisos (2) y (3) se prueban de manera similar usando inducción matemática. La comprobación del inciso (4)(a) es como sigue:

Sea  $a > 1$ . Se observa que  $a^n > 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto,

(i) Es claro que si  $n = 1$ , se cumple, puesto que  $a^1 = a > 1$ .

(ii) Supongamos que  $a^n > 1$ , para alguna  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, al multiplicar ambos lados de la desigualdad por  $a$ , se obtiene  $a^{n+1} > a > 1$ .

Por lo tanto, si  $a^n > 1$ , entonces  $a^{n+1} > 1$ . Así, se ha probado por inducción matemática que

$$a^n > 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, si  $n < m$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ , entonces  $m - n \in \mathbb{N}$ . Por lo que se acaba de probar,  $a^{m-n} > 1$ . Multiplicando ambos lados de la desigualdad por  $a^n$ , se tiene

$$a^n < a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^m.$$

Por lo tanto,  $a^n < a^m$ . Se deja como ejercicio para el lector el inciso (4)(b).  $\square$

Con esto, se tiene definida la potencia  $a^n$  para cualquier real  $a$  y para cualquier número natural  $n$ , y la potencia  $a^0$  para cualquier real  $a \neq 0$ .

**2.6.3. Definición.** Sea  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n < 0$ . Entonces

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

**2.6.4. Ejemplo.** Reduce las siguientes potencias.

1.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{(1/3)^2} = 9$
2.  $\frac{(2^2)^2(3)^{-4}}{(2)^{-3}} = \frac{2^4 \cdot 2^3}{3^4} = \frac{2^7}{3^4} = \frac{128}{81}$ .  $\blacksquare$

Se observa que  $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$  es el inverso multiplicativo de  $a^{-n}$ . En efecto, como  $-n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} \cdot a^{-n} = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)^{-n} = 1^{-n} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}.$$

De aquí, también se sigue que si  $a \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}.$$

De esta forma, las propiedades del teorema 2.6.2, se siguen cumpliendo para exponentes enteros negativos.

**2.6.5. Teorema.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , y  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Entonces

1.  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2.  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3.  $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

4. a) Si  $a > 1$  y  $n < m$ , entonces  $a^n < a^m$   
 b) Si  $0 < a < 1$  y  $n < m$ , entonces  $a^m < a^n$ .

Ya se conoce el significado de  $a^n$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . El siguiente paso es extender esta definición para  $n \in \mathbb{Q}$ , de modo que cuando  $n$  sea entero, coincida con la definición anterior y sobre todo, que las propiedades enunciadas en el teorema 2.6.5, se sigan cumpliendo.

**2.6.6. Definición.** Sea  $a > 0$  y  $t = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ . Entonces

$$a^t = a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n.$$

Se observa que  $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$ , puesto que si se eleva ambos miembros de la igualdad a la potencia  $m$ , se obtiene

$$((\sqrt[m]{a})^n)^m = ((\sqrt[m]{a})^m)^n = a^n \quad \text{y} \quad (\sqrt[m]{a^n})^m = a^n.$$

**2.6.7. Teorema.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $t, s \in \mathbb{Q}$ . Entonces

1.  $a^t \cdot a^s = a^{t+s}$
2.  $(a^t)^s = a^{t \cdot s}$
3.  $(ab)^s = a^s \cdot b^s$
4. a) Si  $a > 1$  y  $s < t$ , entonces  $a^s < a^t$   
 b) Si  $0 < a < 1$  y  $s < t$ , entonces  $a^t < a^s$ .

**Demostración:**

(1) Sean  $t = \frac{c}{d}$  y  $s = \frac{p}{q}$ . Entonces, se tiene también que  $t = \frac{cq}{dq}$  y  $s = \frac{dp}{dq}$ . Así que

$$a^t a^s = a^{\frac{cq}{dq}} a^{\frac{dp}{dq}} = (\sqrt[dq]{a})^{cq} (\sqrt[dq]{a})^{dp} = (\sqrt[dq]{a})^{cq+dp} = a^{\frac{cq+dp}{dq}} = a^{t+s}.$$

Por lo tanto,

$$a^t a^s = a^{t+s}. \quad \square$$

Se omite la demostración de los otros incisos, sin embargo, se pueden hacer como un buen ejercicio. Lo importante, es que se ha logrado dar el significado de  $a^x$  para  $x \in \mathbb{Q}$ , y sin que se modifiquen las propiedades enunciadas anteriormente. Por ejemplo,

$$2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}, \quad 2^{5/3} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}, \quad 16^{25} = 16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Pero, ¿qué significa una expresión con un exponente irracional, como  $2^{\sqrt{3}}$  o  $2^\pi$ ? Para hallar  $a^x$  con  $x \in \mathbb{I}$  (conjunto de números racionales), basta tomar cualquier sucesión de números racionales

$(r_n); n \in \mathbb{N}$  que converja a  $x$ , y hallar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ . Por ejemplo, para evaluar  $2^\pi$  aproximadamente, se puede utilizar la sucesión de números racionales:

$$3, \quad 3.1, \quad 3.14, \quad 3.141, \quad 3.1415, \quad 3.14159, \dots$$

que son los primeros términos de una sucesión que converge a  $\pi$ . Luego, al evaluar

$$2^3, \quad 2^{3.1}, \quad 2^{3.14}, \quad 2^{3.141}, \quad 2^{3.1415}, \quad 2^{3.14159}, \dots$$

se estará aproximando a  $2^\pi$ . De hecho, se puede usar cualquier otra sucesión que converja a  $\pi$  para aproximar  $2^\pi$ .

Un hecho importante es que para cualquier real  $x$ , existe por lo menos una sucesión  $(r_n); n \in \mathbb{N}$  creciente de números racionales que converge a  $x$ , donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  existe. Con esto, se puede dar la siguiente definición,

**2.6.8. Definición.** Sean  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  y  $(r_n); n \in \mathbb{N}$  una sucesión creciente de racionales que converge a  $x$ . Entonces

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}.$$

**2.6.9. Teorema.** Sean  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $x, y \in \mathbb{R}$ . Entonces

1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2.  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
3.  $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
4. a) Si  $a > 1$  y  $x < y$ , entonces  $a^x < a^y$   
 b) Si  $0 < a < 1$  y  $x < y$ , entonces  $a^y < a^x$ .

También se puede comprobar que  $a^x > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  y  $a > 0$ . Se puede ahora definir, para cada  $a > 0$ , una importante función.

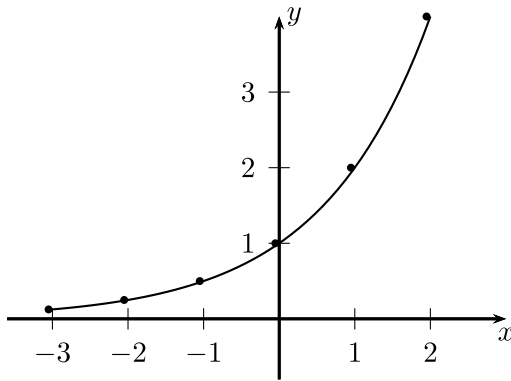
**2.6.10. Definición.** Sea  $a$  un número real positivo. La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = a^x$ , se llama **función exponencial con base  $a$** .

Ejemplos de funciones exponenciales:

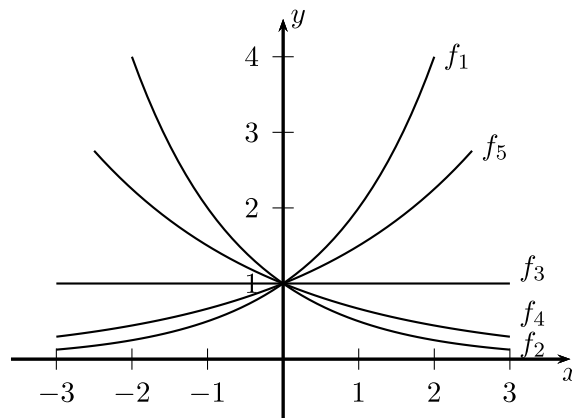
$$f_1(x) = 2^x, \quad f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad f_3(x) = 1^x, \quad f_4(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad f_5(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

Se esbozará la gráfica de  $f_1(x) = 2^x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2
$f_1(x) = 2^x$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$



En esta gráfica se puede observar que a medida que  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f_1(x) = 2^x \rightarrow 0$ ; mientras que si  $x \rightarrow \infty$ ,  $f_1(x) = 2^x \rightarrow \infty$ . Así que la función está definida en todo  $\mathbb{R}$ , tiene una asíntota horizontal, a saber el eje  $x$ , y es creciente en todo su dominio, donde  $Dom f = (-\infty, \infty)$  e  $Im f = (0, \infty)$ . Las gráficas de las otras funciones exponenciales quedan de la siguiente forma:



En general,

- (a) Si  $a > 1$ , entonces  $f(x) = a^x$  es creciente
- (b) Si  $0 < a < 1$ , entonces  $f(x) = a^x$  es decreciente
- (c) Si  $a = 1$ , entonces  $f(x) = a^x$  es constante.

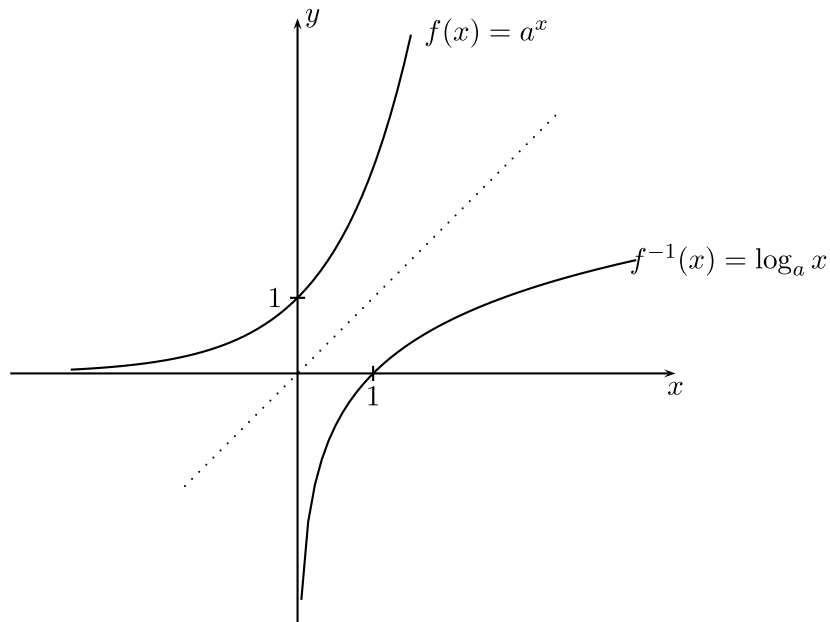
Nótese que para  $x = 0$ , todas las funciones exponenciales toman el valor de uno.

Como la función exponencial  $f(x) = a^x$  es inyectiva en todo su dominio si  $a \neq 1$ , entonces tiene inversa  $f^{-1}(x)$ , llamada **logaritmo en base  $a$** , denotada por

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$

**2.6.11. Definición.** Sea  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . El **logaritmo en base  $a$**  denotado por  $\log_a x$ , se define como la inversa de la función exponencial con base  $a$ .

La gráfica de  $f^{-1}(x) = \log_a x$  debe ser simétrica a  $f(x) = a^x$  con respecto a la recta  $y = x$ . Se dibuja su gráfica, suponiendo que  $a > 1$ .



Usando la definición de composición e inversa, se tiene que si  $a > 1$ :

1. Si  $x > 0$ ,

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x.$$

2. Si  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x.$$

**Nota:**  $\log_a x$  es el número al que hay que elevar la base  $a$  para obtener  $x$ .

**2.6.12. Ejemplo.** Calcula los siguientes logaritmos.

1.  $\log_2 1 = 0$  porque  $2^0 = 1$

2.  $\log_2 2 = 1$  porque  $2^1 = 2$

3.  $\log_2 4 = 2$  porque  $2^2 = 4$

4.  $\log_{10} 1 = 0$  porque  $10^0 = 1$

5.  $\log_{10} 1000 = 3$  porque  $10^3 = 1000$ .

**2.6.13. Teorema.** Sea  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  y  $x, y > 0$ . Entonces

- (a)  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- (b)  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- (c) Si  $r \in \mathbb{R}$ , entonces  $\log_a(x^r) = r \log_a x$ .

**Demostración:**

- (a) Sean  $u = \log_a x$  y  $v = \log_a y$ , entonces  $a^u = x$  y  $a^v = y$ . Luego se tiene que

$$a^u a^v = a^{u+v} = xy.$$

Por lo tanto,  $u + v = \log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ .

- (b) Se observa que  $\log_a x = \log_a\left(\frac{x}{y}y\right) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) + \log_a y$ . Despejando se tiene que  $\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ .

- (c) Sea  $u = \log_a x$ , entonces  $a^u = x$ . Luego,  $a^{ur} = x^r$ . Por lo tanto,

$$ur = \ln_a(x^r) \quad \text{y} \quad r \log_a x = \log_a(x^r). \quad \square$$

**2.6.14. Ejemplo.** Resuelve la ecuación

$$\log_{10} 2 + \log_{10}(11 - x^2) = 2 \log_{10}(5 - x).$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \log_{10}(11 - x^2) - 2 \log_{10}(5 - x) &= -\log_{10} 2 \\ \log_{10}(11 - x^2) - \log_{10}(5 - x)^2 &= \log_{10}(2^{-1}) \\ \log_{10}\left[\frac{11 - x^2}{(5 - x)^2}\right] &= \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{11 - x^2}{(5 - x)^2} &= \frac{1}{2} \\ 2(11 - x^2) &= (5 - x)^2 \\ 22 - 2x^2 &= 25 - 10x + x^2 \\ 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ (3x - 1)(x - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $x = \frac{1}{3}$  o  $x = 3$ , son las soluciones de la ecuación. ■

**2.6.15. Ejemplo.** Prueba que si  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  y  $x > 0$ , entonces

$$\log_a x = -\log_{1/a} x.$$

**Solución:** Supongamos que

$$\log_a x = y. \quad (2.2)$$

Entonces se tiene que  $x = a^y$ . Luego,  $\frac{1}{x} = \frac{1}{a^y} = \left(\frac{1}{a}\right)^y$ . De aquí se sigue que,

$$\log_{1/a} \left(\frac{1}{x}\right) = y. \quad (2.3)$$

Comparando (2.2) y (2.3), se tiene

$$\log_a x = \log_{1/a} \left(\frac{1}{x}\right) = \log_{1/a} 1 - \log_{1/a} x = -\log_{1/a} x.$$

Por lo tanto,

$$\log_a x = -\log_{1/a} x. \quad \blacksquare$$

**Nota:** De todas las bases, existe una especial denotada por  $e$ . Este número, representa a un número irracional que vale aproximadamente:

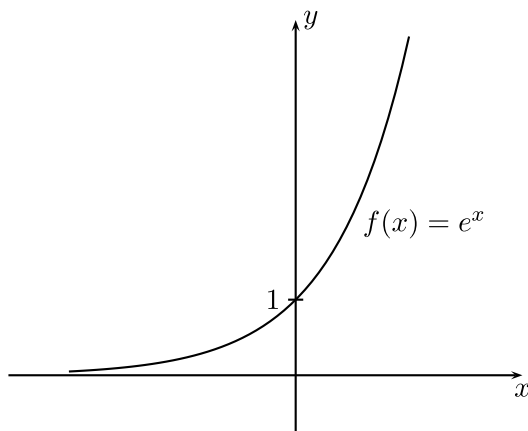
$$e \approx 2.718281828$$

De hecho, se puede probar que el número  $e$  está dado por el límite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Más adelante, se probará este hecho.

De esta manera, se tiene la **función exponencial**  $f(x) = e^x$ , llamada también algunas veces función exponencial natural. Como la base  $e > 1$ , su gráfica es creciente.



La función exponencial  $f(x) = e^x$ , siempre es positiva y crece más rápido que cualquier función polinomial. Su dominio es todo  $\mathbb{R}$  y su imagen está definida en el intervalo  $(0, \infty)$ , es decir:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{Im } f = (0, \infty).$$

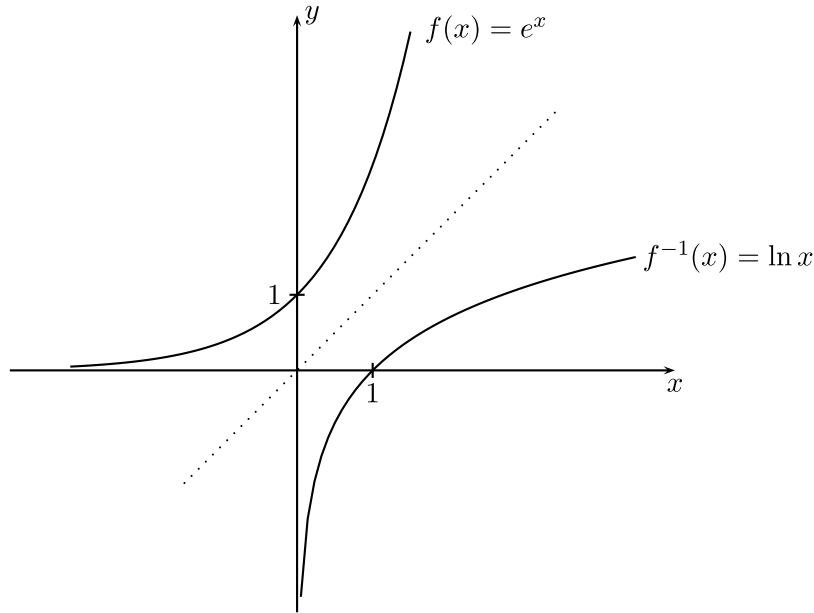
A medida que  $x \rightarrow \infty$ ,  $e^x \rightarrow \infty$ ; mientras que si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $e^x \rightarrow 0$ . En términos de límites se escribe así:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$f(x) = e^x$  es inyectiva en todo su dominio, así que tiene inversa  $f^{-1}(x)$ , llamada **logaritmo natural** y se denota por

$$f^{-1}(x) = \ln x.$$

La gráfica de la función inversa debe ser simétrica con respecto a la recta con pendiente de  $45^\circ$ .



Se observa que el dominio de  $f^{-1}(x) = \ln x$ , es el intervalo  $(0, \infty)$ ; mientras que su imagen está definida en el intervalo  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ . Esta gráfica tiene la característica que a medida que  $x \rightarrow \infty$ ,  $\ln x \rightarrow \infty$ ; mientras que si  $x \rightarrow 0$ ,  $\ln x \rightarrow -\infty$ . Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Usando la definición de función inversa, se cumple lo siguiente:

1. Si  $x > 0$ , entonces

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x.$$

2. Si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln e^x = x.$$

**2.6.16. Teorema.**

- (a) Si  $x > 0$ , entonces  $e^{\ln x} = x$

(b) Si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $\ln e^x = x$ .

Aplicando el teorema anterior, se pueden simplificar expresiones como:

1.  $e^{\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}$
2.  $\ln(e^{\sin x}) = \sin x$ .

**2.6.17. Ejemplo.** Simplifica las siguientes expresiones, utilizando las propiedades de logaritmo natural.

1. Si  $x > 0$ , entonces  $\ln(x^5) = 5 \ln x$ .
2. Si  $x > 0$ , entonces  $\ln(\sqrt[3]{x^2}) = \ln(x^{2/3}) = \frac{2}{3} \ln x$ .
3. Si  $x > 0$ , entonces

$$\ln \left[ \frac{x^2}{(x+1)^3} \right] = \ln(x^2) - \ln(x+1)^3 = 2 \ln x - 3 \ln(x+1).$$

4. Si  $x, y \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\ln \left( \frac{e^x}{e^y} \right) = \ln(e^{x-y}) = x - y.$$

5. Si  $x > 0$ , entonces

$$\ln [x^3(x^2 + 1)^2] = \ln x^3 + \ln(x^2 + 1)^2 = 3 \ln x + 2 \ln(x^2 + 1). \quad \blacksquare$$

**2.6.18. Ejemplo.** ¿Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona? Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo  $R$  (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico, puede ser modelado mediante la ecuación:

$$R = 6e^{kx} \tag{2.4}$$

donde  $x$  es la concentración de alcohol en la sangre y  $k$  una constante.

- (a) Al suponer una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre, produce un riesgo del 10 por ciento ( $R=10$ ) de sufrir un accidente, ¿cuál es el valor de la constante?
- (b) Utiliza el valor de la constante  $k$  e indica cuál es el riesgo para una concentración de alcohol de 0.17.
- (c) Con el mismo valor de  $k$ , indica la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100 por ciento.

- (d) Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20 por ciento o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos, ¿con qué concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado o multado?

**Solución:**

- (a) Una concentración de 0.04 y un riesgo del 10 por ciento, indica que  $x = 0.04$  y  $R = 10$ . Al sustituir estos valores en la ecuación (2.4), se obtiene

$$\begin{aligned} 10 &= 6e^{0.04k} \\ \frac{10}{6} &= e^{0.04k} \\ \ln\left(\frac{10}{6}\right) &= 0.04k \\ k &= \frac{1}{0.04} \ln\left(\frac{5}{3}\right) = 12.77 \end{aligned}$$

Con el valor  $k$  encontrado, la ecuación (2.4) se puede escribir en la forma:

$$R = 6e^{12.77x} \tag{2.5}$$

- (b) Al sustituir  $x = 0.17$  en (2.5), se obtiene

$$R = 6e^{12.77(0.17)} = 52.6$$

Este resultado indica que para una concentración de alcohol de 0.17, el riesgo de sufrir un accidente es del 52.6 por ciento.

- (c) Al sustituir  $R = 100$  en (2.5) y resolviendo para  $x$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 100 &= 6e^{12.77x} \\ \frac{100}{6} &= e^{12.77x} \\ \ln\left(\frac{100}{6}\right) &= 12.77x \\ x &= \frac{1}{12.77} \ln\left(\frac{50}{3}\right) = 0.22 \end{aligned}$$

Este resultado, indica que para una concentración de alcohol de 0.22, el riesgo de sufrir un accidente es de 100 por ciento.

- (d) Con  $R = 20$  en la ecuación (2.5), se determina la concentración  $x$  de alcohol en la sangre.

$$\begin{aligned} 20 &= 6e^{12.77x} \\ \frac{20}{6} &= e^{12.77x} \\ x &= \frac{1}{12.77} \ln\left(\frac{10}{3}\right) = 0.094 \end{aligned}$$

Este resultado indica que un conductor que presente una concentración de alcohol mayor o igual a 0.094 debe ser arrestado o multado. ■

## 2.7. Funciones hiperbólicas básicas

Las funciones hiperbólicas que se van a definir, son útiles en ciertas aplicaciones del cálculo y también facilitan en algunas ocasiones la evaluación de ciertas integrales que más adelante se estudiarán. El nombre de función hiperbólica, se deriva por el hecho de que hay una relación estrecha con una hipérbola. Al igual que las funciones trigonométricas, hay seis funciones hiperbólicas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Las cuatro últimas se definen en función de las dos primeras.

Las propiedades de las funciones hiperbólicas que se enunciarán más adelante, tienen un cierto parecido con las de las funciones trigonométricas, salvo en algunas ocasiones por una diferencia de signo.

Se enuncia la definición de las funciones: **seno y coseno hiperbólicos**.

**2.7.1. Definición.** Sea  $x \in \mathbb{R}$ .

1. El **coseno hiperbólico** de  $x$ , denotado por  $\cosh x$ , se define como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2. El **seno hiperbólico** de  $x$ , denotado por  $\sinh x$ , se define como

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Se observa que el coseno y seno hiperbólicos, no son sino combinaciones de la función exponencial. Una primera identidad que los relaciona con la hipérbola (de ahí el nombre de función hiperbólica) es:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \left( \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \right) \\ &= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

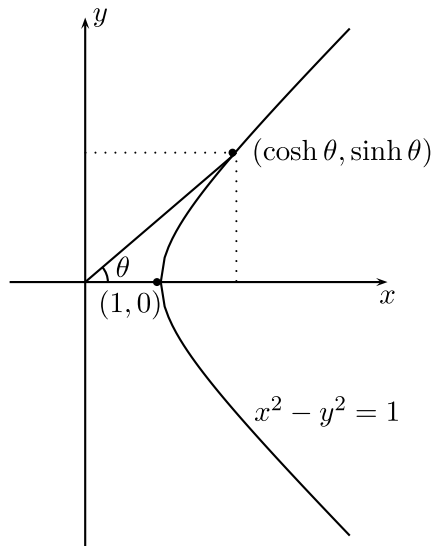
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{2.6}$$

Esta identidad, dice que  $(\cosh x, \sinh x)$ , satisface la ecuación de la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En términos de ángulos, dice que si  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces el punto  $(\cosh \theta, \sinh \theta)$  está en la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ . De aquí el nombre de **funciones hiperbólicas**.

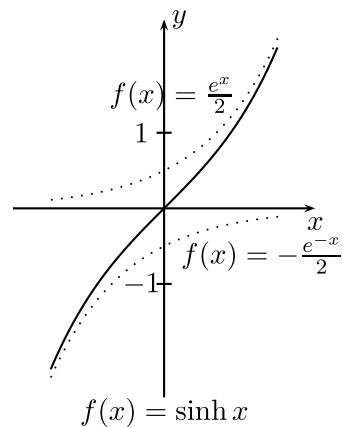
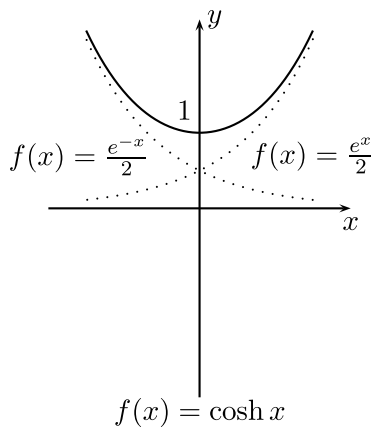
Recordemos que en las funciones trigonométricas, el punto  $(\cos \theta, \sin \theta)$  está en el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , para toda  $\theta$ . Por este hecho con frecuencia las funciones trigonométricas reciben también el nombre de **funciones circulares**, por estar relacionados con un círculo.



Las gráficas de las funciones hiperbólicas  $f(x) = \cosh x$  y  $f(x) = \sinh x$ , se pueden construir si se suman para  $\cosh x$  o se restan para  $\sinh x$ , las ordenadas de las gráficas de  $f(x) = \frac{1}{2}e^x$  y  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ . Un hecho importante es que la función  $\cosh x$  es par; mientras que la función  $\sinh x$  es impar. Esto es

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x.$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x.$$



Se observa que no son periódicas estas gráficas; sin embargo, hay simetría con respecto al eje  $y$  para la gráfica de  $\cosh x$ , y simetría con respecto al origen para  $\sinh x$ , y esto por el hecho de ser una función par e impar respectivamente.

A continuación, se proporciona una lista de identidades para estas funciones hiperbólicas, teniendo un cierto parecido con las identidades trigonométricas.

**2.7.2. Teorema.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$(a) \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$(b) \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$(c) \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

$$(d) \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$(e) \cosh^2 x = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$$

$$(f) \sinh^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}.$$

**Demostración:**

(a) Desarrollando el lado derecho de la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned} \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right] \left[ \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right] + \\ &\quad \left[ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right] \left[ \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right] \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4} + \\ &\quad \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \sinh(x + y). \end{aligned}$$

(b) Análogo al inciso (a).

(c) Se sigue del inciso (a) como sigue:

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= \sinh(x + x) \\ &= \sinh x \cosh x + \cosh x \sinh x \\ &= 2 \sinh x \cosh x. \end{aligned}$$

(d) Se sigue del inciso (b).

(e) Por (2.6) se tiene que  $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ . Por otra parte, del inciso (d) se sigue que  $\sinh^2 x = \cosh 2x - \cosh^2 x$ . Por lo tanto,

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + \cosh 2x - \cosh^2 x.$$

Luego,  $2 \cosh^2 x = 1 + \cosh 2x$ . Finalmente se tiene

$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}.$$

(f) Análogo al inciso anterior.  $\square$

**Actividad 25.** Escribe las pruebas de los inciso (b), (d) y (f) del teorema anterior.

**2.7.3. Definición.** Las funciones hiperbólicas restantes se definen de la siguiente manera:

$$1. \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$2. \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad (x \neq 0)$$

$$3. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

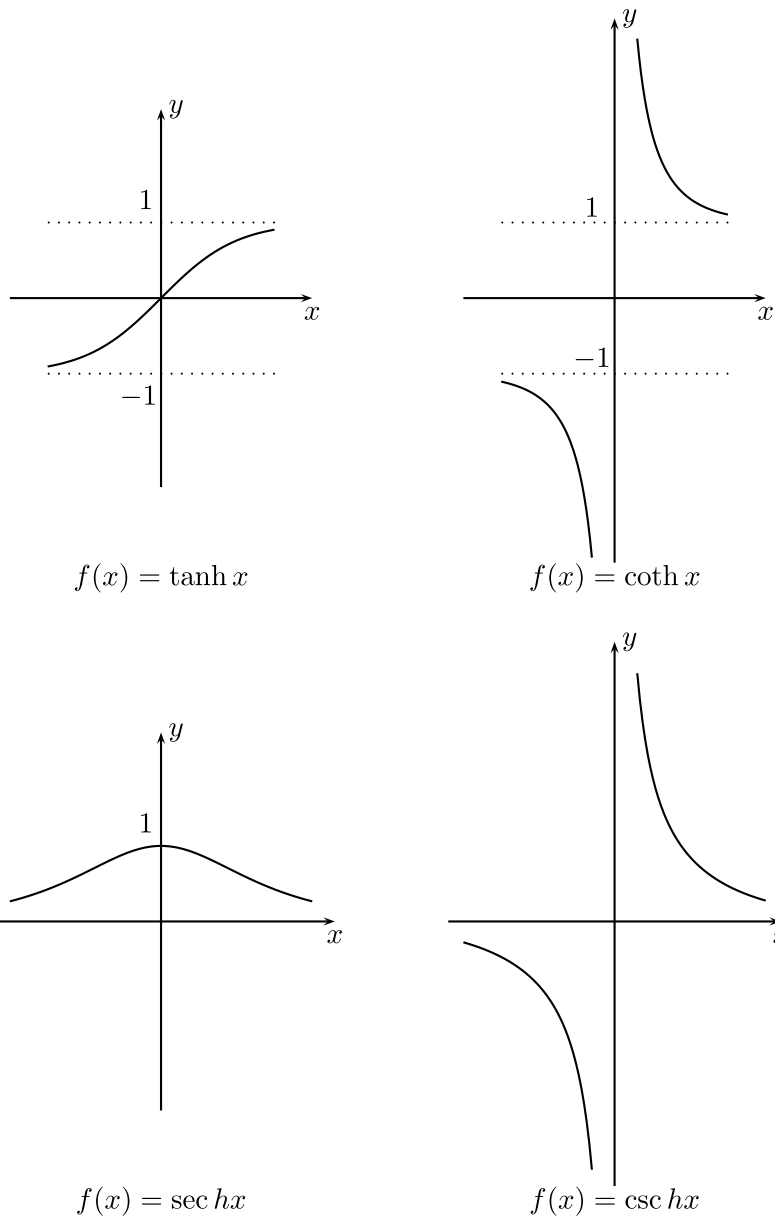
$$4. \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}; \quad (x \neq 0).$$

**Actividad 26.** Comprueba las siguientes igualdades:

$$\tanh(-x) = -\tanh x, \quad \coth(-x) = -\coth x, \quad \operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x,$$

mientras que  $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$ .

Es decir, las funciones hiperbólicas: tangente, cotangente y cosecante, son funciones impares; mientras que la secante hiperbólica es par. De esta forma, hay simetría en las gráficas de cada una con respecto al origen o al eje  $y$ , de acuerdo si es impar o par. Por otra parte, ninguna tiene periodo, esto es lo que distingue entre las gráficas de las funciones trigonométricas de las hiperbólicas. A continuación se presentan las gráficas de estas funciones hiperbólicas.



Se observa que la gráfica de  $f(x) = \tanh x$ , tiene dos asíntotas horizontales:  $y = -1$  y  $y = 1$ . Esto es cierto, debido a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

De la misma forma

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1.$$

El dominio e imagen de  $f(x) = \tanh x$  son:  $\operatorname{Dom} f = (-\infty, \infty)$ ,  $\operatorname{Im} f = (-1, 1)$ .

Al igual que la tangente hiperbólica, la gráfica de  $f(x) = \coth x$  tiene dos asíntotas horizontales:  $y = -1$  e  $y = 1$ . De esta forma, se puede comprobar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -1.$$

Como  $f(x) = \coth x$  se indetermina en  $x = 0$ , significa que tiene una asíntota vertical:  $x = 0$ . El dominio e imagen de  $f(x) = \coth x$  son:

$$Dom f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \quad \text{y} \quad Im f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

**Actividad 27.**

1. Comprueba que  $y = 0$  es una asíntota horizontal de  $f(x) = \sec hx$ . Para ello, debes comprobar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Determina  $Dom f$  e  $Im f$ .

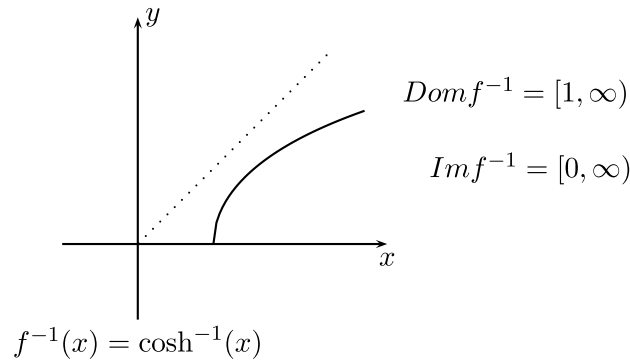
2. Comprueba que  $y = 0$  es una asíntota horizontal de  $f(x) = \operatorname{csc} hx$  y  $x = 0$ , una asíntota vertical. Determina  $Dom f$  e  $Im f$ .

**Inversa de la función coseno hiperbólico.**

La función  $f(x) = \cosh x$  es inyectiva en  $[0, \infty)$ , entonces tiene inversa  $f^{-1}(x)$  en este intervalo, denotado por

$$f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x.$$

La gráfica de esta inversa, debe ser simétrica con respecto a la recta  $y = x$ .



Usando la definición de composición y función inversa, se tiene

1. Si  $x \in [1, \infty)$ , entonces

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\cosh^{-1} x) = \cosh(\cosh^{-1} x) = x.$$

2. Si  $x \in [0, \infty)$ , entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\cosh x) = \cosh^{-1}(\cosh x) = x.$$

Se puede obtener una expresión para  $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$ , si se despeja<sup>8</sup> la variable  $x$  de  $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Esto es

$$\begin{aligned} 2y &= e^x + e^{-x} \\ 2ye^x &= e^{2x} + 1 \\ e^{2x} - 2ye^x + y^2 &= y^2 - 1 \\ (e^x - y)^2 &= y^2 - 1 \\ e^x - y &= \pm\sqrt{y^2 - 1} \\ e^x &= y \pm \sqrt{y^2 - 1}. \end{aligned}$$

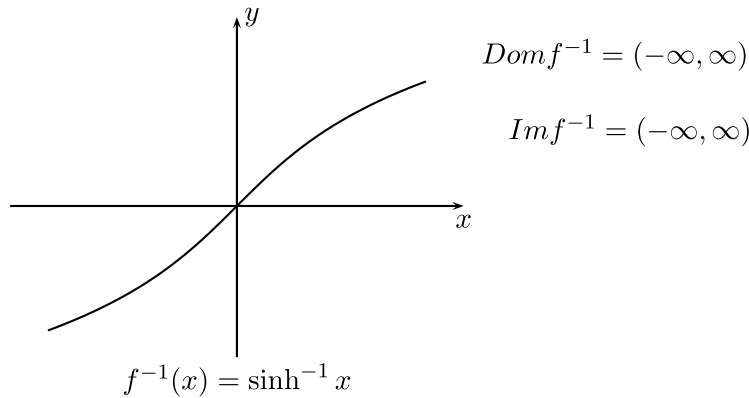
Dado que  $x > 0$ ,  $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$  no puede ser menor que 1. Luego, si  $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ , se tiene que al resolver la desigualdad  $y - \sqrt{y^2 - 1} > 1$  se llega a que  $y < 1$  lo cual es una contradicción puesto que  $y$  no puede ser menor que 1. Por lo tanto,  $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ . De aquí se sigue que  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ . Finalmente se tiene que

$$f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{si } x \in [1, \infty).$$

### Inversa de la función seno hiperbólico.

$f(x) = \sinh x$  tiene función inversa  $f^{-1}(x) = \sinh^{-1} x$  en todo su dominio, debido a que es inyectiva.

Su gráfica es como sigue:



Nuevamente, al despejar  $x$  de  $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , se obtiene

$$f^{-1}(x) = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

**Actividad 28.** Apoyándote en las gráficas de  $f(x) = \tanh x$ ,  $f(x) = \coth x$ ,  $f(x) = \operatorname{sech} x$  y  $f(x) = \operatorname{csc} hx$ ,

<sup>8</sup>Para obtener la inversa de una función inyectiva  $f(x)$ , se siguen los pasos: (1) Se escribe  $y = f(x)$ . (2) Se despeja la variable  $x$  del paso (1) para obtener una expresión de la forma  $x = g(y)$ . De esta forma, la inversa  $f^{-1}(x)$  de  $f(x)$  es justamente  $g(x)$ .

1. Proporciona el intervalo donde es inyectiva cada una de las funciones anteriores.
2. Dibuja la gráfica de la función inversa de cada función hiperbólica:  $f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x$ ,  $f^{-1}(x) = \coth^{-1} x$ ,  $f^{-1}(x) = \operatorname{sech}^{-1} x$  y  $f^{-1}(x) = \operatorname{csc} h^{-1} x$ .
3. Proporciona el  $\operatorname{Dom} f^{-1}$  y  $\operatorname{Im} f^{-1}$  para cada función inversa.

**2.7.4. Ejemplo.** Comprueba que si  $f(x) = \tanh x$ , entonces

$$f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right).$$

**Solución:** Sea  $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . Despejando  $x$  se tiene

$$\begin{aligned} ye^x + ye^{-x} &= e^x - e^{-x} \\ (1+y)e^{-x} &= (1-y)e^x \\ \frac{1+y}{1-y} &= e^{2x} \\ \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right) &= 2x \\ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right) &= x. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{si } x \in (-1, 1). \quad \blacksquare$$

De hecho, la inversa de cada función hiperbólica está en función de  $\ln x$ . He aquí la inversa de cada función:

$$\begin{aligned} \sinh^{-1} x &= \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right); \quad x \in \mathbb{R} \\ \cosh^{-1} x &= \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right); \quad x \in [1, \infty) \\ \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right); \quad x \in (-1, 1) \\ \coth^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right); \quad x \in (1, \infty) \\ \operatorname{sech}^{-1} x &= \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right); \quad x \in (0, 1] \\ \operatorname{csc} h^{-1} x &= \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right); \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo regular, algunas calculadoras científicas sólo proporcionan valores para  $\sinh^{-1}$ ,  $\cosh^{-1}$  y  $\tanh^{-1}$ . Las otras funciones hiperbólicas inversas, se pueden determinar utilizando directamente las fórmulas expuestas anteriormente; sin embargo, también se pueden utilizar las siguientes identidades

que reducen aún más los cálculos.

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}^{-1} x &= \cosh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \\ \operatorname{csch}^{-1} x &= \sinh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \\ \operatorname{coth}^{-1} x &= \tanh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right).\end{aligned}$$

Por ejemplo,  $\operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2}}{\frac{1}{2}} \right) = \ln(2 + \sqrt{3})$ . Este resultado también se puede obtener si se emplea la transformación expuesta anteriormente para la función  $\operatorname{sech}^{-1} x$ . Esto es,  $\operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) = \cosh^{-1}(2) = \ln(2 + \sqrt{3})$ .

Para resolver una ecuación como  $\sinh x = 2$  se procede como sigue:

$$\sinh x = 2 \text{ si, y sólo si } x = \sinh^{-1}(2) = \ln(2 + \sqrt{2^2 + 1}) = \ln(2 + \sqrt{5}).$$

## LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 2.6 y 2.7

1. Comprueba que

$$\left[ \frac{(5^2)^2 \div 5^{x^2}}{225(5^x)^{x+1}} \div \frac{(3^x)^{x-1}}{(3^2)^3 \div 3^{x^2}} \right] \cdot \frac{5^{x(2x+1)}}{3^{x(1-2x)}} = 2025.$$

2. Prueba que

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2 \sqrt{1 - \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]^2}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}.$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\log_{10}(3 - x^2) = \log_{10} 2 + \log_{10} x$

b)  $2 \log_{10} x - \log_{10}(x^2 - 6) = 1$ .

4. Sean  $a, b > 0$ ,  $a, b \neq 1$  y  $c > 0$ . Comprueba que

$$(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c.$$

5. El número  $N$  de bacterias en un instante de tiempo  $t$  está dado por:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

donde  $N_0$  es la cantidad inicial de bacterias presentes y  $k$  es una constante positiva. Si la cantidad de bacterias se duplica en tres horas, ¿cuánto tiempo tardará la colonia en triplicar su número?

6. Comprueba que

$$a) \cosh^{-1} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right); \quad x \in [1, \infty)$$

$$b) \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right); \quad |x| > 1$$

$$c) \operatorname{sech}^{-1} x = \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right); \quad x \in (0, 1]$$

$$d) \operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right); \quad x \neq 0.$$

7. Comprueba las siguientes igualdades:

$$a) \operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$b) \operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$c) \operatorname{cot} h^{-1} x = \tanh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right).$$

8. Determina el valor de  $x$  tal que,

$$a) \sinh x = \frac{3}{2}$$

$$b) \tanh x = \frac{1}{2}$$

$$c) \coth x = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

9. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

$$a) \tanh(-2)$$

$$b) \operatorname{csc} h(\ln 2)$$

$$c) \operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$d) \operatorname{csc} h^{-1}(2)$$

$$e) \coth^{-1}(3).$$

10. Comprueba la validez de las siguientes identidades:

$$a) \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$

$$b) \coth^2 x - \operatorname{csc} h^2 x = 1$$

$$c) \sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$d) \cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

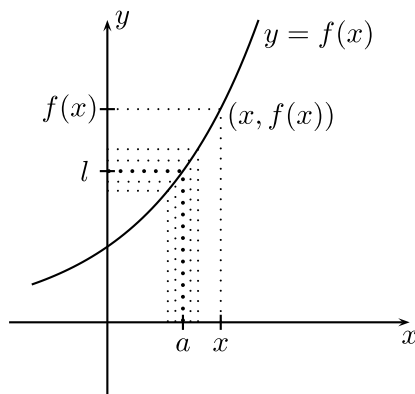


## Capítulo 3

# Aplicaciones de la trigonometría en el cálculo

### 3.1. Introducción a los límites de funciones

El concepto de límite es importante para comprender el significado de algunos términos físicos como: la velocidad, aceleración, entre otros. Como nota destacable, el concepto de límite fue debatido ampliamente por cientos de años para su comprensión y no fue sino hasta el siglo diecinueve que el matemático Alemán Karl Weierstrass (1815-1897) formuló la definición rigurosa de límite, aceptada y utilizada en la actualidad. No se dará aquí la definición rigurosa de límite debido a que va más allá de los propósitos de estudio, en cambio se explicará de manera intuitiva su significado.



En esta figura, interesa saber qué pasa con las imágenes de  $y = f(x)$  cuando  $x$  se acerca al punto  $a$ . Si  $f(x)$  tiende a estar cada vez más cerca de  $l$  cuando  $x$  se acerca cada vez más al punto  $a$  tanto como se quiera, entonces intuitivamente se dice que  $f(x)$  tiene a  $l$  como límite cuando  $x$  tiende a  $a$ . De esta forma, se puede formular una definición intuitiva de límite como sigue:

**3.1.1. Definición.** *Se dice que  $l$  es el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$ , siempre que se pueda hacer que  $f(x)$  se acerque a  $l$  tanto como se quiera, escogiendo  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , sin que llegue a ser  $a$ .*

Lo anterior, se simboliza en lenguaje matemático como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

y se lee: el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$ , es igual a  $l$ .

También se acostumbra escribir de la siguiente manera:

$$f(x) \rightarrow l \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a,$$

y se lee:  $f(x)$  tiende a  $l$ , cuando  $x$  tiende a  $a$ .

El punto  $a$  no necesariamente debe pertenecer al dominio de  $f$ ; sin embargo,  $f$  debe estar definida al menos en alguna **vecindad perforada** de  $a$ , donde vecindad perforada de  $a$ , se refiere a un conjunto obtenido al eliminar el punto  $a$  de algún intervalo abierto que contiene  $a$ . Por ejemplo, si en el intervalo abierto  $(a - \delta, a + \delta)$  se elimina  $a$ , se obtiene una vecindad perforada de  $a$ .

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ a - \delta \quad a \quad a + \delta \end{array}$$

Al calcular un límite, es fundamental que la vecindad perforada sea de longitud pequeña, y para que esto se logre basta que  $\delta$  sea pequeña. Esto es importante puesto que interesa tener puntos lo suficientemente cercanos a  $a$  para determinar el comportamiento de una función cerca de  $a$ , y de esta manera, saber si existe o no el límite de una función.

**3.1.2. Ejemplo.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ .

**Solución:**

Se elabora una tabla de valores cercanos a  $a = 2$  por la izquierda y por la derecha para determinar el posible valor del límite.

$x$	$f(x) = x^2$	$x$	$f(x) = x^2$
1.9	3.6100	2.1	4.4100
1.99	3.9601	2.01	4.0401
1.999	3.9960	2.001	4.0040
1.9999	3.9996	2.0001	4.0004
1.99999	4.0000	2.00001	4.0000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	4	2	4

En la tabla se puede observar que a medida que  $x$  tiende a 2 por la izquierda,  $f(x)$  tiende a 4; de manera análoga, si  $x$  tiende a 2 por la derecha,  $f(x)$  también se va aproximando a 4. Aunque se usan únicamente algunos valores particulares de  $x$ , proporciona una evidencia de que

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Observa que en este ejemplo, no se substituyó directamente el valor  $x = 2$  en la función  $f(x) = x^2$  para obtener como límite el valor  $l = 4$ . Sin embargo, aunque esta substitución produce una respuesta correcta en este caso particular, en muchos límites produce una respuesta incorrecta o ninguna respuesta como en los ejemplos que se analizarán a continuación.

**3.1.3. Ejemplo.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

**Solución:** En este caso, no se puede hacer directamente la substitución  $x = 1$  en la función  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  puesto que la fracción queda indefinida. Sin embargo, al analizar la siguiente tabla de valores cercanos a 1 por la izquierda y derecha, se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

$x$	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$x$	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
.8	1.8	1.2	2.2
.9	1.9	1.1	2.1
.99	1.99	1.01	2.01
.999	1.999	1.001	2.001
.9999	1.9999	1.0001	2.0001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2

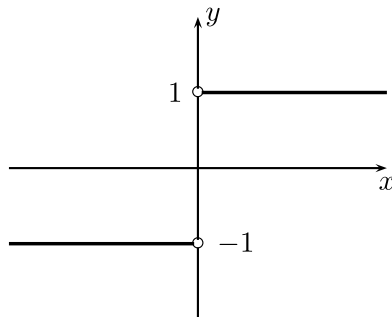
En general, para que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , es necesario que  $f(x)$  se aproxime a  $l$  cuando  $x$  se acerca a  $a$  por la izquierda y por la derecha. Cuando  $f(x)$  se aproxima a diferentes valores, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe.

**3.1.4. Ejemplo.** Analiza  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ .

**Solución:** Se observa que

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La gráfica de esta función, es como sigue:



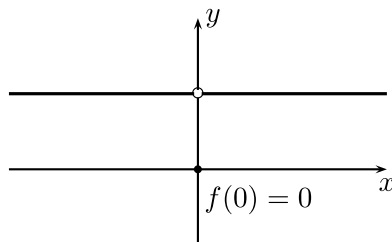
Nótese que si  $x \rightarrow 0$  por la derecha, entonces  $f(x) \rightarrow 1$ ; mientras que si  $x \rightarrow 0$  por la izquierda,  $f(x) \rightarrow -1$ . En consecuencia, no se logra que  $f(x)$  se acerque a un sólo valor. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \text{ no existe. } \blacksquare$$

**3.1.5. Ejemplo.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La gráfica de esta función, es como sigue:



Si  $x \rightarrow 0$  por ambos lados (derecha o izquierda) sin que  $x$  sea cero,  $f(x) \rightarrow 1$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1. \quad \blacksquare$$

En este ejemplo, el valor del límite en  $x = 0$ , no es igual al valor de la función en  $x = 0$  puesto que  $f(0) = 0$ . Así que si  $f(x)$  está definida en  $x = a$ , no garantiza que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Las propiedades de límites que se enuncian a continuación, ayudan a reducir los cálculos al evaluar el límite de una función.

## PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones.

1. Si  $f(x) = c$ , donde  $c$  es una constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

2. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$ , entonces

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_1 \pm l_2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_1 \cdot l_2$$

- c) Si  $l_2 \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

3. Si  $n$  es un entero positivo y  $a > 0$  para valores pares de  $n$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

4. Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(l).$$

**3.1.6. Ejemplo.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\ &= 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El valor de este límite coincide con el analizado en el ejemplo 3.1.3, pero ya sin exhibir una tabla de valores. El cálculo se hizo más directo.

**Actividad 29.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ .

[Sugerencia.] Factoriza el numerador y denominador de la fracción y reduce.

**3.1.7. Ejemplo.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} \\
 &= \frac{1}{4}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

En la primera igualdad, a la fracción  $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$  se le multiplicó en el numerador y denominador por  $\sqrt{x+4}+2$ , que se llama el *conjugado* de  $\sqrt{x+4}-2$ . Esta situación, regularmente se aplica cuando están presentes las raíces en una fracción.

**Actividad 30.** Calcula  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ .

Se enuncia otra propiedad muy útil para determinar límites de funciones, denominado **ley del sandwich**.

#### Ley del sandwich

Si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  en alguna vecindad perforada de  $a$ , y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a} h(x), \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$

Esta ley dice que si la función  $g(x)$  queda atrapada entre  $f(x)$  y  $h(x)$  cerca de  $a$ , y si  $f(x)$  y  $g(x)$  tienden al mismo límite  $l$ , entonces  $g(x)$  tiende también a  $l$ .

**3.1.8. Ejemplo.** Analiza  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**Solución:**

Se sabe que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$  para toda  $x \neq 0$ . Por lo que

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \quad \text{para toda } x \neq 0.$$

Y como  $|x| \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , entonces por la ley del sandwich para límites, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Se ha mencionado que para asegurar que el límite de una función  $f(x)$  exista y sea igual a  $l$  cuando  $x$  tiende a  $a$ , es necesario que  $f(x)$  tienda a  $l$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda y la derecha. Los límites cuando  $x \rightarrow a$  por la izquierda y  $x \rightarrow a$  por la derecha, se denominan *límites laterales*.

### 3.1.9. Definición.

(a) Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo  $(c, a)$ . Se dice que  $l$  es el **límite de  $f$  por la izquierda** cuando  $x$  tiende a  $a$ , denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

si  $f(x)$  se acerca tanto como se quiera a  $l$ , eligiendo  $x \in (c, a)$  suficientemente próximo a  $a$ .

(b) Sea  $f(x)$  una función definida en  $(a, c)$ . Se dice que  $l$  es el **límite de  $f$  por la derecha** cuando  $x$  tiende a  $a$ , denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

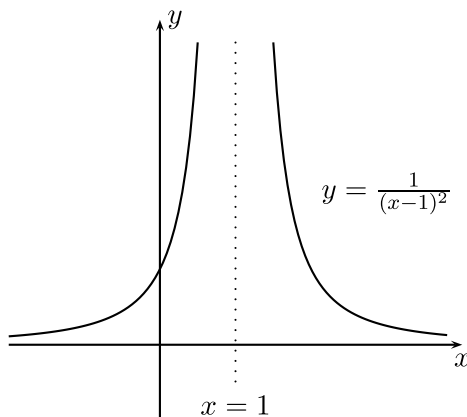
si  $f(x)$  se acerca tanto como se quiera a  $l$ , eligiendo  $x \in (a, c)$  suficientemente próximo a  $a$ .

**Nota:**  $x \rightarrow a^-$  se lee:  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda; mientras que  $x \rightarrow a^+$  se lee:  $x$  tiende a  $a$  por la derecha. Los límites:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , se conocen como **límites laterales**.

**3.1.10. Lema.** Sea  $f(x)$  una función definida en una vecindad perforada de  $a$ . Entonces,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

**3.1.11. Ejemplo.** Determina si existe  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ .

**Solución:** La gráfica de  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  es como sigue:



La gráfica de esta función crece indefinidamente conforme  $x$  tiende a 1 tanto a la izquierda como a la derecha. Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Por lo que los límites laterales coinciden, y por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty. \quad \blacksquare$$

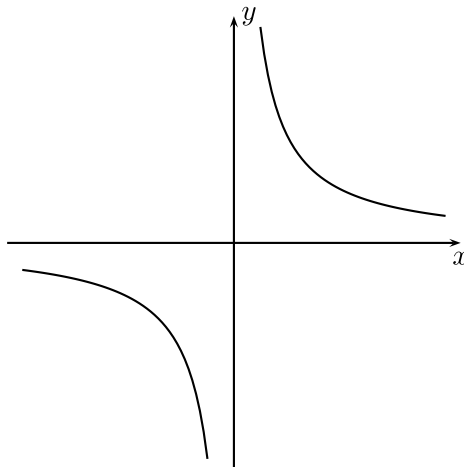
De esta forma, se puede hablar de límites que tienden a infinito. En este mismo ejemplo, se puede observar que la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  se va pegando al eje  $x$  a medida que  $x$  aumenta o disminuye a la derecha o izquierda de 1. Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Así que también se pueden calcular límites de funciones cuando la variable  $x$  tiende a infinito.

**3.1.12. Ejemplo.** Determina si existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ .

**Solución:**



En la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ , se puede observar que a medida que  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$ ; mientras que si  $x \rightarrow 0^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.} \quad \blacksquare$$

En este ejemplo también se tiene que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}.$$

En general, si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

De aquí, se sigue también que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad \text{para cualquier número racional positivo } k.$$

**3.1.13. Ejemplo.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x}{5x^3 + x^2 - 1}$ .

**Solución:** En este caso, se divide cada término de la fracción entre la variable que tenga el exponente mayor:  $x^3$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x}{5x^3 + x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{3}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})} \\ &= \frac{2 - 0}{5 + 0 - 0} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

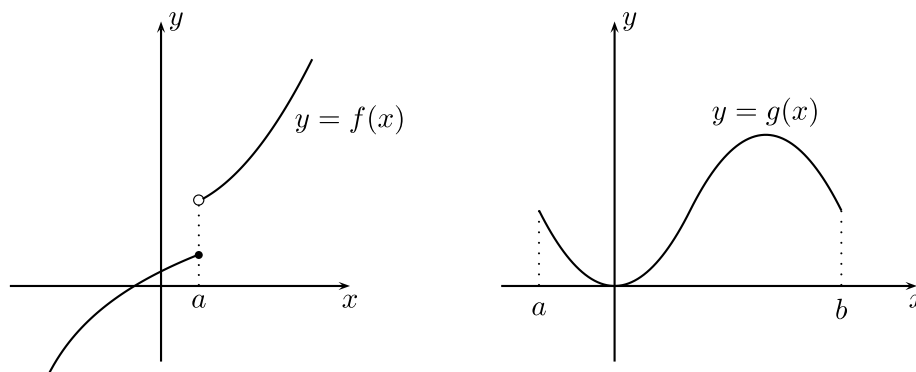
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x}{5x^3 + x^2 - 1} = \frac{2}{5}. \quad \blacksquare$$

Se vio anteriormente que si una función  $f(x)$  está definida en  $x = a$ , no garantiza que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  sea  $f(a)$ . Cuando esto sucede, se dice que  $f(x)$  es *continua* en  $x = a$ .

**3.1.14. Definición.** Sea  $f(x)$  una función definida en alguna vecindad de  $a$ . Se dice que  $f(x)$  es **continua** en  $x = a$ , si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Cuando  $f(x)$  no es continua en  $x = a$ , se dice que es **discontinua** en ese punto, y  $f(x)$  es **continua en un intervalo**  $I$ , si es continua en cada punto de  $I$ .



La gráfica de la izquierda, tiene una discontinuidad en  $x = a$ ; mientras que la gráfica de la derecha es una función continua en el intervalo  $[a, b]$ . Por ejemplo, la función  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  no es continua en  $x = 0$ , debido a que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$  no existe (veáse ejemplo 3.1.4).

**3.1.15. Ejemplo.** Determina si la función  $f(x)$  es continua en  $x = 0$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

**Solución:**

Se deben calcular límites laterales para determinar si existe el límite de la función cuando  $x$  tiende a 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0, \quad \text{y} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{ver ejemplo 3.1.8}) \end{aligned}$$

Los límites laterales coinciden, por lo que usando el lema 3.1.10, el límite de  $f(x)$  existe cuando  $x \rightarrow 0$ , y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Por otra parte,  $f(0) = 0$ . Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ , y  $f(x)$  es continua en  $x = 0$ . ■

**3.1.16. Ejemplo.** Determina el valor de  $a$  y  $b$ , para que  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2, \\ bx + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

**Solución:**

Para que  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ , se necesita que  $ax + 5 = x^2 + 1$  en  $x = -1$ , y que  $x^2 + 1 = bx + 6$  en  $x = 2$ . Esto se logra cuando  $a = 3$  para la primera ecuación, y  $b = -\frac{1}{2}$  para la segunda. Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2, \\ -\frac{1}{2}x + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

es continua en todo  $\mathbb{R}$ . ■

Una consecuencia directa de las propiedades de los límites, es que si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $x$ , entonces  $cf \pm g$ ,  $f \cdot g$  también son continuas en  $x$ , donde  $c \in \mathbb{R}$ . Más aún, si  $g$  es

continua en  $x = a$  y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $a$ . En términos de límites, esto último se traduce así:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

**3.1.17. Ejemplo.** Sean  $g(x) = \frac{1}{x+1}$  y  $f(x) = \sqrt{x}$ . Comprueba que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Solución:** La función  $g(x)$  es continua en  $x = 1$  y  $f(x)$  es continua en  $g(1) = \frac{1}{2}$ . De esta forma, se tiene que,

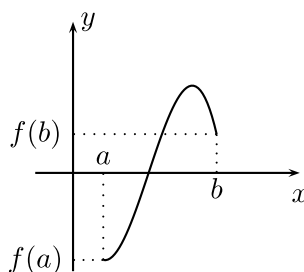
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right) = f(g(1)).$$

Pero  $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$  y  $f(g(1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Por lo tanto,

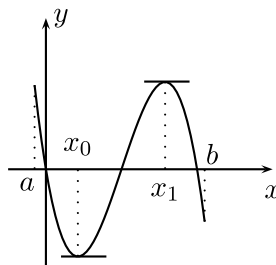
$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

Para finalizar con esta sección, se enuncian algunos resultados importantes de continuidad llamados **teoremas fuertes de continuidad**, para intervalos cerrados de  $\mathbb{R}$ .

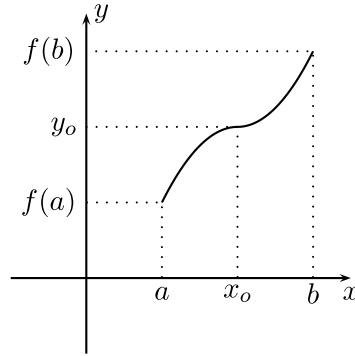
**3.1.18. Teorema.** Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  y  $f(a) < 0 < f(b)$ , entonces existe  $x \in [a, b]$ , tal que  $f(x) = 0$ .



**3.1.19. Teorema.** Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene un máximo y un mínimo en  $[a, b]$ .



**3.1.20. Teorema. (Teorema del valor intermedio).** Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ , tal que  $f(a) < y_o < f(b)$  o  $f(a) > y_o > f(b)$ , entonces existe  $x_o \in (a, b)$  tal que  $f(x_o) = y_o$ .



**3.1.21. Ejemplo.** Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[0, 1]$ , cuya imagen es el mismo intervalo  $[0, 1]$ . Prueba que existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = x$ .

**Solución:**

Se define la función  $h(x) = f(x) - x$ . Es claro que  $h$  es continua en  $[0, 1]$ . Sea  $x_o \in [0, 1]$  tal que  $f(x_o) = 0$ . Entonces  $h(x_o) = f(x_o) - x_o = 0 - x_o \leq 0$ . De igual forma, sea  $x_1 \in [0, 1]$  tal que  $f(x_1) = 1$ . Entonces

$$h(x_1) = f(x_1) - x_1 = 1 - x_1 \geq 0.$$

Por lo tanto,  $h(x_o) \leq 0 \leq h(x_1)$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x_o < x_1$ . Entonces, por el teorema 3.1.16, existe  $x_2 \in [x_o, x_1]$  tal que  $h(x_2) = f(x_2) - x_2 = 0$ . De aquí se sigue que  $f(x_2) = x_2$ . Por lo tanto, existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = x$ . ■

**3.1.22. Ejemplo.** Si  $c > 0$ , entonces existe  $b > 0$  tal que  $b^2 = c$ .

**Solución:**

Se define  $f(x) = x^2 - c$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $0 < c < 1$ . Se observa que  $f(0) = -c < 0$  y  $f(1) = 1 - c > 0$ . Es claro que  $f$  es continua en  $[0, 1]$ , donde  $f(0) < 0 < f(1)$ . Por el teorema del valor intermedio, existe  $b \in (0, 1)$  tal que  $f(b) = b^2 - c = 0$ . Por lo tanto,

$$b^2 = c. \quad \blacksquare$$

## LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.1

1. Usa las propiedades de los límites y evalúa los siguientes que se enlistan a continuación:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-x-2}$

b)  $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2-9}{t-3}$

c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{9+h}} - \frac{1}{3}}{h}$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}}$$

$$e) \lim_{y \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y - 3}$$

$$f) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}.$$

2. Usando los límites laterales, determina si los siguientes existen.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - x}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ |x|^3 \left( x + 1 - \frac{2}{x} \right) \right]$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{|x-2|}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{|x|}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \text{ donde}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+1}{x^4+3} & \text{si } x < -1, \\ \frac{x^3+1}{x^2-6x+5} & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

3. Esboza la gráfica de  $f(x)$  y determina en qué puntos la gráfica de la función es discontinua.

a)

$$f(x) = \begin{cases} |3x - 6| & \text{si } x < 3, \\ 2x - 3 & \text{si } 3 \leq x < 5, \\ 4 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x < 3, \\ 2x - 3 & \text{si } 3 \leq x < 5, \\ 4 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1, \\ \ln x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 4, \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

4. Determina el valor de  $a$  y  $b$ , para que las siguientes funciones sean continuas.

a)

$$f(x) = \begin{cases} ax + 11 & \text{si } x < 3, \\ x^2 - 8x + 16 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x \leq -1, \\ ax^2 + b & \text{si } -1 < x \leq 2, \\ 6 - \frac{x}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2, \\ a & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1, \\ ax^2 - 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

5. Calcula los siguientes límites.

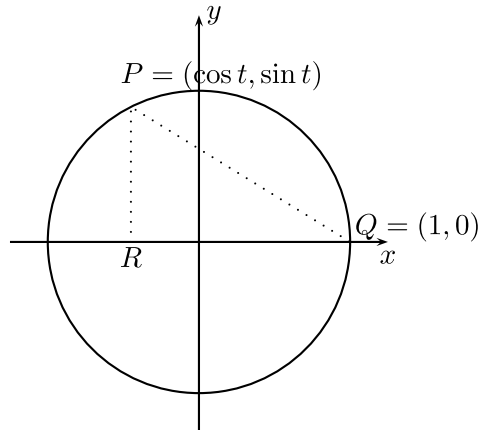
$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{2x^4 + 3x + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{3x^5 - 2x^4 + x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^3}{3x^4 + 2x - 6}$$

### 3.2. Límites trigonométricos

En esta sección, se retomarán a las funciones trigonométricas, logarítmica y exponencial, y se estudiarán algunos límites importantes que involucran a éstas. Se comenzará comprobando que  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$ . Consideremos la figura:



#### Observaciones:

1. Si  $-2\pi < t < 2\pi$ , entonces la longitud de arco  $\widehat{PQ} = |t|$ . Es decir, el punto  $P = (\cos t, \sin t)$  está a una distancia del punto  $Q = (1, 0)$  de  $|t|$  unidades a lo largo del círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

2. La distancia de  $P$  a  $Q$ :  $d(P, Q)$ , no es mayor que  $\widehat{PQ}$ , es decir:

$$d(P, Q) \leq \widehat{PQ}.$$

3. Se traza desde  $P$  una perpendicular al eje  $x$ , siendo  $R$  el punto de intersección. Entonces,  $d(P, R) = |\sin t|$ . Por otro lado, en el triángulo rectángulo  $PRQ$ ,  $|\sin t| = d(P, R) \leq d(P, Q)$ , debido a que  $PQ$  es la hipotenusa y  $PR$  un cateto en dicho triángulo.

4. Por lo tanto,

$$|\sin t| \leq \widehat{PQ} = |t|.$$

Esto se deduce de las desigualdades de los pasos (3), (2), y del valor de  $\widehat{PQ}$  en (1). Por consiguiente,  $-|t| \leq \sin t \leq |t|$ , y aplicando la ley del sandwich, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} |\sin t| = 0.$$

5. Por otro lado, como  $-|\sin t| \leq \sin t \leq |\sin t|$ , se tiene finalmente que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0.$$

Ahora, se observa que de la desigualdad del paso (2) y el valor de  $\widehat{PQ}$  de (1), se obtiene  $0 \leq d(P, Q) \leq |t|$ , y por la fórmula de la distancia, se tiene

$$0 \leq \sqrt{(\cos t - 1)^2 + (\sin t - 0)^2} \leq |t|.$$

Simplificando esta desigualdad, se obtiene  $0 \leq \cos^2 t - 2 \cos t + 1 + \sin^2 t \leq t^2$ , que a su vez, equivale a  $0 \leq 2 - 2 \cos t \leq t^2$ . De aquí, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t} \leq \frac{t}{2} & \text{si } t > 0, \\ 0 \geq \frac{1 - \cos t}{t} \geq \frac{t}{2} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

Así que entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

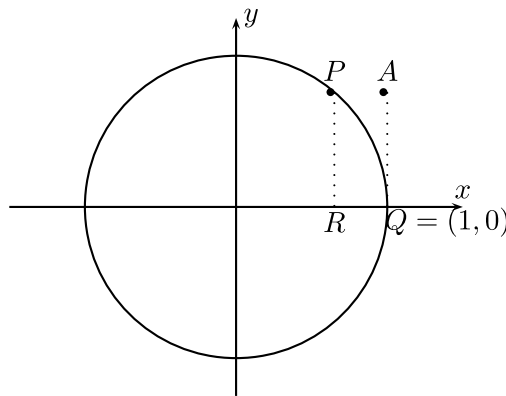
Por otro lado, la desigualdad vista anteriormente, dada por  $0 \leq 2 - 2 \cos t \leq t^2$ , se puede simplificar como  $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$ . De aquí se desprende que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1.$$

Ahora, se determinará un límite importante:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}.$$

Consideremos la figura:



Supongamos que  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  y que  $P = (\cos t, \sin t)$ . Entonces,  $A = (1, \sin t)$  y  $R = (\cos t, 0)$ . De acuerdo con esto se observa que  $\widehat{PQ} \leq d(P, A) + d(A, Q)$ . Por otra parte,

$$\widehat{PQ} = |t| = t,$$

$$d(P, A) = d(R, Q) = \sqrt{(1 - \cos t)^2} = 1 - \cos t$$

$$\text{y } d(A, Q) = d(P, R) = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t.$$

Sustituyendo esto en la desigualdad  $\widehat{PQ} \leq d(P, A) + d(A, Q)$ , se obtiene:

$$t \leq 1 - \cos t + \sin t,$$

y como  $\sin t \leq t$ , entonces  $t \leq 1 - \cos t + \sin t \leq 1 - \cos t + t$ . Dividiendo entre  $t$  esta doble desigualdad, se obtiene

$$1 \leq \frac{1 - \cos t}{t} + \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1 - \cos t}{t} + 1.$$

Ahora, como  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  y  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ , si  $t$  a 0 por la derecha en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

En forma análoga, si  $-\frac{\pi}{2} < t < 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Se han obtenido el valor de tres límites importantes:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Utilizando estos límites, se pueden obtener el valor de otros con la ayuda de las propiedades de los límites y de las funciones trigonométricas. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0.$$

**3.2.1. Ejemplo.** Comprueba que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \left( \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \left( \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \right) \\ &= (1)(1) \\ &= 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3.2.2. Ejemplo.** Comprueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$ , donde  $\alpha$  es cualquier constante diferente de cero.

**Solución:** Para obtener este límite, se hace un cambio de variable como sigue:

Sea  $\alpha x = y$ , entonces  $x = \frac{y}{\alpha}$ . Como  $x \rightarrow 0$ , si y sólo si  $y \rightarrow 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{\alpha}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \alpha \frac{\sin y}{y} \\ &= \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \\ &= \alpha(1) \\ &= \alpha. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Actividad 31.** Comprueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes diferentes de cero. [Sugerencia]. Usa el ejemplo anterior.

**3.2.3. Ejemplo.** Comprueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2+x) - \tan 2}{x} = \sec^2(2)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2+x) - \tan 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2 + \tan x}{1 - \tan 2 \tan x} - \tan 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2 + \tan x - \tan 2(1 - \tan 2 \tan x)}{1 - \tan 2 \tan x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2 + \tan x - \tan 2 + \tan^2(2) \tan x}{x(1 - \tan 2 \tan x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 + \tan^2(2))}{x(1 - \tan 2 \tan x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 + \tan^2(2)}{1 - \tan 2 \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2(2)}{1 - \tan 2 \tan x} \\ &= (1)(1 + \tan^2(2)) \\ &= \sec^2(2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Actividad 32.** Comprueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3+x) - \sin 3}{x} = \cos 3$ .

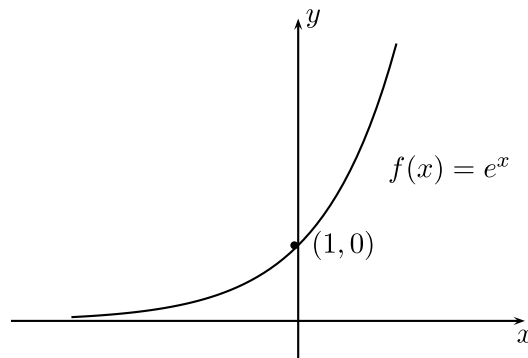
**3.2.4. Ejemplo.** Usando un método algebraico, comprueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\
 &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\
 &= 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} \\
 &= 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Se analizan ahora algunos límites relacionados con la función exponencial y logarítmica. Recordemos que la función exponencial es  $f(x) = e^x$ , cuya gráfica es como sigue:



La gráfica de la función exponencial es creciente y positiva en todo su dominio. De acuerdo con esto, se tienen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

Otra propiedad importante, es por su rapidez de crecimiento. La función exponencial crece más rápido que cualquier potencia de  $x$  conforme  $x \rightarrow \infty$ . Esto se traduce en términos de límites como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

O de manera alternativa,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \text{donde } n \text{ es cualquier constante positiva.}$$

Por ejemplo,

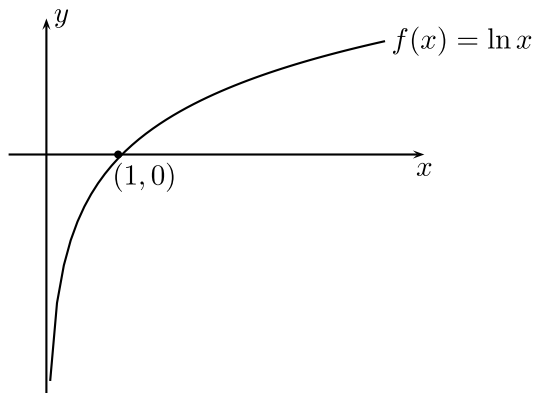
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

**3.2.5. Ejemplo.** Evalúa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - x^2}{2e^x + x^3}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - x^2}{3e^x + 4x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2 e^{-x}}{3 + 4x^3 e^{-x}} \\ &= \frac{1 - 0}{3 + 0} \\ &= \frac{1}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De manera alternativa, la función logaritmo natural  $f(x) = \ln x$ , tiene las siguientes propiedades:



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0.$$

De hecho, la función  $f(x) = \ln x$  crece más lento que cualquier potencia positiva de  $x$ . Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

Más adelante, se comprobarán estos hechos cuando se definan conceptos como la derivada o la integral.

**3.2.6. Ejemplo.** Si  $p > 0$ , comprueba que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ .

**Solución:** Sea  $y = x^p$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y^{1/p}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \frac{\ln y}{y} \\ &= \frac{1}{p} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} \\ &= \frac{1}{p} (0) \\ &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3.2.7. Ejemplo.** Si  $k > 0$ , comprueba que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = 0$ .

**Solución:** Sea  $x = \frac{1}{y}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k \ln \frac{1}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\ln y}{y^k} \\ &= -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y^k} \\ &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Con las ideas anteriores también se pueden calcular límites relacionados con las funciones hiperbólicas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right) \\ &= \infty - 0 \\ &= \infty. \end{aligned}$$

**Actividad 33.** Comprueba la validez de los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x = 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = \infty$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cosh x = 1$ .

**3.2.8. Ejemplo.** Comprueba que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\ &= \frac{1 - 0}{1 + 0} \\ &= 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.2

1. Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 4x}{\sin 7x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sin(2x-1)}{4x^2-1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}.$$

2. Comprueba que si  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \beta x}{x} = \beta.$$

3. Deduce del ejercicio anterior que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha x}{\tan \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0.$$

4. Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} x \sec x \csc x$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc(2x) \cot(2x)$$

$$k) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2}$$

$$l) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(2\theta^2)}{\theta^2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 3x}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x}$$

- $\tilde{n}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)^2}{x^2 \cos x}$   
 $o) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta}$   
 $p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{\sin x}$   
 $q) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$   
 $r) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x}$   
 $s) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$   
 $t) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi}$   
 $u) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$   
 $v) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$   
 $w) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$   
 $x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}$   
 $y) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x}$   
 $z) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan^2 x + \tan x - 2}{\tan x - 1}.$

5. Comprueba la validez de los siguientes límites.

- $a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$   
 $b) \lim_{x \rightarrow \infty} \coth x = 1$   
 $c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sec hx = 0$   
 $d) \lim_{x \rightarrow 0} \csc hx = \infty$   
 $e) \lim_{x \rightarrow 1^-} \tanh^{-1} x = \infty$   
 $f) \lim_{x \rightarrow \infty} \coth^{-1} x = 0.$

### 3.3. Derivadas trigonométricas

En esta sección, se concentrará en las derivadas de las funciones trigonométricas. La derivada es un concepto fundamental en el cálculo diferencial. Con éste, se puede obtener la recta tangente de una curva en un punto; está relacionado con la velocidad instantánea, y en general, con la razón de cambio de una variable con respecto a otra.

**3.3.1. Definición.** Sean  $y = f(x)$  una función y  $a \in \text{Dom}f$ . La **derivada** de  $f$  en el punto  $x = a$ , denotada por  $f'(a)$ , es el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (3.1)$$

donde  $f'(a) \in \mathbb{R}$ .

También se dice que la función  $f$  es **derivable** en  $x = a$ , cuando existe  $f'(a)$ . De otra forma, no lo es.

De la ecuación (3.1), si  $x = a + h$ , se obtiene  $x - a = h$ . Por lo tanto,  $h \rightarrow 0$ , si y sólo si  $x \rightarrow a$ . De esta forma,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

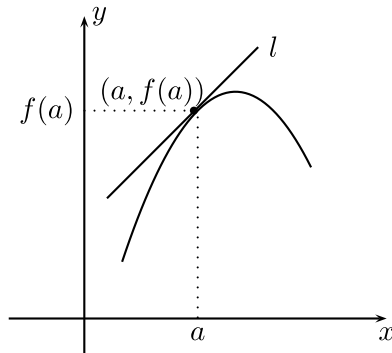
Así que la ecuación (3.1), también se puede definir como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Otras notaciones para  $f'(a)$  son:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \quad y'(a)$$

Geoméricamente, la derivada de  $f$  en  $x = a$ , expresa la **pendiente** de la recta tangente a la gráfica de  $y = f(x)$ , que pasa por el punto  $(a, f(a))$ .



Luego, como  $f'(a)$  es la pendiente de la recta tangente  $l$  que pasa por  $(a, f(a))$ , la ecuación de  $l$  está dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \quad (3.2)$$

También se puede definir  $f'(x)$  al sustituir  $a$  por la variable independiente  $x$ . De esta forma, se obtiene una nueva función  $f'(x)$  (**la función derivada**) a partir de  $f(x)$ . Es decir,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{para toda } x \text{ donde existe el límite.}$$

**3.3.2. Ejemplo.** Calcula la ecuación de la recta tangente  $l$  a la gráfica de  $f(x) = x^2$ , en el punto  $(2, 4)$ .

**Solución:** Primero se determina la función  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Como  $a = 2$  y  $f(a) = 4$ , la pendiente de la recta tangente  $l$  es  $f'(a) = f'(2) = 4$ . Luego, empleando la fórmula (3.2) se tiene que la ecuación de  $l$  es  $y - 4 = 4(x - 2)$ . Reduciendo esta ecuación, se obtiene

$$y = 4x - 4. \quad \blacksquare$$

**Actividad 34.** Determina la ecuación de la recta tangente  $l$  a la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$ , en el punto  $(4, 2)$ .

La derivada de una función se puede calcular de una manera más sencilla si se consideran las siguientes propiedades (**reglas de derivación**).

**3.3.3. Teorema.** Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $x$ . Entonces

1. Si  $f(x) = c$  ( $c$  una constante) para toda  $x \in \text{Dom} f$ , entonces  $f'(x) = 0$ .

2. Si  $f(x) = x^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$ .
3. Si  $h(x) = af(x) + bg(x)$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $h'(x) = af'(x) + bg'(x)$ .
4. Si  $h(x) = f(x)g(x)$ , entonces  $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
5. Si  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  y  $g(x) \neq 0$ , entonces

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Se deja como ejercicio para el lector demostrar estas propiedades.

También se observa que si

$$h(x) = \frac{1}{f(x)}; \quad f(x) \neq 0, \quad \text{entonces por la propiedad 5, se tiene que}$$

$$h'(x) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Esta fórmula se puede utilizar para generalizar la propiedad 2 a exponentes negativos. Así, si  $n$  es un entero negativo y  $m = -n$ , entonces  $f(x) = x^n = \frac{1}{x^m}$ , y

$$f'(x) = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = (-m)x^{(-m)-1} = nx^{n-1}.$$

Más aún, esta fórmula se puede generalizar a exponentes racionales, pero esto se hará más adelante. Por ahora se estudiará la derivada de las funciones trigonométricas. Para obtenerlas, basta determinar la derivada de las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$ . Las otras se obtienen utilizando las reglas de derivación, puesto que dependen de las funciones seno y coseno.

1. Sea  $f(x) = \sin x$ . Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= -\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x \cdot (0) + \cos x \cdot (1) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

2. Sea  $f(x) = \cos x$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
 &= -\cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
 &= -\cos x \cdot (0) - \sin x \cdot (1) \\
 &= -\sin x.
 \end{aligned}$$

3. Sea  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , donde  $\cos x \neq 0$ . Para determinar la derivada de esta función, basta utilizar la propiedad 5 de derivación. Así,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
 &= \sec^2 x.
 \end{aligned}$$

De la misma forma, se pueden obtener la derivada de las funciones  $f(x) = \csc x$ ,  $f(x) = \sec x$  y  $f(x) = \cot x$ .

**Actividad 35.** Comprueba que

1. Si  $f(x) = \csc x$ , entonces  $f'(x) = -\csc x \cot x$
2. Si  $f(x) = \sec x$ , entonces  $f'(x) = \sec x \tan x$
3. Si  $f(x) = \cot x$ , entonces  $f'(x) = -\csc x$ .

Haciendo un resumen, se tiene que:

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cot x)' = -\csc x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

Por ejemplo, se puede obtener la derivada de las siguientes funciones:

1. Si  $f(x) = \tan x + \sin x \cos x$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec^2 x + \cos x \cos x + \sin x(-\sin x) \\ &= \sec^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x. \end{aligned}$$

2. Si  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x(x) - \sin x(1)}{x^2} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}. \end{aligned}$$

3. Si  $f(x) = \frac{x}{x+\tan x}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(x + \tan x) - x(1 + \sec^2 x)}{(x + \tan x)^2} \\ &= \frac{x + \tan x - x - x \sec^2 x}{(x + \tan x)^2} \\ &= \frac{\tan x - x \sec^2 x}{(x + \tan x)^2}. \end{aligned}$$

Una primera consecuencia de la derivada es que toda función derivable es continua.

**3.3.4. Teorema. (Derivabilidad implica continuidad).** Si  $y = f(x)$  es una función derivable en  $x = a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= 0 \cdot f'(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ y } f \text{ es continua en } a. \quad \square$$

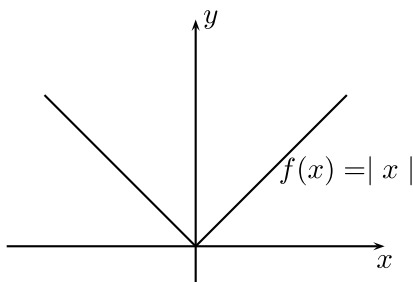
El recíproco de este teorema no se cumple. Para ver esto, se estudia la función  $f(x) = |x|$  en  $x = 0$ .

Es claro que  $f(x)$  es continua en  $x = 0$ . Sin embargo,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}. \end{aligned}$$

Pero este último límite no existe (veáse ejemplo 3.1.4). Por lo tanto,  $f(x) = |x|$  no es derivable en  $x = 0$ . Así, esta función es continua en  $x = 0$ , sin ser derivable en 0

De esta forma, si una función  $f$  es continua en algún punto, no garantiza que sea derivable en ese punto. Las funciones que tienen este comportamiento son aquellas en cuya gráfica presentan cambios bruscos o picos en algún punto. Geométricamente, significa que en los picos de la gráfica de una función, no se puede definir una recta tangente.



Ahora, se verá un resultado que es una extensión de la regla del producto para derivadas. Éste, permite derivar potencias de funciones, y en general, de funciones que son resultado de la composición de dos o más funciones. Por ejemplo, la derivada de

$$y = [f(x)]^3$$

no es  $3[f(x)]^2$ , sino que  $3[f(x)]^2 \cdot f'(x)$ . En efecto, por la regla del producto, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[f(x)]^3 = \frac{d}{dx}[f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)] \\ &= f'(x) \cdot f(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f(x) \cdot f'(x) \\ &= 3[f(x)]^2 \cdot f'(x). \end{aligned}$$

**3.3.5. Teorema. (Regla de la cadena).** Si  $g$  es una función derivable en  $a$  y  $f$  es derivable en  $g(a)$ , entonces la composición  $h = f \circ g$  definida por  $h(x) = f(g(x))$  es derivable en  $a$ , y

$$h'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

**Demostración:** Sea  $u = g(x)$  tal que  $u_0 = g(a)$ . Supongamos que  $g(x) \neq g(a)$  para  $x$  cerca de  $a$  y  $x \neq a$ . Entonces

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que si  $g$  es derivable en  $a$ , entonces  $g$  es continua en  $a$ . Por lo tanto, cuando  $x \rightarrow a$ ,  $g(x) \rightarrow g(a)$ ; es decir, que  $u \rightarrow u_0$  cuando  $x \rightarrow a$ . Entonces,

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(u_0) \cdot g'(a) \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a). \quad \square$$

En general, si  $u = g(x)$  es una función derivable en  $x$  y  $y = f(u)$  es derivable en  $u$ , entonces la composición  $y(x) = (f \circ g)(x)$  es derivable en  $x$ , y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Esta fórmula, también se acostumbra escribir (en forma diferencial) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) \\ &= \frac{d}{dg(x)} f(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x) \\ &= \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Un caso particular para la regla de la cadena es cuando  $y = f(u) = u^n$ , donde  $n$  es un entero y  $u = g(x)$ . Se observa que  $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^n$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} u^n \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= n [g(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} g(x) \\ &= n [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} [g(x)]^n = n [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Esta derivada se conoce como la **regla de la potencia**. Sin embargo, este resultado se puede extender a potencias racionales, es decir, si  $r = p/q$ , donde  $p, q \in \mathbb{Z}$  y  $q \neq 0$ , entonces la función

$$y = u^r = u^{p/q} = \sqrt[q]{u^p} = (\sqrt[q]{u})^p, \text{ donde } u \text{ depende de } x, \text{ tiene derivada}$$

$$\frac{dy}{dx} = ru^{r-1} \frac{du}{dx}.$$

En efecto, sea

$$y = u^r = u^{p/q}. \quad (3.3)$$

Elevando a la potencia  $q$ -ésima ambos lados de la igualdad de la ecuación (3.3), se obtiene

$$y^q = u^p. \quad (3.4)$$

Derivando (3.4) ambos lados de la igualdad, se obtiene por la regla de la cadena

$$qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = pu^{p-1} \frac{du}{dx}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{pu^{p-1} du}{qy^{q-1} dx} = \frac{p}{q} u^{p-1} y^{1-q} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{p}{q} u^{p-1} (u^{p/q})^{1-q} \frac{du}{dx} = \frac{p}{q} u^{p-1} u^{p/q} u^{-p} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{p}{q} u^{(p/q)-1} \frac{du}{dx} \\ &= ru^{r-1} \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

**3.3.6. Teorema.** Sea  $y = [f(x)]^r$  una función derivable en  $x$  y  $r \in \mathbb{Q}$ . Entonces

$$\frac{dy}{dx} = r[f(x)]^{r-1} \cdot f'(x).$$

Por ejemplo, se puede calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. Si  $f(x) = \sin^3 x$ , entonces  $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$ .
2. Si  $f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \sin^2 x \cos x \cdot \cos^4 x + \sin^3 x [4 \cos^3 x (-\sin x)] \\ &= 3 \sin^2 x \cos^5 x - 4 \sin^4 x \cos^3 x. \end{aligned}$$

3. Si  $f(x) = \left(\frac{x \sin x}{2 \tan^2 x}\right)^3$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \left(\frac{x \sin x}{2 \tan^2 x}\right)^2 \cdot \frac{(\sin x + x \cos x)(2 \tan^2 x) - (x \sin x)(4 \tan x \sec^2 x)}{(2 \tan^2 x)^2} \\ &= 3 \left(\frac{x \sin x}{2 \tan^2 x}\right)^2 \cdot \frac{(\sin x + x \cos x)(2 \tan^2 x) - 4x \sin x \tan x \sec^2 x}{4 \tan^4 x}. \end{aligned}$$

**Actividad 36.** Deriva las siguientes funciones.

1.  $f(x) = (1 + \tan x)^3$

2.  $f(x) = x^4 \sin^3 x$ .

En general, si  $u$  es una función que depende de  $x$  y derivable en  $x$ , entonces por la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \cdot \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \cdot \frac{du}{dx} & \frac{d}{du} \sec u = \sec u \tan u \cdot \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx} \end{array}$$

**3.3.7. Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = \sin^2 x^4$

2.  $f(x) = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$

3.  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 3x}}$ .

**Solución:**

1. Esta función, se puede escribir como  $f(x) = (\sin x^4)^2$ . Entonces,

$$f'(x) = 2 \sin x^4 \cdot (\sin x^4)'$$

Pero  $(\sin x^4)' = \cos x^4 \cdot (4x^3)$ . Por lo tanto,

$$f'(x) = 2 \sin x^4 \cos x^4 (4x^3) = 8x^3 \sin x^4 \cos x^4.$$

2. Esta función, conviene escribir como  $f(x) = (\cos \sqrt{x})^{1/2}$ . Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{2} (\cos \sqrt{x})^{-1/2} \cdot (\cos \sqrt{x})'$$

Pero  $(\cos \sqrt{x})' = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2} (\cos \sqrt{x})^{-1/2} \cdot \left( -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -\frac{\sin \sqrt{x}}{4\sqrt{x} \sqrt{\cos \sqrt{x}}}.$$

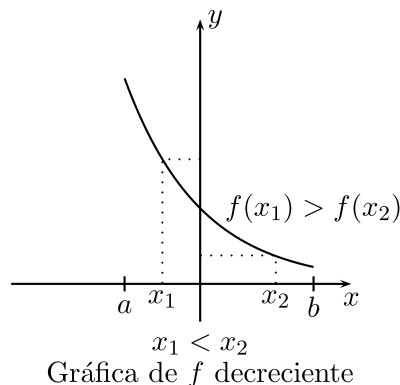
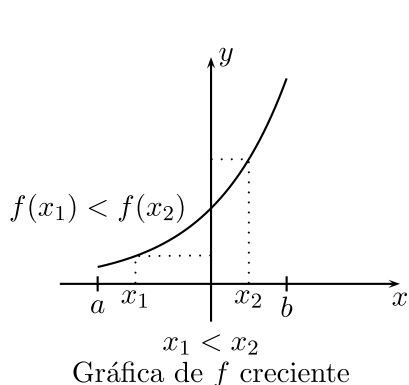
3. Para derivar esta función, se aplica la regla del cociente. Esto es,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-\sin 2x(2) \cdot \sqrt{\sin 3x} - \cos 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot \cos 3x(3)}{\sin 3x} \\
 &= \frac{-2 \sin 2x \sqrt{\sin 3x} - \frac{3 \cos 2x \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}}{\sin 3x} \\
 &= \frac{-4 \sin 2x \sin 3x - 3 \cos 2x \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} \\
 &= \frac{4 \sin 2x \sin 3x - 3 \cos 2x \cos 3x}{2 \sin 3x \sqrt{\sin 3x}}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Ahora se estudiará la (**derivada de las funciones trigonométricas inversas**). Recordemos que si  $f$  es una función inyectiva en el intervalo  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene función inversa  $f^{-1}$  definida en el intervalo  $[f(a), f(b)]$ . Una función inyectiva tiene la característica de que su gráfica es estrictamente creciente o decreciente, donde función creciente (decreciente) se define de la siguiente manera:

**3.3.8. Definición.** Sea  $f(x)$  una función.

- (i) Se dice que  $f$  es **creciente** en  $[a, b]$ , si para todo  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tal que  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- (ii) Se dice que  $f$  es **decreciente** en  $[a, b]$ , si para todo  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tal que  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) > f(x_2)$ .



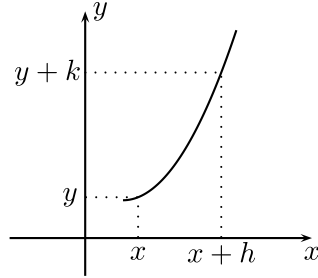
Si una función  $f$  cumple  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , significa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(x, f(x))$  es positiva, y esto quiere decir que la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  es creciente. De igual forma, si  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , significa que la gráfica de  $f$  es decreciente en  $[a, b]$ .

De esta forma, para averiguar en qué intervalo(s) la gráfica de una función  $f$  sea creciente o decreciente, basta resolver  $f'(x) > 0$  o  $f'(x) < 0$ . En los intervalos donde  $f$  sea creciente o decreciente, la función será inyectiva y tendrá función inversa  $f^{-1}(x)$ .

**3.3.9. Teorema.** Sea  $f$  una función derivable en  $(a, b)$ , con  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Entonces, la función inversa  $x = f^{-1}(y)$  existe y

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Demostración:** Consideremos la figura:



Se debe mostrar que

$$[f^{-1}(y)]' = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} \text{ existe.}$$

Por el teorema del valor intermedio, se sabe que para valores pequeños de  $k$ ,  $y+k$  puede escribirse como un valor de  $f$ . Hagamos  $x = f^{-1}(y)$ , y sea  $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$ . Entonces

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{y} \quad f^{-1}(y+k) = x+h.$$

Por otra parte,  $y+k = f(x+h)$  y, por lo tanto,  $k = f(x+h) - f(x)$ . Así, se tiene que

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}.$$

Es claro que cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ . Recíprocamente, cuando  $k \rightarrow 0$ , existe exactamente un valor  $h$  tal que  $f(x+h) = y+k$ , porque la función inversa está definida. Por consiguiente,  $f(x+h) \rightarrow y$  y el valor correspondiente de  $h \rightarrow 0$ . Luego,

$$\frac{1}{f'(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = [f^{-1}(y)]'.$$

Por lo tanto,

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad \square$$

Con este teorema, se puede obtener la derivada de las funciones trigonométricas inversas.

1. Sea  $x \in (-1, 1)$ . Entonces,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En efecto, si  $f(x) = \sin x$ , entonces  $f'(x) = \cos x > 0$  e inyectiva en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Luego, existe  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  definida en  $(f(-\pi/2), f(\pi/2)) = (-1, 1)$ . Para  $x \in (-1, 1)$ ,

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Por otra parte,

$$[\sin(\arcsin x)]^2 + [\cos(\arcsin x)]^2 = x^2 + [\cos(\arcsin x)]^2 = 1.$$

Entonces,

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Se toma la raíz cuadrada positiva, debido a que  $\arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$  y en este intervalo,  $\cos(\arcsin x) > 0$ . Por lo tanto,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad x \in (-1, 1).$$

2. Sea  $x \in (-1, 1)$ . Entonces,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En efecto, si  $f(x) = \cos x$ , entonces  $f'(x) = -\sin x < 0$  e inyectiva en  $(0, \pi)$ . Luego, existe  $f^{-1}(x) = \arccos x$  definida en  $(f(\pi), f(0)) = (-1, 1)$ . Para  $x \in (-1, 1)$ ,

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}.$$

Por otra parte

$$[\sin(\arccos x)]^2 + [\cos(\arccos x)]^2 = [\sin(\arccos x)]^2 + x^2 = 1.$$

Entonces,

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Nuevamente, se toma la raíz positiva debido a que  $\arccos x \in (0, \pi)$  y en este intervalo,  $\sin(\arccos x) > 0$ . Por lo tanto,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad x \in (-1, 1).$$

3. Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

En efecto, si  $f(x) = \tan x$ , entonces  $f'(x) = \sec^2 x > 0$  e inyectiva en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Luego, existe  $f^{-1}(x) = \arctan x$  definida en todo  $\mathbb{R}$ , puesto que la imagen de la función tangente es todo  $\mathbb{R}$ . Para  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} [f^{-1}(x)]' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

4. Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$(\operatorname{arccot}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Se deja como ejercicio para el lector la comprobación de este resultado.

5. Sea  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| > 1$ . Entonces,

$$(\operatorname{arcsec}x)' = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}.$$

En efecto, si  $f(x) = \sec x$ , entonces  $f'(x) = \sec x \tan x > 0$  e inyectiva en  $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ . Luego, existe  $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec}x$  definida en  $(1, \infty) \cup (-\infty, -1)$ .

a) Si  $x \in (1, \infty)$ , entonces  $\operatorname{arcsec}x \in (0, \pi/2)$  y  $\tan(\operatorname{arcsec}x) > 0$ . Por lo tanto,

$$\tan(\operatorname{arcsec}x) = \sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec}x) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

b) Si  $x \in (-\infty, -1)$ , entonces  $\operatorname{arcsec}x \in (\pi/2, \pi)$  y  $\tan(\operatorname{arcsec}x) < 0$ . Por lo tanto,

$$\tan(\operatorname{arcsec}x) = -\sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec}x) - 1} = -\sqrt{x^2 - 1}.$$

Luego, si  $|x| > 1$ ,

$$\begin{aligned} [f^{-1}(x)]' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\operatorname{arcsec}x)} \\ &= \frac{1}{\sec(\operatorname{arcsec}x) \tan(\operatorname{arcsec}x)} = \frac{1}{x \tan(\operatorname{arcsec}x)} \\ &= \frac{1}{\pm x \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

6. Sea  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| > 1$ . Entonces,

$$(\operatorname{arccsc}x)' = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}; \quad |x| > 1.$$

Se deja como ejercicio para el lector la comprobación de este resultado.

Aplicando la regla de la cadena, los resultados anteriores se cumplen cuando  $u$  es una función que depende de  $x$  y derivable en  $x$ . Esto es,

$$\begin{aligned}
 (\arcsin u)' &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}; & u \in (-1, 1) \\
 (\arccos u)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}; & u \in (-1, 1) \\
 (\arctan u)' &= \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}; & \text{para todo } u \in \mathbb{R} \\
 (\operatorname{arccot} u)' &= -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}; & \text{para todo } u \in \mathbb{R} \\
 (\operatorname{arcsec} u)' &= \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}; & |u| > 1 \\
 (\operatorname{arccsc} u)' &= -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}; & |u| > 1
 \end{aligned}$$

**3.3.10. Ejemplo.** Deriva las siguientes funciones.

1.  $f(x) = e^{\arcsin x}$
2.  $f(x) = \arccos \sqrt{x}$
3.  $f(x) = \ln(\arctan \sqrt{x})$ .

**Solución:**

1. Sea  $u = \arcsin x$ . Entonces  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Luego,

$$f'(x) = e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Sea  $u = \sqrt{x}$ . Entonces  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Luego,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Sea  $u = \arctan \sqrt{x}$ . Entonces,  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}. \blacksquare$$

Se estudiará ahora la derivada de la función exponencial y logaritmo. Como primer paso, se probará que  $f(x) = e^x$  es derivable en  $x = 0$ ; es decir,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Para comprobar este resultado, se usará una desigualdad cuya prueba no se presenta aquí. Esta desigualdad se conoce como **desigualdad exponencial**:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Sea  $0 < h < 1$ . Por la desigualdad exponencial, se tiene

$$\frac{e^h - 1}{h} \geq \frac{(1+h) - 1}{h} = \frac{h}{h} = 1. \quad (3.5)$$

También por la desigualdad exponencial, se tiene que  $e^{-h} \geq 1 - h$ . Entonces

$$\frac{1}{1-h} \geq \frac{1}{e^{-h}} = e^h.$$

Restando ambos lados de esta desigualdad por 1, se obtiene

$$\frac{1}{1-h} - 1 \geq e^h - 1.$$

Haciendo las operaciones adecuadas en esta última y reduciendo, se tiene

$$\frac{1}{1-h} \geq \frac{e^h - 1}{h}. \quad (3.6)$$

Por (3.5), (3.6), y por el hecho de que  $0 < h < 1$ , implica que

$$\frac{1}{1-h} \geq \frac{e^h - 1}{h} \geq 1.$$

De aquí se concluye que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

(b) Supongamos nuevamente que  $0 < h < 1$ . En el límite anterior, hagamos  $h = -y$ . Por lo tanto,  $h \rightarrow 0^+$ , si y sólo si,  $-y \rightarrow 0^+$ , y esto es equivalente a  $-h = y \rightarrow 0^-$ , porque  $-1 < -h < 0$ . Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^{-y} - 1}{-y} = 1.$$

Este último límite es equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} - 1}{-h} = 1.$$

Por otra parte, en el inciso (a) se ha comprobado que  $\frac{1}{1-h} \geq e^h$ , y por la desigualdad exponencial, se tiene  $e^h \geq 1 + h$ . Juntando estas dos desigualdades, se tiene que

$$\frac{1}{1-h} \geq e^h \geq 1 + h.$$

Aplicando la ley del sandwich para límites en la desigualdad anterior, se concluye que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} e^h = 1.$$

Por lo tanto, se tiene también que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} e^{-h} = 1.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{-h}} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[ e^h \left( \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^h}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Finalmente, de los límites de los incisos (a) y (b), se concluye que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Una consecuencia inmediata de este límite es el siguiente:

**3.3.11. Corolario.** Sea  $f(x) = e^x$ . Si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

**Demostración:** Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x. \quad \square \end{aligned}$$

Así que la derivada de la función exponencial, es la misma función exponencial. En general, si  $h(x) = e^u$ , donde  $u$  es una función que depende de  $x$ , entonces por la regla de la cadena se tiene que

$$h'(x) = e^u \cdot u'$$

**3.3.12. Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = e^{\sin x^3}$
2.  $f(x) = x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}$ .

**Solución:**

1.

$$f'(x) = e^{\sin x^3} \cdot \cos x^3 \cdot (3x^2) = 3x^2 \cos x^3 e^{\sin x^3}.$$

2.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{\sqrt{x}} + x^2 \cdot e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(2x + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}\right) e^{\sqrt{x}}. \quad \blacksquare$$

También se puede obtener la derivada de la función exponencial  $y = a^x$ , con  $a > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Primero se observa que

$$a = e^{\ln a}.$$

Entonces

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}.$$

Así que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx} \left(e^{x \ln a}\right) \\ &= e^{x \ln a} \cdot \ln a \\ &= a^x \ln a. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

En general, si  $f(x) = a^u$ , donde  $u$  es una función derivable que depende de  $x$ , entonces por la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{d}{dx} a^u = [a^u \ln a] \frac{du}{dx}.$$

**3.3.13. Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = 2^{\sin x}$

2.  $f(x) = \cos(10^{\sqrt{x}})$ .

**Solución:**

1.  $f'(x) = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$ .

2.  $f'(x) = -\sin(10^{\sqrt{x}}) \cdot 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \blacksquare$

**3.3.14. Teorema.** Si  $x > 0$ , entonces

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

**Demostración:** Sea  $f(x) = e^x$ . Se sabe que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $f^{-1}(x) = \ln x$  para todo  $x > 0$ . Aplicando el teorema 3.3.9, se tiene que

$$\begin{aligned} [f^{-1}(x)]' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}; \quad x > 0. \quad \square$$

En general, si  $h(x) = \ln u$ , donde  $u$  es una función positiva que depende de  $x$ , entonces

$$h'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$$

**3.3.15. Ejemplo.** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = \ln \sqrt{x}$
2.  $f(x) = x^2 \ln \left( \frac{1}{x^2+1} \right)$
3.  $f(x) = \ln^3(x^3)$ .

**Solución:**

1.  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$ .
2.  $f'(x) = 2x \ln \left( \frac{1}{x^2+1} \right) + x^2(x^2+1) \left[ \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \right] = 2x \ln \left( \frac{1}{x^2+1} \right) - \frac{2x^3}{x^2+1}$ .
3.  $f'(x) = 3 \ln^2(x^3) \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{9 \ln^2(x^3)}{x}$ . ■

**3.3.16. Teorema.** La función exponencial  $f(x) = e^x$  se puede expresar mediante el límite:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= \frac{d}{dt} \ln t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(t+h) - \ln t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( \frac{t+h}{t} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[ \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^{1/h} \right] \\ &= \ln \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^{1/h} \right]. \end{aligned}$$

Luego, sea  $n = 1/h$ . Como  $h > 0$ , entonces  $n \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Así que

$$\frac{1}{t} = \ln \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{nt} \right)^n \right].$$

Ahora, si se escribe  $x = \frac{1}{t}$ , se obtiene

$$x = \ln \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \right].$$

Finalmente, aplicando  $e$  a ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n. \quad \square$$

Si  $x = 1$  en el límite anterior, se obtiene una expresión para el número irracional  $e$ :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

**3.3.17. Ejemplo.** Comprueba que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e.$$

**Solución:**

Sea  $n = 1/h$ , donde  $h > 0$ . Entonces,  $h \rightarrow 0$ , si y sólo si  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \quad \blacksquare$$

El logaritmo natural de  $a$ , donde  $a > 0$ , también se puede expresar mediante un límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

En efecto, se ha visto que si  $f(x) = a^x$ , entonces  $f'(x) = a^x \ln a$ . Por otro lado, aplicando la definición de derivada, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \ln a. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

**LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.3**

1. Obtén la ecuación de la recta tangente de las siguientes curvas, en el punto donde se indica.

a)  $f(x) = \sqrt{x}$ , en  $(4, 2)$

b)  $f(x) = x^3$ , en  $(3/2, 27/8)$

c)  $f(x) = \frac{3}{x}$ , en  $(3, 1)$ .

2. Calcula los puntos de la curva  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ , cuya recta tangente es paralela al eje  $x$ .

3. Determina los puntos de la curva  $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$  para los cuales, la recta tangente forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ .

4. Determina el punto de la curva  $y = x^3$ , en cuya recta tangente tiene pendiente 3 y pasa por el punto  $(0, -2)$ .

5. Determina los coeficientes de  $y = ax^2 + bx + c$ , sabiendo que su gráfica pasa por  $(0, 3)$  y  $(2, 1)$ , y cuya recta tangente que pasa por  $(2, 1)$ , tiene pendiente 3.

6. La gráfica de la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , pasa por  $(-1, 2)$  y  $(2, 3)$ . Si las rectas tangentes que pasan por estos puntos son paralelas al eje  $x$ , determina  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

7. Cada límite representa la derivada de alguna función  $f$  en algún número  $a$ . Establece  $f$  y  $a$  en cada caso.

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1}{x}$

d)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/2+t)-1}{t}$ .

8. Calcula la derivada de las siguientes funciones, empleando la definición.

a)  $f(x) = 2x^2 - 1$

b)  $f(x) = 4 - 3x^2$

c)  $f(x) = \sqrt{2x+1}$ .

9. Calcula la derivada de las siguientes funciones, empleando las propiedades adecuadas.

a)  $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

b)  $f(x) = \sin x \cos^2 x$

c)  $f(x) = (1 - \sin x)^4$

d)  $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$

e)  $f(x) = \cos^2 x^4$

- f)  $f(x) = \tan^4 x^3$
- g)  $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
- h)  $f(x) = \frac{\sec 5x}{\tan 3x}$
- i)  $f(x) = \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- j)  $f(x) = \tan \sqrt{x}$
- k)  $f(x) = \sin(\cos x)$
- l)  $f(x) = \cos^2(\sin^2 x)$
- m)  $f(x) = x^2 e^{2x}$
- n)  $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$
- $\tilde{n}$ )  $f(x) = e^{e^x}$
- o)  $f(x) = e^{\sin(x^3+1)}$
- p)  $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$
- q)  $f(x) = \ln \tan(1-x)$
- r)  $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
- s)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- t)  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
- u)  $f(x) = \arcsin \sqrt{x^2-4}$
- v)  $f(x) = \arccos e^x$
- w)  $f(x) = \arctan \sqrt{x}$
- x)  $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ .

### 3.4. Regla de L'Hôpital

En esta sección, se estudiará la **regla de L'Hôpital**. Esta regla se aplica para el cálculo de ciertos límites, sobre todo, de aquellos que presentan algún tipo de indeterminación tales como:  $\frac{0}{0}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ , entre otras.

Se comenzará enunciando algunos resultados importantes de la derivada. Posteriormente la regla de L'Hôpital, será una consecuencia de estos.

**3.4.1. Teorema.** Sean  $f(x)$  una función derivable en  $(a, b)$  y  $x_o \in (a, b)$  tal que  $f(x_o)$  es un valor máximo. Entonces,  $f'(x_o) = 0$ .

**Demostración:**

Como  $f(x_o)$  es un máximo, entonces  $f(x_o) \geq f(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ . Luego, para  $h$  pequeño se tiene  $f(x_o + h) \leq f(x_o)$ . Entonces,

(i) Si  $h > 0$ ,  $\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \leq 0$ . Luego,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \leq 0.$$

(ii) Si  $h < 0$ ,  $\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \geq 0$ . Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \geq 0.$$

Como  $f$  es derivable, los límites laterales en (i) y (ii) coinciden con  $f'(x_o)$ . Por lo tanto,  $f'(x_o) \leq 0$  y  $f'(x_o) \geq 0$ . Entonces se tiene que

$$f'(x_o) = 0. \quad \square$$

**3.4.2. Teorema. (Teorema de Rolle).** Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f'(x) = 0$ .

**Demostración:**

Si  $f$  es constante en  $[a, b]$ , cualquier  $x \in (a, b)$ , satisface  $f'(x) = 0$ .

Supongamos entonces que  $f$  no es constante. Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , aplicando el teorema 3.1.19, existe un máximo y mínimo de  $f$  en  $[a, b]$ . Sea  $x_o \in (a, b)$  tal que  $f(x_o) > f(a)$ , entonces existe  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x)$  es un máximo de  $f$  y  $f'(x) = 0$ .

De la misma forma, si  $x_o \in (a, b)$  y  $f(x_o) < f(a)$ , entonces existe  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x)$  es un mínimo de  $f$  y  $f'(x) = 0$ .  $\square$

**3.4.3. Teorema. (Teorema del valor medio).** Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ , y derivable en  $(a, b)$ . Entonces, existe  $x \in (a, b)$  tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Demostración:** Se define la función

$$h(x) = f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a).$$

Es claro que  $h$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Además,  $h(a) = h(b)$ . Entonces, aplicando el teorema de Rolle, existe  $x \in (a, b)$  tal que

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

De aquí, se sigue que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

**3.4.4. Teorema. (Teorema del valor medio de Cauchy).** Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Entonces, existe  $x \in (a, b)$  tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

**Demostración:** Se define la función

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Se sigue que  $h$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Además, se tiene que  $h(a) = h(b)$ . Aplicando el teorema de Rolle para  $h$ , se tiene que existe  $x \in (a, b)$  tal que

$$h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)] = 0.$$

De aquí, se sigue que

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x). \quad \square$$

**3.4.5. Teorema. (Regla de L'Hôpital).** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene  $a$ , tales que existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , y  $g'(x) \neq 0$  en  $x \neq a$ . Entonces, existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Demostración:** Como  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$ , entonces  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$ . De esta forma, se puede suponer que  $f(a) = 0 = g(a)$ . Sea  $x$  un punto sobre el intervalo tal que  $x > a$ . Como  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, x]$  y derivables en  $(a, x)$ , entonces aplicando el teorema del valor medio de Cauchy, existe  $z \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Como  $z$  depende de  $x$  y  $z \in (a, x)$ , entonces  $z \rightarrow a$  cuando  $x \rightarrow a$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

**3.4.6. Ejemplo.** Calcula los siguientes límites.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ .

**Solución:**

1. Sean  $f(x) = e^x - e^{-x}$  y  $g(x) = \sin x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

Entonces, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

2. Sean  $f(x) = \ln x$  y  $g(x) = x - 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} g(x).$$

Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1.$$

3. Sean  $f(x) = x \sin x$  y  $g(x) = 1 - \cos x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

Por L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{1} = 0. \quad \blacksquare$$

**Nota:** Para aplicar la regla de L'Hôpital en el cálculo de un límite se debe asegurar que se cumplen las condiciones que se requieren. De otra forma no se puede aplicar dicha regla. Si el cociente  $f'(x)/g'(x)$  se indetermina de la forma  $0/0$ , entonces se aplica por segunda vez la regla de L'Hôpital.

La regla de L'Hôpital tiene muchas variantes. Por ejemplo, en el enunciado del teorema, el número  $a$  se puede sustituir por  $\infty$  o  $-\infty$ . Es decir:

**3.4.7. Corolario.** Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas y derivables en un intervalo, digamos  $(c, \infty)$  para alguna  $c \in \mathbb{R}$ , tales que existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Demostración:**

Sea  $y = 1/x$ . Así que  $y \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{g(y)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'(y)}{g'(y)}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a que si  $y = f(1/x)$  y  $y = g(1/x)$ , entonces  $y' = f'(1/x) \cdot (-1/x^2)$  y  $y' = g'(1/x) \cdot (-1/x^2)$  respectivamente. Al hacer el cociente de ambas derivadas, se cancela el término  $-1/x^2$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

**3.4.8. Ejemplo.** Calcula el valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$ .

**Solución:**

Sean  $f(x) = (\ln x)^2$  y  $g(x) = x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x).$$

Por L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0. \quad \blacksquare$$

En este ejemplo, se empleo dos veces la regla de L'Hôpital (primera y tercera igualdad).

Todas las variantes que tiene la regla de L'Hôpital, se pueden resumir como sigue:

Si  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = \blacktriangle$  y  $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \blacklozenge$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f(x)}{g(x)} = \blacklozenge$ ; donde

$\Delta$  puede ser  $a$  o  $a^+$  o  $a^-$  o  $\infty$  o  $-\infty$

$\blacktriangle$  puede ser  $0$  o  $\infty$  o  $-\infty$ , y

$\blacklozenge$  puede ser  $l$  o  $\infty$  o  $-\infty$ .

En el cálculo de un límite, surgen otros tipos de indeterminaciones, tales como

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \text{y} \quad \infty - \infty.$$

Los tres primeros casos se presentan sobre todo cuando se pide evaluar límites de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}.$$

Para resolver el problema de estas indeterminaciones, se recomienda escribir

$$y = [f(x)]^{g(x)} \quad \text{y entonces,} \quad \ln y = g(x) \ln f(x),$$

o también como

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Cuando en un límite se presenta una indeterminación en la forma  $0 \cdot \infty$ , la función  $fg$ , se recomienda escribirla como  $\frac{f}{1/g}$  o  $\frac{g}{1/f}$ . Si la indeterminación tiene la forma  $\infty - \infty$ , se recomienda transformar esta indeterminación en la forma  $0/0$  o  $\infty/\infty$ , y usar L'Hôpital.

**3.4.9. Ejemplo.** Calcula los siguientes límites.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right]$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

**Solución:**

1. Este límite, tiene una indeterminación de la forma  $0 \cdot \infty$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Este límite, tiene una indeterminación de la forma  $\infty - \infty$ . Pero

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) - x}{x \ln(x+1)},$$

y este último límite, tiene la indeterminación  $0/0$ , debido a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x+1} = 0.$$

Luego, por L'Hôpital, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) - x}{x \ln(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-(x+1)}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{(x+1)\ln(x+1)+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\ln(x+1)+2} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right] = -\frac{1}{2}.$$

3. Este límite tiene la indeterminación  $0(-\infty)$ . Si se escribe  $y = x^{\sin x}$ , entonces  $\ln y = \sin x \ln x$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\cos x} \sin^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1.$$

4. Este límite tiene la indeterminación  $0^0$ . Si se escribe  $y = x^x$ , entonces  $\ln y = x \ln x$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1. \quad \blacksquare$$

**Actividad 37.** Determina el valor de los siguientes límites.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x + \sin x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ .

### LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.4

Determina el valor de los siguientes límites.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x-1)}{x-1}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 x}{x^2}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{3x}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tanh 3x}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$
17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x$
18.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right)$

20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)$

21.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x}$

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x$

26.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}$

28.  $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\sin x}$

29.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

30. Prueba que si  $n$  es un entero, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

31. Prueba que  $\ln x$ , se aproxima más lentamente a  $\infty$  que cualquier potencia de  $x$ . Esto es, si  $p > 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0.$$

32. Prueba que si  $\alpha > 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

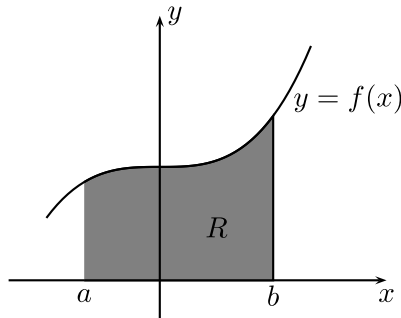
33. Prueba que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

### 3.5. Introducción a la integral definida

En esta sección se estudiarán resultados y métodos de integración, principalmente para funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica. Primero, se recordará la definición de la integral definida, motivada por el problema de definir el concepto de área.

Sea  $y = f(x)$  una función continua no negativa, con dominio  $[a, b]$ .



El área de la región  $R$  limitada entre la gráfica de  $f$ , las verticales  $x = a$ ,  $x = b$  y el eje  $x$ , se simboliza por

$$\text{Área de la región } R = A(R) = \int_a^b f(x)dx.$$

Para explicar el significado de área de la región  $R$ , se comienza introduciendo terminologías y notación.

Una **partición**  $P$  del intervalo cerrado  $[a, b]$ , es un conjunto finito  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de puntos en  $[a, b]$  tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Los puntos de la partición  $P$  se pueden usar para dividir el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Sean  $M_i = f(\zeta_i)$  y  $m_i = f(\xi_i)$  los valores máximo y mínimo de  $f$  respectivamente, en el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

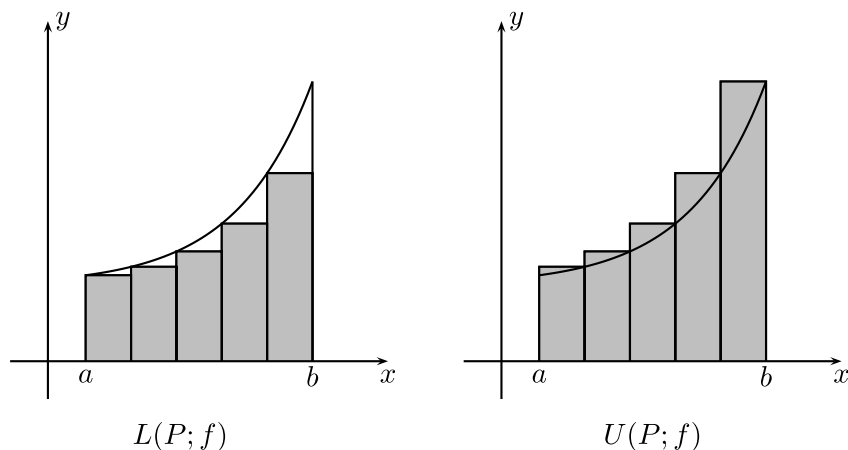
La **suma inferior** de  $f$  asociada a la partición  $P$ , se define como

$$L(P; f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

y la **suma superior** de  $f$  asociada a la partición  $P$ , se define como

$$U(P; f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Si  $f$  no es negativa,  $L(P; f)$  se puede interpretar como el área de la unión de los rectángulos de base  $[x_{i-1}, x_i]$  y altura  $m_i$ . De manera similar,  $U(P; f)$  se puede interpretar como el área de la unión de los rectángulos de base  $[x_{i-1}, x_i]$  y de altura  $M_i$ .



Una primera relación entre el área de la región  $R$  (área bajo la gráfica de  $f$  entre  $x = a$ ,  $x = b$  y el eje  $x$ ), y las dos sumas definidas anteriormente, es que si  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es cualquier partición de  $[a, b]$ , entonces

$$L(P; f) \leq A(R) \leq U(P; f). \quad (3.7)$$

Un caso particular de partición  $P$ , es cuando  $[a, b]$  se divide en  $n$  subintervalos iguales. Es decir, cada uno de  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  tienen la misma longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

En este caso,  $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ ; para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Una partición con estas características, se denomina **partición regular**. Así,

$$L(P; f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x \quad \text{y} \quad U(P; f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x.$$

Es claro que cuando el número  $n$  de subintervalos aumenta cada vez más,  $\Delta x$  se hace más pequeño. De esta forma, la diferencia entre  $L(P; f)$  y  $U(P; f)$  será cada vez más pequeña y ambos valores, estarán cercanos al área real  $A(R)$  de la región  $R$ . Más aún, el siguiente teorema establece que

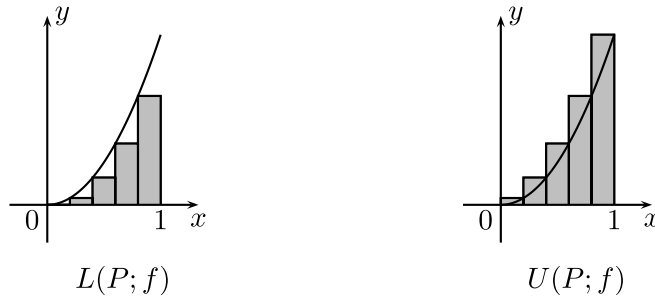
**3.5.1. Teorema.** Sean  $f$  una función continua no negativa en el intervalo  $[a, b]$  y  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición regular de  $[a, b]$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(P, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(P, f).$$

Pero entonces, si aplicamos la ley del sandwich a la desigualdad (3.7), junto con el resultado de este teorema, se concluye que el área de la región  $R$  está dada por

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(P, f).$$

**3.5.2. Ejemplo.** Determina el área de la región  $R$  bajo la gráfica de  $f(x) = x^2$ , entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .



**Solución:**

Sea  $P$  una partición regular de  $[0, 1]$ , de tal forma que divide este intervalo en  $n$  subintervalos. En este caso,

$$\Delta x = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad x_i = 0 + i\frac{1}{n} = \frac{i}{n} \quad \text{para todo} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Como  $f$  es creciente en  $[0, 1]$ , entonces  $\zeta_i = x_i = \frac{i}{n}$  y  $\xi_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ . Por lo tanto,  $M_i = f(\zeta_i) = x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$  y  $m_i = f(\xi_i) = x_{i-1}^2 = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ . Evaluando la suma superior, se tiene que

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

Pero

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Por lo tanto,

$$U(P, f) = \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Finalmente

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(P, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

**Actividad 38.** Con los datos del ejemplo 3.5.2, calcula  $L(P, f)$  y comprueba que  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(P, f) = \frac{1}{3}$ .

**Actividad 39.** Por medio de una suma superior o inferior y utilizando una partición regular  $P$  en  $[0, 1]$ , calcula el área de la región acotada entre la gráfica de  $f(x) = x^3$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  y el eje  $x$ .

Ahora, se generalizará la idea de las sumas superiores e inferiores para definir la integral definida. Consideremos una función  $f$  acotada en  $[a, b]$ . Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ , no necesariamente regular. La **norma de la partición**  $P$  denotada por  $\|P\|$ , se define como la longitud máxima de los subintervalos en que queda dividido el intervalo  $[a, b]$  con la partición  $P$ . Es decir,

$$\|P\| = \max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Sea  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se define la **suma de Riemann** de la función  $f$  asociada con la partición  $P$ , como:

$$S(P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

La diferencia entre una suma superior o inferior con la suma  $S(P)$ , es que no se elige el punto en cada  $[x_{i-1}, x_i]$  donde surge el máximo o mínimo de  $f$ , sino que se elige cualquier punto arbitrario. Es claro que cuando el número de subintervalos  $n$  de  $[a, b]$  aumenta cada vez más, la norma de la partición se hará cada vez más pequeña. Es decir,  $\|P\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Si la suma de Riemann tiene un límite determinado cuando  $n \rightarrow \infty$ , o cuando  $\|P\| \rightarrow 0$ , al valor del límite se le denomina **integral definida** de  $f$  en  $[a, b]$ . Así, surge la siguiente definición:

**3.5.3. Definición.** Sea  $f$  una función acotada en  $[a, b]$ . La integral definida de  $f$  en  $[a, b]$ , denotada con  $\int_a^b f(x) dx$ , se define como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso se dice que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

Si en la suma de Riemann la partición  $P$  de  $[a, b]$  es regular, entonces

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n} = \Delta x.$$

Luego se tiene que

$$S(P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x.$$

En este caso, las condiciones  $\|P\| \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow \infty$ , son equivalentes. Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x.$$

**3.5.4. Ejemplo.** Expresa los siguientes límites como una integral definida en el intervalo indicado  $[a, b]$ . Supón que  $[x_{i-1}, x_i]$  denota el  $i$ -ésimo subintervalo de  $[a, b]$ , y que  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{25 - x_i^2} \right) \Delta x$  en  $[0, 5]$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\cos 2x_{i-1}) \Delta x$  en  $[0, \pi/2]$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\tan x_i) \Delta x$  en  $[0, \pi/4]$ .

**Solución:**

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{25 - x_i^2} \right) \Delta x = \int_0^5 \sqrt{25 - x} dx.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\cos 2x_{i-1}) \Delta x = \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\tan x_i) \Delta x = \int_0^{\pi/4} \tan x dx. \quad \blacksquare$$

En la definición de integral definida no se pidió que  $f$  fuera positiva, por eso  $\int_a^b f(x) dx$  puede ser tanto negativa como cero, y sólo cuando  $f(x)$  sea positiva,  $\int_a^b f(x) dx$  coincide con el área bajo la gráfica de la función  $f$ , entre  $x = a$  y  $x = b$ .

Dos hechos importantes de la integral definida son:

1. Si  $a \in \text{Dom} f$ , entonces

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

2. Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

**3.5.5. Ejemplo.** Por medio de una suma de Riemann y utilizando una partición regular  $P$  en  $[a, b]$ , comprueba que si  $c$  es una constante positiva, entonces

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

**Solución:**

Sea  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  una partición regular de  $[a, b]$ . Entonces,  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$  para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  y  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Sea  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se tiene entonces que

$$S(P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n c \frac{b-a}{n} = c(b-a).$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b c dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} c(b-a) = c(b-a). \quad \blacksquare$$

El siguiente resultado, asegura que todas las funciones continuas en  $[a, b]$ , son integrables.

**3.5.6. Teorema.** Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

**3.5.7. Teorema.**

1. Si  $a < c < b$  entonces,  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , si y sólo si  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ .  
Además se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables sobre  $[a, b]$ , entonces  $f + g$  es integrable en  $[a, b]$ , y

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3. Si  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  y  $c$  es cualquier número real, entonces

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

4. Si  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  y  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

5. Si  $f$  es integrable y no negativa sobre  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

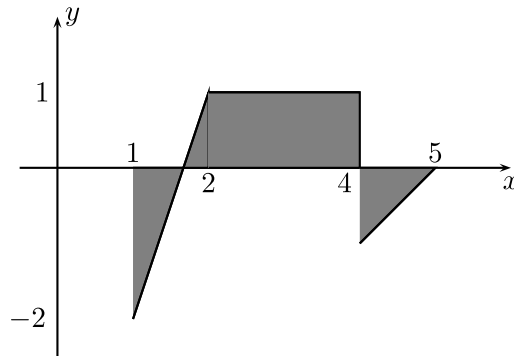
6. Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $[a, b]$ , tal que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**3.5.8. Ejemplo.** Calcula  $\int_1^5 f(x)dx$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } 2 \leq x < 4, \\ x - 5 & \text{si } 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

**Solución:** La gráfica de  $f(x)$  es de la forma:



Aplicando la propiedad 1 del teorema 3.5.6, se tiene que

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx.$$

Para obtener la primera integral, se observa que  $3x - 5 = 0$ , cuando  $x = 5/3$ . Por lo tanto,

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^{5/3} f(x)dx + \int_{5/3}^2 f(x)dx = -\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Por otra parte,

$$\int_2^4 f(x)dx = 2 \quad \text{y} \quad \int_4^5 f(x)dx = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente, se tiene que

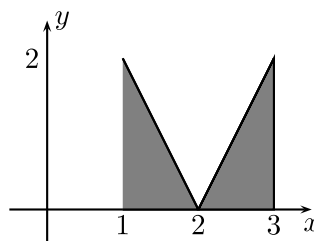
$$\int_1^5 f(x)dx = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 1. \quad \blacksquare$$

**3.5.9. Ejemplo.** Calcula  $\int_1^3 |2x - 4| dx$ .

**Solución:**

Se observa que  $2x - 4 = 0$ , cuando  $x = 2$ . Por lo tanto,

$$|2x - 4| = \begin{cases} -(2x - 4) & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 2x - 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



Luego,

$$\int_1^3 |2x - 4| dx = \int_1^2 (4 - 2x) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx = 1 + 1 = 2. \quad \blacksquare$$

**Nota:** Para calcular cada una de las integrales en los dos ejemplos anteriores, se recurrió a la fórmula del área de un triángulo y de un rectángulo.

**3.5.10. Teorema. (Teorema del valor medio para integrales).** *Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

**Demostración:** Se sabe que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

donde  $m$  y  $M$ , son los valores mínimo y máximo de  $f$  en  $[a, b]$  respectivamente. Entonces se tiene que

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Sean  $f(x_1) = m$  y  $f(x_2) = M$  para ciertas  $x_1, x_2 \in [a, b]$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x_1 < x_2$ . Entonces

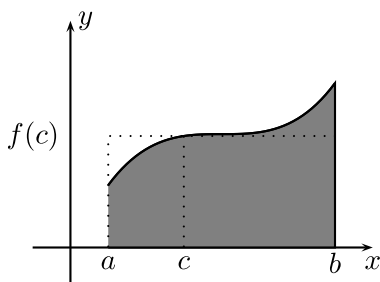
$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x_2).$$

Aplicando el teorema del valor intermedio a  $f$  en  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  (ver teorema 3.1.20), se tiene que existe  $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ , tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

El teorema del valor medio para integrales, tiene una interpretación geométrica cuando  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ . En este caso,  $\int_a^b f(x) dx$  es el área bajo la gráfica de  $f$  entre  $x = a$  y  $x = b$ ; mientras que  $(b-a)f(c)$ , corresponde al área de un rectángulo de base  $b-a$  y altura  $f(c)$  para alguna  $c \in (a, b)$ , y

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx.$$



**3.5.11. Ejemplo.** Determina  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ , donde  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  definida en  $[-1, 1]$ .

**Solución:** Sabemos  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  es continua en  $[-1, 1]$ . En este caso,  $[a, b] = [-1, 1]$ . Por el teorema del valor medio para integrales, existe  $c \in (-1, 1)$  tal que

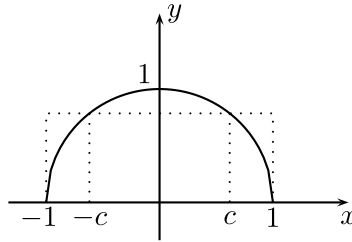
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Para determinar el valor  $c \in (-1, 1)$ , hacemos lo siguiente:

$$f(c) = \sqrt{1-c^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces  $1 - c^2 = \frac{\pi^2}{16}$ . Despejando  $c$  de esta igualdad, se concluye que  $c \approx \pm 0.619$ . ■

Geoméricamente se explica en la siguiente gráfica.



En este caso, la altura del rectángulo que hace coincidir con el área bajo la gráfica de  $f(x)$  en  $[-1, 1]$ , es  $f(c) = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$ . Nótese que el valor de  $c$  no es único.

Sea  $f$  una función continua sobre el intervalo  $[a, b]$ . Se define una nueva función  $F(x)$  sobre  $[a, b]$ , como sigue:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Esta función es de suma importancia, debido a que  $F'(x) = f(x)$ . Para comprobar este resultado, se observa que

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Luego,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el teorema del valor medio para integrales al intervalo  $[x, x+h]$ , se tiene que existe  $c \in (x, x+h)$ , tal que

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Por lo tanto,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (h(f(c))) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c).$$

Como  $x < c < x + h$ , y por la continuidad de  $f$ , es claro que cuando  $h \rightarrow 0$ , entonces  $c \rightarrow x$ . Se obtiene finalmente que

$$F'(x) = f(x).$$

Así, se ha probado el siguiente teorema:

**3.5.12. Teorema. (Teorema fundamental del cálculo).** Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  y si  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , entonces

$$F'(x) = f(x).$$

**3.5.13. Ejemplo.** Calcula  $F'(x)$ , donde

1.

$$F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4-t^2} dt$$

2.

$$F(x) = \int_0^{\sin x} 5t^2 dt.$$

**Solución:**

1.  $f(t) = \sqrt{4-t^2}$  está definida o tiene dominio en  $[-2, 2]$ . Por lo tanto,

$$F'(x) = f(x) = \sqrt{4-x^2}; \quad \text{para todo } x \in [-2, 2].$$

2. Se observa que  $F(x)$  es el resultado de una composición de funciones. Esto es, si

$$G(x) = \int_0^x 5t^2 dt \quad \text{y} \quad H(x) = \sin x,$$

entonces

$$F(x) = G(H(x)) = G(\sin x) = \int_0^{\sin x} 5t^2 dt.$$

Por otra parte,  $G'(x) = 5x^2$  y  $H'(x) = \cos x$ . Entonces, aplicando la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(H(x)) \cdot H'(x) = G'(\sin x) \cdot \cos x \\ &= 5 \sin^2 x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F'(x) = 5 \sin^2 x \cdot \cos x. \quad \blacksquare$$

Con la ayuda de la función  $F(x)$ , se pueden calcular fácilmente algunas integrales definidas sin necesidad de calcular sumas superiores, inferiores o sumas de Riemann. El siguiente resultado da cuenta de esto.

**3.5.14. Corolario.** Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  y  $f(x) = g'(x)$  para alguna función  $g$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

**Demostración:** Sea

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Entonces,  $F'(x) = f(x) = g'(x)$  sobre  $[a, b]$ . Luego, se tiene que

$$F(x) = g(x) + c \quad \text{para alguna constante } c.$$

Por otra parte,  $0 = F(a) = g(a) + c$ , de modo que  $c = -g(a)$ . Por lo tanto,

$$F(x) = g(x) - g(a) \quad \text{y} \quad F(b) = g(b) - g(a).$$

Esta última igualdad equivale a

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a). \quad \square$$

**Nota:** se dice que las funciones  $F(x)$  o  $g(x)$  del corolario anterior, son **primitivas** o **antiderivadas** de  $f$ . Es decir, si  $h$  es una primitiva de  $f$ , entonces  $h'(x) = f(x)$ . Luego, para obtener la integral definida de una función  $f$ , basta determinar una primitiva y aplicar el corolario anterior. Se observa que

$$F(b) - F(a) = g(b) + c - (g(a) + c) = g(b) - g(a).$$

Se cancela la constante  $c$  en  $F(x)$ . Por lo tanto, se tiene también que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**3.5.15. Ejemplo.** Calcular  $\int_a^b x^2 dx$ .

**Solución:** Sea

$$g(x) = \frac{x^3}{3},$$

entonces  $g'(x) = f(x)$ , donde  $f(x) = x^2$ . Luego

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}. \quad \blacksquare$$

Más aún, si  $n$  es cualquier número natural, entonces  $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  cumple  $g'(x) = x^n$ . Por lo tanto,

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Sin embargo, para la función  $f(x) = x^{-n}$ , se debe tener especial cuidado puesto que no está definida en  $x = 0$ . Por eso, si  $a$  y  $b$  son ambos positivos o negativos, entonces al ser  $g(x) = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$  una primitiva de  $f$ , se tiene que

$$\int_a^b x^{-n} dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1},$$

donde  $n \neq 1$ . La buena noticia es que ya se conoce una primitiva o antiderivada de funciones que ya se han estudiado anteriormente. Con esto, se puede calcular una variedad más amplia de integrales definidas. La siguiente tabla exhibe la primitiva de algunas funciones que surgen con frecuencia en el cálculo de integrales.

Función $f(x)$	Primitiva $g(x)$	Función $f(x)$	Primitiva $g(x)$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\sin x$	$-\cos x$	$e^x$	$e^x$
$\cos x$	$\sin x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\tanh x$	$\sec h^2 x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\coth x$	$-\csc h^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sec hx$	$-\sec hx \tanh x$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\csc hx$	$-\csc hx \coth x$

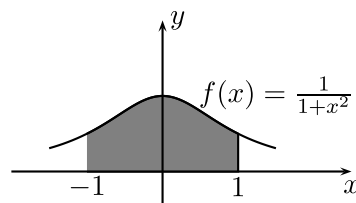
**3.5.16. Ejemplo.** Calcula las siguientes integrales definidas e interpreta geoméricamente.

- $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$
- $\int_0^1 e^x dx$ .

**Solución:**

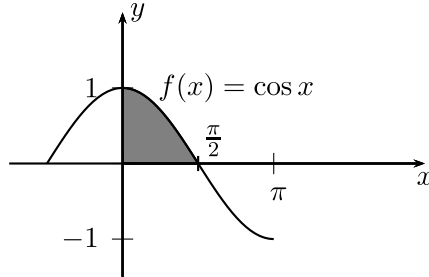
- Una antiderivada de  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  es  $g(x) = \arctan x$ . Por lo tanto,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$



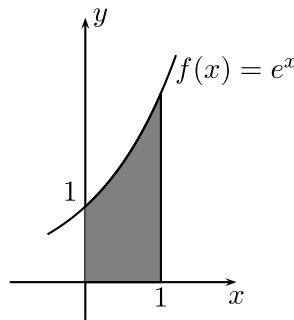
2. Una primitiva de  $f(x) = \cos x$  es  $g(x) = \sin x$ . Por lo tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$



3. Una antiderivada de  $f(x) = e^x$ , es ella misma. Por lo tanto,

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$



**Actividad 40.** 1. Calcula  $F'(x)$ , donde:

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt.$$

2. Calcula  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$  e interpreta geoméricamente.

## ÁREA DE REGIONES MÁS GENERALES

Se ha visto que si  $f$  es una función continua y positiva en  $[a, b]$ , entonces el área  $A$  de la región  $R$ , limitada entre la gráfica de  $f$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  y el eje  $x$ , está dada por

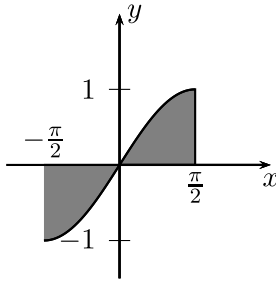
$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Este hecho no siempre es así cuando  $f$  es tanto positiva como negativa. Por ejemplo,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx,$$

no representa el área bajo la gráfica de  $f(x) = \sin x$  en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . De hecho, se tiene que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1 + 1 = 0.$$



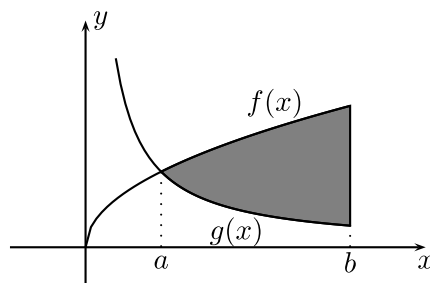
El área de la región que está abajo del eje  $x$  es negativo y se cancela con el que está por arriba del eje  $x$ . Sin embargo, para determinar el área de la región sombreada, se multiplica por  $-1$  el área que da negativo. Así,

$$A = -\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx\right) + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx\right) = -(-1) + 1 = 2.$$

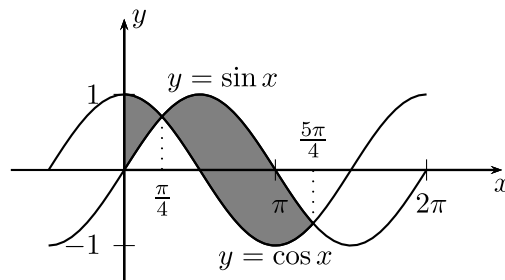
De esta manera, para obtener el área bajo la gráfica de una función  $f$  negativa en algún intervalo  $[a, b]$ , se tendrá que multiplicar por  $-1$ .

También se puede calcular el área de regiones más generales, sobre todo, de regiones que están limitadas por la gráfica de más de una función. Por ejemplo, si  $f$  y  $g$  son tales que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces el área de la región limitada entre las gráficas de  $f$  y  $g$  en  $[a, b]$  y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ , está dado por

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



**3.5.17. Ejemplo.** Calcula el área de la región sombreada que se muestra en la figura.



**Solución:** La gráfica de  $y = \sin x$  se intersecta con la de  $y = \cos x$ , si y sólo si  $\sin x = \cos x$ . Pero esto es cierto cuando

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1, \quad \text{donde} \quad \cos x \neq 0.$$

Entonces se tiene que

$$x = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Luego, al ser la función tangente periódica, se debe tener que

$$x = \dots, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$$

Por otra parte,  $\cos x \geq \sin x$  en  $[0, \pi/4]$ ; mientras que  $\sin x \geq \cos x$  en  $[\pi/4, 5\pi/4]$ . Por lo tanto, el área pedida es

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx.$$

Calculando las dos integrales por separado, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \left[ \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right] - [\sin 0 + \cos 0] \\ &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] - [0 + 1] \\ &= \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx &= (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= \left[ -\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} \right] - \left[ -\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \left[ -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] - \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A = \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 1. \quad \blacksquare$$

De manera similar, si  $f(y) \geq g(y)$  para todo  $y \in [c, d]$ , entonces el área de la región limitada entre las gráficas de  $f$  y  $g$  en  $[c, d]$  y las rectas horizontales  $y = c$  y  $y = d$ , está dado por

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy.$$

Se ha visto que si  $n$  es un número natural,

$$\int_a^b x^{-n} dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1} \quad \text{está definida para} \quad n \neq 1,$$

siempre y cuando,  $a$  y  $b$  son ambos positivos o negativos. Esta afirmación se debe a que  $f(x) = x^{-n}$  no está definida en  $x = 0$ . De esta manera, surge el problema de definir la integral definida

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx$$

para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, sabemos que si  $x > 0$ ,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

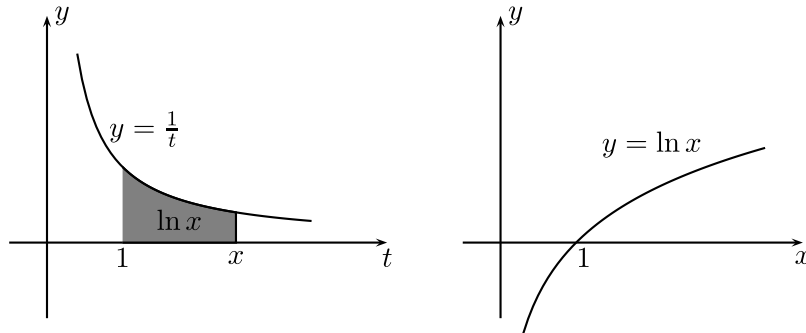
Así que entonces resulta ser  $g(x) = \ln x$ , una antiderivada de  $f(x) = \frac{1}{x}$  para  $x > 0$ . Luego, por el teorema fundamental, se tendría que

$$\int_a^x \frac{1}{t} dt = g(x) - g(a); \quad a > 0.$$

Ahora, como  $g(1) = \ln(1) = 0$ , se tiene que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

El logaritmo natural se ha expresado como una función en términos de una integral definida. Geométricamente consiste en el área bajo la gráfica de  $y = \frac{1}{t}$ , en  $[1, x]$ .



**3.5.18. Definición.** Sea  $x > 0$ . Se define el logaritmo natural de  $x$  como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Se ha obtenido otra forma de escribir  $\ln x$  en términos de una integral definida, donde  $x > 0$ . La pregunta que se debe hacer ahora es si esta definición cumple con las propiedades de  $\ln x$  enunciadas en la sección 2.2, y si su gráfica es como ya la conocemos (véase la figura derecha). La respuesta es sí. Por ejemplo, si se toma en cuenta la figura anterior (izquierda) que explica  $\ln x$  como el área bajo la gráfica de  $y = \frac{1}{t}$  en  $[1, x]$ , se tiene que si  $x > 1$ ,  $\ln x > 0$ ; si  $0 < x < 1$ ,  $\ln x < 0$  puesto que  $\int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$ , y si  $x = 1$ ,  $\ln x = 0$ , debido a que  $\int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$ . Más aún,  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0$ , si  $x > 0$ . Esto significa que la gráfica de  $\ln x$  debe ser creciente. Finalmente, la segunda derivada de  $\ln x$  es  $-\frac{1}{x^2} < 0$ . Esto nos dice que la gráfica de  $\ln x$  es cóncava.

En cuanto a las propiedades de  $\ln x$  se observa, por ejemplo, que  $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ , para todo  $a, x > 0$ . En efecto, sean  $a, x > 0$  y sea  $h(x) = \ln(ax)$ . Entonces,  $h'(x) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x}$ . Luego, la función  $h(x) - \ln x$  tiene derivada nula para todo  $x > 0$ . Se tiene entonces que  $h(x) - \ln x = c$  para alguna  $c \in \mathbb{R}$ . Pero  $h(1) - \ln 1 = \ln a$ . Por lo que  $c = \ln a$ . Se tiene así que  $\ln(ax) = h(x) = \ln a + \ln x$ .

Otro punto importante de la definición 3.5.18 es que la inversa de  $\ln x$  debe ser la función exponencial  $f(x) = e^x$ . Por ejemplo, si  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la inversa de  $\ln x$ , entonces

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\ln'(\varphi(x))} = \varphi(x).$$

Además, si  $x, y \in \mathbb{R}$  son tales que  $x = \ln a$  y  $y = \ln b$  para ciertas  $a, b > 0$ , entonces  $\varphi(x + y) = \varphi(\ln a + \ln b) = \varphi(\ln(ab)) = ab = \varphi(x)\varphi(y)$ . La función que cumple las propiedades de  $\varphi$  es la función exponencial y  $\varphi(x)$  debe coincidir con  $f(x) = e^x$ .

### LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.5

1. Evalúa las siguientes integrales definidas, utilizando una suma superior o inferior y una partición regular  $P$ .

a)  $\int_0^2 x dx$

b)  $\int_0^1 (1 - x^2) dx$

c)  $\int_a^b x^3 dx$ .

2. Calcula las siguientes integrales e interpreta geoméricamente.

a)  $\int_{-1}^2 |2x - 4| dx$

b)  $\int_0^3 |x - 1| dx$

c)  $\int_{-2}^1 |1 - x^2| dx$

d)  $\int_{-1}^5 f(x) dx$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ 2x - 7 & \text{si } 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

e)  $\int_{-1}^3 f(x) dx$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x < 3/2, \\ x - \frac{3}{2} & \text{si } 3/2 \leq x < 3. \end{cases}$$

3. Determina  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad \text{donde}$$

a)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  en  $[0, 2]$

b)  $f(x) = e^x$  en  $[0, 1]$

c)  $f(x) = 4 - 3x^2$  en  $[-1, 1]$ .

4. Determina  $F'(x)$ , donde

a)

$$F(x) = \int_x^1 \sin^2 t dt + \int_3^x \cos^2 t dt$$

b)

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^2} dt$$

c)

$$F(x) = \left( \int_0^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \right)^3$$

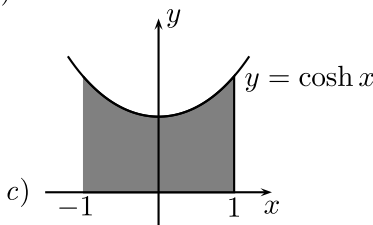
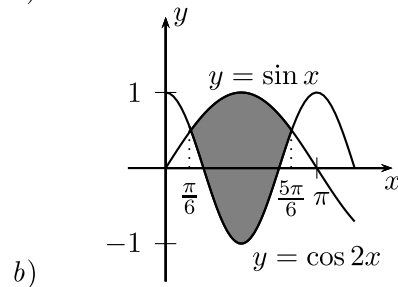
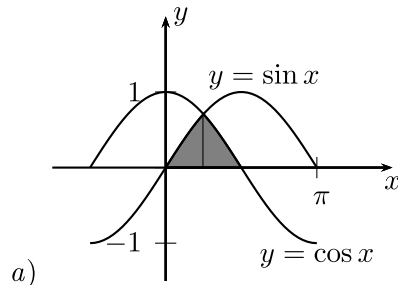
d)

$$F(x) = \int_0^{f(x)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \left( \frac{1}{1+\sin^2 t} \right) dt$$

e)

$$F(x) = \int_0^x \left( \int_1^y \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \right) dy.$$

5. Calcula el área sombreada de las siguientes regiones.



d) Calcula el área de la región limitada entre la gráfica de  $y = \sinh x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  y el eje  $x$ .

- e) Calcula el área de la región limitada entre la gráfica de  $y = \sec hx$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$  y el eje  $x$ .
- f) Calcula el área de la región limitada entre la gráfica de  $y = \sinh x + \cosh x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  y el eje  $x$ . Observa que la gráfica de esta función es positiva.

### 3.6. La integral indefinida

Se ha visto que una función  $F$  que satisface  $F'(x) = f(x)$ , es una **antiderivada** o **primitiva** de  $f$ . De hecho, toda función continua  $f$  tiene una antiderivada  $F$ , donde

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Se observa que si  $F$  es una antiderivada de  $f$  y  $c$  es cualquier constante, entonces  $F(x) + c$  es también una antiderivada de  $f$ , puesto que

$$(F + c)'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Más aún, todas las antiderivadas de  $f$  son de la forma  $F(x) + c$ .

A un elemento del conjunto de todas las primitivas de  $f$  se le llama la **integral indefinida** de  $f$  y se simboliza por  $\int f(x)dx$ . Entonces, si  $F$  es una antiderivada de  $f$ , se tiene que

$$\int f(x)dx = F(x) + c. \quad (3.8)$$

Luego, si  $F'(x) = f(x)$ , el teorema fundamental del cálculo nos asegura que

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Esto también se puede escribir como

$$\int_a^b f(x)dx = \left[ \int f(x)dx \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Con lo anterior, se debe tener

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x).$$

Por otro lado, al ser  $f(x) + c$  es una antiderivada de  $f'(x)$  se tiene también que

$$\int f'(x)dx = f(x) + c.$$

Esto dice de alguna manera que la integral indefinida y la derivación son operaciones inversas. La derivada se cancela con la integral y la integral se cancela con la derivada.

La igualdad (3.8) explica que para obtener la integral indefinida de una función  $f$ , basta tener una antiderivada  $F$  de  $f$ . Por ejemplo, si  $n \neq -1$ , entonces

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c. \quad (3.9)$$

Para comprobar este hecho, se observa que si  $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ , entonces  $F'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)$ .

El caso en que  $n = -1$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , definida en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Luego, si  $F(x) = \ln |x|$  con  $x \neq 0$ , entonces  $F(x)$  es una antiderivada de  $f(x) = \frac{1}{x}$ . En efecto:

(i) Si  $x > 0$ ,  $F(x) = \ln x$  y  $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ .

(ii) Si  $x < 0$ ,  $F(x) = \ln(-x)$  y  $F'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} = f(x)$ .

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c.$$

La fórmula (3.9) permite obtener infinidad de integrales indefinidas. Por ejemplo, si  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,

$$\int x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{x^{\frac{p+q}{q}}}{\frac{p+q}{q}} = \frac{qx^{\frac{p+q}{q}}}{p+q} + c.$$

**Actividad 41.** Calcula las siguientes integrales indefinidas.

1.  $\int \frac{1}{x^4} dx$
2.  $\int \sqrt{x} dx$
3.  $\int \frac{x}{\sqrt{x^3}} dx$ .

Un punto importante que se debe mencionar es que el símbolo  $dx$  que acompaña a la integral indefinida, es el que dice con respecto a qué variable se debe integrar. Por ejemplo

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c,$$

$$\int xy dy = \frac{xy^2}{2} + c,$$

$$\int xy dx = \frac{yx^2}{2} + c.$$

La siguiente tabla, muestra algunas integrales indefinidas. Uno se puede convencer de estas fórmulas al derivar las funciones indicadas a la derecha de cada igualdad.

$\int k dx = kx + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$	$\int \sinh x = \cosh x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + c$	$\int \cosh x dx = \sinh x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sec h^2 x dx = \tanh x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \csc h^2 x dx = -\coth x + c$
$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$	$\int \sec h x \tanh x dx = -\sec h x + c$
$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$	$\int \csc h x \coth x dx = -\csc h x + c$
$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

Las siguientes propiedades, son una consecuencia de las reglas de derivación:

- (a)  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$   
 (b)  $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, c$  una constante.

Cuando se conoce la antiderivada de una función, se puede obtener fácilmente la integral indefinida de la misma, sin embargo, esto no es posible para muchas funciones. Para estos casos, existen métodos llamados **métodos de integración** que ayudan a resolver estos problemas, aunque no siempre. En esta ocasión, se repasarán los métodos de **integración por partes**, **integración por sustitución** y **sustitución trigonométrica**.

**3.6.1. Teorema. (Integración por partes)** Si  $f'(x)$  y  $g'(x)$  son funciones continuas, entonces

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

**Demostración:** Por la regla del producto de la derivada, se tiene que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Esta fórmula se puede reescribir como

$$f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x).$$

Integrando ambos lados, se tiene

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (fg)'(x)dx - \int f'(x)g(x)dx = (fg)(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Por lo tanto,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \quad \square$$

Si se escribe  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$ , entonces  $du = f'(x)dx$  y  $dv = g'(x)dx$ . La fórmula de la integración por partes se escribe ahora

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3.10)$$

Esto es una forma abreviada de la integración por partes. Regularmente, este método se usa para integrar productos de funciones.

Para aplicar correctamente la fórmula (3.10) es necesario elegir adecuadamente a las funciones  $u$  y  $v$ , de otra forma en lugar de simplificar la integral se podría complicar aún más.

Otra consecuencia del teorema 3.6.1 es que para integrales definidas, se tiene que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

**3.6.2. Ejemplo.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int x \cos x dx$

2.  $\int \ln x dx$ .

**Solución:**

1. Sean  $u = x$ ,  $dv = \cos x dx$ . Entonces  $du = dx$ ,  $v = \sin x$ .

Aplicando la fórmula de la integración por partes, se tiene

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

2. Sean  $u = \ln x$ ,  $dv = dx$ . Entonces  $du = \frac{1}{x} dx$ ,  $v = x$ . Por lo tanto,

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx = x \ln x - x + c. \quad \blacksquare$$

En algunos cálculos es necesario aplicar más de una vez la integración por partes.

**3.6.3. Ejemplo.** Determina  $\int e^x \sin x dx$ .

**Solución:**

Sean  $u = e^x$ ,  $dv = \sin x dx$ . Entonces  $du = e^x dx$ ,  $v = -\cos x$ . Por lo tanto,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Se aplica nuevamente la integración por partes a la nueva integral del lado derecho.

Sean  $u = e^x$ ,  $dv = \cos x dx$ . Entonces  $du = e^x dx$ ,  $v = \sin x$ . Así,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Al sustituir tenemos

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Al despejar tenemos

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x).$$

Finalmente, se concluye que

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + c. \quad \blacksquare$$

**Actividad 42.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int x e^x dx$
2.  $\int x^2 \ln x dx$
3.  $\int x^2 e^{-x} dx$ .

Existe otro método de integración llamado **integración por sustitución**. Este método se puede usar cuando en el integrando se pueda reconocer como  $f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ , lo cual se puede simplificar a la forma  $f(u) du$  si se escribe  $u = g(x)$ . Es decir,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du.$$

En general, este método consiste en encontrar una sustitución adecuada de tal forma que simplifique la integral a una más sencilla. Se enuncia formalmente este resultado en el siguiente teorema:

**3.6.4. Teorema. (Integración por sustitución)** Si  $f$  y  $g'$  son funciones continuas, entonces

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

**Demostración:** Sea  $F$  una primitiva de  $f$ . Entonces,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otra parte, se sabe que

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Esto nos dice que  $(F \circ g)(x)$  es una primitiva de  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ . Por lo tanto,

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Finalmente, se concluye que

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \quad \square$$

**3.6.5. Ejemplo.** Determina  $\int_a^b \sin^3 x \cos x dx$ .

**Solución:**

Si se escribe  $g(x) = \sin x$ , entonces  $g'(x) = \cos x$  es un factor que aparece en el integrando. Se tiene entonces que

$$\sin^3 x \cos x = (g(x))^3 \cdot g'(x).$$

Por lo tanto, si  $f(u) = u^3$ , entonces  $f(g(x)) \cdot g'(x) = (g(x))^3 \cos x = \sin^3 x \cos x$ . luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin^3 x \cos x dx &= \int_a^b f(g(x))g'(x)dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \\ &= \int_{\sin a}^{\sin b} u^3 du \\ &= \frac{\sin^4 b}{4} - \frac{\sin^4 a}{4}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Este procedimiento se puede simplificar si se escribe desde un principio  $u = g(x)$  y  $du = g'(x)dx$ . Así, se tiene que

$$u = \sin x, \quad \text{implica} \quad du = \cos x dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b \sin^3 x \cos x dx = \int_{\sin a}^{\sin b} u^3 du = \frac{\sin^4 b}{4} - \frac{\sin^4 a}{4}.$$

Con esta nueva simplificación no es importante saber de alguna manera quién es  $f$ . Se analizan otros ejemplos para clarificar la idea.

**3.6.6. Ejemplo.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int_a^b x \sin x^2 dx$
2.  $\int_a^b \tan x dx$
3.  $\int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx$ .

**Solución:**

1. En esta integral, conviene elegir  $u = x^2$ , es decir,  $(g(x) = x^2)$ . Luego,  $du = 2x dx$ , que equivale a  $\frac{du}{2} = x dx$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b x \sin x^2 dx &= \int_a^b (\sin x^2) x dx = \int_{a^2}^{b^2} \sin u \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \sin u du = \frac{1}{2} (-\cos b^2 - (-\cos a^2)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos a^2 - \cos b^2). \end{aligned}$$

2. Se observa que

$$\int_a^b \tan x dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Sea  $u = \cos x$ , entonces  $du = -\sin x dx$ , que es equivalente a  $-du = \sin x dx$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b \tan x dx &= \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_{\cos a}^{\cos b} \frac{-du}{u} \\ &= -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u} du = -(\ln |\cos b| - \ln |\sin a|) \\ &= \ln |\cos a| - \ln |\cos b|. \end{aligned}$$

3. Sea  $u = \ln x$ , entonces  $du = \frac{1}{x} dx$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx &= \int_a^b \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{1}{u} du \\ &= \ln |\ln b| - \ln |\ln a|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora se analizarán algunas integrales indefinidas utilizando este método.

**3.6.7. Ejemplo.** Calcula  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ .

**Solución:**

Sea  $u = 1 + x^2$ , entonces  $du = 2x dx$ , que es equivalente a  $\frac{du}{2} = x dx$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \int \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Se observa que en el último paso de este ejemplo, se substituyó de nuevo  $u$  por  $1 + x^2$ . En general siempre que se use este método para el cálculo de una integral indefinida,  $u$  se debe substituir al último por  $g(x)$ . En una integral definida esta substitución ya no es necesaria como en los ejemplos que ya se han visto.

**3.6.8. Ejemplo.** Determina  $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$ .

En este ejemplo, ninguna elección de  $u$  hace que aparezca  $g'(x)dx$ . Sin embargo, si se multiplica por  $e^x$  a la fracción  $\frac{1}{1+e^{-x}}$  en el numerador y en el denominador se obtendrá

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

Luego, si  $u = e^x + 1$ , entonces  $du = e^x dx$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^{-x}} dx &= \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| = \ln |e^x + 1| \\ &= \ln(e^x + 1) + c. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Actividad 43.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int_a^b x e^{-x^2} dx$
2.  $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

El método por substitución también se puede aplicar cuando el factor  $g'(x)$  no aparece en el integrando de ninguna manera posible. Una forma de resolver esto es eligiendo una substitución adecuada  $u = g(x)$ , y de aquí despejar la variable  $x$  para encontrar  $dx$ .

**3.6.9. Ejemplo.** Determina  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

**Solución:**

Se hace la substitución  $u = \sqrt{x}$ . Despejando, se tiene que  $u^2 = x$ , entonces  $2udu = dx$ . Por lo tanto,

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^u 2udu = 2 \int u e^u du.$$

La última integral se resuelve usando integración por partes.

Sean  $v = u$ ,  $dw = e^u du$ . Entonces  $dv = du$ ,  $w = e^u$ . Por lo tanto,

$$\int u e^u du = u e^u - \int e^u du = u e^u - e^u = e^u (u - 1).$$

Al substituir tenemos

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^u (u - 1) = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + c. \quad \blacksquare$$

**3.6.10. Ejemplo.** Determina  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$ .

**Solución:**

Sea  $u = e^x + 1$ . Despejando  $x$ , se tiene  $u - 1 = e^x$ ,  $\ln(u - 1) = x$ . Luego,  $\frac{1}{u-1} du = dx$ . Sustituyendo se tendrá:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \int \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}} \frac{1}{u-1} du = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du \\ &= \int (u^{1/2} - u^{-1/2}) du = \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{1}{2} u^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} (e^x + 1)^{3/2} - \frac{1}{2} (e^x + 1)^{1/2} + c. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Actividad 44.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int (x+1)^6 dx$
2.  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .

El método de integración por sustitución también se puede aplicar para determinar la integral de ciertas funciones trigonométricas. Estas se pueden resolver sin mucha dificultad si se emplean algunas identidades que ya se han estudiado antes, tales como:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

1. Sean  $n, m$  enteros positivos. Supongamos que  $n$  o  $m$  es impar. Empleando la identidad  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , se puede resolver la integral

$$\int \sin^n x \cos^m x dx.$$

Supongamos que  $n$  es el entero impar, entonces  $n = 2k + 1$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cos^m x dx &= \int \sin^{2k+1} x \cos^m x dx = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^m x dx \\ &= \int (\sin^2 x)^k \cos^m x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x \sin x dx. \end{aligned}$$

En esta última integral se hace la sustitución  $u = \cos x$ , entonces  $du = -\sin x dx$ , que es equivalente a  $-du = \sin x dx$ . Por lo tanto,

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \int (1 - u^2)^k u^m (-du) = - \int (1 - u^2)^k u^m du.$$

Esta última integral es fácil de resolver si se desarrolla  $(1 - u^2)^k$ . Si  $m$  es impar se hace algo análogo.

2. Si  $n$  es impar o  $m$  es par, se puede resolver una integral del tipo

$$\int \tan^n x \sec^m x dx.$$

En este caso, se emplea la identidad  $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ . Así, si  $n$  es impar,  $n = 2k + 1$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int \tan^n x \sec^m x dx &= \int \tan^{2k+1} x \sec^m x dx = \int \tan^{2k} x \tan x \sec^m x dx \\ &= \int (\tan^2 x)^k \sec^m x \tan x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{m-1} x \sec x \tan x dx. \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución  $u = \sec x$ , se tiene que  $du = \sec x \tan x dx$ . Por lo tanto,

$$\int \tan^n x \sec^m x dx = \int (u^2 - 1)^k u^{m-1} du.$$

Si  $m$  es par,  $m = 2k$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int \tan^n x \sec^m x dx &= \int \tan^n x \sec^{2k} x dx \\ &= \int \tan^n x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx \\ &= \int \tan^n x (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx. \end{aligned}$$

Ahora, si  $u = \tan x$ , entonces  $du = \sec^2 x dx$ . Finalmente se concluye que

$$\int \tan^n x \sec^m x dx = \int u^n (1 + u^2)^{k-1} du.$$

3. Si  $n$  es par, se pueden resolver integrales del tipo

$$\int \sin^n x dx \quad \text{y} \quad \int \cos^n x dx.$$

Aquí, se emplean las identidades:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{o} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Estas integrales también se pueden determinar cuando  $n$  es impar ( $n = 2k + 1$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}$ ). En este caso,

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x dx, \\ \int \cos^n x dx &= \int (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx. \end{aligned}$$

De aquí, ya se puede adivinar qué pasos siguen. Estas técnicas de integración que se han analizado se emplean sobre todo para determinar integrales de productos de funciones trigonométricas, en especial, productos entre senos y cosenos o secantes y tangentes, y también para calcular integrales de potencias de funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente y secante.

**3.6.11. Ejemplo.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$

2.  $\int \tan^3 x \sec^2 x dx$

3.  $\int \sin^2 x dx$ .

**Solución:**

1.

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx.$$

Sea  $u = \cos x$ , entonces  $du = -\sin x dx$ , que es lo mismo que  $-du = \sin x dx$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= -\int (1 - u^2)^2 u^2 du = -\int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 du \\ &= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.

$$\int \tan^3 x \sec^2 x dx = \int \tan^2 x \tan x \sec^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x \sec x \tan x dx.$$

Sea  $u = \sec x$ , entonces  $du = \sec x \tan x dx$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \sec^2 x dx &= \int (u^2 - 1) u du = \int (u^3 - u) du \\ &= \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} = \frac{\sec^4 x}{4} - \frac{\sec^2 x}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Actividad 45.** Calcula las siguientes integrales.

1.  $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

2.  $\int \tan^2 x \sec^4 x dx$

3.  $\int \cos^2 x dx$ .

No resultó complicado determinar el valor de la integral de las funciones seno y coseno, debido a que se conocía la antiderivada de cada una. Para el cálculo de la integral de la función tangente, se recurrió a uno de los métodos que ya se había visto. En cuanto a las otras tres funciones trigonométricas: secante, cosecante y cotangente, a primera vista, es difícil pensar en una antiderivada para cada una de ellas. El valor de la integral de cada una de estas funciones se calculan como sigue:

1.

$$\int \csc x dx = \int \csc x \left( \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x} \right) dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx.$$

Sea  $u = \csc x - \cot x$ , entonces  $du = (-\csc x \cot x + \csc^2 x) dx$ . Luego,

$$\int \csc x dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |\csc x - \cot x|.$$

2.

$$\int \sec x dx = \int \sec x \left( \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx.$$

Sea  $u = \sec x + \tan x$ , entonces  $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$ . Por lo tanto,

$$\int \sec x dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |\sec x + \tan x|.$$

3.

$$\int \cot x dx = \int \cot x \left( \frac{\csc x}{\csc x} \right) dx = \int \frac{\cot x \csc x}{\csc x} dx.$$

Haciendo  $u = \csc x$ , se tiene que  $du = -\csc x \cot x dx$ , es decir,  $-du = \csc x \cot x dx$ . Por lo tanto,

$$\int \cot x dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln |u| = -\ln |\csc x|.$$

Quizás también sea necesario calcular  $\int \sec^3 x dx$ , que llega a presentarse en algunas ocasiones para el cálculo de otras. Primero se observa que

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx.$$

Usando el método de integración por partes, se hace  $u = \sec x$ ,  $dv = \sec^2 x dx$ . Entonces,  $du = \sec x \tan x dx$ ,  $v = \tan x$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \int \sec x \sec^2 x dx = \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2 \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x + \ln | \sec x + \tan x | . \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x + \ln | \sec x + \tan x |}{2} .$$

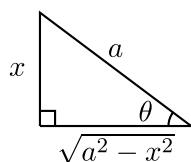
Una última aplicación de la integración por sustitución, se hace para otro grupo especial de integrales. Esta técnica que se usará a continuación se conoce como **integración por sustitución trigonométrica**.

CASO I. Si la función a integrar contiene una expresión como  $a^2 - x^2$ , se hace la sustitución  $x = a \sin \theta$ .

Entonces se tiene que

$$\frac{x}{a} = \sin \theta .$$

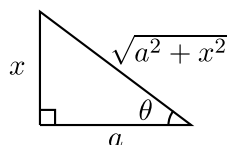
Esta igualdad, satisface las condiciones del siguiente triángulo rectángulo.



CASO II. Si la función a integrar contiene una expresión como  $a^2 + x^2$ , se hace la sustitución  $x = a \tan \theta$ .

En este caso, se tiene que

$$\frac{x}{a} = \tan \theta, \text{ y se satisfacen las condiciones del triángulo}$$

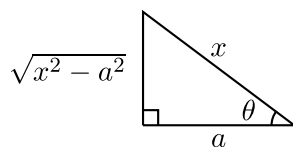


CASO III. Si la función a integrar contiene una expresión como  $x^2 - a^2$ , se hace la sustitución  $x = a \sec \theta$ .

Entonces, se tiene que

$$\frac{x}{a} = \sec \theta .$$

En este caso, se satisface el siguiente triángulo



**3.6.12. Ejemplo.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx$

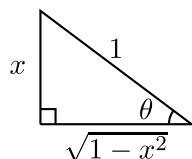
2.  $\int \frac{1}{(4+x^2)^2} dx$

3.  $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx.$

**Solución:**

1. Se aplica el CASO I, donde  $a = 1$ .

Sea  $x = \sin \theta$ , entonces  $dx = \cos \theta d\theta$ . El triángulo que se usa es

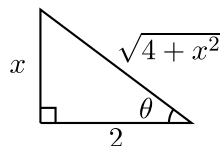


Se observa que  $1 - x^2 = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ . Entonces,  $(1 - x^2)^{3/2} = \cos^3 \theta$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 \theta} \cos \theta d\theta = \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int \sec^2 \theta d\theta = \tan \theta \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Se aplica el CASO II, donde  $a = 2$ .

Si  $x = 2 \tan \theta$ , entonces  $dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$ . Como  $\frac{x}{2} = \tan \theta$ , el triángulo que se aplica es

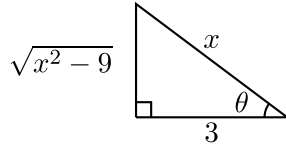


Se observa que  $4 + x^2 = 4 + 4 \tan^2 \theta = 4 \sec^2 \theta$ . Entonces,  $(4 + x^2)^2 = 16 \sec^4 \theta$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(4+x^2)^2} dx &= \int \frac{1}{16 \sec^4 \theta} 2 \sec^2 \theta d\theta = \int \frac{1}{8 \sec^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{\arctan \frac{x}{2}}{2} + \frac{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left( \arctan \frac{x}{2} + \frac{2x}{4+x^2} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. Se aplica el CASO III, donde  $a = 3$ .

Si  $x = 3 \sec \theta$ , entonces  $dx = 3 \sec \theta \tan \theta$ . Como  $\frac{x}{3} = \sec \theta$ , el triángulo que se aplica es



Se observa que  $x^2 - 9 = 9 \sec^2 \theta - 9 = 9 \tan^2 \theta$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx &= \int \frac{3 \tan \theta}{3 \sec \theta} 3 \sec \theta \tan \theta d\theta = 3 \int \tan^2 \theta d\theta \\ &= 3 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = 3(\tan \theta - \theta) \\ &= 3 \left( \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} - \operatorname{arcsec} \frac{x}{3} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Cuando la función a integrar contiene una expresión como  $ax^2 + bx$  o  $ax^2 + bx + c$ , se recomienda completar cuadrados, factorizar y emplear alguno de los tres casos anteriores. Si la función contiene una expresión como  $a \pm bx^2$  o  $ax^2 \pm b$ , se escribe  $a \pm (\sqrt{bx})^2$  o  $(\sqrt{ax})^2 \pm b$  respectivamente, y se usa alguno de los tres casos anteriores.

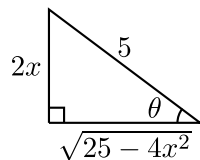
**3.6.13. Ejemplo.** Determina las siguientes integrales.

1.  $\int \sqrt{25 - 4x^2} dx$
2.  $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx$ .

**Solución:**

1. Se observa que  $25 - 4x^2 = 25 - (2x)^2$ . Entonces e usa el CASO I, donde  $a = 5$ .  
Sea  $2x = 5 \sin \theta$ , entonces  $x = \frac{5}{2} \sin \theta$  y  $dx = \frac{5}{2} \cos \theta d\theta$ . Como

$$\frac{2x}{5} = \sin \theta, \text{ el triángulo a usar es}$$



Se observa que  $25 - 4x^2 = 25 - 25 \sin^2 \theta = 25 \cos^2 \theta$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{25 - 4x^2} dx &= \int 5 \cos \theta \left( \frac{5}{2} \cos \theta d\theta \right) = \frac{25}{2} \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{25}{2} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) = \frac{25}{2} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \right) \\ &= \frac{25}{2} \left( \frac{\arcsin \frac{2x}{5}}{2} - \frac{\frac{2x}{5} \frac{\sqrt{25 - 4x^2}}{5}}{2} \right) \\ &= \frac{25}{4} \left( \arcsin \frac{2x}{5} - \frac{2x \sqrt{25 - 4x^2}}{25} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

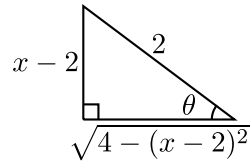
2. Se observa que

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -[(x - 2)^2 - 4] = 4 - (x - 2)^2. \end{aligned}$$

Entonces se usa el CASO I, donde  $a = 2$ .

Sea  $x - 2 = 2 \sin \theta$ , entonces  $x = 2 \sin \theta + 2$  y  $dx = 2 \cos \theta d\theta$ . Como

$$\frac{x - 2}{2} = \sin \theta, \text{ se usa el siguiente triángulo:}$$



Como  $4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 = 4 - 4 \sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta$ , entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx &= \int \frac{1}{2 \cos \theta} 2 \cos \theta d\theta = \int d\theta \\ &= \theta = \arcsin \left( \frac{x - 2}{2} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.6

1. Determina las siguientes integrales por el método de **integración por partes**.

- a)  $\int \arcsin x dx$
- b)  $\int \arccos x dx$
- c)  $\int \arctan x dx$
- d)  $\int x e^{-2x} dx$
- e)  $\int \ln^2 x dx$
- f)  $\int (x^2 - 1)e^x dx$
- g)  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
- h)  $\int x \cosh x dx$
- i)  $\int e^x \cosh x dx$
- j)  $\int x^2 \sinh x dx$ .

2. Determina las siguientes integrales por el método de **integración por sustitución**.

- a)  $\int x \sqrt{1 + x} dx$
- b)  $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$
- c)  $\int \frac{4e^{3x}}{1 + e^{2x}} dx$  [Sugerencia: Hacer  $u = e^x$ ].

- d)  $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$   
 e)  $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$   
 f)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$   
 g)  $\int \frac{1}{1-4e^{-x}} dx$   
 h)  $\int \frac{5}{3e^x-2} dx$   
 i)  $\int \tan[\ln(\cos x)] dx$   
 j)  $\int \cos^3 ax \sin ax dx$   
 k)  $\int \tan^3 bx \sec^2 bx dx$   
 l)  $\int \sec^3 bx \tan bx dx$   
 m)  $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx$   
 n)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$   
 ñ)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$  [Sugerencia: Hacer  $u = x^2$ ].

3. Evalúa las siguientes integrales.

- a)  $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$   
 b)  $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$   
 c)  $\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{\sin x} dx$   
 d)  $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin \frac{x^2}{2} dx$   
 e)  $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} dx$ .

4. Determina las siguientes integrales **trigonométricas**.

- a)  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$   
 b)  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$   
 c)  $\int \tan^4 x \sec^3 x dx$   
 d)  $\int \cos^5 x dx$   
 e)  $\int \sin^4 x dx$   
 f)  $\int \tan^4 x dx$ .

5. Determina las siguientes integrales por **sustitución trigonométrica**.

- a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$   
 b)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$   
 c)  $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$   
 d)  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-9}}$   
 e)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}} dx$

f)  $\int x^3 \sqrt{9 + 4x^2} dx$

g)  $\int e^x \sqrt{1 - e^{2x}} dx$

h)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

i)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} dx$

j)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$

k)  $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2} dx$

l)  $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$

### 3.7. Integrales impropias

Como un objetivo de esta sección, es extender la idea de determinar la integral definida de una función en un intervalo finito  $[a, b]$  a intervalos no necesariamente finitos, es decir, a intervalos donde  $a = -\infty$  o  $b = \infty$ . También a intervalos  $[a, b]$ , donde  $f$  tiene un número finito de discontinuidades infinitas en  $[a, b]$ , donde **discontinuidad infinita** significa que si  $c \in (a, b)$  es una discontinuidad infinita de  $f$ , entonces

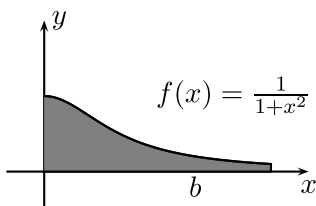
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty.$$

A este tipo de integrales se le denomina **integrales impropias**.

**3.7.1. Ejemplo.** Determina

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

**Solución:** El significado gráfico de esta integral impropia, consiste en el área de una región no limitada; en el área bajo la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , cuyo intervalo de integración es  $[0, \infty)$ .



El procedimiento para resolver este problema se basa en calcular

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \text{donde } b > 0.$$

Posteriormente se toma el límite de la integral anterior cuando  $b \rightarrow \infty$ . Esto es,

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^b = \arctan b.$$

Luego,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Para calcular una integral impropia cuyo intervalo de integración es de la forma  $(-\infty, b]$  o  $[a, \infty)$ , se utiliza la siguiente definición.

**3.7.2. Definición.**

(a) Si  $f$  es continua en  $[a, \infty)$ , entonces

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

(b) Si  $f$  es continua en  $(-\infty, b]$ , entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

**Nota:** Si el límite existe en cualquiera de los dos casos anteriores, se dice que la integral impropia **converge**, en caso contrario, se dice que la integral impropia **diverge**.

Si  $f$  es una función continua en toda la recta real, es decir, en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , y si  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \quad \text{y} \quad \int_c^\infty f(x) dx \quad \text{convergen, entonces}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx.$$

**3.7.3. Ejemplo.** Determina la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

1.  $\int_1^\infty (x-1)e^{-x} dx$ .
2. Usando inducción matemática, comprueba que

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+4} dx$ .

**Solución:**

- 1.

$$\int_1^\infty (x-1)e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (x-1)e^{-x} dx.$$

Primero se calcula  $\int (x-1)e^{-x} dx$  usando integración por partes.

Sean  $u = x-1$ ,  $dv = e^{-x} dx$ . Entonces,  $du = dx$ ,  $v = -e^{-x}$ . Luego,

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^{-x} dx &= -(x-1)e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x-1)e^{-x} - e^{-x} \\ &= -xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_1^b (x-1)e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_1^b = -be^{-b} + e^{-1} = \frac{-b}{e^b} + \frac{1}{e}.$$

Entonces

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (x-1)e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{-b}{e^b} + \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e}.$$

Se concluye que

$$\int_1^{\infty} (x-1)e^{-x} dx = \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

2.

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^n e^{-x} dx.$$

Primero se calcula por el método de integración por partes  $\int_0^b x^n e^{-x} dx$ .

Sean  $u = x^n$ ,  $dv = e^{-x} dx$ . entonces,  $du = nx^{n-1} dx$ ,  $v = -e^{-x}$ .

$$\begin{aligned}\int_0^b x^n e^{-x} dx &= -x^n e^{-x} \Big|_0^b - \int_0^b -e^{-x} nx^{n-1} dx \\ &= -\frac{b^n}{e^b} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Si  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned}\int_0^b x e^{-x} dx &= \int_0^b x e^{-x} dx = -\frac{b}{e^b} + \int_0^b e^{-x} dx \\ &= -\frac{b}{e^b} - [e^{-x}]_0^b = -\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e^b} + 1.\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e^b} + 1 \right] = 1 = 1!.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1!.$$

Supongamos que el resultado se cumple para  $n = k$ , es decir,

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx = k!.$$

Sea  $n = k+1$ . Como

$$\int_0^b x^{k+1} e^{-x} dx = -\frac{b^{k+1}}{e^b} + (k+1) \int_0^b x^k e^{-x} dx,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^{k+1} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^{k+1} e^{-x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{b^{k+1}}{e^b} + (k+1) \int_0^b x^k e^{-x} dx \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (k+1) \int_0^b x^k e^{-x} dx \\
 &= (k+1) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^k e^{-x} dx = (k+1)k! \\
 &= (k+1)!.
 \end{aligned}$$

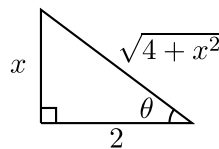
Por lo tanto, el resultado se cumple para  $n = k + 1$ , y por inducción matemática se tiene que

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

3.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+4} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+4} dx + \int_0^\infty \frac{x}{x^2+4} dx.$$

Primero se calcula  $\int \frac{x}{x^2+4} dx$ . Esta integral se resuelve por sustitución trigonométrica, CASO II, donde  $a = 2$ . Sea  $x = 2 \tan \theta$ , entonces  $dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$ . Como  $\frac{x}{2} = \tan \theta$ , el triángulo a usar es



Se observa que  $x^2 + 4 = 4 \tan^2 \theta + 4 = 4 \sec^2 \theta$ . Luego,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2+4} dx &= \int \frac{2 \tan \theta \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta}{4 \sec^2 \theta} = \int \tan \theta d\theta \\
 &= -\ln |\cos \theta| = -\ln \left| \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \right| \\
 &= -\ln \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = -\ln 2 + \ln \sqrt{x^2+4} \\
 &= -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(x^2+4).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+4} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x}{x^2+4} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) \right]_a^0 \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 4 - \left( -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(a^2+4) \right) \right] \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} [\ln 4 - \ln(a^2+4)] \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4}{a^2+4} \right) \\
 &= -\infty.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+4} dx \text{ diverge.}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+4} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{x^2+4} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) \right]_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(b^2+4) - \left( -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 4 \right) \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\ln(b^2+4) - \ln 4] \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} [\ln 4 - \ln(b^2+4)] \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{4}{b^2+4} \right) \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+4} dx \text{ diverge.}$$

Se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+4} dx \text{ diverge. } \blacksquare$$

**Actividad 46.** Comprueba que

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-2x} dx = -\frac{1}{4}.$$

**3.7.4. Ejemplo.** Comprueba que

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

converge si  $p > 1$  y diverge si  $p \leq 1$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(1-p)b^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \right]. \end{aligned}$$

Si  $p > 1$ , entonces  $p - 1 > 0$  y

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)b^{p-1}} = 0.$$

Si  $p < 1$ , entonces  $p - 1 < 0$  ( $1 - p > 0$ ) y

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)b^{p-1}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} = \infty.$$

Si  $p = 1$ ,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Por lo tanto,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1. \quad \blacksquare \end{cases}$$

**3.7.5. Definición.**

1. Si  $f$  es continua en  $[a, b)$  con discontinuidad infinita en  $b$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

2. Si  $f$  es continua en  $(a, b]$  con discontinuidad infinita en  $a$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

3. Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  con discontinuidad infinita en  $c \in (a, b)$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Cuando el límite existe en cualquiera de los dos primeros casos, se dice que la integral impropia converge, de otra forma se dice que diverge. Para el tercer caso, la integral impropia converge cuando las dos integrales impropias del lado derecho son convergentes.

**3.7.6. Ejemplo.** Determina la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

1.  $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx$
2.  $\int_0^1 x \ln x dx$
3.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$ .

**Solución:**

1.

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx = \lim_{c \rightarrow 8^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx = \lim_{c \rightarrow 8^-} \int_0^c \frac{1}{(8-x)^{1/3}} dx.$$

Para calcular  $\int_0^c \frac{1}{(8-x)^{1/3}} dx$  se hace  $u = 8 - x$ , entonces  $du = -dx$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{1}{(8-x)^{1/3}} dx &= - \int_8^{8-c} \frac{du}{u^{1/3}} = - \int_8^{8-c} u^{-1/3} du \\ &= \left[ -\frac{3}{2} u^{2/3} \right]_8^{8-c} = -\frac{3}{2} (8-c)^{2/3} + \frac{3}{2} 8^{2/3} \\ &= -\frac{3}{2} (8-c)^{2/3} + 6. \end{aligned}$$

Así que

$$\lim_{c \rightarrow 8^-} \int_0^c \frac{1}{(8-x)^{1/3}} dx = \lim_{c \rightarrow 8^-} \left[ -\frac{3}{2} (8-c)^{2/3} + 6 \right] = 6.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx = 6. \quad \blacksquare$$

2.

$$\int_0^1 x \ln x dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x \ln x dx.$$

Primero se calcula  $\int x \ln x dx$  utilizando integración por partes.

Sea  $u = x$ ,  $dv = \ln x$ . Entonces,  $du = dx$ ,  $v = x \ln x - x$ .

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= x(x \ln x - x) - \int (x \ln x - x) dx \\ &= x^2(\ln x - 1) - \int x \ln x dx + \int x dx \\ &= x^2(\ln x - 1) - \int x \ln x dx + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Despejando la integral deseada, se tiene

$$2 \int x \ln x dx = x^2(\ln x - 1) + \frac{x^2}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) + \frac{x^2}{4}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_c^1 x \ln x dx &= \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \right]_c^1 \\ &= \frac{1}{2}(0 - 1) + \frac{1}{4} - \frac{c^2}{2}(\ln c - 1) - \frac{c^2}{4} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{c^2}{2}(\ln c - 1) - \frac{c^2}{4} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{c^2}{2} \ln c + \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x \ln x dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{4} - \frac{c^2}{2} \ln c + \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{4} - \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{c^2}{2} \ln c = -\frac{1}{4} - \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\ln c}{\frac{2}{c^2}} \\ &= -\frac{1}{4} - \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{c}}{\frac{-4c}{c^4}} = -\frac{1}{4} - \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{c^4}{-4c^2} \\ &= -\frac{1}{4} - \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{c^2}{-4} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\int_0^1 x \ln x dx = -\frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

3.

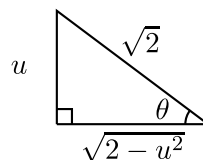
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Primero se calcula  $\int_0^c \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$ .

Sea  $u = \sqrt{1-x}$ , entonces  $u^2 = 1-x$ ,  $2udu = -dx$  y  $2-u^2 = 1+x$ . Luego,

$$\int_0^c \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx = - \int_1^{\sqrt{1-c}} \frac{\sqrt{2-u^2}}{u} 2udu = -2 \int_1^{\sqrt{1-c}} \sqrt{2-u^2} du.$$

Esta última integral se puede resolver por sustitución trigonométrica. Así, sea  $u = \sqrt{2} \sin \theta$ , entonces  $du = \sqrt{2} \cos \theta d\theta$ . Como  $\frac{u}{\sqrt{2}} = \sin \theta$ , el triángulo a utilizar es



Se observa que  $2 - u^2 = 2 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -2 \int \sqrt{2 - u^2} du &= -2 \int (\sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \cos \theta) d\theta = -4 \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= -4 \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right] = -2[\theta + \sin \theta \cos \theta] \\ &= -2 \left[ \arcsin \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) + \frac{u}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2 - u^2}}{\sqrt{2}} \right] \\ &= -2 \left[ \arcsin \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) + \frac{u\sqrt{2 - u^2}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Se tiene así que

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx &= -2 \int_1^{\sqrt{1-c}} \sqrt{2 - u^2} du \\ &= -2 \left[ \arcsin \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) + \frac{u\sqrt{2 - u^2}}{2} \right]_1^{\sqrt{1-c}} \\ &= -2 \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{1-c}\sqrt{1+c}}{2} - \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \right] \\ &= -2 \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{1-c}\sqrt{1+c}}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 1^-} -2 \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{1-c}\sqrt{1+c}}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx = \frac{\pi}{2} + 1. \quad \blacksquare$$

**Actividad 47.** Comprueba la validez de las siguientes integrales impropias

1.  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = 6$
2.  $\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{9}{2}$ .

## LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.7

Comprueba la validez de las siguientes integrales impropias.

$$1. \int_4^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 1$$

$$2. \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3} dx = -\frac{1}{2}$$

$$3. \int_0^{\infty} e^{-x/3} dx = 3$$

$$4. \int_5^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 5}$$

$$5. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = 1$$

$$6. \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(x^2+1)^{5/2}} = -\frac{1}{3}$$

$$7. \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$8. \int_1^{\infty} x e^{-x} dx = \frac{2}{e}$$

$$9. \int_0^{\infty} 4x e^{-x} dx = 4$$

$$10. \int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \text{ diverge}$$

$$11. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$12. \text{ Prueba que } \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \text{ converge si } \alpha > 0 \text{ y diverge si } \alpha \leq 1.$$

$$13. \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

$$14. \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$15. \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$$

$$16. \int_{-4}^1 \frac{1}{(x+3)^3} dx \text{ diverge}$$

$$17. \int_{-5}^{-3} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx = -4$$

$$18. \int_0^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}} dx = 9\sqrt[3]{4}$$

$$19. \text{ Prueba que } \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1 \text{ y diverge si } \alpha \leq 1.$$

$$20. \int_0^9 \frac{1}{(9-x)^{3/2}} dx \text{ diverge.}$$

### 3.8. Longitud de arco

Consideremos  $y = f(x)$  una función continua en  $[a, b]$ . Sea  $C$  la curva definida por la gráfica de  $f$ . Se dice que  $C$  es **rectificable** si tiene longitud (longitud de arco) finita. Una condición suficiente para que la gráfica de  $f$  sea rectificable en  $[a, b]$ , es que  $f'(x)$  sea continua en  $[a, b]$ . En este caso, se dice que  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ . Geométricamente, una función  $f$  de clase  $\mathcal{C}^1$  tiene la propiedad de que su gráfica es una **curva suave**. Por ejemplo, las gráficas de las funciones  $f(x) = |x|$  y  $g(x) = |\sin x|$  no son suaves debido a que tienen picos en ciertos puntos de su dominio.

Es claro que para obtener la longitud de un polígono, se suman las longitudes de todos los segmentos de recta que forman el polígono, no así para una curva suave  $C$  debido a que no está conformada por segmentos de recta. Sin embargo, su longitud  $L$  se puede aproximar por medio de una poligonal inscrita en la gráfica de  $f$ .

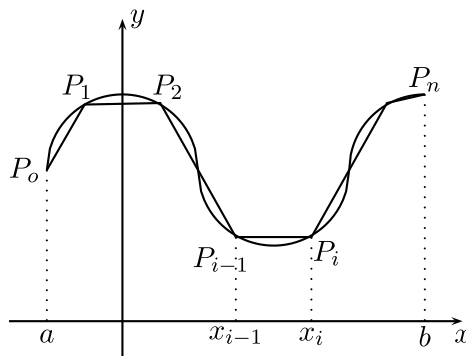
**3.8.1. Teorema.** *Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . La longitud de arco<sup>1</sup> de  $y = f(x)$  en  $[a, b]$  está dada por*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Demostración:**

Sea  $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ .

Sea  $P_i = (x_i, f(x_i))$ ,  $0 \leq i \leq n$ .



La distancia de  $P_{i-1}$  a  $P_i$  está dada por

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Aplicando el teorema del valor medio para derivadas a cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  (véase Teorema 3.4.3), se tiene que existe  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$  tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

<sup>1</sup>Para una curva suave  $C$  dada por  $x = g(y)$  en  $[c, d]$  tiene longitud de arco  $L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$ .

Luego,

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Sumando estas longitudes desde  $i = 1$  hasta  $i = n$ , se obtiene la longitud de la poligonal inscrita en  $C$ . Es decir,

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i,$$

es la longitud de la poligonal, donde la suma de la derecha corresponde a una suma de Riemann con  $f(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ . Si se aplica el límite de esta suma cuando la norma de la partición tiende a cero se obtendrá una integral que corresponde a la longitud de  $C$  como sigue:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad \square$$

**3.8.2. Ejemplo.** Determina la longitud de arco de la curva  $C$ , dada por

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \quad \text{en } [1/2, 2].$$

**Solución:** Se observa que

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} = \frac{x^4 + 3}{6x}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{4x^3(6x) - (x^4 + 3)6}{36x^2} = \frac{24x^4 - 6x^4 - 18}{36x^2} \\ &= \frac{18x^4 - 18}{36x^2} = \frac{x^4 - 1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^8 - 2x^4 + 1}{4x^4},$$

y

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \frac{x^8 - 2x^4 + 1}{4x^4} = \frac{4x^4 + x^8 - 2x^4 + 1}{4x^4} \\ &= \frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4} = \left(\frac{x^4 + 1}{2x^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x^4 + 1}{2x^2}\right)^2} = \frac{x^4 + 1}{2x^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L &= \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{1/2}^2 \frac{x^4 + 1}{2x^2} dx \\ &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{2}(x^2 + x^{-2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right]_{1/2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2^3}{3} - \frac{1}{2} - \left( \frac{(1/2)^3}{3} - \frac{1}{1/2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + 2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{99}{24} \right] = \frac{99}{48} \\ &= 2.0625. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3.8.3. Ejemplo.** Determina la longitud de arco de la curva  $C$ , dada por

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3), \text{ donde } 1 \leq y \leq 4.$$

**Solución:** Se observa que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3) = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}. \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{2}y^{1/2} - \frac{1}{2}y^{-1/2}. \\ \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= \left[\frac{1}{2}y^{1/2} - \frac{1}{2}y^{-1/2}\right]^2 = \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-1}. \\ \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{y}{4} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{y^2 + 1 + 2y}{4y}} = \sqrt{\frac{(y+1)^2}{4y}} \\ &= \frac{y+1}{2y^{1/2}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_1^4 \frac{y+1}{2y^{1/2}} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^4 (y^{1/2} + y^{-1/2}) dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} y^{3/2} + 2y^{1/2} \right]_1^4 \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (4)^{3/2} + 2(4)^{1/2} - \frac{2}{3} - 2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{16}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{20}{3} \right] \\
 &= \frac{10}{3}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.8

1. Determina la longitud de arco de las siguientes curvas, dadas por

- a)  $y = x^{3/2}$  en  $[0, 1]$
- b)  $y = x^2$  en  $[0, 2]$
- c)  $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$  en  $[1, 2]$
- d)  $y = \ln(\cos x)$  en  $[0, \pi/3]$
- e)  $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$  en  $[0, 2]$
- f)  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  en  $[0, 2]$
- g)  $y = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$  en  $[\ln 2, \ln 3]$
- h)  $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$  en  $[0, 4]$
- i)  $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}$  en  $[1, 2]$
- j)  $x = \frac{1}{3}(y - 1)^{3/2}$  en  $[1, 5]$ .

2. Sean  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2)$ . Establece la función  $y = f(x)$  que describe el segmento de recta de  $P_1$  a  $P_2$ , y comprueba que la longitud de arco de  $y = f(x)$  esta dada por:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

### 3.9. Ecuaciones paramétricas

En un sistema de coordenadas cartesianas se emplean dos variables para re-presentar la gráfica de una regla de correspondencia  $f$ , mediante una sola ecuación escrita como  $y = f(x)$ , donde  $x$  es la variable independiente y  $y$  la variable dependiente. Cada punto de la gráfica de  $f$  corresponde a una pareja de puntos  $(x, y)$  o  $(x, f(x))$ . El problema de esta representación se presenta cuando la gráfica de  $f$  tiene puntos como  $(x, y_1), (x, y_2)$ , donde  $y_1 \neq y_2$ . En este caso, la regla de correspondencia  $f$  no corresponde a una función.

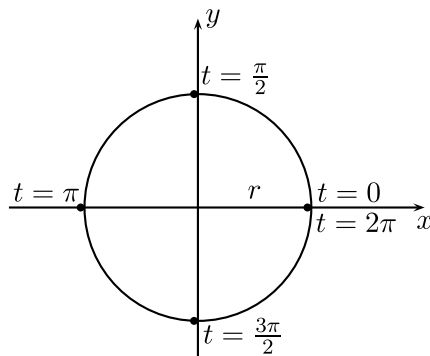
Para tratar el problema de representar la gráfica de una regla de correspondencia  $f$  como si se tratara de una función, lo que se hace es introducir una tercera variable  $t$ , llamada **parámetro**, donde  $x$  y  $y$  ahora dependen de  $t$ , es decir,  $x = u(t)$  y  $y = v(t)$ , para ciertas funciones continuas  $u$  y  $v$ , y  $t$  pertenece a un determinado intervalo  $I$  de tal forma que para cada  $t \in I$ , los puntos  $(u(t), v(t))$  representan a la misma gráfica de  $f$ . El conjunto de puntos  $(x, y)$  que se obtiene cuando  $t$  varía sobre  $I$ , se le denomina **curva plana**.

Por ejemplo, una circunferencia con centro en el origen de radio  $r$ , tiene por ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ . Ésta se puede representar mediante las ecuaciones

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$ . Las ecuaciones  $x$  y  $y$  como funciones de  $t$  se denominan **ecuaciones paramétricas**, y la variable  $t$  es el parámetro.



La curva que resulta cuando  $t$  varía de 0 a  $2\pi$ , es una circunferencia de radio  $r$ .

**3.9.1. Definición.** Sean  $u$  y  $v$  funciones continuas en un intervalo  $I$ . Las ecuaciones

$$x = u(t) \quad y = v(t)$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** y a la variable  $t$  se le llama **parámetro**. El conjunto de puntos  $(x, y)$  que se obtiene cuando  $t$  varía en  $I$  es la gráfica o **curva** que describen las ecuaciones paramétricas.

Por ejemplo, una elipse con centro en el origen que se intersecta en el eje  $x$  en  $a$  y  $-a$ , y con el eje  $y$  en  $b$  y  $-b$ , tiene por ecuación:

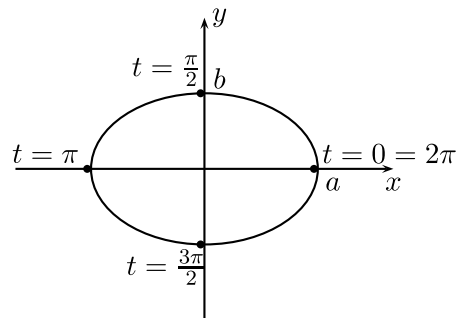
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las ecuaciones paramétricas que describen esta curva están dadas por

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$ .



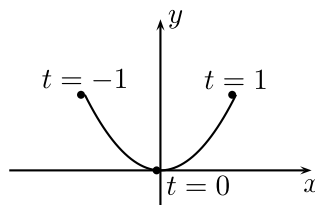
**Nota:** En los ejemplos anteriores se puede observar que cada curva descrita por las ecuaciones paramétricas conforme  $t$  varía en  $[0, 2\pi]$ , se mueven en sentido contrario a las manecillas del reloj. En general, al trazar una curva descrita por las ecuaciones paramétricas conforme  $t$  va tomando valores en  $I$  en forma creciente, se dice que la curva se va trazando en una dirección específica llamada **orientación de la curva**.

Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  dada por la ecuación  $y = f(x)$ , entonces las ecuaciones paramétricas que describen la gráfica de  $f$  se puede definir como

$$x = t, \quad y = f(t); \quad a \leq t \leq b.$$

Por ejemplo, si la función  $f$  está dada por  $y = x^2$  en  $[-1, 1]$ , que corresponde una parábola, entonces las ecuaciones paramétricas que describen esta curva son:

$$x = t, \quad y = t^2; \quad -1 \leq t \leq 1.$$



En algunas ocasiones se necesita conocer la ecuación rectangular de una gráfica en lugar de las ecuaciones paramétricas de una curva. Para esto, es necesario eliminar el parámetro  $t$ . Una forma de hacerlo, es despejar el parámetro de una de las dos ecuaciones y sustituir en la otra. Cuando esto no es posible, se realiza una manipulación a las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo,

1. Si  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces

$$x^2 = r^2 \cos^2 t \quad y \quad y^2 = r^2 \sin^2 t.$$

Luego,

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular corresponde a una circunferencia de radio  $r$ , dada por

$$x^2 + y^2 = r.$$

2. Si  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces

$$x^2 = a^2 \cos^2 t \quad y \quad y^2 = b^2 \sin^2 t.$$

Luego,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

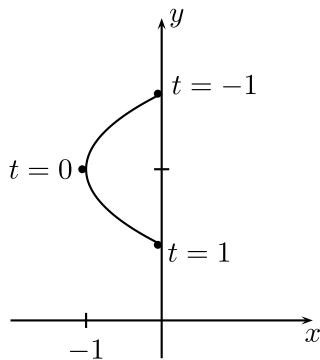
La ecuación rectangular corresponde a una elipse con intersección en el eje  $x$  en  $a$ , y  $b$  en el eje  $y$ , dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Sean  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t + 2$ ;  $-1 \leq t \leq 1$ .

Para determinar la ecuación rectangular, se despeja  $t$  en la segunda ecuación:  $t = y - 2$ . Sustituyendo  $t$  en  $x$ , se obtiene  $x = (y - 2)^2 - 1$ . Esto corresponde a una parábola que se abre a la derecha con vértice en  $(-1, 2)$ , donde  $1 \leq y \leq 3$ . Por lo tanto, la ecuación rectangular es

$$x = (y - 2)^2 - 1, \quad 1 \leq y \leq 3.$$

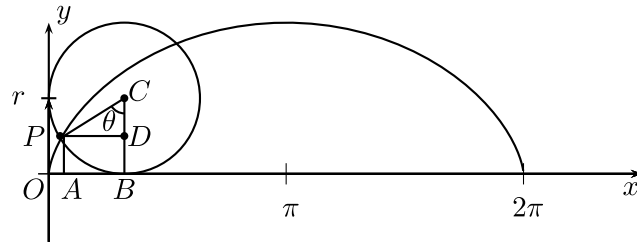


Ahora, se determinarán las ecuaciones paramétricas de algunas curvas especiales que se emplean con frecuencia para la solución de ciertos problemas.

1. La curva que describe un punto  $P$  de una circunferencia de radio  $r$  que rueda sin resbalarse a lo largo de una línea recta se llama **cicloide**. Las ecuaciones paramétricas que describen esta curva están dadas por:

$$x = r(\theta - \sin \theta) \quad y \quad y = r(1 - \cos \theta).$$

En efecto, consideremos la siguiente figura:



Supongamos que en el momento en que comienza a rodar la circunferencia con centro en  $C$  y de radio  $r$  sobre el eje  $x$ , el punto  $P = (x, y)$  coincide con el origen. Sea  $\theta$  medido en radianes. Entonces

$$\widehat{OB} = \widehat{PB} = r\theta.$$

$$\sin \theta = \frac{PD}{r} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{CD}{r}.$$

Por lo tanto,

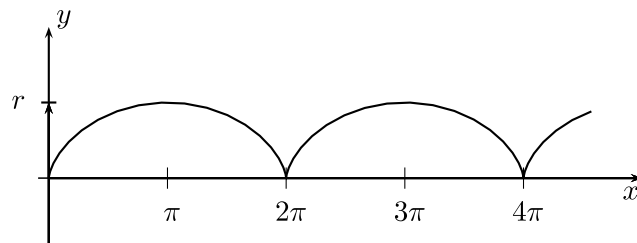
$$PD = r \sin \theta \quad \text{y} \quad CD = r \cos \theta.$$

Luego,

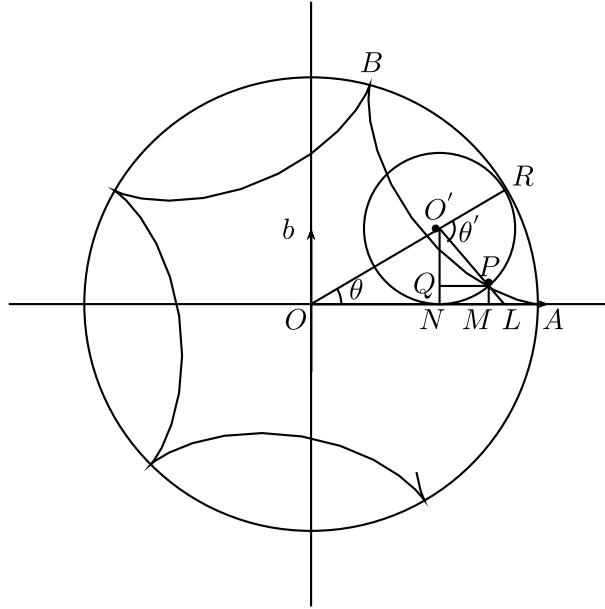
$$x = OA = OB - PD = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - r \sin \theta)$$

$$y = AP = CB - CD = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta).$$

La cicloide queda de la siguiente manera:



- La curva que describe un punto fijo  $P$  de una circunferencia, que rueda sin resbalar al interior de otra circunferencia se llama **hipocicloide**. Para determinar las ecuaciones paramétricas de esta curva, se considera la figura:



Sean  $a =$  radio de la circunferencia con centro en  $O$ .

$b =$  radio de la circunferencia con centro en  $O'$ .

$\varphi = \angle O'PQ$ .

Supongamos que  $P = (x, y)$  el punto fijo de la circunferencia menor que describe la hipocicloide, comienza en  $A$  al momento que empieza a rodar. Entonces,  $\widehat{RA} = \widehat{RP}$ .

Se observa que cuando  $P$  ha recorrido la trayectoria de  $A$  a  $B$ , habrá girado  $360^\circ$ . Se tienen las siguientes igualdades:

$$\cos \theta = \frac{ON}{OO'} \quad \text{entonces} \quad ON = OO' \cos \theta.$$

$$\sin \theta = \frac{NO'}{OO'} \quad \text{entonces} \quad NO' = OO' \sin \theta.$$

$$\cos \varphi = \frac{QP}{PO'} \quad \text{entonces} \quad QP = PO' \cos \varphi.$$

$$\sin \varphi = \frac{QO'}{PO'} \quad \text{entonces} \quad QO' = PO' \sin \varphi.$$

Luego,

$$x = OM = ON + QP = OO' \cos \theta + PO' \cos \varphi,$$

$$y = MP = NO' - QO' = OO' \sin \theta - PO' \sin \varphi.$$

Ahora se expresa  $\varphi$  en términos de  $\theta$ :

Como el ángulo  $\theta'$  es exterior al triángulo  $OO'L$ , se tiene que

$$\theta' = \varphi + \theta, \quad \text{entonces} \quad \varphi = \theta' - \theta.$$

Como  $\widehat{RA} = \widehat{RP}$ , entonces  $a\theta = b\theta'$ . Por lo tanto,

$$\theta' = \frac{a}{b}\theta.$$

Sustituyendo  $\theta'$  en  $\varphi$ , se obtiene

$$\varphi = \frac{a}{b}\theta - \theta = \frac{a-b}{b}\theta.$$

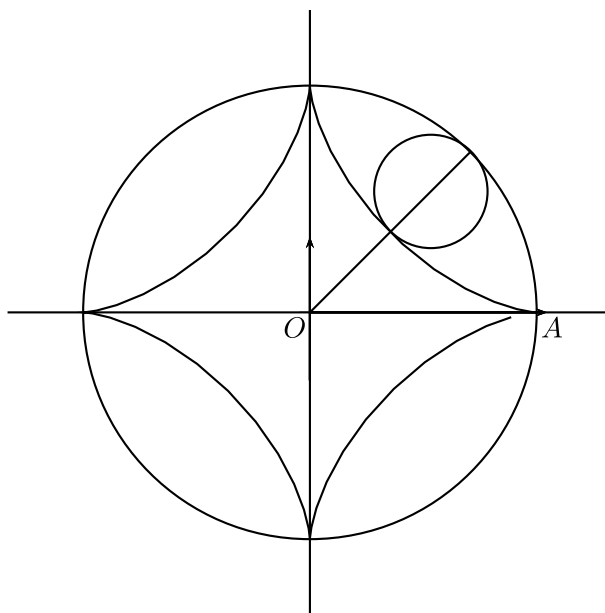
Por otra parte, como  $OO' = a - b$  y  $PO' = b$ , entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a-b}{b}\theta,$$

$$y = (a - b) \sin \theta - b \sin \frac{a-b}{b}\theta.$$

**Nota:** Cuando  $a$  y  $b$  son inconmensurables, la trayectoria que realiza esta curva no vuelve a pasar por el punto  $A$ .

3. Si los radios de las circunferencias que intervienen en la generación de la hipocicloide es tal que  $b = \frac{1}{4}a$  ( $a$  y  $b$  son conmensurables), se obtiene una **curva cerrada** llamada **astroide**.



Las ecuaciones paramétricas de esta curva se deducen de las de la hipocicloide sustituyendo  $b = \frac{1}{4}a$ , obteniéndose  $x = a \cos^3 \theta$  y  $y = a \sin^3 \theta$ . En efecto:

$$\begin{aligned} x &= (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a-b}{b}\theta \\ &= \frac{3}{4}a \cos \theta + \frac{1}{4}a \cos 3\theta. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$y = \frac{3}{4}a \sin \theta - \frac{1}{4}a \sin 3\theta.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\
 &= (\cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta) \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \theta \\
 &= \cos^3 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \\
 &= \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\
 &= 2 \sin \theta \cos \theta \cos \theta + (\cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta) \sin \theta \\
 &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \\
 &= 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{3}{4}a \cos \theta + \frac{1}{4}a[\cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta] \\
 &= \frac{3}{4}a \cos \theta + \frac{1}{4}a \cos^3 \theta - \frac{3}{4}a \sin^2 \theta \cos \theta \\
 &= \frac{3}{4}a \cos \theta(1 - \sin^2 \theta) + \frac{1}{4}a \cos^3 \theta \\
 &= \frac{3}{4}a \cos \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4}a \cos^3 \theta \\
 &= a \cos^3 \theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{3}{4}a \sin \theta - \frac{1}{4}a[3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta] \\
 &= \frac{3}{4}a \sin \theta - \frac{3}{4}a \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4}a \sin^3 \theta \\
 &= \frac{3}{4}a \sin \theta(1 - \cos^2 \theta) + \frac{1}{4}a \sin^3 \theta \\
 &= \frac{3}{4}a \sin \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{4}a \sin^3 \theta \\
 &= a \sin^3 \theta.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x = a \cos^3 \theta \quad y \quad y = a \sin^3 \theta.$$

**Nota:** Las ecuaciones paramétricas de esta curva, cumplen lo siguiente:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} = \cos^2 \theta \quad y \quad \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = \sin^2 \theta.$$

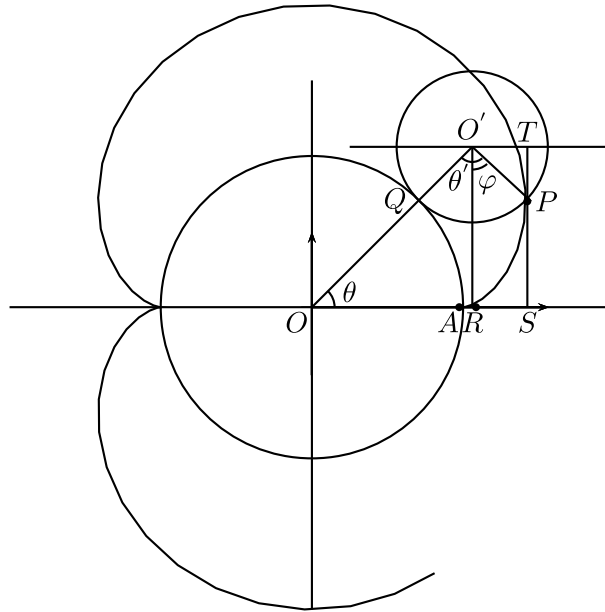
De aquí, se deduce la ecuación rectangular del astroide dada por

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1.$$

Si  $a = 1$ , se tiene que

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

4. La curva que describe un punto fijo  $P$  de una circunferencia de radio  $b$  que rueda sobre la parte exterior de otra circunferencia de radio  $a$  se llama **epicicloide**.



Sean  $a$  y  $b$  los radios de las circunferencias con centros en  $O$  y  $O'$  respectivamente.

Supongamos que en el momento que comienza a rodar el círculo con centro en  $O'$ , el punto  $P = (x, y)$  coincide en  $A$ . Entonces,

$$\widehat{PQ} = b\theta' = \widehat{AQ} = a\theta. \quad \text{Es decir} \quad \theta' = \frac{a}{b}\theta.$$

Se observa que

$$\sin \theta = \frac{O'R}{a+b}, \quad \text{entonces} \quad (a+b) \sin \theta = O'R.$$

$$\cos \theta = \frac{OR}{a+b}, \quad \text{entonces} \quad (a+b) \cos \theta = OR.$$

$$\sin \varphi = \frac{RS}{b}, \quad \text{entonces} \quad b \sin \varphi = RS.$$

$$\cos \varphi = \frac{TP}{b}, \quad \text{entonces} \quad b \cos \varphi = TP.$$

Luego,

$$x = OR + RS = (a+b) \cos \theta + b \sin \varphi,$$

$$y = O'R - TP = (a+b) \sin \theta - b \cos \varphi.$$

Pero

$$\varphi = \theta' + \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{a}{b}\theta + \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{a+b}{b}\theta - \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$x = (a+b) \cos \theta + b \sin \left( \frac{a+b}{b}\theta - \frac{\pi}{2} \right) = (a+b) \cos \theta - b \cos \left( \frac{a+b}{b}\theta \right),$$

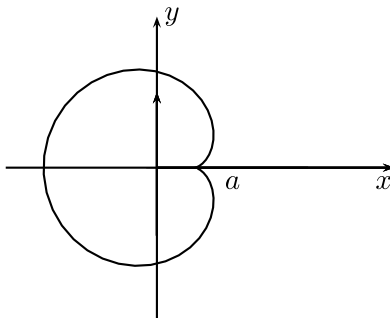
$$y = (a + b) \sin \theta - b \cos \left( \frac{a + b}{b} \theta - \frac{\pi}{2} \right) = (a + b) \sin \theta - b \sin \left( \frac{a + b}{b} \theta \right).$$

Se tiene entonces que las ecuaciones paramétricas de la epicicloide, están dadas como

$$x = (a + b) \cos \theta - b \cos \left( \frac{a + b}{b} \theta \right),$$

$$y = (a + b) \sin \theta - b \sin \left( \frac{a + b}{b} \theta \right).$$

**Nota:** En el caso particular que  $a = b$ , la curva que se obtiene se llama **cardioides**.



Las ecuaciones paramétricas de la cardioides son:

$$x = 2a \cos \theta - a \cos a\theta,$$

$$y = 2a \sin \theta - a \sin a\theta.$$

**3.9.2. Definición.** Se dice que una curva  $\mathcal{C}$  representada por las ecuaciones paramétricas  $x = f(t)$  y  $y = g(t)$ , es **suave** en un intervalo  $I$  si  $f'(t)$  y  $g'(t)$  son continuas en  $I$  y no son simultáneamente 0, excepto posiblemente en los puntos extremos de  $I$ . Se dice también que  $\mathcal{C}$  es **suave a trozos** si es suave en todo subintervalo de alguna partición de  $I$ .

Por ejemplo, en las ecuaciones paramétricas de la cicloide dadas por  $f(\theta) = r(\theta - \sin \theta)$  y  $g(\theta) = r(1 - \cos \theta)$ , se tiene que

$$f'(\theta) = r - r \cos \theta \quad \text{y} \quad g'(\theta) = r \sin \theta.$$

Luego,  $f'(\theta) = 0$  y  $g'(\theta) = 0$  cuando  $\theta = 2n\pi$ ;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . En estos puntos, la cicloide tiene esquinas agudas. Así que la cicloide es suave en los intervalos  $[0, 2\pi]$ ,  $[2\pi, 4\pi]$ ,  $[4\pi, 6\pi]$ , etcétera.

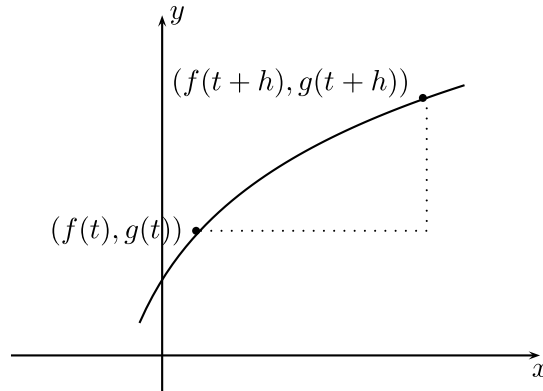
El siguiente resultado proporciona una fórmula para determinar la derivada de una curva suave  $\mathcal{C}$  en un punto  $(x, y)$ .

**3.9.3. Teorema.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva suave en  $I$  definida paramétricamente por  $x = f(t)$  y  $y = g(t)$ . La derivada de  $\mathcal{C}$  en el punto  $(x, y)$  es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt},$$

siempre que  $\frac{dx}{dt} \neq 0$  en  $(x, y)$ .

**Demostración:** Consideremos la figura:



Sea  $h > 0$ ,  $\Delta y = g(t+h) - g(t)$  y  $\Delta x = f(t+h) - f(t)$ . Entonces, la pendiente de la recta secante que pasa por  $(f(t), g(t))$  y  $(f(t+h), g(t+h))$  es  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

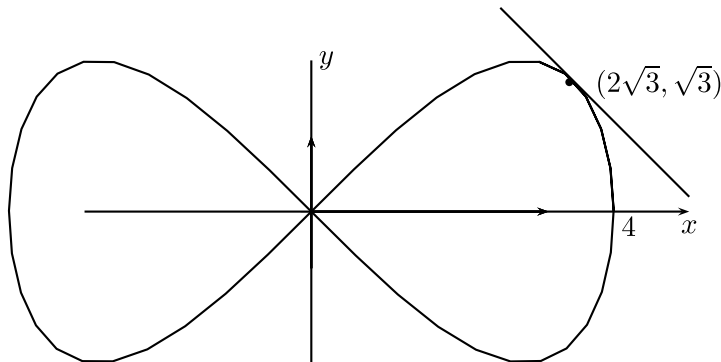
Se observa que  $\Delta x \rightarrow 0$  si y sólo si  $h \rightarrow 0$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{f(t+h) - f(t)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(t+h) - g(t)]/h}{[f(t+h) - f(t)]/h} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \\ &= \frac{dy/dt}{dx/dt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \quad \square$$

**3.9.4. Ejemplo.** Determina la ecuación de la recta tangente de la curva **Lissajous**, cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por  $x = 4 \cos \theta$  y  $y = 2 \sin 2\theta$  en  $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .



**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{4 \cos 2\theta}{-4 \sin \theta} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}.$$

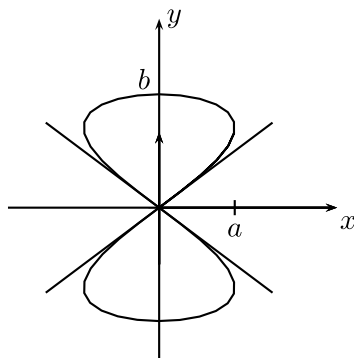
Se observa que si  $\theta = \pi/6$ , entonces  $x = 2\sqrt{3}$  y  $y = \sqrt{3}$ . Luego, la pendiente de la recta tangente es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = -\frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\frac{1/2}{1/2} = -1.$$

Entonces la ecuación de la recta tangente en el punto  $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$  es

$$y - \sqrt{3} = -1(x - 2\sqrt{3}) \quad \text{o} \quad y = -x + 3\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

**3.9.5. Ejemplo.** Comprueba que la curva **reloj de arena**, cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por  $x = a \sin 2t$  y  $y = b \sin t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ , tiene dos rectas tangentes en  $(0, 0)$ .



**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{2a \cos 2t}.$$

Por otra parte, si  $t = 0$ ,  $t = \pi$  y  $t = 2\pi$ , entonces  $(x, y) = (0, 0)$ . Luego,

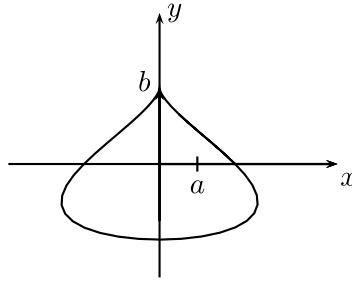
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{b}{2a} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2\pi}, \quad \text{y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi} = \frac{-b}{2a}.$$

Por lo tanto, las dos rectas tangentes tienen por ecuación:

$$y = \frac{b}{2a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{2a}x. \quad \blacksquare$$

**Actividad 48.** Comprueba que la curva **lágrima**, no es suave en  $t = \frac{\pi}{2}$ , y determina la ecuación de la recta tangente en  $(0, -b)$  y en  $(-2a, 0)$ , cuyas ecuaciones paramétricas son  $x = 2a \cos t - a \sin 2t$  y  $y = b \sin t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ .



Ahora, se dará un resultado que permite calcular la **longitud de arco** de una curva representada en forma paramétrica. Recordemos que si  $y = h(x)$  es una función continua en  $[x_0, x_1]$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces la longitud de arco de la curva  $C$  trazada por la gráfica de  $h$  en  $[x_0, x_1]$ , es

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [h'(x)]^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.11)$$

Si  $C$  está representada por las ecuaciones paramétricas  $x = f(t)$  y  $y = g(t)$ ;  $a \leq t \leq b$ , entonces el intervalo que traza la trayectoria de  $C$  tiene dominio  $[a, b]$ . Este debe ser el nuevo intervalo que determine la longitud de arco de  $C$  en lugar de  $[x_0, x_1]$ .

Por otra parte, se sabe que si  $f'(t) \neq 0$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

La ecuación (3.11) ahora se puede escribir

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}{(dx/dt)^2}} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de arco de  $C$  en  $[a, b]$  representada en forma paramétrica es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

Para aplicar esta fórmula, se debe tener cuidado, especialmente cuando  $C$  se intersecta a sí misma en alguna  $t_0 \in (a, b)$ . Cuando esto suceda, se deberá integrar de  $[a, t_0]$  y de  $[t_0, b]$ . Esto es,

$$L = \int_a^{t_0} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt + \int_{t_0}^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

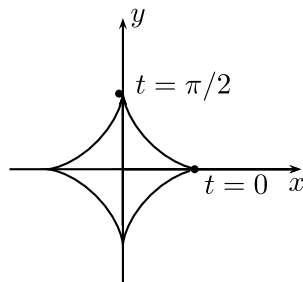
También se debe asegurar que la curva  $C$  recorre una sola vez en el intervalo de integración. Por ejemplo,  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  describe una circunferencia de radio 1. En el intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$ , recorre una sola vez, mientras que en  $0 \leq t \leq 4\pi$ , recorre dos veces. Luego, la longitud de arco de la circunferencia unitaria es

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

**3.9.6. Teorema.** Si  $C$  es una curva suave representada paramétricamente por  $x = f(t)$  y  $y = g(t)$ ;  $a \leq t \leq b$ , y  $C$  no se corta a sí misma en  $(a, b)$ , entonces la longitud de arco de  $C$  en  $[a, b]$  es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

**3.9.7. Ejemplo.** Determina la longitud de arco  $L$  de la curva **astroide**.



**Solución:**

Las ecuaciones paramétricas de esta curva están dadas por

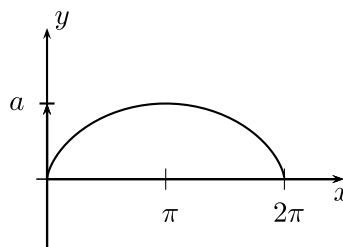
$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nótese que esta curva no es suave en todo su dominio, sin embargo, lo es y no se intersecta a sí misma en  $[0, \pi/2]$ . Por otra parte, en este intervalo, sólo se dibuja la cuarta parte de la curva.

Entonces, para obtener la longitud de arco total, se debe multiplicar por 4 la longitud de  $[0, \pi/2]$ . Esto es,

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} dt \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt \\
 &= 12a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt \\
 &= -\frac{12}{2} a \cos^2 t \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= -6a \left[ \cos^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 0 \right] = -6a[0 - 1] \\
 &= 6a. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**3.9.8. Ejemplo.** Determina la longitud de arco de la **cicloide**, cuyas ecuaciones paramétricas son  $x = a(t - \sin t)$  y  $y = a(1 - \cos t)$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ .



**Solución:** La cicloide es suave en  $[0, 2\pi]$ . Luego,

$$\frac{dx}{dt} = a - a \cos t \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t.$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t \quad \text{y} \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2 \sin^2 t.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt \\
 &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \\
 &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
 &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\
 &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -4a[\cos \pi - \cos 0] = -4a[-1 - 1] \\
 &= 8a. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

También se puede determinar el **área** de una región encerrada por una curva representada en forma paramétrica. Sea  $y = h(x) \geq 0$  una función continua en  $[a, b]$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . El área de la región bajo la gráfica de  $h$  está dado por

$$A = \int_a^b y dx.$$

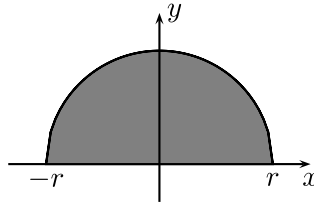
Supongamos que  $x = f(t)$  y  $y = g(t)$ , tal que  $f(t_0) = a$  y  $f(t_1) = b$ ; es decir,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Entonces, aplicando el método de integración por sustitución, se obtiene:

$$\int_a^b y dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t) f'(t) dt.$$

Por lo tanto, el área de la región que encierra la curva representada en forma paramétrica en  $[t_0, t_1]$  es:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} g(t) f'(t) dt.$$

**3.9.9. Ejemplo.** Comprueba que el área del círculo de radio  $r$  es  $A = \pi r^2$ .



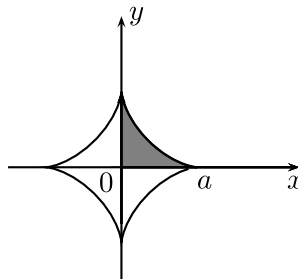
**Solución:** La ecuación de la circunferencia por arriba del eje de las  $x$ , es  $y = \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$  y está definida en  $[-r, r]$ . Por otra parte, las ecuaciones paramétricas de esta curva son  $x = r \cos \theta = f(\theta)$  y  $y = r \sin \theta = g(\theta)$ ;  $0 \leq \theta \leq \pi$ . También se tiene que  $f(0) = r$  y  $f(\pi) = -r$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r y dx &= - \int_r^{-r} y dx = - \int_0^\pi (r \sin \theta)(-r \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi r^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= r^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= r^2 \left[ \frac{1}{2} \theta - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \pi r^2 \end{aligned}$$

representa el área de la mitad del círculo de radio  $r$ . Luego, el área del círculo de radio  $r$  es

$$A = 2 \left( \frac{1}{2} \pi r^2 \right) = \pi r^2. \quad \blacksquare$$

**3.9.10. Ejemplo.** Comprueba que el área que encierra la curva astroide es  $A = \frac{3}{8} \pi a^2$ .



**Solución:** Despejando la variable  $y$  en la ecuación rectangular del astroide, dada por  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$ , se obtiene

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}.$$

Se tiene que  $y \geq 0$  en  $[0, a]$ , y las ecuaciones paramétricas de esta curva son:  $x = a \cos^3 t = f(t)$  y  $y = a \sin^3 t = g(t)$ . Por otra parte se tiene que  $f(0) = a$  y  $f(\pi/2) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^a y dx &= - \int_a^0 y dx = - \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} [(\sin^2 t)^2 - (\sin^2 t)^3] dt \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \left[ \left( \frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 - \left( \frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^3 \right] dt \\
 &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 2t - \frac{1}{8} \cos^2 2t + \frac{1}{8} \cos^3 2t \right) dt \\
 &= \frac{3}{8} a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t) dt = \textcircled{*}
 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\int \cos^2 2t dt = \int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8},$$

y

$$\begin{aligned}
 \int \cos^3 2t dt &= \int \cos^2 2t \cos 2t dt = \int (1 - \sin^2 2t) \cos 2t dt \\
 &= \int (\cos 2t - \sin^2 2t \cos 2t) dt \\
 &= \frac{\sin 2t}{2} - \frac{\sin^3 2t}{6}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \textcircled{*} &= \frac{3}{8} a^2 \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} + \frac{\sin 2t}{2} - \frac{\sin^3 2t}{6} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{3}{8} a^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{3}{8} a^2 \left[ \frac{\pi}{4} \right] \\
 &= \frac{3}{32} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

Esto corresponde a la cuarta parte del área que encierra la curva. Por lo tanto,

$$A = 4 \left( \frac{3}{32} \pi a^2 \right) = \frac{3}{8} \pi a^2. \quad \blacksquare$$

## LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.9

1. ¿A qué curva corresponden las siguientes ecuaciones dadas en forma paramétrica? [**Sugerencia:** Obtén la ecuación rectangular correspondiente a cada curva].

a)  $x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1).$

b)  $x = h + r \cos \theta, \quad y = k + r \sin \theta.$

c)  $x = h + a \cos \theta, \quad y = k + b \sin \theta.$

d)  $x = h + a \sec \theta, \quad y = k + \tan \theta.$

2. Obtén la gráfica de las siguientes curvas, cuyas ecuaciones están en forma paramétrica. [**Sugerencia:** Determina la ecuación rectangular correspondiente a cada curva].

a)  $x = t - 1, \quad y = \frac{t}{t-1}.$

b)  $x = 2t, \quad y = |t - 2|.$

c)  $x = 2t^2, \quad y = t^4 + 1.$

3. Determina la ecuación de la recta tangente de las siguientes curvas en el punto indicado.

a) (**Cardioides**).  $x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t, \quad \text{en } t = \frac{\pi}{2}.$

b) (**Astroide**).  $x = \cos^3 \theta, \quad y = \sin^3 \theta, \quad \text{en } \theta = \frac{\pi}{4}.$

c) (**Cicloide**).  $x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta, \quad \text{en } \theta = \frac{3\pi}{2}.$

d) (**Epicloide**).  $x = 5 \cos t - \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t, \quad \text{en } t = \frac{\pi}{4}.$

4. Determina la longitud de arco de las siguientes curvas.

a)  $x = t^2, \quad y = 2t; \quad 0 \leq t \leq 2.$

b)  $x = t^2 + 1, \quad y = 4t^3 + 3; \quad -1 \leq t \leq 0.$

c)  $x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

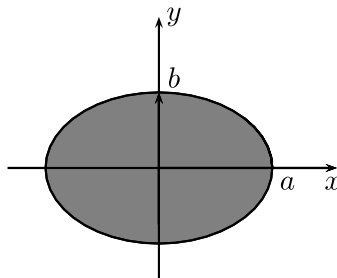
d)  $x = \sqrt{t}, \quad y = 3t - 1; \quad 0 \leq t \leq 1.$

e)  $x = \cos \theta + \theta \sin \theta, \quad y = \sin \theta - \theta \cos \theta; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

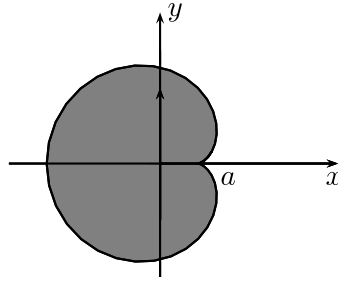
5. Calcula el área del interior de las siguientes curvas cuya orientación es en sentido contrario a las manecillas del reloj.

a) (**Elipse**)  $x = a \cos t, \quad y = b \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

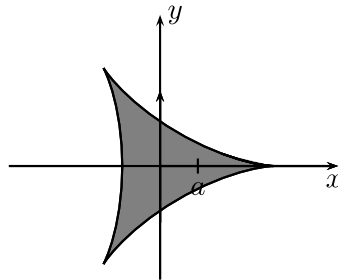
$A = ab\pi.$



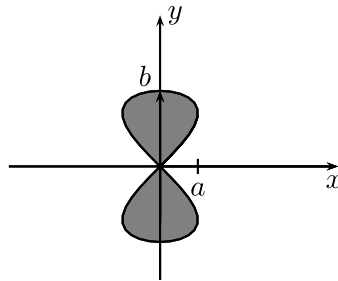
- b) (**Cardioid**)  $x = 2a \cos t - a \cos 2t$ ,  $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 $A = 2a^2\pi$ .



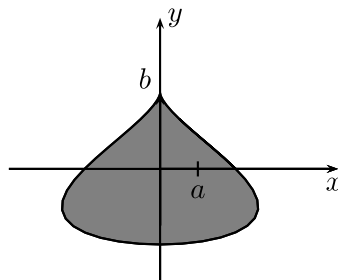
- c) (**Deltoide**)  $x = 2a \cos t + a \cos 2t$ ,  $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 $A = 6a^2\pi$ .



- d) (**Reloj de arena**)  $x = a \sin 2t$ ,  $y = b \sin t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 $A = \frac{8}{3}ab$ .

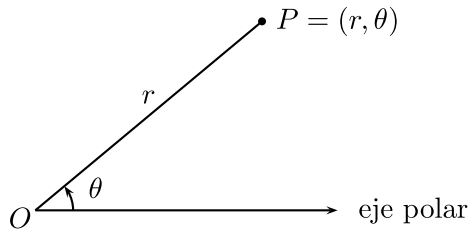


- e) (**Lágrima**)  $x = 2a \cos t - a \sin 2t$ ,  $y = b \sin t$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 $A = 2ab\pi$ .



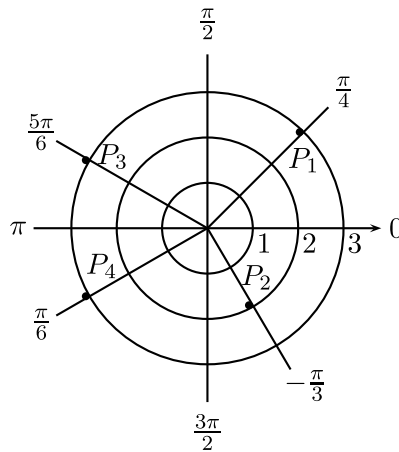
### 3.10. Coordenadas polares

En esta sección se estudiará un sistema de coordenadas llamado **sistema de coordenadas polares**. Se trata de un sistema de coordenadas bidimensional, en el cual cada punto  $P$  del plano se determina por una distancia y un ángulo. Como sistema de referencia se considera un punto fijo  $O$  del plano llamado **polo** u **origen**, y un rayo que parte de  $O$  llamado **eje polar** (equivalente al eje  $x$  en el sistema de coordenadas cartesianas). Con este sistema de referencia, cada punto  $P$  del plano, corresponderá a un par ordenado  $(r, \theta)$  llamado **coordenada polar**, donde  $r$  es la distancia de  $O$  a  $P$ , y  $\theta$  el ángulo formado del eje polar al segmento  $OP$  medido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

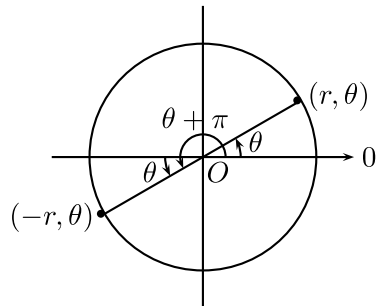


**3.10.1. Ejemplo.** Localiza los puntos  $P_1 = (3, \frac{\pi}{4})$ ,  $P_2 = (2, -\frac{\pi}{3})$ ,  $P_3 = (3, \frac{5\pi}{6})$  y  $P_4 = (-3, \frac{\pi}{4})$  en el sistema de coordenadas polares.

**Solución:** Para localizar estos puntos, será útil dibujar una retícula de circunferencias concéntricas.



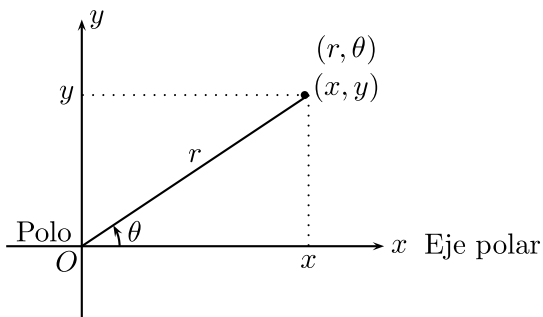
Un punto  $P$  en el sistema de coordenadas polares no tiene representación única. Por ejemplo,  $P = (r, \theta)$  también se puede representar como  $(r, \theta + 2n\pi)$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ . Para localizar el punto  $P = (-r, \theta)$ , se hace recorriendo una distancia de  $r$  unidades a la izquierda del eje polar a partir del origen, y sobre la circunferencia de radio  $r$  se recorre un ángulo  $\theta$  en sentido contrario a las manecillas del reloj. Entonces,  $(r, \theta)$  y  $(-r, \theta)$  se encuentran sobre una misma recta que pasa por  $O$  pero sobre lados opuestos, y a una misma distancia de  $r$  unidades desde  $O$ . El punto  $P = (r, \theta)$  donde  $\theta < 0$ , se localiza recorriendo un ángulo  $\theta$  en sentido de las manecillas del reloj sobre la circunferencia de radio  $r$ .



De acuerdo a esto, se tiene también que  $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$ .

**Actividad 49.** Localiza en el sistema de coordenadas polares los puntos:  $P_1 = (-3, \frac{3\pi}{4})$ ,  $P_2 = (-2, -\frac{\pi}{6})$  y  $P_3 = (-4, -\frac{3\pi}{2})$ .

En el sistema de coordenadas polares, si se hace coincidir el polo con el origen y el eje polar con el eje  $x$  del sistema cartesiano, entonces se puede establecer una relación entre coordenadas polares y rectangulares.



Para transformar la coordenada polar  $(r, \theta)$  a rectangular, se observa que  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  y  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ . De aquí se sigue que

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta.$$

Para transformar la coordenada rectangular  $(x, y)$  a polar, se observa que  $r^2 = x^2 + y^2$ , entonces  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Para determinar el ángulo  $\theta$ , se observa que  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ , donde  $x \neq 0$ . De acuerdo a esto, se tiene que

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \quad y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0, \quad y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

**3.10.2. Ejemplo.** Transforma la coordenada polar  $(4, \frac{2\pi}{3})$  en coordenada rectangular y  $(3, -\sqrt{3})$  en coordenada polar.

**Solución:**

(a)  $(r, \theta) = (4, \frac{2\pi}{3})$ , entonces  $r = 4$  y  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ . Luego,

$$x = 4 \cos \frac{2\pi}{3} = -2 \quad y \quad y = 4 \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, la coordenada rectangular es  $(-2, 2\sqrt{3})$ .

(b)  $(x, y) = (3, -\sqrt{3})$ , entonces

$$r = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{-\sqrt{3}}{3} \right) + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}.$$

Por lo tanto, la coordenada polar es  $(2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6})$ . ■

Si  $r$  y  $\theta$  están relacionados por una ecuación de la forma  $r = f(\theta)$ , se le llama **ecuación polar**. De acuerdo a esto, se puede definir la gráfica de una ecuación polar como el conjunto de puntos  $(r, \theta)$  que satisfacen la ecuación.

Una forma de obtener información acerca de la gráfica de una ecuación polar es expresando dicha ecuación en forma rectangular, y que ésta sea conocida o simple de graficar. Por ejemplo, la ecuación polar  $r = a$ , con  $a > 0$ , representa la gráfica de una circunferencia con centro en el origen y de radio  $a$ . Una forma de convencerse de esto, es observando que la ecuación rectangular correspondiente es  $x^2 + y^2 = a^2$ . En algunas ocasiones, la ecuación que define una curva expresada en coordenadas polares puede estar en forma implícita. Por ejemplo, la recta  $y = x$  tiene por ecuación polar  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**3.10.3. Ejemplo.** Determina la ecuación rectangular correspondiente a cada ecuación polar.

(a)  $r = 2 \sec \theta \tan \theta$

(b)  $r = 4 \sin \theta - 2 \cos \theta$ .

**Solución:**

(a)

$$r = 2 \sec \theta \tan \theta = \frac{2}{\cos \theta} \tan \theta = \left( \frac{2r}{x} \right) \left( \frac{y}{x} \right).$$

De aquí, se sigue que  $1 = \frac{2y}{x^2}$ . Por lo tanto, la ecuación rectangular es

$$y = \frac{x^2}{2}$$

que corresponde a una parábola.

(b)

$$r = 4 \sin \theta - 2 \cos \theta = \frac{4y}{r} - \frac{2x}{r} = \frac{4y - 2x}{r}.$$

Entonces,  $r^2 = 4y - 2x$ . Se sigue que  $x^2 + y^2 = 4y - 2x$ . Separando variables y completando cuadrados para  $x$  y  $y$ , se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 4y &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 1 + 4 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 &= 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular es

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5,$$

que corresponde a una circunferencia con centro en  $(-1, 2)$  y de radio  $\sqrt{5}$ . ■

**Nota:** Cuando sea complicado determinar la ecuación rectangular de una ecuación polar o no sea evidente saber a qué curva corresponde, entonces se tabula algunos de sus puntos  $(r, \theta)$  para tener un esbozo de la gráfica y saber el comportamiento que tiene. Para ello, es útil analizar las **simetrías** con respecto al **eje polar**, la **recta**  $\frac{\pi}{2}$  y el **polo**.

1. La gráfica de  $r = f(\theta)$ , es **simétrica con respecto al eje polar** si

$$f(\theta) = f(-\theta).$$

2. La gráfica de  $r = f(\theta)$ , es **simétrica con respecto a la recta**  $\frac{\pi}{2}$  si

$$f(\theta) = f(\pi - \theta).$$

3. La gráfica de  $r = f(\theta)$ , es **simétrica con respecto al polo** si

$$f(\theta) = f(\pi + \theta).$$

**Nota:** Si  $r = f(\theta)$  cumple con dos de las simetrías, entonces cumple con la tercera simetría restante. En efecto:

1. Si  $f(\theta) = f(-\theta)$  y  $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ , entonces

$$f(\pi + \theta) = f(\pi - (\pi + \theta)) = f(\theta).$$

2. Si  $f(\theta) = f(-\theta)$  y  $f(\theta) = f(\pi + \theta)$ , entonces

$$f(\pi - \theta) = f(-\pi + \theta) = f(\pi + (-\pi + \theta)) = f(\theta).$$

3. Si  $f(\theta) = f(\pi - \theta)$  y  $f(\theta) = f(\pi + \theta)$ , entonces

$$f(-\theta) = f(\pi + \theta) = f(\theta).$$

De la misma forma se puede comprobar que si  $r = f(\theta)$  cumple con una de las tres simetrías, pero no con alguna de las dos restantes, entonces tampoco cumple con la última.

**3.10.4. Ejemplo.** Dibuja la gráfica de la ecuación polar  $r = 1 + \cos \theta$ .

**Solución:**

1. **Análisis de simetrías**

a) Simetría con respecto al eje polar.

$$f(-\theta) = 1 + \cos(-\theta) = 1 + \cos \theta = f(\theta).$$

Por lo tanto, hay simetría con respecto al eje polar.

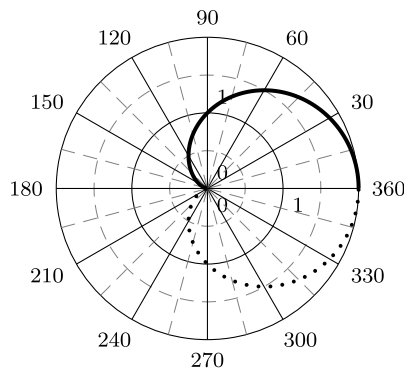
b) Simetría con respecto a la recta  $\frac{\pi}{2}$ .

$$f(\pi - \theta) = 1 + \cos(\pi - \theta) = 1 - \cos \theta \neq f(\theta).$$

Por lo tanto, no hay simetría con respecto a la recta  $\frac{\pi}{2}$ , y tampoco hay simetría con respecto al polo.

2. **Tabulación de algunas coordenadas polares;**  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$r$	2	1.8	1.5	1	.5	.1	0



La curva de línea continua corresponde a los puntos tabulados. Como la gráfica es simétrica con respecto al eje polar, se dibuja la otra parte con línea punteada ya sin necesidad de tabular como se muestra en la figura. La gráfica de esta ecuación polar se llama **cardioides**. ■

En general, la ecuación polar de una cardiode es de la forma:

$$r = a(1 \pm \cos \theta) = a \pm a \cos \theta,$$

$$r = a(1 \pm \sin \theta) = a \pm a \sin \theta.$$

**3.10.5. Ejemplo.** Dibuja la gráfica de la ecuación polar  $r = 3 \sin 2\theta$ .

**Solución:**

**1. Análisis de simetrías**

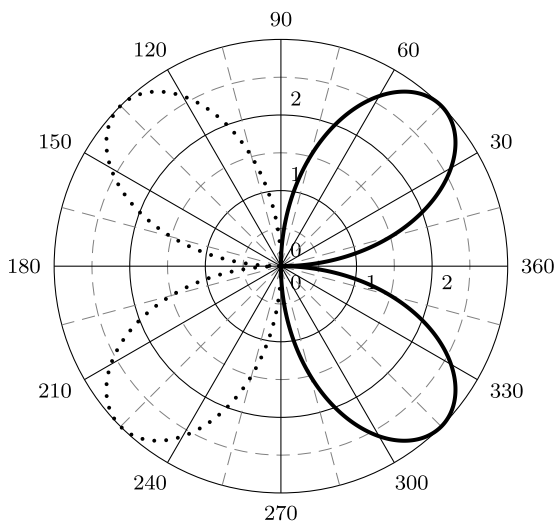
a) Simetría con respecto al eje polar.

$$f(-\theta) = 3 \sin(-2\theta) = -3 \sin 2\theta = -f(\theta).$$

Por lo tanto, no hay simetría con respecto al eje polar, pero sí lo hay con respecto al polo. Se concluye que tampoco hay simetría con respecto a la recta  $\frac{\pi}{2}$ .

**2. Tabulación de algunas coordenadas polares;  $0 \leq \theta \leq \pi$ .**

$\theta$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\pi$
$r$	0	1.5	2.5	3	2.5	1.5	0	-1.5	-2.5	-3	-2.5	-1.5	0



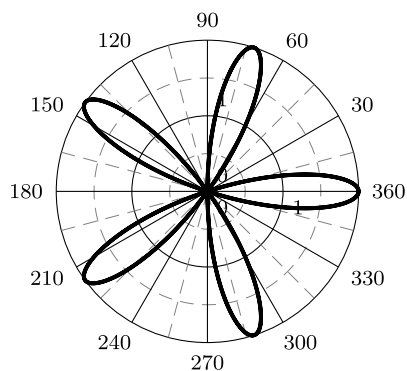
La curva de línea continua, corresponde a los puntos tabulados. Como la gráfica es simétrica con respecto al polo, se dibuja la otra parte con línea punteada ya sin necesidad de tabular como se muestra en la figura. La gráfica de esta ecuación polar se llama **rosa de 4 hojas**. ■

En general, la ecuación polar de una rosa es de la forma:

$$r = a \cos n\theta \quad \text{o} \quad r = a \sin n\theta.$$

Si  $n$  es par, la rosa tiene  $2n$  hojas, mientras que si  $n$  es impar tiene sólo  $n$  hojas.

Por ejemplo, la gráfica de la ecuación polar  $r = 2 \cos 5\theta$ , es una rosa de 5 hojas. La gráfica de esta curva se muestra a continuación.



**3.10.6. Ejemplo.** Obtén la gráfica de la ecuación polar  $r = 1 - 2 \sin \theta$ .

**Solución:**

**1. Análisis de simetrías.**

a) Simetría con respecto al eje polar.

$$f(-\theta) = 1 + 2 \sin \theta \neq f(\theta).$$

Por lo tanto, no hay simetría con respecto al eje polar.

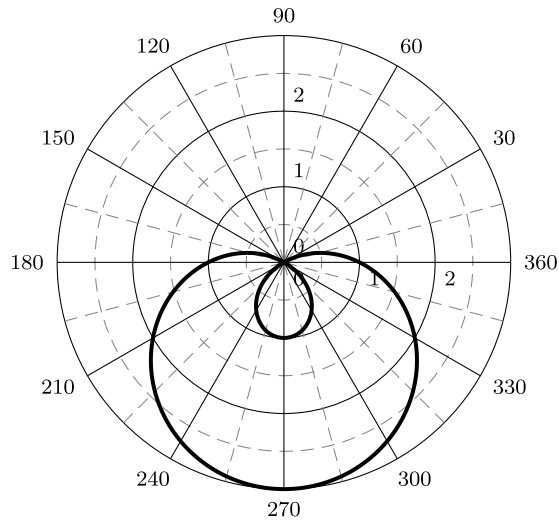
b) Simetría con respecto a la recta  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} f(\pi - \theta) &= 1 - 2 \sin(\pi - \theta) \\ &= 1 - 2[\sin \pi \cos \theta - \sin \theta \cos \pi] \\ &= 1 - 2 \sin \theta = f(\theta). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto a la recta  $\frac{\pi}{2}$ . Se deduce también que no hay simetría con respecto al polo.

**2. Tabulación de algunas coordenadas polares;**  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

$\theta$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$r$	3	2.7	2	1	0	-0.7	-1

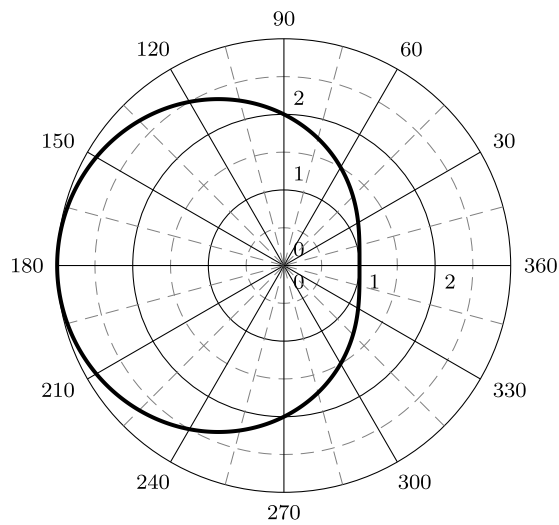


Esta gráfica es simétrica con respecto a la recta  $\frac{\pi}{2}$ , es por ello que bastó obtener algunos puntos  $(r, \theta)$  en la tabulación, donde  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Esta gráfica se llama **caracol o limaçon (con rizo)**. ■

En general, la ecuación polar de una caracol o limaçon (con rizo), es de la forma

$$r = a \pm b \sin \theta \quad \text{o} \quad r = a \pm b \cos \theta, \text{ donde } a < b.$$

Cuando  $a > b$ , la gráfica de cualquiera de las dos ecuaciones polares anteriores se llama **caracol o limaçon (sin rizo)**. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación polar  $r = 2 - \cos \theta$ , tiene la forma:



Se han visto dos maneras de obtener la gráfica de una ecuación polar: expresando la ecuación en la forma rectangular o por medio del análisis de simetrías y tabulación. Sin embargo, puede resultar muy tedioso dibujar la gráfica al usar cualquiera de estas formas para ciertas ecuaciones polares. Lo más recomendable es usar algún software o disponer de una graficadora que cuente con modo

polar o modo paramétrico. En el modo paramétrico, se puede graficar la ecuación polar  $r = f(\theta)$ , expresando esta ecuación como

$$\begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta \\ y &= f(\theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

La forma paramétrica de una ecuación polar, ayuda a obtener la pendiente de la recta tangente de la gráfica de  $r = f(\theta)$  en un punto  $(r, \theta)$ . Así, si  $f$  es derivable, entonces la pendiente de  $r = f(\theta)$  en  $(r, \theta)$  es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta}$$

donde  $dx/d\theta \neq 0$  en  $(r, \theta)$ .

**3.10.7. Ejemplo.** Determina la ecuación de la recta tangente de la ecuación polar  $r = 1 + 2 \sin \theta$ , en el punto  $(1, \pi)$ .

**Solución:** Las ecuaciones paramétricas de esta curva son

$$\begin{aligned} x &= (1 + 2 \sin \theta) \cos \theta = \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ y &= (1 + 2 \sin \theta) \sin \theta = \sin \theta + 2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

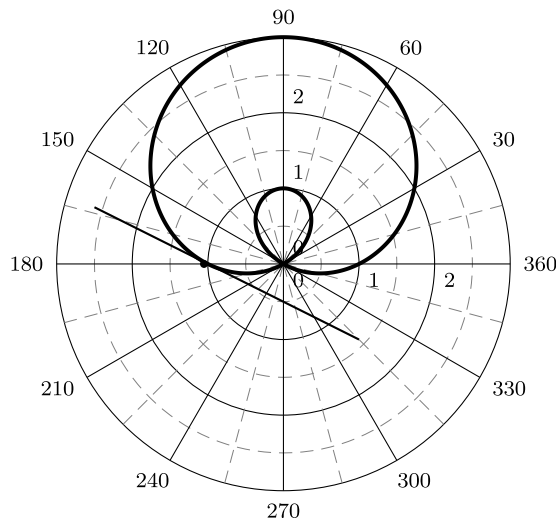
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta + 4 \sin \theta \cos \theta}{-\sin \theta + 2[\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]}.$$

Ahora, se debe convertir la coordenada polar  $(1, \pi)$  en rectangular. Esto es fácil si se sustituye  $r = 1$  y  $\theta = \pi$  en las ecuaciones paramétricas. Se obtiene así que  $(x, y) = (-1, 0)$ . Luego, la pendiente de la recta tangente de la curva que pasa por  $(-1, 0)$  es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\pi} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = -\frac{1}{2}(x + 1) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$



**Actividad 50.** Determina la ecuación de la recta tangente de la ecuación polar  $r = 1 - \sin \theta$  en  $(1, 0)$ .

### LONGITUD DE ARCO DE CURVAS POLARES

También se puede calcular la **longitud de arco de una curva polar** si se emplean sus ecuaciones paramétricas. Así, sea  $r = f(\theta)$  la ecuación polar de una curva tal que  $f$  tiene derivada continua en  $[\alpha, \beta]$ . Las ecuaciones paramétricas de  $r$  son:

$$\begin{aligned}x &= f(\theta) \cos \theta \\y &= f(\theta) \sin \theta\end{aligned}$$

donde  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ .

La longitud de arco de esta curva es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Pero

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta]^2 \\&= [f'(\theta)]^2 \cos^2 \theta - 2f'(\theta) \cos \theta \cdot f(\theta) \sin \theta + f^2(\theta) \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta]^2 \\&= [f'(\theta)]^2 \sin^2 \theta + 2f'(\theta) \sin \theta \cdot f(\theta) \cos \theta + f^2(\theta) \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2.$$

Por lo tanto, la longitud de arco de  $r = f(\theta)$  en  $[\alpha, \beta]$  es

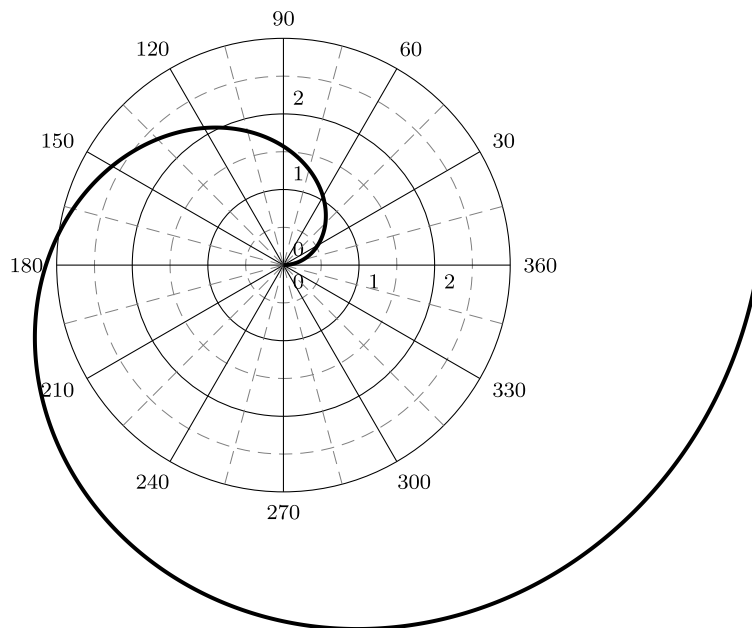
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} d\theta.$$

**3.10.8. Teorema.** La longitud de arco de la gráfica de  $r = f(\theta)$ , donde  $f$  tiene derivada continua en  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta.$$

**3.10.9. Ejemplo.** Calcula la longitud de arco de la **espiral de Arquímedes**,<sup>2</sup> cuya ecuación polar es  $r = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Solución:** La gráfica de la espiral de Arquímedes queda de la siguiente manera:

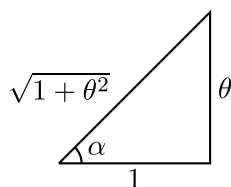


$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 1 \quad \text{y} \quad r^2 = \theta^2.$$

Entonces,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta.$$

Se calcula  $\int \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$  por sustitución trigonométrica. Sea  $\theta = \tan \alpha$ , entonces  $d\theta = \sec^2 \alpha d\alpha$  y  $1 + \theta^2 = 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ . El triángulo a usar es



Entonces,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \theta^2} d\theta &= \int \sec \alpha \sec^2 \alpha d\alpha = \int \sec^3 \alpha d\alpha \\ &= \frac{\sec \alpha \tan \alpha + \ln |\sec \alpha + \tan \alpha|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \theta^2} \cdot \theta + \ln |\sqrt{1 + \theta^2} + \theta|}{2}. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>En general, la curva representada por la ecuación  $r = a\theta$ , donde  $a$  es una constante, se llama **espiral de Arquímedes**.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{\sqrt{1 + \theta^2} \cdot \theta + \ln |\sqrt{1 + \theta^2} + \theta|}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} \cdot 2\pi + \ln |\sqrt{1 + 4\pi^2} + 2\pi|}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\pi = 3.14$  en la última igualdad, se concluye que  $L \approx 21.26$  ■.

**3.10.10. Ejemplo.** Calcula la longitud de arco de la **espiral logarítmica**,<sup>3</sup> cuya ecuación polar es  $r = e^\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Solución:**

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = e^{2\theta} \quad \text{y} \quad r^2 = e^{2\theta}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^\theta d\theta = \sqrt{2} e^\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3.10.11. Ejemplo.** Calcula la longitud de arco de la cardioide descrita por la ecuación polar  $r = a(1 + \cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Solución:** Se tiene que

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2 \sin^2 \theta \quad \text{y} \quad r^2 = a^2(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta).$$

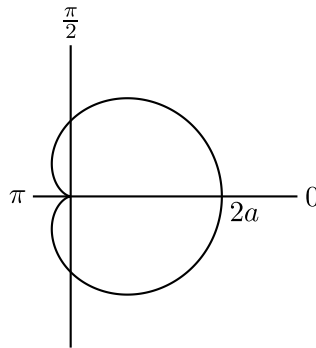
Entonces,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2a^2(1 + \cos \theta)} d\theta \\ &= 2\sqrt{2}a \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{2}a \int_0^\pi \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4a \left[ 2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi \\ &= 8a. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>En general, la curva descrita por la ecuación  $r = ae^{b\theta}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes, se llama **espiral logarítmica**.

Por lo tanto,  $L = 8a$ . ■

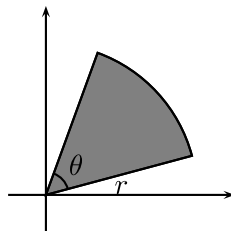
La razón de integrar de 0 a  $\pi$  y de multiplicar por 2 en la segunda igualdad en el cálculo de  $L$ , se debe a que  $f$  tiene derivada continua de 0 a  $\pi$  y de  $\pi$  a  $2\pi$ ; es decir, esta curva tiene un cambio brusco en  $\theta = \pi$  y es simétrica con respecto al eje polar. El comportamiento de su gráfica es como sigue:



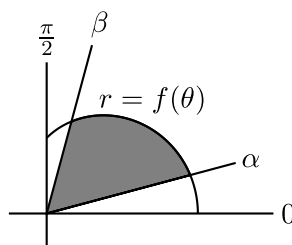
**Actividad 51.** Calcula la longitud de arco de la curva descrita por  $r = 1 + \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

### ÁREA DE UNA REGIÓN POLAR

Ahora se dará un resultado que permite calcular el **área de una región polar**. Antes, se recordará que el área de un sector circular de radio  $r$  y ángulo  $\theta$ , está dado por  $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ .



Sea  $r = f(\theta)$ , donde  $f$  es continua y no negativa en  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ . Se desea determinar el área  $A$  de la región limitada entre la gráfica de  $f$  y las rectas radiales  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$ , como se muestra en la siguiente figura:



Sea  $P = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n = \beta\}$  una partición de  $[\alpha, \beta]$ . Sean

$$r_i = \min_{\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i} f(\theta) \quad \text{y} \quad R_i = \max_{\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i} f(\theta), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces, el área  $A_i$  del  $i$ -ésimo sector, satisface la desigualdad:

$$\frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta_i \leq A_i \leq \frac{1}{2}R_i^2 \Delta\theta_i.$$

donde  $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta_i$ .

Sumando las  $n$  desigualdades anteriores, se obtiene

$$L(P; h) \leq A \leq U(P; h), \quad \text{con} \quad h(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2.$$

El área queda atrapada entre una suma inferior y superior. Luego, puesto que  $P$  es arbitrario, se concluye que

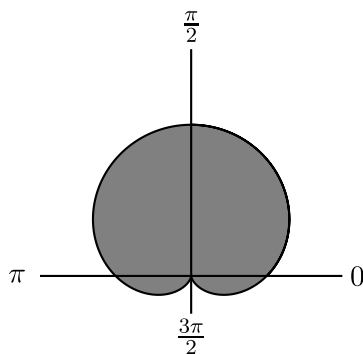
$$A = \int_{\alpha}^{\beta} h(\theta) d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta.$$

**3.10.12. Teorema.** Sea  $r = f(\theta)$ , donde  $f$  es continua en  $[\alpha, \beta]$ ,  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ , y  $f$  no es al mismo tiempo positivo y negativo. El área de la región limitada por la gráfica de  $r = f(\theta)$  y las rectas radiales  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$ , es

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta.$$

**3.10.13. Ejemplo.** Determina el área del interior de la cardiode, cuya ecuación polar es  $r = 1 + \sin \theta$ .

**Solución:**



Como esta gráfica es simétrica con respecto a  $\frac{\pi}{2}$ , los límites de integración para determinar el área pueden ser de  $[0, \pi/2]$  y de  $[\pi, 3\pi/2]$ , y multiplicar por dos. Esto es,

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \sin \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi/2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \right] \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 + \sin \theta)^2 d\theta + \int_{\pi}^{3\pi/2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Por otra parte,

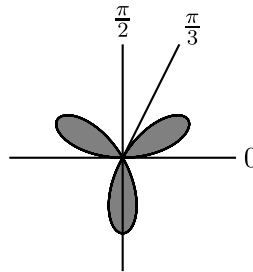
$$\begin{aligned} \int (1 + \sin \theta)^2 d\theta &= \int (1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \theta - 2 \cos \theta + \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \theta - 2 \cos \theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \left[ \theta - 2 \cos \theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[ \theta - 2 \cos \theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2 \right] + \left[ \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - \pi - 2 - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{3\pi}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3.10.14. Ejemplo.** Determina el área de la rosa de tres hojas, cuya ecuación polar es  $r = \sin 3\theta$ .

**Solución:**

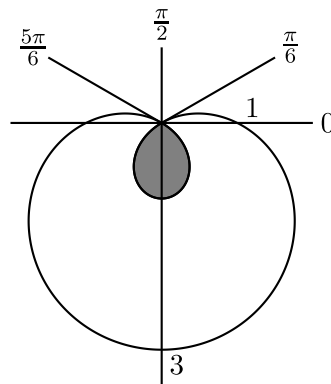


Esta gráfica es simétrica con respecto a  $\frac{\pi}{2}$ . Entonces, los límites de integración para el área pueden ser de 0 a  $\frac{\pi}{3}$  y multiplicar por tres. Esto es

$$\begin{aligned} A &= 3 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta d\theta \right] = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 6\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 6\theta}{12} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\pi}{6} \right] - \frac{3}{2} [0] = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3.10.15. Ejemplo.** Calcula el área de la región sombreada del caracol con rizo, cuya ecuación polar es  $r = 1 - 2 \sin \theta$ .

**Solución:**

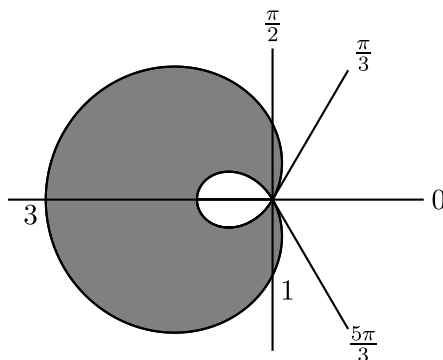


Esta gráfica pasa por el origen en  $\theta = \frac{\pi}{6}$  y  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - 2 \sin \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - 4 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \theta + 4 \cos \theta + 4 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
 &= \frac{1}{2} [3\theta + 4 \cos \theta - \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{15\pi}{6} + 4 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{15\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] \\
 &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**3.10.16. Ejemplo.** Calcula el área de la región sombreada del caracol con rizo, cuya ecuación polar es  $r = 1 - 2 \cos \theta$ .

**Solución:**



Se observa que el área del rizo está dada por

$$A_1 = 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2 \cos \theta)^2 d\theta \right] = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

mientras que el área de la cardiode es

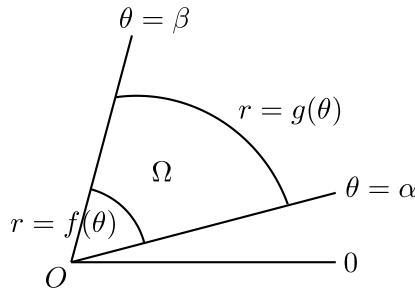
$$A_2 = 2 \left[ \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - 2 \cos \theta)^2 d\theta \right] = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Se deja como ejercicio para el lector escribir todos los cálculos de las dos integrales anteriores. Luego, el área pedida es

$$A = A_2 - A_1 = \pi + 3\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

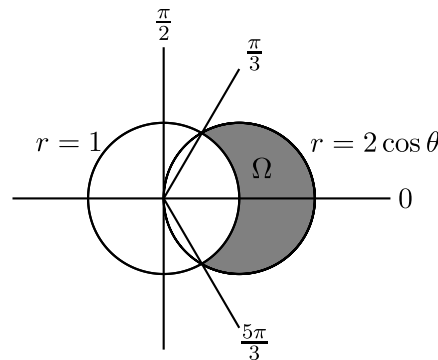
Ahora, es fácil dar una fórmula para el cálculo del **área entre curvas**. Sea  $\Omega$  la región encerrada por  $r = f(\theta)$ ,  $r = g(\theta)$ , donde  $f \leq g$ , y las rectas radiales  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$ . Entonces, el área de  $\Omega$  está dada por

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$



**3.10.17. Ejemplo.** Determina el área entre  $r = 2 \cos \theta$  y  $r = 1$ .

**Solución:**

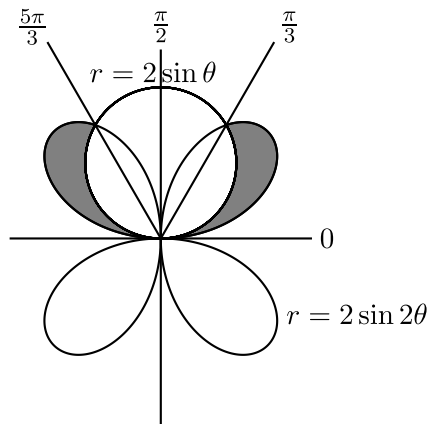


Se observa que si  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , entonces  $2 \cos \theta = 1$  si, y sólo si  $\theta = \frac{\pi}{3}$  y  $\theta = \frac{5\pi}{3}$ . Por otra parte, como las dos gráficas son círculos, éstas son simétricas con respecto al eje polar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} ([2 \cos \theta]^2 - [1]^2) d\theta \right] = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2 \cos 2\theta) d\theta = \left[ \theta + \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3.10.18. Ejemplo.** Determina el área de la región limitada entre el exterior del círculo  $r = 2 \sin \theta$  y el interior de la rosa  $r = 2 \sin 2\theta$ .

**Solución:**

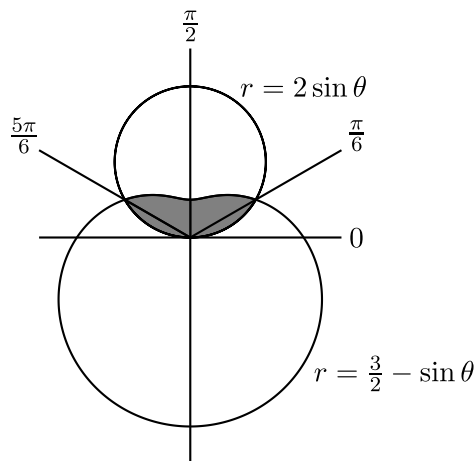


Se observa que  $2 \sin 2\theta = 2 \sin \theta$ , si y sólo si  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$ . De aquí se sigue que  $\sin \theta(2 \cos \theta - 1) = 0$ . Por lo tanto,  $\sin \theta = 0$  o  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ . Luego, las soluciones en  $[0, 2\pi]$ , son:  $\theta = 0$  o  $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ . Por la simetría de las gráficas con respecto a  $\frac{\pi}{2}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(2 \sin 2\theta)^2 - (2 \sin \theta)^2] d\theta \right] \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \sin^2 2\theta - 4 \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( 4 \left[ \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right] - 4 \left[ \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right] \right) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos 2\theta - 2 \cos 4\theta) d\theta \\
 &= \left[ \sin 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**3.10.19. Ejemplo.** Calcula el área de la región limitada entre el círculo  $r = 2 \sin \theta$  y el caracol  $r = \frac{3}{2} - \sin \theta$ .

**Solución:**



Se observa que si  $\theta \in [0, 2\pi]$ , entonces  $2 \sin \theta = \frac{3}{2} - \sin \theta$ , si y sólo si  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ . Luego, las soluciones son:  $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} [2 \sin \theta]^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[ \frac{3}{2} - \sin \theta \right]^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} [2 \sin \theta]^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( \frac{9}{4} - 3 \sin \theta + \sin^2 \theta \right) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} 4 \sin^2 \theta d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( \frac{9}{4} - 3 \sin \theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta + 2 \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{9\theta}{4} + 3 \cos \theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \\
 &= \frac{5\pi}{4} - \frac{15\sqrt{3}}{8}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio para el lector realizar los cálculos en la última igualdad de este ejemplo para obtener el resultado final.

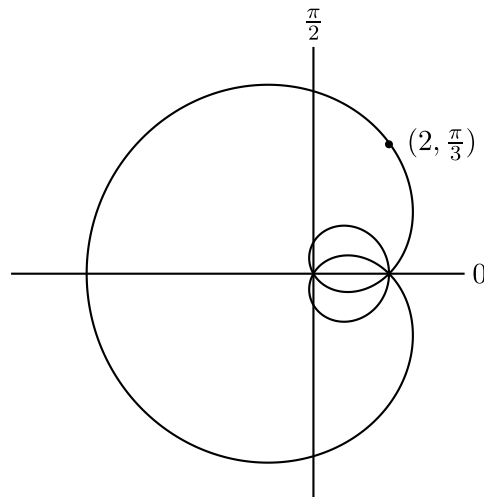
**Actividad 52.** Calcula el área de un pétalo de la rosa  $r = \cos 2\theta$ .

**LISTA DE EJERCICIOS. SECCIÓN 3.10**

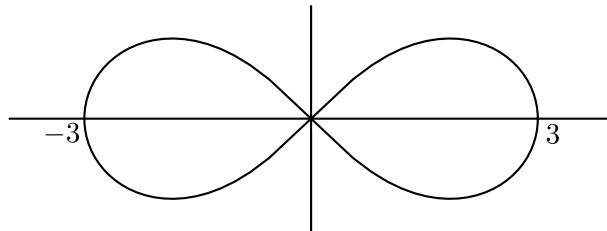
1. Transforma las siguientes ecuaciones polares a la forma rectangular y traza su gráfica.

- a)  $r = 2$
- b)  $r = \sin \theta$
- c)  $r = 3 \sec \theta$
- d)  $r = 2(h \cos \theta + k \sin \theta)$
- e)  $r = \frac{8}{2-2 \sin \theta}$ .

2. Calcula la ecuación de la recta tangente de la **Nefroide de Freeth**, cuya ecuación polar está dada por  $r = 1 + 2 \sin \frac{\theta}{2}$ , en el punto  $(2, \frac{\pi}{3})$ .



3. Comprueba que la **Concoide de Nicómenes**, cuya ecuación polar es  $r = 2 \csc \theta + 3$ , tiene recta tangente horizontal en los puntos  $(\frac{\pi}{2}, 5)$  y  $(1, \frac{3\pi}{2})$ .
4. Determina la ecuación de la recta tangente que pasa por el polo de la **lemniscata** cuya ecuación polar es  $r^2 = 9 \cos 2\theta$ .



5. Calcula la longitud de arco de las siguientes curvas:

- a)  $r = a; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$   
 b)  $r = 2a \cos \theta; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$   
 c)  $r = \sin \theta + \cos \theta; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$   
 d)  $r = 1 + \cos \theta; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$   
 e)  $r = \sin^3 \left(\frac{\theta}{3}\right); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

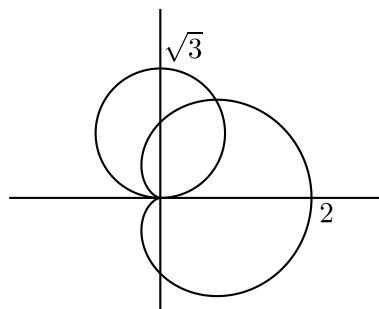
6. Comprueba que la distancia entre los puntos  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$  en coordenadas polares, es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

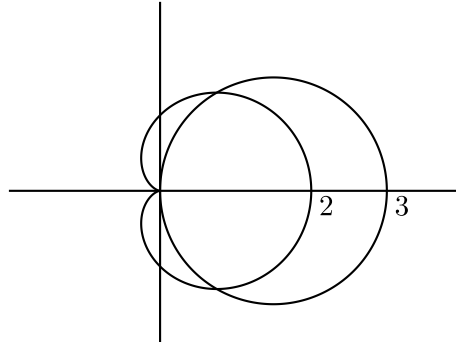
7. Considera la circunferencia de radio  $R$  en coordenadas polares.

- a) Calcula la longitud de la circunferencia  
 b) Determina el área del círculo.

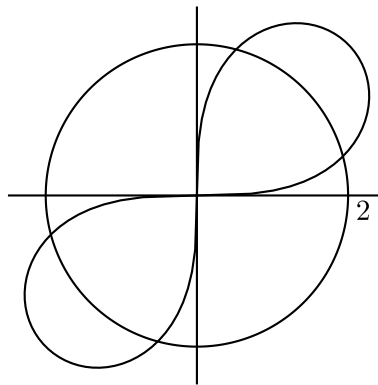
8. Calcula el perímetro de la región limitada entre  $r = \sqrt{3} \sin \theta$  y  $r = 1 + \cos \theta$ .



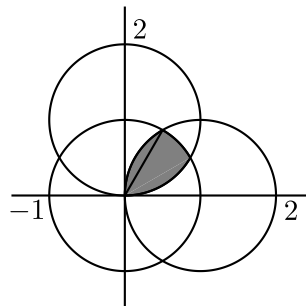
9. Determina el perímetro y el área de la región encerrada entre  $r = 3 \cos \theta$  y  $r = 1 + \cos \theta$ .



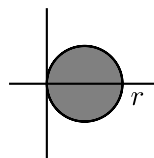
10. Determina el valor de  $a$  para el cual el área de la región limitada por la cardiode  $r = a(1 - \cos \theta)$  sea igual a  $9\pi$ .
11. Determina el área común entre  $r = 2$  y  $r = \sqrt{8 \sin 2\theta}$ , en el primer cuadrante.



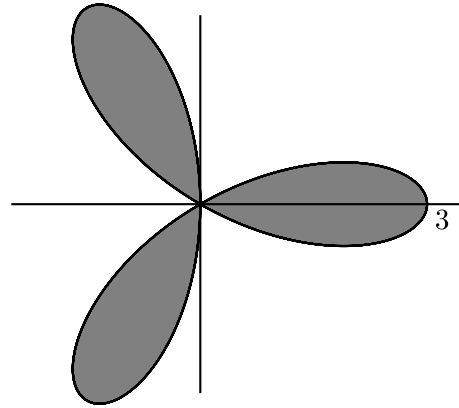
12. Determina el área común a los círculos  $r = 2 \cos \theta$ ,  $r = 1$  y  $r = 2 \sin \theta$ .



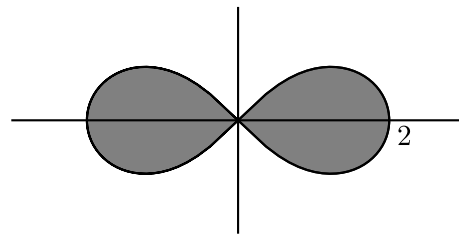
13. Calcula el área de la región limitada por  $r = \cos \theta$ .



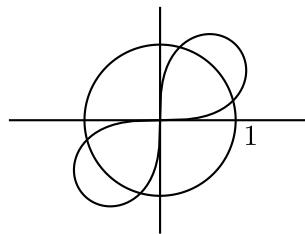
14. Hallar el área de la rosa de tres pétalos, cuya ecuación es  $r = 3 \cos 3\theta$ .



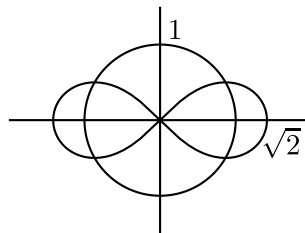
15. Calcula el área limitada por la lemniscata, cuya ecuación es  $r^2 = 4 \cos 2\theta$ .



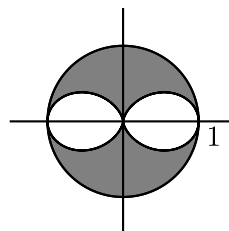
16. Calcula el área limitada entre las curvas  $r^2 = 2 \sin 2\theta$  y  $r = 1$ .



17. Calcula el área de la región limitada entre las curvas  $r^2 = 2 \cos 2\theta$  y  $r = 1$ .



18. Calcula el área de la región limitada entre el interior de  $r = 1$  y el exterior de  $r = \cos^2 \theta$ .



# Apéndice A

## Principio de Inducción

El principio de inducción matemática es un método que se utiliza frecuentemente para demostrar propiedades generales que dependen en algún sentido de los números naturales ( $\mathbb{N}$ ). Esto es, si una determinada propiedad se cumple o es verdadera para algunos valores particulares de los números naturales, entonces, ¿cómo puede uno asegurar que dicha propiedad se seguirá cumpliendo para todos los números naturales restantes? Por ejemplo, la conocida suma de los primeros  $n$  números naturales se puede representar con la fórmula  $\frac{n(n+1)}{2}$ , es decir:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Uno puede comprobar que esta fórmula es válida para cualquier número natural:  $n = 3$ ,  $n = 5$ ,  $n = 10$ , etcétera.

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3(3+1)}{2},$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5(5+1)}{2},$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 = \frac{10(10+1)}{2}.$$

Uno puede convencerse de la validez de esta fórmula, pero aún queda la pregunta: ¿seguirá siendo verdadera para todos los naturales restantes?

El principio de inducción matemática es una herramienta fundamental para  $\mathbb{N}$  y afirma que una propiedad  $P(n)$  se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si (1). La propiedad  $P(n)$  se cumple para  $n = 1$ ; es decir,  $P(1)$  es verdadera, y (2).  $P(k+1)$  es verdadera, suponiendo que  $P(k)$  lo es para todo  $n = k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ .

Estas dos condiciones hacen de la veracidad de  $P(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Principio de inducción matemática.** Sea  $P(n)$  una proposición.

1. Si  $P(1)$  es verdadera, y

2. Si se supone que  $P(k)$  es verdadera para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$  y entonces  $P(k+1)$  también es verdadera, entonces se concluye que  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:** Para la comprobación de este principio, se hace uso del **principio del buen orden**, que dice que todo subconjunto  $A$  no vacío de  $\mathbb{N}$  contiene un elemento mínimo.

Sea  $P(n)$  una proposición con las condiciones (1) y (2). Se considera

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es falso}\}$$

Se debe probar que  $S = \emptyset$ . Supongamos que  $S \neq \emptyset$ , entonces por el principio del buen orden,  $S$  tiene un elemento mínimo, digamos  $m$ . Luego, como  $P(1)$  es verdadera,  $m \neq 1$ . Por lo que  $m > 1$ . Se tiene entonces que  $m-1 \notin S$  porque  $m$  es el mínimo de  $S$ . Por lo tanto,  $P(m-1)$  es verdadera, y por (2),  $P(m)$  también es verdadera. Así,  $m \notin S$ , lo que contradice que  $m \in S$ . Esta contradicción surge del hecho de haber supuesto que  $S \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $S$  debe ser el conjunto vacío y  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Nota:** Se puede comprobar que el principio de inducción matemática y del buen orden son proposiciones equivalentes.

Algunas proposiciones  $P(n)$  se cumplen para todo  $n \geq n_0$  y  $n_0 > 1$ . Para este tipo de proposiciones también se aplica el principio de inducción matemática para su prueba, sólo que en lugar de comenzar comprobando que  $P(1)$  es verdadera, se comienza verificando que se cumple  $P(n_0)$ .

**A.0.20. Ejemplo.** Comprueba usando inducción matemática que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Solución:**

(i) Para  $n = 1$ , se verifica la fórmula puesto que  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

(ii) Supongamos que para  $n = k$  se verifica la fórmula. Es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Se debe comprobar la fórmula para  $n = k+1$ . Esto es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + \underbrace{(k+1)} &= \frac{k(k+1)}{2} + \underbrace{(k+1)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el principio de inducción matemática, se comprueba que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

**A.0.21. Ejemplo.** Comprueba que la suma de los cuadrados de los primeros  $n$  números naturales es  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Solución:**

(i) Para  $n = 1$ , se verifica la fórmula puesto que  $1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$ .

(ii) Supongamos que para  $n = k$ ,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Entonces, se debe mostrar que se cumple para  $n = k + 1$ . Esto es,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + \underbrace{(k+1)^2} &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \underbrace{(k+1)^2} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el principio de inducción matemática, se tiene que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \blacksquare$$

**Actividad 53.** Comprueba que la suma de los cubos de los primeros  $n$  números naturales es  $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**A.0.22. Ejemplo.** Demuestra la **desigualdad de Bernoulli**: Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\alpha \geq -1$ ,  $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ .

**Solución:**

(i) La desigualdad se cumple para  $n = 1$ , puesto que  $1 + \alpha \geq 1 + \alpha$ .

(ii) Supongamos que la desigualdad se cumple para algún número natural  $n = k$ , es decir:

$$(1 + \alpha)^k \geq 1 + k\alpha.$$

Se debe mostrar ahora que la desigualdad se sigue cumpliendo para  $n = k + 1$ , es decir:

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)\alpha.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^{k+1} &= (1 + \alpha)^k(1 + \alpha) \geq (1 + k\alpha)(1 + \alpha) \\ &= 1 + \alpha + k\alpha + k\alpha^2 \\ &= 1 + (k + 1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1 + (k + 1)\alpha. \end{aligned}$$

La última desigualdad en este desarrollo se da puesto que  $k\alpha^2 \geq 0$ . Por lo tanto,

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)\alpha,$$

y por el principio de inducción matemática se concluye que si  $\alpha \geq -1$ ,

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

**A.0.23. Ejemplo.** Comprueba que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right].$$

**Solución:**

(i) La igualdad se cumple para  $n = 1$ , puesto que  $1^2 = 1 = (-1)^{1-1} \left[ \frac{1(1+1)}{2} \right]$ .

(ii) Supongamos que para  $n = k$ , se tiene que

$$S_k = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1} \left[ \frac{k(k+1)}{2} \right].$$

Se debe mostrar que la fórmula se cumple para  $n = k + 1$ . Esto es,

$$S_{k+1} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right].$$

En efecto:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= (-1)^{k-1} \left[ \frac{k(k+1)}{2} \right] + (-1)^k(k+1)^2 \\ &= (-1)^k \left[ (k+1) - \frac{k}{2} \right] (k+1) \\ &= (-1)^k \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]. \quad \blacksquare$$

**A.0.24. Ejemplo.** Comprueba que si  $f$  es una función derivable, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x).$$

**Solución:**

(i) Para  $n = 1$  se cumple puesto que  $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 1[f(x)]^{1-1} \cdot f'(x)$ .

(ii) Supongamos que se cumple para  $n = k$ , esto es

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^k = k[f(x)]^{k-1} \cdot f'(x).$$

Por último, se debe comprobar que se cumple para  $n = k + 1$ , es decir

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^{k+1} = (k+1)[f(x)]^k \cdot f'(x).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)]^{k+1} &= \frac{d}{dx}[f(x)]^k \cdot f(x) \\ &= \left( \frac{d}{dx}(f(x))^k \right) \cdot f(x) + [f(x)]^k \cdot f'(x) \\ &= k[f(x)]^{k-1} \cdot f'(x) \cdot f(x) + [f(x)]^k \cdot f'(x) \\ &= (k[f(x)]^k + [f(x)]^k) \cdot f'(x) \\ &= (k+1)[f(x)]^k \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x). \quad \blacksquare$$



# Bibliografía

- [1] Baldor, A. (2004). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México: Patria Cultural.
- [2] Bartle, R., y Hostetler, R. (2002). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Universidad de Illinois: Limusa Wiley (2da ed).
- [3] Edwards, C., y Penney, D. (1997). *Cálculo diferencial e integral*. Universidad de Georgia: Prentice-Hall, Hispanoamericana, S.A. (4ta ed).
- [4] Larson, R., y Hostetler, R., y Edwards, B. (2006). *Cálculo*. The Pennsylvania State University: Mc Graw Hill, Interamericana (8va ed).
- [5] Manfrino, R., y Ortega, J.A. (2002). *Geometría*. México: Cuadernos de olimpiadas matemáticas.
- [6] Moise, E., y Downs, F. (1966). *Geometría moderna*. U.S.A.: Addison-Wesley, Iberoamericana.
- [7] Ramírez, A. (1991). *Trigonometría*. México: Trillas.
- [8] Ruiz, C. (1995). *Cálculo de una variable*. México: Pearson Prentice Hall, Hispanoamericana.
- [9] Salas, S., y Hille, E., y Etgen, G. (2003). *Calculus vol I y II*. España: Editorial Reverte, S.A. (4ta ed).
- [10] Sominski, I. (1990). *El método de inducción matemática*. Moscú: Editorial Limusa (7ma ed).
- [11] Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal*. New York: Editorial Reverté, S. A. (2da ed).
- [12] Stewart, J. (2006). *Cálculo conceptos y contextos*. México: International Thomson Editores (3ra ed).
- [13] Stewart, J. (2008). *Single variable calculus*. México: Thomson Brooks Cole (6ta ed).
- [14] Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. México: Iberoamérica (2da ed).
- [15] Swokowski, E., y Cole, J. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning (11va ed).

**Sitios web consultados**

- *<http://www2.topografia.upm.es/asignaturas/matematicas/primer0/Ejercicios/integrales/soluciones/sol-integrales.pdf>*
- *<http://caneke.uam.mx/Calculo1/Teoria/Reglas/FTCDelaCadena.pdf>*
- *<http://www.aritor.com>*
- *<http://www.monografias.com/trabajos33/coordenadas-polares/coordenadas-polares.shtml>*

**Rafael Torres Simón** es actualmente profesor-investigador de tiempo completo en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, UACM, plantel San Lorenzo Tezonco. Terminó sus estudios de matemático en la Facultad de ciencias de la UNAM. Realizó una maestría en ciencias matemáticas en el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS, UNAM). Ha impartido clases de matemáticas en la UNAM y UAM. Es coautor del libro *Principia* que se distribuye gratuitamente a los estudiantes de la UACM como parte del acervo de la Biblioteca del Estudiante.





# NUEVAS PUBLICACIONES

## ALGORITMOS Y CÓDIGOS PARA CÁLCULOS NUMÉRICOS



Fausto Cervantes Ortiz

Diciembre de 2016

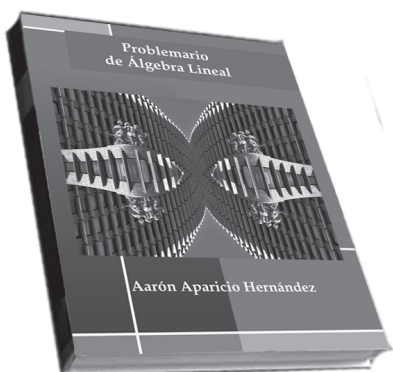
## INTRODUCCIÓN A LA PROMOCIÓN DE LA SALUD

Lourdes Guzmán Pizarro, Andrea  
Angulo Menassé, David García  
Cárdenas, Aline Gómez Pananá



Diciembre de 2016

## PROBLEMARIO DE ÁLGEBRA LINEAL



Aarón Aparicio Hernández

Diciembre de 2016



# MANUAL DE PRÁCTICAS DE LABORATORIO DE TERMODINÁMICA Y FLUIDOS

Gabriela G. Maya Aranda  
Rogelio Mendoza Pérez

Enero de 2017

# LO COMUNICATIVO, LO ARTÍSTICO Y LO ESTÉTICO

Cynthia Pech Salvador  
Vivian Romeu Aldaya

Enero de 2017



# MANUAL DE COMUNICACIÓN INTERCULTURAL

Cynthia Pech Salvador  
Marta Rizo García  
Vivian Romeu Aldaya

Enero de 2017





*Funciones trigonométricas. Un tratado elemental en el cálculo*  
de Rafael Torres Simón,  
se terminó de imprimir en julio de 2017,  
en los talleres de impresión de la  
Universidad Autónoma de la Ciudad de México,  
San Lorenzo 290, Col. del Valle, Del. Benito Juárez, C.P. 03100,  
con un tiraje de 2000 ejemplares.  
Formación de interiores: Rafael Torres Simón  
Cuidado de la edición: Ángeles Godínez Guevara  
Diseño de la portada: Sergio Cortés Becerril  
Difusión y distribución: Ana Beatriz Alonso Osorio

El presente libro incluye los temas de geometría plana, trigonometría y aplicaciones de la trigonometría a un nivel básico universitario; está dirigido a estudiantes de las diversas ingenierías y de la licenciatura en Modelación matemática ofertadas por la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Los contenidos que se abordan son indispensables para los programas del Colegio de Ciencia y Tecnología y se encuentran dispersos en unidades o subtemas de los distintos cursos. El objetivo de *Funciones trigonométricas. Un tratado elemental en el cálculo* es integrar todos los temas fundamentales relacionados con la Trigonometría en un solo volumen.

Asimismo, el compendio incluido pretende que sea aprovechado en un momento posterior para su aplicación en los cursos de Álgebra y Geometría analítica, Cálculo diferencial y Cálculo integral. De esta forma, se inicia con la geometría plana, se presenta una introducción a la trigonometría y se estudia el teorema de Pitágoras, el triángulo rectángulo y la ley de senos y cosenos. En el contexto del Cálculo diferencial se estudian las propiedades de las funciones trigonométricas, la función exponencial y el logaritmo; y las coordenadas polares se revisan en relación con el Cálculo integral.

La mayoría de los teoremas y proposiciones expuestos en esta obra están demostrados con detalle, invitando de esta forma a que el estudiante participe en la construcción gradual del conocimiento, más allá de la memorización mecánica de conceptos.

Para reforzar el aprendizaje, se expone un amplio número de ejemplos y se agregan actividades a resolver durante el desarrollo de los contenidos. Estas actividades tienen la finalidad de que el estudiante comprenda, retenga y madure los conceptos estudiados en ese momento.