Las matemáticas y las tecnologías de la información y comunicación

Juan Héctor Arredondo Ruíz
Francisco Javier Mendoza Torres

Si bien es cierto que las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación (tic) nos ofrecen nuevas y grandes posibilidades en distintos ámbitos, no hay que soslayar que los procesos esenciales de la enseñanza-aprendizaje son los mismos que antes y que este abanico de novedosas posibilidades no siempre resulta accesible para algunos grupos sociales. Una pregunta surge entonces: si podemos o debemos cambiar, o por lo menos modificar, los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Partimos del hecho de que los ambientes virtuales son únicamente facilitadores para el aprendizaje y la enseñanza, pero también de cómo en la enseñanza de las matemáticas mejoran el rendimiento y diversifican las actividades que pueden desarrollar los alumnos. La pregunta que nos planteamos es si es posible optimizar este proceso de aprendizaje aún más para que aparezcan elementos personalizados para cada entorno social y situación curricular de alumnos y profesores.

Palabras clave: matemáticas, retroalimentación, minimalismo, ambientes virtuales mixtos, psicología.

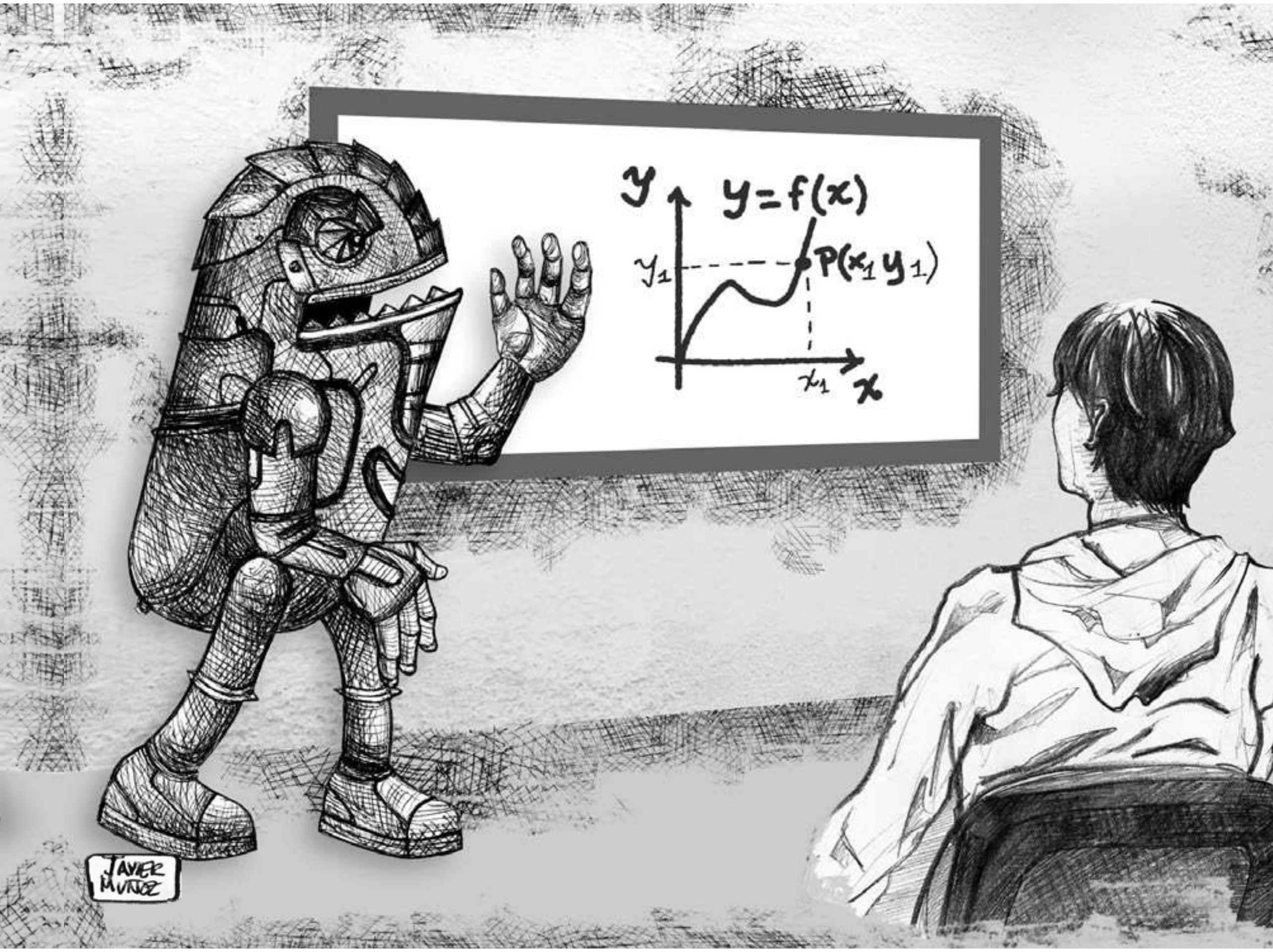
Abstract

Mathematics and Information and Communication Technologies

Although it is true that the new information and communication technologies offer us great and new possibilities, it should not be overlooked that the essential processes of teaching-learning are the same as before and that this range of new possibilities isn't always accessible to some social groups. A question is then whether we can or should change, or at least modify, the teaching-learning processes. Which leads us to different answers.

On the basis of the fact that virtual environments are only facilitators for learning and teaching, but also of how in the teaching of mathematics they improve performance and diversify the activities that students can develop. The question we ask ourselves is whether it is possible to optimize this learning process even more so that new personalized elements appear for each social environment and curricular situation of students and teachers.

Keywords: mathematics, feedback, minimalism, mixed virtual environments, psychology



Introducción

62.4 millones de mexicanos usan internet, lo que significa que más de la mitad de la población del país es internauta; de ellos se podría decir que casi la totalidad de los jóvenes también lo son (Villamil, 2016). Hasta 70% de los internautas no distingue entre información falsa y verdadera en la web (Proal, 2016). Estos datos muestran que el uso de las nuevas tecnologías no es automáticamente provechoso, sino que es necesario adecuar cada herramienta tecnológica convenientemente para beneficio real de las personas. Aunado a esto, la capacidad de análisis es primordial dada la cantidad de información que los usuarios deben filtrar.

Si trajéramos al presente a un científico de una ciencia experimental de hace un siglo, quedaría perplejo al ingresar a un laboratorio; no sabría utilizar muchos instrumentos o realizar experimentos. En cambio, quizá podría impartir su clase con poca dificultad. A partir de lo anterior, podemos decir que la inversión necesaria en educación es cada vez mayor. Desde otro punto de vista podemos considerar esto como el poder de la abstracción y las teorías científicas.

Dos disciplinas principalmente han realizado estudios en la enseñanza de matemáticas: psicología y matemáticas. Para la primera, las matemáticas son un objeto de estudio muy interesante por su relativa independencia de cuestiones extra-escolares, su importancia en la estructura escolar, su abstracción y su nivel de complejidad y dificultad en las tareas de aprendizaje. Las preguntas que se pretende contestar en este contexto son dos: cómo se enseñan y cómo se aprenden las matemáticas.

El estudio de las matemáticas ha originado que se desarrollen análisis detallados sobre los procesos de razonamiento y creación para su enseñanza. Este tipo de investigación es realizado por especialistas disciplinares que se ocupan de los temas que deben enseñarse. Es necesario mencionar que en matemáticas existen pensamientos abstractos que no están acompañados por imágenes, por lo que, para su análisis, resulta indispensable pensar en sus interrelaciones, no en sus contenidos.

Han existido controversias sobre si las matemáticas tienen un poder generador; por ejemplo, Judd (1908) y Thorndike (1923) concluían que el principal logro de la educación matemática es el desarrollo de facultades mentales. Aunque Thorndike afirmaba que la enseñanza directa de las competencias deseadas suele ser más eficiente y económica que los efectos indirectos que se espera obtener, por ejemplo: *aprender a aprender*. El argumento de que lo aprendido en el estudio de las matemáticas desarrolla habilidades para la adquisición de más conocimientos, generó una reconsideración sobre la enseñanza de las matemáticas que ha puesto en lados opuestos a psicólogos y docentes de esta disciplina.

Tenemos dos aspectos que consideramos íntimamente relacionados, pero que pueden armonizar o interferirse. Por un lado, los problemas del proceso de enseñanza-aprendizaje son los mismos que antes, aunque ahora pueden ser encarados con las nuevas tecnologías. Estas tecnologías ponen a disposición de los usuarios muchos instrumentos para su aprendizaje. Por otro lado, las matemáticas son una búsqueda de la esencia de los objetos que estudia, por lo que es obligación de la educación matemática sintetizar de manera óptima el conocimiento que se requiere estudiar en cada curso; asimismo, es una obligación del profesor, o al menos debería serlo, requerir lo mínimo necesario para acreditar un curso, pero garantizándole al alumno el conocimiento que requerirá posteriormente.

En este trabajo apuntamos sobre la conveniencia de establecer un mínimo necesario de conocimiento requerido en un curso, así como sus posibles implicaciones negativas sobre el poder generador de las matemáticas y el diseño de un curso.

Contexto

Podemos asumir las siguientes circunstancias:

1. El alumno requiere de un profesor las 24 horas del día.

2. En matemáticas, los alumnos no saben qué preguntas se deben hacer y, por lo tanto, cómo y qué estudiar.
3. Es mejor abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera constructiva o experimental.

En el inciso 1 simplemente apuntamos lo que sería la situación ideal. Respecto al siguiente inciso, podemos decir que desde finales de la década de los años 50 existe una brecha entre las matemáticas enseñadas en universidades y las de niveles anteriores, así como un decrecimiento de estudiantes en carreras relacionadas con las matemáticas (OCD, 2018); esta situación sucede en mayor o menor grado desde entonces. El desfasamiento de los alumnos que llegan a las universidades es notorio porque es durante los primeros años que ocurre la mayor deserción. Esto se puede ver de manera particular en los cursos que se imparten al inicio de la licenciatura en Matemáticas como son: Cálculo Diferencial y Cálculo Integral impartidos en la UAM-I, y en general se observa en las escuelas de matemáticas de todo el país. Además, en los cursos superiores se solicita un nivel de abstracción mayor o un razonamiento más elaborado que no se ejercita en cursos de matemáticas de niveles anteriores. En el proceso de enseñanza-aprendizaje hay miles de factores involucrados, por lo que no se puede señalar una causa específica para la deserción, sino que lo consideramos como una condición multifactorial.

Concerniente al último inciso, en nuestra práctica docente, y que también coincide con la de algunos otros profesores cercanos a nuestra área del conocimiento, nos encontramos con la realidad de que nuestros alumnos se encuentran desmotivados y no alcanzan a percibir la utilidad práctica de su materia de estudio. Las matemáticas tienen una parte muy abstracta, y los alumnos que estudian la licenciatura en Matemáticas usualmente se confunden en esos lenguajes abstractos y simbólicos. Aterrizar esta estructura en algo tangible resulta algunas veces muy difícil para el alumno; esto, por otra parte, no siempre aporta un mejor entendimiento a sus problemas conceptuales inmediatos.

Para el alumno sería ideal que le presentáramos una lista con cierto número de ejercicios que le aseguraran cierto grado de dominio de la materia en cuestión, así como la aprobación del curso. Sin embargo, lo que usualmente hacemos es todo lo contrario. Esto también se relaciona con el tiempo que el alumno ocupa en comprender y aplicar una metodología. La cuestión es, ¿cuántas actividades o ejercicios que proponemos no son esenciales para su aprendizaje? Como profesores tenemos la obligación de buscar la esencia de los temas que se abordarán en un curso, pero esta es una tarea muy difícil.

El minimalismo es una tendencia estética e intelectual que busca la expresión de lo esencial eliminando lo superfluo. Las matemáticas son minimalistas en el sentido de que los modelos matemáticos deben buscar la esencia de los procesos que tratan de modelar, a costa de que si no es así resulten inservibles por complicados.

En matemáticas, los conceptos y la metodología son la parte más relevante y profunda de la disciplina y es donde subyace el potenciador del desarrollo de las facultades mentales. Pero contradictoriamente, encajona en una estructura muy rígida a los individuos; y es esto precisamente lo que encuentran tortuoso los estudiantes de matemáticas; si además se hallan exactamente en una etapa relativamente temprana de su vida, puede resultar en algo contraproducente, o por lo menos difícil de asimilar.

Marco teórico

Según el modelo del camino del descubrimiento del conocimiento matemático de Buchberger (*Buchberger's Creativity Spiral*) (Fig. 1) se distinguen tres fases:

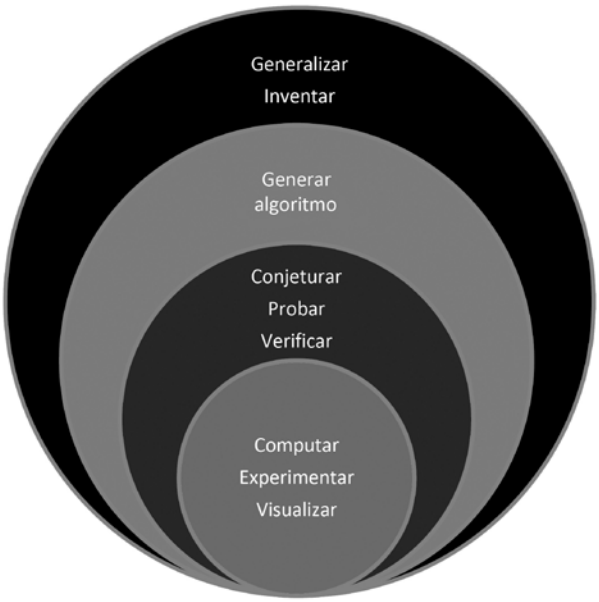


Fig. 1 Espiral de creatividad de Buchberger.

A partir de un conocimiento previo se proponen ejemplos, es decir, se experimenta. Al estudiar varios ejemplos se encuentran patrones o propiedades comunes que, por observación, sugieren conjeturas. A su vez, estas conjeturas se comprueban o rechazan, para crear teorías o teoremas a las que llamamos comprobación. En el desarrollo de las teorías aparecen nuevas situaciones no consideradas previamente, donde las teorías son aplicadas (aplicación); lo que genera nuevos algoritmos y conocimientos. Después de esto, se regresa entonces al estadio inicial y se repite el proceso.

Muchas teorías sobre el aprendizaje lo consideran como un proceso en el cual la experimentación debe ser esencial, y que no es necesario enseñar algo que puede ser aprendido por experimentación. Actualmente se enseña matemáticas como un proceso deductivo, donde el estudiante tiene que aprender reglas o métodos, para luego intentar aplicarlos en la resolución de problemas donde principalmente se rehacen cálculos algebraicos. Kurtz (2000) recomienda el uso intensivo y extensivo de computadoras en la enseñanza de matemáticas; según el autor, sus ventajas son:

1. Retroalimentación inmediata en las respuestas de los alumnos, y la consecuente detección de errores.
2. Posibilidad de estudiar ejemplos más complejos y realistas.
3. Aprender mediante la experimentación.
4. Visualización de problemas, al formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas (Carrión, 1999).
5. Apoyo en el refuerzo de sus habilidades de cálculo.

Desde el punto de vista histórico, la humanidad hace descubrimientos o avances científicos por medio de la experimentación; es decir, mediante prueba y error, y esto sucede de manera particular en las matemáticas. Desgraciadamente esto lleva mucho tiempo, lo que es imposible reproducir en un curso. Además, las personas que investigan y aplican el método de prueba y error tienen un alto nivel de comprensión en la materia que investigan. O sea que entablar similitudes entre la experimentación en investigación y la experimentación que sucede en un salón de clases no es válido. Ciertamente es una forma conveniente de desarrollar investigación, como se comprueba históricamente; sin embargo, habría que suponer que el poder formativo o desarrollador de las facultades mentales que se asocian con las matemáticas está en la fase de la comprobación y prueba, es decir, en su estructura metodológica deductiva.

Por otra parte, hay que separar la parte conceptual de la parte operativa de un tema. Por ejemplo, es posible que el alumno pueda realizar las operaciones elementales de suma y multiplicación de dos números reales, pero otra cosa es entender la construcción de Dedekind de la recta real, que es un tema avanzado de análisis matemático.

Podemos decir que hay niveles de entendimiento, y que debemos estar conscientes de que la computadora nos podrá facilitar imágenes, pero que por sí solas no significan mucho, puesto que necesitan ser asociadas a un marco conceptual y teórico que el alumno debe aprender previamente. El uso de la computadora nos permite llegar a los niveles más altos de entendimiento de los problemas para resolver la parte operativa o mecánica de las matemáticas; pero paradójicamente, quizá a costa de que el alumno no tenga la madurez necesaria de entendimiento para esto.

Entonces recomendaríamos el uso de la computadora como un apoyo, pero no como sustituto de los conocimientos de los alumnos. La computadora es un efectivo detector de errores con retroalimentación inmediata para el alumno. Para ejemplificar esto, consideremos el siguiente ejercicio típico de un curso de Cálculo Diferencial. Se pide calcular el límite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \sqrt{t + 1}}{t}$$

La computadora nos da inmediatamente el resultado correcto $-\frac{1}{2}$. Pero si el alumno no sabe cómo llegar a este resultado, solamente retarda el aprendizaje de este procedimiento para cursos posteriores, porque en cursos más avanzados se le requerirá que compruebe que dicho resultado es cierto. Para su comprobación tendrá que hacer operaciones algebraicas muy similares a las que se necesitan para realizar el cálculo algebraico del límite, combinándolos con nuevos conceptos y elementos.

Por otro lado, es muy recomendable que el alumno reciba inmediatamente la retroalimentación a las respuestas de los ejercicios a resolver, sin importar si se trata de tareas expresamente recomendadas por el profesor o no. En estos casos, el uso de la computadora resulta muy adecuado.

En conclusión, no puede asegurarse que el desconocimiento de una habilidad matemática considerada como menor, tal como podría ser la simple manipulación algebraica, no repercuta en el aprendizaje posterior.

Por otra parte, es bueno remarcar que la computadora nos ayuda a visualizar un problema matemático. En el ejemplo anterior, la computadora nos puede apoyar sobre el posible resultado que debemos obtener. Al graficar la función:

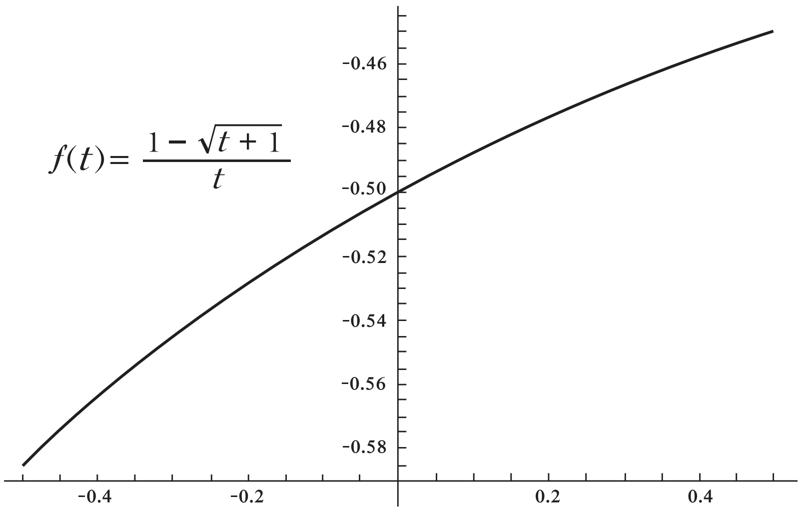


Fig. 2 Gráfica de la función.

La computadora nos muestra la Fig. 2. La imagen nos induce a pensar que los valores de la expresión algebraica $\frac{1-\sqrt{t+1}}{t}$ alrededor de $t=0$ son cercanos al valor $-\frac{1}{2}$. Es decir:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \sqrt{t+1}}{t} = -\frac{1}{2}$$

Saber o suponer de antemano la respuesta ayuda mucho, y verificar nuestras respuestas de distintas maneras es muy recomendable porque es una forma de asegurar la certeza de nuestro razonamiento o cálculo. Aunque también es necesario apuntar que contar únicamente con la computadora para comprobar nuestros razonamientos no necesariamente es lo mejor. Verificar las respuestas de otras maneras seguramente implicará mayor profundidad en los conocimientos adquiridos por el alumno. Quizá esto no se enfatiza suficientemente. Al final de cuentas, los distintos enfoques que demos a un concepto o problema nos proveerán de más herramientas para entenderlo o resolverlo.

El proceso de Enseñanza-Aprendizaje

Las matemáticas son una ciencia que tiene una metodología exacta y precisa cuyas implicaciones son válidas para siempre. Existe una anécdota sobre alguien que demostró que el hombre no puede volar. La falacia o error de esta aseveración radica en los supuestos o hipótesis que se asumen como válidas, no en los procesos de deducción. Esta ciencia ha constituido una fuerza motriz en la humanidad a lo largo del tiempo.

Paradójicamente, el poder de las matemáticas para desarrollar las facultades mentales o potenciar las habilidades conlleva el costo de encajonar en una estructura rígida la forma de pensar y proceder de una persona. Podemos decir que le quita un poco de creatividad al alumno cuando no aplica estos conocimientos a la resolución de problemas.

Pensamos que lo anterior tiene mucho que ver con la necesidad de plantearnos como profesores los objetivos de un curso y cuáles son las habilidades que les podemos exigir a nuestros alumnos. Históricamente, los avances científicos más importantes se resuelven mediante prueba y error, así como con la participación de varias personas que aportan nuevas ideas hasta que se sintetizan todos estos conocimientos en una teoría que lo comprende todo. ¿Por qué entonces individualizar el esfuerzo en un salón de clases, provocando la inhibición de los participantes? Resulta relevante en este momento mencionar que la participación en clase de los alumnos es muy escasa y por lo general es provocada por temor.

El planteamiento que hacemos es muy concreto:

i. Establecer los objetivos del curso con base en una lista de ejercicios y problemas tipo que el alumno deberá ser capaz de resolver en cursos básicos.
ii. Uso de una plataforma virtual en la que el alumno pueda ejercitarse y realimentarse de forma suficiente e inmediata. El profesor será quien elabore los ejercicios y problemas con sus respectivas soluciones.
iii. La calificación determinante para aprobar un curso deberá ser con base en los ejercicios o problemas que el alumno haya desarrollado previamente en clase o en el aula virtual.
iv. En función del conocimiento adquirido durante el curso, el estudiante podrá desarrollar proyectos en grupos sobre problemas propuestos por el instructor o por los mismos grupos, aunque expuestos de manera individualizada.

Respecto al primer punto remarcamos que, para el alumno promedio, es frustrante encontrar un ejercicio dentro de un examen que tenga un elemento desconocido para él, sin importar si debió aprenderlo en cursos anteriores o no. Quizá esto es lo que más desconcierta a un estudiante en su aprendizaje, y que en matemáticas suele ocurrir porque los profesores consideramos que el ingenio y la creatividad en la resolución de ejercicios o problemas son parte del aprendizaje.

En el segundo punto es preciso señalar que resulta importante que el alumno tenga la suficiente práctica en la resolución de ejercicios, así como una retroalimentación pronta y confiable de sus respuestas. Es necesario que a través del aula virtual tenga acceso a otros problemas semejantes cuando su respuesta no sea la correcta. Relacionado con esto último, estamos trabajando en un proyecto que nos ayudará a generar, por medio de la computadora, problemas y ejercicios afines.

En el tercer punto planteamos restringir, en la medida de lo posible, la discrecionalidad de los profesores en cuanto a la evaluación para la aprobación del curso.

Al tener un objetivo bien definido para poder aprobar el curso, el alumno podrá avanzar rápidamente en la parte teórica, lo que permitirá que la mayoría desarrolle proyectos donde se podrían aplicar los conocimientos adquiridos. Así los alumnos tratarían de ser creativos y originales, discutiendo en grupos de trabajo, experimentando o simplemente planteando nuevos problemas.

Conclusiones

Los recursos informáticos pueden coadyuvar al proceso de enseñanza-aprendizaje. La utilización de estos recursos es esencialmente práctica y la comprobación de sus respuestas es inmediata, mientras que en matemáticas el aprendizaje es más teórico y la comprobación de respuestas generalmente no es inmediata, debido a las limitaciones humanas de tiempo y trabajo docente. Por esta razón, en la medida en que introduzcamos más herramientas informáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, estaremos aterrizando la estructura simbólica y abstracta de las matemáticas al menos a niveles preuniversitario o inicios del universitario.

Plantear actividades que sean posibles de realizar a cualquier hora fuera de clases debe ser un requisito en el diseño de los cursos. Pero no es suficiente dejar tareas extramuros, sino que debe incluirse la retroalimentación pronta y confiable.

El uso de la computadora, específicamente de programas que procesan la parte algebraica y gráfica de temas matemáticos, seguramente facilitará el aprendizaje en el alumno, pues le dará la posibilidad de practicar exhaustivamente.

Edward G. Begle (1969), matemático y educador, propuso que las matemáticas educativas deberían ser una ciencia experimental que siguiera los mismos métodos de la física y las ciencias naturales, para construir una teoría de las matemáticas educativas en la cual se formulen hipótesis que sean comprobadas o modificadas de acuerdo con las observaciones. Por otra parte, se está orientando la investigación en educación cada vez más a los salones de clases y escuelas, y a los contenidos de los textos vigentes. Esto hace que las teorías emanadas de estas investigaciones no tomen en consideración todas las variables para lograr una mejor enseñanza de las matemáticas. Se necesita una integración más profunda de investigación y práctica docente, poniendo ambas actividades al mismo nivel en todos los sentidos.

El problema de la educación es muy complejo, y considerar la injerencia de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas podría estar en un punto de partida para desarrollar investigación en educación. Nos podemos plantear para un futuro la siguiente pregunta: ¿Es posible optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a tal grado que se puedan lograr elementos personalizados, independientemente de las características de cada entorno social y situación curricular de profesor y alumnos?

Referencias

Begle, E. G. (1969), The role of research in the improvement of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, (2), 232-244.

Carrión, V. (1999), *Álgebra de funciones mediante el proceso de visualización*. Depto. de Matemática Educativa. Ciudad de México, México: CINVESTAV.

Freudenthal, H. (1979). *Mathematik als pedagogische Aufgabe*. Klett Studien.

Judd C. H. (1908). The relation of special training to general intelligence, *Educational. Review*, 36, 28-42.

Kutzler, B. (6 de agosto del 2000). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. T3 World-Wide Conference, Tokio, Japón.

Macías Ferrer, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *42*(4), 1-17.

OECD (2018). *Education at a Glance 2018: OECD Indicators*. OECD, Recuperado de https://doi.org/10.1787/eag-2018-en

Piaget, J. (1994). *Seis estudios de psicología*. (3a. ed., Vol. 2). Barcelona, España: Labor.

Proal, J. P. (2016). La masificación del rumor. *Proceso*. Edición Especial (53), 20-23.

Thorndike, E. L., Cobb, M. V., Orleans, J. S., Symonds, P. M., Wald, E., y Woodyard, E. (1923). *The psychology of algebra*. Nueva York, Estados Unidos: Macmillan.

Villamil, J. (2016). La expansión de un desafío. *Proceso*. Edición Especial (53), 8-13.