

Matemáticas para ciencias de la salud

Julia Iztaccihualt Muñoz Guerra



Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Matemáticas para ciencias de la salud

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Dra. Tania Hogla Rodríguez Mora
Rectora

Mtro. César Enrique Fuentes Hernández
Coordinador Académico

Museógrafo Fernando Francisco Félix Valenzuela
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión Universitaria

Equipo de la Biblioteca del Estudiante

Ángeles Godínez Guevara
Responsable

Ana Beatriz Alonso Osorio
Daniel Cruz Valentín
Florina Piña Cancino
Sergio Javier Cortés Becerril
Verónica Durán Carmona

Matemáticas para ciencias de la salud

Julia Iztaccihualt Muñoz Guerra

FICHA CATALOGRÁFICA E-S/N

Muñoz Guerra, Julia Iztaccihualt, autora.

Matemáticas para ciencias de la salud / Julia Iztaccihualt Muñoz Guerra. — Primera edición. -- México : Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2023

245 páginas ; 28 cm.

“Material educativo universitario de distribución gratuita para estudiantes de la UACM” Reverso de la portada.

ISBN 978-607-8939-60-2

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza, -- 2. Análisis matemático -- Problemas, ejercicios, etc. -- 3. Salud — Estudio y enseñanza. -- I. título.

LC QA308

Dewey 510

Matemáticas para ciencias de la salud

Primera edición, 2023

© Julia Iztaccihualt Muñoz Guerra

D.R. © Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Dr. García Diego 168, Colonia Doctores,
Alcaldía Cuauhtémoc, C.P. 06720, CDMX

ISBN: 978-607-8939-60-2

Biblioteca del Estudiante:

[https://www.uacm.edu.mx/Organizacion/
CoordinacionAcademica/Biblioteca_Estudiante](https://www.uacm.edu.mx/Organizacion/CoordinacionAcademica/Biblioteca_Estudiante)

Material educativo universitario de distribución gratuita para estudiantes de la UACM. Prohibida su venta.

Hecho e impreso en México

Índice general

Introducción	13
1. Conjuntos	15
1.1. Introducción	15
1.1.1. Notación de conjuntos	15
1.1.2. Descripción de conjuntos	16
1.2. Clases de conjuntos	17
1.2.1. Conjunto vacío	17
1.2.2. Conjuntos finitos	18
1.2.3. Conjuntos infinitos	18
1.2.4. Conjunto unitario	18
1.2.5. Cardinalidad de un conjunto finito	18
1.3. Relaciones entre conjuntos	19
1.3.1. Conjuntos iguales	19
1.3.2. Subconjuntos	19
1.3.3. Subconjunto propio	20
1.3.4. Conjuntos comparables	20
1.4. Operaciones con conjuntos	20
1.4.1. Diagramas de Venn-Euler	21
1.4.2. Conjunto universo	21
1.4.3. Intersección de conjuntos	22
1.4.4. Conjuntos ajenos o disjuntos	23
1.4.5. Unión de conjuntos	23
1.4.6. Diferencia de conjuntos	24
1.4.7. Conjunto complemento	25
1.5. Aplicaciones	26
1.6. Ejercicios	31
2. Números	41
2.1. Números naturales	41
2.2. Números enteros	42
2.2.1. Multiplicación de números enteros	43

2.2.2.	Suma y resta de números enteros	44
2.2.3.	Divisibilidad	45
2.2.4.	El cero y la operación división	46
2.3.	Aplicaciones de los números enteros	46
2.4.	Números racionales	48
2.4.1.	Fracciones equivalentes	50
2.4.2.	Simplificación de fracciones	51
2.4.3.	Fracciones propias e impropias	52
2.4.4.	Suma de fracciones	54
2.4.5.	Resta de fracciones	55
2.4.6.	Multiplicación de fracciones	55
2.4.7.	División de fracciones	56
2.4.8.	Decimales	57
2.4.9.	Operaciones con decimales	60
2.4.10.	Aplicaciones de números racionales y decimales	62
2.5.	Números irracionales	63
2.5.1.	Números irracionales famosos	63
2.5.2.	Construcción de números irracionales	65
2.6.	Números reales	65
2.7.	Ejercicios	66
3.	Razones, proporciones y porcentajes	75
3.1.	Razones	75
3.2.	Aplicaciones	76
3.3.	Proporciones	78
3.4.	Aplicaciones	79
3.5.	Porcentajes	83
3.5.1.	Convertir porcentajes a fracciones y decimales	84
3.6.	Aplicaciones	85
3.7.	Ejercicios	89
4.	Cálculo de dosis	95
4.1.	Cálculo de dosis cuando el medicamento es cápsula o tableta	96
4.2.	Cálculo de dosis cuando se da el medicamento en forma líquida	98
4.3.	Preparación de soluciones	99
4.4.	Diluyendo soluciones	101
4.5.	Razón de los medicamentos intravenosos	101
4.6.	Ejercicios	102
5.	Ecuaciones de primer grado	105
5.1.	Definición	105
5.1.1.	Ecuaciones equivalentes	106
5.2.	Propiedades de la igualdad	107

5.2.1. Propiedad de la suma de la igualdad	107
5.2.2. Propiedad de la resta de la igualdad	107
5.2.3. Propiedad de la multiplicación de la igualdad	107
5.2.4. Propiedad de la división de la igualdad	108
5.3. Estrategia para resolver ecuaciones de primer grado	108
5.4. Resolución de problemas	111
5.4.1. Estrategia para resolver problemas	111
5.5. Ejercicios	113
6. Desigualdades de primer grado	115
6.1. Propiedades de las desigualdades	115
6.2. Intervalos	117
6.3. Operaciones con intervalos	117
6.4. Propiedades de las desigualdades	120
6.5. Solución de desigualdades	121
6.5.1. Desigualdades lineales con una variable	121
6.6. Desigualdades compuestas	122
6.7. Aplicaciones con desigualdades	124
6.8. Ejercicios	125
7. Rectas	131
7.1. El sistema de coordenadas rectangulares	131
7.2. Pendiente	134
7.2.1. Fórmulas de la recta	137
7.2.2. Rectas con pendiente infinita y pendiente cero	138
7.3. Intersecciones con los ejes	139
7.3.1. Forma canónica de la recta	140
7.4. Aplicaciones de las rectas	141
7.5. Ejercicios	144
8. Sistemas de ecuaciones lineales	151
8.1. Rectas paralelas	151
8.2. Rectas perpendiculares	153
8.3. Método sustitución	155
8.4. Método de igualación	157
8.5. Método de suma y resta	159
8.6. Resolución de problemas	160
8.6.1. Problemas de porcentaje	161
8.6.2. Problemas de mezclas	164
8.7. Ejercicios	165

9. Ecuaciones de segundo grado	171
9.1. Primer caso: $b = 0$	171
9.2. Segundo caso: $c = 0$	173
9.3. Tercer caso: $a = 1$	173
9.4. Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado	175
9.5. Ejercicios	176
10. Funciones	179
10.1. Representación gráfica de funciones	180
10.1.1. Gráfica de rectas	181
10.1.2. Gráficas de cuadráticas	182
10.1.3. Método gráfico para resolver ecuaciones de segundo grado	184
10.2. Funciones pares e impares	185
10.3. Transformaciones de funciones	189
10.3.1. Traslación de funciones	189
10.3.2. Dilatación de funciones	191
10.3.3. Reflexión de funciones	193
10.4. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas	194
10.5. Función inversa	196
10.6. Función valor absoluto	198
10.6.1. Características de $f(x) = x $	198
10.7. Ejercicios	199
11. Logaritmos y exponenciales	205
11.1. Potencias de 10 y exponenciales	205
11.2. Función exponencial	206
11.3. Leyes de los exponentes	207
11.4. Logaritmos	208
11.5. Cálculo de logaritmos	209
11.6. Propiedades de los logaritmos	210
11.7. Gráfica de la función logaritmo	211
11.8. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	213
11.9. Aplicaciones de las funciones exponenciales	215
11.10. Ejercicios	218
12. Trigonometría	225
12.1. Teorema de Pitágoras	226
12.2. Razones trigonométricas	227
12.3. Ley de senos y ley de cosenos	231
12.4. Aplicaciones	234
12.5. Ejercicios	236
Bibliografía	243

Índice de Materias

243

Introducción

Un buen manejo de los conceptos matemáticos es muy importante en la mayoría de las carreras relacionadas con ciencias de la salud, principalmente en cuestiones como son dosis y administración de medicamentos.

El presente texto está dirigido a estudiantes que cursan el último nivel de bachillerato o el primer año de nivel licenciatura. Se puede usar para trabajar en el curso o en forma autónoma. Este trabajo no corresponde a ningún programa de estudios. Los temas que incluye son considerados como matemáticas básicas. Contiene todos los temas necesarios que el estudiante debe manejar para tomar cursos más avanzados, como son Bioestadística, Probabilidad o Cálculo.

Cada uno de los capítulos incluye al menos un ejemplo de cada tema. Los ejercicios de cada capítulo, incorporan además de problemas o aplicaciones clásicas, también problemas de ciencias de la salud, tales como aplicaciones a medicina, nutrición, enfermería o promoción de la salud.

El primer capítulo trata sobre conjuntos. Contiene temas como definición, características y operaciones. Los intervalos de números reales que se esperaría ver en esta parte se ubican en el capítulo 6. Un tema muy importante que abarca este capítulo es la técnica de diagramas de Venn para la resolución de problemas de aplicaciones de cardinalidad.

En el segundo capítulo se ven los conjuntos de números, desde los naturales hasta los reales. Se incluye definición de operaciones entre números racionales, así como la conversión entre la representación decimal y la fracción.

El tercer capítulo trata de las razones, proporciones y porcentajes. Se presentan reglas de tres sin darle ese nombre, buscando que el estudiante haga una descripción más natural que involucre una lectura clara del problema, procurando evitar que sólo haga la mecanización correspondiente.

El capítulo 4 está dedicado exclusivamente al cálculo y administración de dosis, para este capítulo se debe tener un excelente manejo del razones, proporciones y porcentajes.

El capítulo 5 es el primero dedicado a álgebra. Éste incluye una estrategia de lectura de aplicaciones y se quita un poco la formalidad al permitir aplicar la resolución de ecuaciones de forma

coloquial, describiéndolas “que si está sumando pasa restando”, etcétera.

En el sexto capítulo se trabaja con desigualdades de primer grado, sin contemplar cuadráticas y aquellas con valor absoluto. Se parte de que el estudiante ya maneja las ecuaciones de primer grado y hace el cambio a desigualdad, entendiendo que la solución de la desigualdad es un conjunto de números reales, por esta razón se incluye hasta este capítulo el manejo de intervalos de números reales.

El capítulo 7 trata sobre ecuaciones lineales con dos variables, es decir, rectas. Abarca las distintas formas de ver las rectas, así como cálculo y descripción de pendientes. Las aplicaciones de ecuaciones lineales que modelan algunas situaciones de las carreras de ciencias de la salud se ven aquí, se da una gran importancia al significado de la pendiente y la ordenada al origen.

Los sistemas de ecuaciones se ven en el octavo capítulo; se incluyen todas las formas de resolución excepto Cramer. Por supuesto, también están presentes problemas de aplicación. En el noveno capítulo se abordan las ecuaciones de segundo grado, presentando en principio a la fórmula general y, a la par, se presentan por casos haciendo una comparación entre fórmula y otros métodos.

La definición y características de funciones se ven el capítulo 10. Se incluyen algunas herramientas que permiten esbozar gráficas de forma más sencilla como son translación, reflexión y dilatación de funciones.

En el capítulo 11 se da una breve introducción a potencias de 10. Se ven las gráficas y propiedades de funciones logarítmicas y exponenciales, y resolución de ecuaciones, entendiendo que la función logaritmo y exponencial son inversas. Dado que la mayoría de las poblaciones se modelan con funciones exponenciales este capítulo incluye aplicaciones sobre este tema.

Y por último, el capítulo 12 presenta la trigonometría. Incluye razones trigonométricas y aplicaciones utilizando el teorema de Pitágoras, Ley de senos o la Ley de los cosenos, dependiendo de la información proporcionada.

Este material es el resultado del año sabático otorgado a la profesora Julia Muñoz durante el 2011. Comentarios sobre fe de erratas, recomendaciones, quejas etcétera se reciben en el correo electrónico **julia.munoz@uacm.edu.mx**.

Conjuntos

1.1. Introducción

El profesional de la salud debe trabajar con personas, medicamentos, estudios de laboratorio, colegas, datos, etcétera, por lo que el manejo de nociones básicas de la teoría de conjuntos le es de gran utilidad. En este capítulo se ve cómo representar distintos tipos de conjuntos, así como operaciones entre conjuntos y, por último y más importante, aplicarlo en la resolución de problemas relacionados con la salud.

El concepto “conjunto” no está definido matemáticamente; sin embargo, intuitivamente tenemos una idea de lo que esta palabra significa, ya que en la vida diaria nuestra mente organiza de manera inconsciente los objetos en conjuntos de acuerdo a una o varias características, tales como:

- miembros de una familia
- alumnos de un salón de clases
- verduras
- jugadores de béisbol de cierto equipo
- partidos políticos de un país
- medicamentos para el dolor
- chiles mexicanos

Observación 1.1. *Un conjunto es una colección de objetos que tienen una característica común bien definida. A los objetos se les llama elementos del conjunto.*

1.1.1. Notación de conjuntos

Por convención, para representar los conjuntos se utilizan las letras mayúsculas del abecedario, mientras que para representar sus elementos se utilizan las letras minúsculas.

Cuando queremos indicar que un objeto a es un elemento de un conjunto A , utilizamos la notación \in . La notación \in puede tener cualquiera de las siguientes lecturas o significados:

- El objeto a es un elemento del conjunto A .
- El objeto a pertenece al conjunto A .

Ejemplo 1.1.1

Considerar que A es el conjunto de las vocales. Tenemos que $e \in A$ pues e es una vocal y $b \notin A$ pues b es una consonante.

1.1.2. Descripción de conjuntos

Para describir un conjunto podemos hacerlo de varias maneras:

- nombre del conjunto
- extensión o lista
- comprimido o forma constructiva

Cuando decimos algunos nombres de conjuntos ya sabemos cuáles son sus elementos, aunque no sepamos todos sus elementos, sabemos de qué se trata. Por ejemplo: vocales, consonantes, estados de la República Mexicana, vitaminas, medicamentos para la presión, huesos del cuerpo humano. Si queremos describir sus elementos hacemos uso de dos posibilidades:

Observación 1.2. *Cuando describimos a un conjunto por extensión lo que hacemos es denotar una letra mayúscula para dicho conjunto, después escribimos el signo igual, y los elementos los listamos escritos entre dos llaves y separados por comas. Cuando la descripción se entiende por los primeros elementos de la lista podemos utilizar puntos suspensivos para evitar escribir listas muy grandes.*

Ejemplo 1.1.2

a) El conjunto de las vocales se escriben por extensión:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

b) El conjunto de los días de la semana se escribe por extensión:

$$B = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$

c) El conjunto de los enteros positivos mayores que 5 pero menores que 10:

$$C = \{6, 7, 8, 9\}$$

Observación 1.3. *Por comprensión o en forma constructiva lo que se hace es escribir nuevamente la letra correspondiente al conjunto, y usamos nuevamente llaves para escribir entre ellas. Lo que escribimos es x , lo cual corresponde al elemento, seguido de dos puntos (:) y por último la o las características que distinguen a los elementos de dicho conjunto. $A = \{x : x \text{ tiene cierta propiedad}\}$. La notación anterior se lee: “El conjunto A es el conjunto de todas las x tales que x tiene cierta propiedad” (el símbolo “:” se lee “tal que”). Al símbolo x se le llama variable y al conjunto A se le llama dominio de la variable.*

Ejemplo 1.1.3

a) El conjunto P consiste de todos los países de Europa. Por comprensión se escribe:

$$P = \{x : x \text{ es un país de Europa}\}$$

b) Las vocales por comprensión se escriben:

$$A = \{x : x \text{ es una vocal}\}$$

c) Una forma de escribir el conjunto $B = \{2, 4, 6, 8\}$ por comprensión es:

$$B = \{x : x \text{ es un número natural par menor que } 10\}$$

1.2. Clases de conjuntos

1.2.1. Conjunto vacío

Definición 1.1. *El conjunto que carece de elementos se llama conjunto vacío o conjunto nulo. Para representar un conjunto de este tipo se usa el símbolo \emptyset , que se lee “conjunto vacío” o “conjunto nulo”.*

Ejemplo 1.2.1

El conjunto A de los números naturales mayores que 6 pero menores que 7 es igual al conjunto vacío ($A = \emptyset$).

1.2.2. Conjuntos finitos

Definición 1.2. *Un conjunto es finito si el proceso de contar sus elementos tiene fin.*

Ejemplo 1.2.2

- a) "El conjunto de los meses del año".
- b) "El conjunto de los países del planeta Tierra".

1.2.3. Conjuntos infinitos

Definición 1.3. *Un conjunto cuyo proceso de contar sus elementos nunca termina es infinito.*

Ejemplo 1.2.3

"El conjunto de los números naturales pares". $A = \{2, 4, 6, \dots\}$

1.2.4. Conjunto unitario

Definición 1.4. *Un conjunto que tiene sólo un elemento se llama conjunto unitario o conjunto elemental.*

Ejemplo 1.2.4

Si $A = \{x : x \text{ es un número par mayor que } 12 \text{ pero menor que } 16\}$. Entonces su único elemento es el número 14, luego A es un conjunto unitario.

1.2.5. Cardinalidad de un conjunto finito

Definición 1.5. *La cardinalidad de un conjunto finito es el número entero positivo que representa la cantidad de sus elementos y se denota por $\text{Card}(A)$, $|A|$ o $\#A$.*

Ejemplo 1.2.5

La cardinalidad del conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ es 7 y se denota por: $\#(A) = 7$.

Cabe precisar que la cardinalidad del conjunto vacío es cero.

1.3. Relaciones entre conjuntos

Dependiendo de los elementos de 2 o más conjuntos, se pueden determinar las relaciones entre dichos conjuntos.

1.3.1. Conjuntos iguales

Definición 1.6. *Dos conjuntos son iguales si ambos tienen los mismos elementos.*

Para representar dicha igualdad se utiliza el símbolo $=$. Para denotar que los conjuntos P y Q son iguales se utiliza la notación $P = Q$.

Observación 1.4. *Al comparar los conjuntos no importa el orden de los elementos.*

Ejemplo 1.3.1

- a) Si $P = \{x, y, z\}$ y $Q = \{z, x, y\}$ entonces $P = Q$.
- b) Si $A = \{x : 2x = 6\}$ y $B = \{3\}$ entonces $A = B$.
- c) Si $C = \{a, e, i, o, u\}$ y $D = \{x : x \text{ es una vocal}\}$ entonces $C = D$.

1.3.2. Subconjuntos

Definición 1.7. *Decimos que el conjunto A es un subconjunto de B si cada elemento de A es también un elemento de B .*

Para denotar dicha relación se utiliza la notación: $A \subseteq B$.

La notación $A \subseteq B$ se lee “ A está contenido en B ” o también “ A es subconjunto de B ”. Para indicar que A no es subconjunto de B se utiliza la notación: $A \not\subseteq B$.

Ejemplo 1.3.2

- a) Si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; entonces $A \subseteq B$, ya que los elementos 2, 4 y 6 de A pertenecen también al conjunto B .
- b) $A = \{5, 10, 15, 20\}$ y $B = \{20, 10, 5, 15\}$. En este ejemplo: $A \subset B$ y $B \subset A$; es decir, se observa que todo conjunto es subconjunto de sí mismo. De acuerdo con esto, podemos decir que $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

1.3.3. Subconjunto propio

Definición 1.8. *Un conjunto A es subconjunto propio de B si se cumplen las siguientes condiciones:*

- a) $A \subset B$ (A es subconjunto de B)
- b) $A \neq B$ (A y B no son iguales)

La segunda condición nos indica que la cardinalidad del conjunto B es mayor que la de A . Precisando: El conjunto A es un subconjunto propio de B si cada elemento de A también es un elemento de B , pero cada elemento de B no es un elemento de A . La relación anterior se denota por la notación $A \subset B$.

Cuando no es propio y se tiene la opción de que sean iguales se utiliza $A \subseteq B$.

1.3.4. Conjuntos comparables

Definición 1.9. *Se dice que dos conjuntos A y B son comparables si $A \subset B$ o $B \subset A$.*

Ejemplo 1.3.3

- a) $A = \{1, 4, 7, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ son comparables pues $A \subset B$.
- b) $M = \{a, b, c\}$ y $N = \{b, c, d, e\}$ no son comparables pues $M \not\subset N$ y $N \not\subset M$.

1.4. Operaciones con conjuntos

Una herramienta gráfica muy útil para relacionar y hacer operaciones con conjuntos son los llamados Diagramas de Venn-Euler.

1.4.1. Diagramas de Venn-Euler

Definición 1.10. *Los Diagramas de Venn-Euler consisten en figuras planas cerradas, por medio de las cuales se representan gráficamente las relaciones y operaciones entre conjuntos.*

Ejemplo 1.4.1

El subconjunto propio $A \subset B$ se describe usando el diagrama de la Figura 1.1

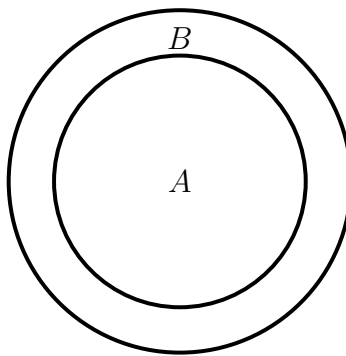


Figura 1.1: Subconjunto propio

1.4.2. Conjunto universo

Definición 1.11. *El conjunto universo tiene como elementos a todos los objetos del tema de interés.*

El conjunto universo es denotado por la letra mayúscula U .

En los Diagramas de Venn-Euler se utiliza un rectángulo para denotar a este conjunto como en la figura 1.2.

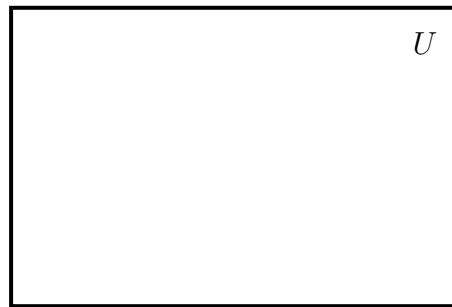


Figura 1.2: Conjunto Universo

1.4.3. Intersección de conjuntos

Definición 1.12. *La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos comunes a ambos conjuntos; es decir, aquellos elementos que están o pertenecen al conjunto A y que también pertenecen a B . Dicha operación se denota por la expresión: $A \cap B$, que se lee A intersección B .*

Ejemplo 1.4.2

Si $M = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ y $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $M \cap N = \{4, 8\}$, que son los elementos comunes a ambos conjuntos.

De acuerdo con la notación conjuntista, la intersección entre dos conjuntos A y B se define por: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.

Diagrama de Venn-Euler para representar la intersección con la figura 1.3:

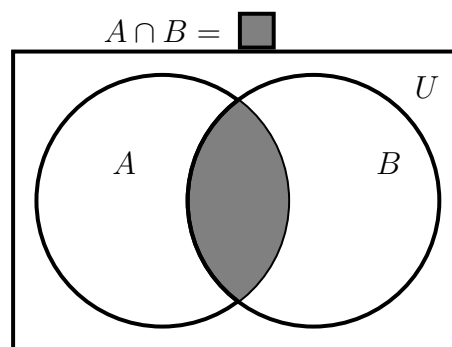


Figura 1.3: Intersección de Conjuntos

1.4.4. Conjuntos ajenos o disjuntos

Definición 1.13. Si dos conjuntos A y B no tienen elementos en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$, decimos que los conjuntos A y B son conjuntos ajenos o disjuntos entre sí.

Ejemplo 1.4.3

Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, se observa que $A \cap B = \emptyset$, por lo tanto dichos conjuntos son ajenos o disjuntos entre sí.

Los conjuntos ajenos se representan usando diagramas como sigue: utilizamos dos círculos que no se tocan; esto es, no se intersectan como en la figura 1.4

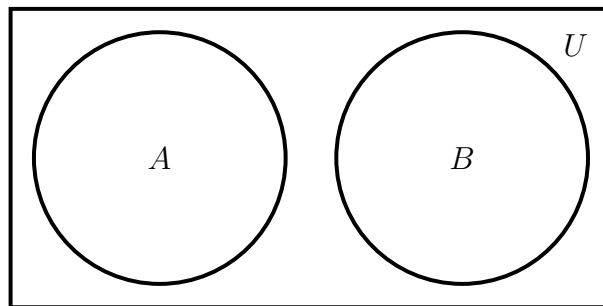


Figura 1.4: Conjuntos ajenos

Propiedades de la intersección de conjuntos

Si A , B y C son subconjuntos de un conjunto universo U , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- I. Propiedad conmutativa : $A \cap B = B \cap A$
- II. Propiedad asociativa : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- III. Propiedad de identidad : $A \cap U = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1.4.5. Unión de conjuntos

Definición 1.14. La unión de dos conjuntos A y B , denotada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B , o a ambos conjuntos.

En notación conjuntista podemos escribir: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$.

Usando diagramas obtenemos la figura 1.5

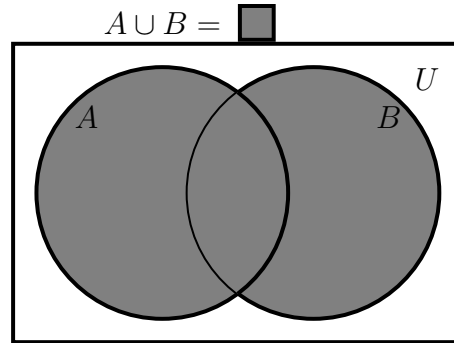


Figura 1.5: Unión de conjuntos

Ejemplo 1.4.4

- a) Dados $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$.
- b) Dados $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{0, 8, 10\}$, entonces $A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

Propiedades de la unión de conjuntos

Si A , B y C son subconjuntos de un conjunto universo U , entonces se cumplen las siguientes propiedades.

- I. Propiedad conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
- II. Propiedad asociativa : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- III. Propiedad de identidad : $A \cup \emptyset = A$ y $A \cup U = U$

1.4.6. Diferencia de conjuntos

Definición 1.15. La diferencia entre dos subconjuntos A y B del conjunto universo U , denotada por $A - B$, consiste en el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B .

En notación conjuntista la diferencia $A - B$ se representa por:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Usando diagramas la diferencia de conjuntos se ve en la figura 1.6

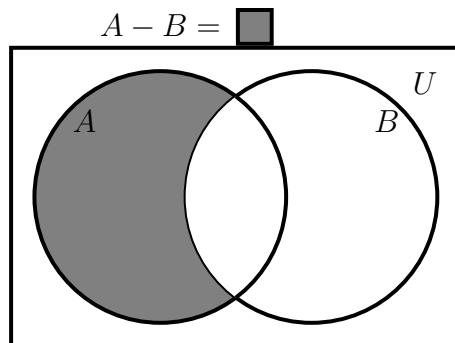


Figura 1.6: Diferencia de Conjuntos

Propiedades de la diferencia de conjuntos

- I. En comparación con la unión y la intersección, la diferencia no es asociativa ni conmutativa.
- II. Propiedad de la diferencia con el conjunto vacío $A - \emptyset = A$.
- III. Propiedad de la diferencia con el conjunto universo $A - U = \emptyset$.

Ejemplo 1.4.5

Dados $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ y $B = \{12, 15, 18, 21, 24\}$ entonces $A - B = \{3, 6, 9\}$. Los elementos 3, 6 y 9 están en A pero no en B .

1.4.7. Conjunto complemento

Definición 1.16. Dado el subconjunto A del conjunto universo U , definimos el complemento de A , denotado por A^c , como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a U pero que no pertenecen a A .

En notación conjuntista tenemos que: $A^c = \{x : x \in U \text{ y } x \notin A\}$

Propiedades del complemento de conjuntos

- I. $A^c = U - A$
- II. $U^c = \emptyset$
- III. $\emptyset^c = U$
- IV. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- V. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Usando diagramas el complemento se representa con la figura 1.7.

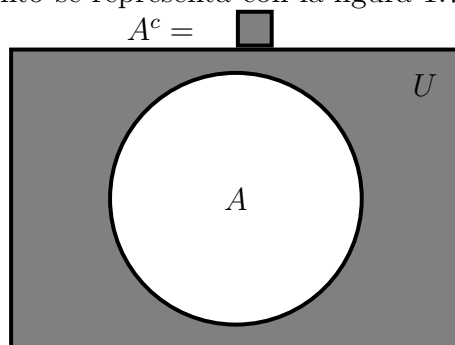


Figura 1.7: Complemento

Ejemplo 1.4.6

Dados $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{a, b, c, d\}$ entonces $A^c = \{e, f, g\}$. Pues los elementos e, f y g están en U pero no en A .

1.5. Aplicaciones

Muchos problemas que incluyen conjuntos de personas (u otros objetos) requieren de un análisis de la información conocida acerca de determinados subconjuntos para obtener cardinalidad de otros subconjuntos. Utilizamos los diagramas de Venn-Euler y las fórmulas para obtener la cardinalidad del conjunto que interesa.

Los diagramas se utilizan entendiendo que a cada región R_i le corresponde una cardinalidad. Primero identificamos cada una de las regiones cuando tenemos 2 conjuntos.

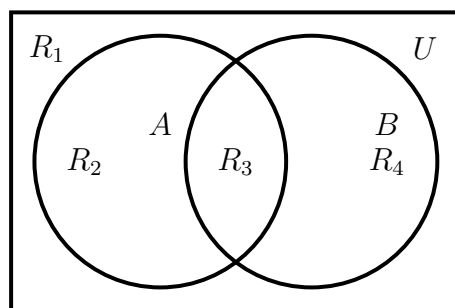


Figura 1.8: Regiones de cardinalidad

Notemos que en la figura 1.8 se cumplen las siguientes regiones de cardinalidad R_i las cuales son cantidades.

Propiedades de las regiones de cardinalidad

- I. $\#U = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$
- II. $\#(A) = R_2 + R_3$
- III. $\#(B) = R_3 + R_4$
- IV. $\#(A \cap B) = R_3$
- V. $\#(A^c) = R_1 + R_4$
- VI. $\#(A \cup B) = R_2 + R_3 + R_4$
- VII. $\#((A \cap B)^c) = R_1 + R_2 + R_4$
- VIII. $\#((A \cup B)^c) = R_1$

Teorema 1.1. Sean A y B dos conjuntos, entonces:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Notemos que la unión corresponde a las regiones R_2 , R_3 y R_4 . Si tenemos las cardinalidades correspondientes a los conjuntos $\#A = R_2 + R_3$ y $\#B = R_3 + R_4$ y las sumamos tenemos $\#(A) + \#(B) = R_2 + R_3 + R_3 + R_4$. Como podemos observar se repite la región R_3 que corresponde precisamente a la intersección $R_3 = \#(A \cap B)$, por esta razón se debe restar de la suma de las cardinalidades, lo que nos muestra que la fórmula es correcta.

Ejemplo 1.5.1

A un grupo de estudiantes de Medicina se les pregunta si están suscritos a la Gaceta médica de México (B) o a la Revista de la Facultad de Medicina de la UNAM (K), y se produce la siguiente información: 33 están suscritos a la Gaceta, 27 están suscritos a la Revista de la Facultad de Medicina y 11 están suscritos a las dos y 5 no están suscritos a ninguna de las dos revistas.

- a) ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados?
- b) ¿Cuántos están suscritos sólo a la Gaceta médica de México?
- c) ¿Cuántos están suscritos sólo a la Revista de la Facultad de Medicina?

SOLUCIÓN: Para resolver este problema primero identificamos cada uno de los conjuntos con una letra mayúscula, esto es:

- B = estudiantes que están suscritos a la Gaceta médica de México.
- K = estudiantes que están suscritos a la Revista de la Facultad de Medicina de la UNAM.

Después, leyendo la información que nos dan podemos traducirlo a las siguientes cardinalidades:

- $\#(B) = 33$
- $\#(K) = 27$
- $\#(B \cap K) = 11$

Podemos ponerlo todo usando diagrama de Venn-Euler, recordando que B y K ocupan dos regiones y que la intersección sólo una. Por lo tanto empezamos llenando la información con la intersección. Después restamos la intersección a la cardinalidad de cada uno de los conjuntos para tener, con la suma de ambas regiones, la cardinalidad correspondiente, obteniendo la figura 1.9:

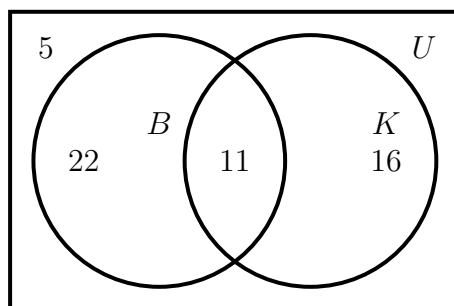


Figura 1.9: Suscripción a revistas médicas

Estamos listos para contestar las preguntas.

- a) En este caso sumamos todos los números de todas las regiones para obtener la cantidad total de estudiantes que fueron encuestados: $5 + 22 + 11 + 16 = 54$.
- b) Los que están suscritos sólo a la Gaceta Médica podemos leer que se trata de 22.
- c) Los que están suscritos sólo a la Revista de la Facultad de Medicina son 16.

Notemos que en el ejemplo 1.5.1 si sumamos simplemente todas las cardinalidades no obtenemos la respuesta correcta. Se debe analizar cada conjunto y no simplemente hacer la suma, que se puede verificar con las regiones de cardinalidad.

En el caso de tres conjuntos las regiones quedan como sigue:

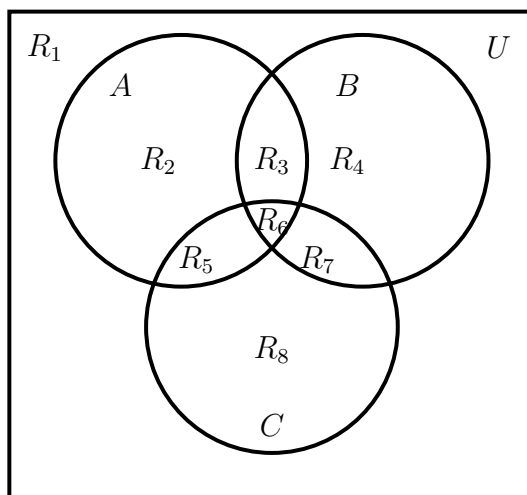


Figura 1.10: Regiones de cardinalidad de 3 conjuntos

Regiones de cardinalidad de 3 conjuntos

- I. $\#A = R_2 + R_3 + R_5 + R_6$
- II. $\#B = R_3 + R_4 + R_6 + R_7$
- III. $\#C = R_5 + R_6 + R_7 + R_8$
- IV. $\#(A \cap B) = R_3 + R_6$
- V. $\#(B \cap C) = R_6 + R_7$
- VI. $\#(A \cap C) = R_5 + R_6$
- VII. $\#(A \cap B \cap C) = R_6$
- VIII. $\#(A^c) = U - \#A = R_1 + R_4 + R_7 + R_8$

Con esta información se puede verificar la fórmula correspondiente dada por el teorema 1.2:

Teorema 1.2. Sean A , B y C conjuntos, entonces:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo 1.5.2

Una estudiante de Promoción de la Salud condujo una encuesta a 73 pacientes admitidos en un centro de cardiología en provincia. Sea:

1.5. APLICACIONES

- P = el conjunto de pacientes con presión alta.
- C = el conjunto de pacientes con nivel de colesterol alto.
- F = el conjunto de pacientes que fuman.

Donde tenemos los siguientes datos:

- $\#(P) = 47$
- $\#(C) = 46$
- $\#(F) = 52$
- $\#(P \cap F) = 33$
- $\#(P \cap C) = 31$
- $\#(P \cap C \cap F) = 21$
- $\#((P \cap F) \cup (P \cap C) \cup (F \cap C)) = 51$

- ¿Cuántos pacientes tienen nivel de colesterol alto y fuman?
- ¿Cuántos pacientes sólo fuman?
- ¿Cuántos pacientes tenían sólo presión alta?
- ¿Cuántos pacientes tenían sólo colesterol alto?

SOLUCIÓN: Para resolver utilizamos el diagrama de Venn-Euler, llenando la información en las regiones de cardinalidad R_i . En principio asignamos la cantidad correspondiente a la intersección de todos los conjuntos, esto es la región $R_6 = \#(P \cap C \cap F) = 21$.

Después tenemos que $\#(P \cap F) = 33$ compuesta por las regiones R_5 y $R_6 = 21$, por lo que $R_5 = 12$. De forma equivalente hacemos lo mismo con la intersección de los conjuntos P y C , esto es $R_3 + R_6 = 31$ y obtenemos $R_3 = 10$.

Dado que no tenemos la información de la intersección de los conjuntos C y F , utilizamos el dato de la unión $\#((P \cap F) \cup (P \cap C) \cup (F \cap C)) = 51$ por lo que $R_7 = 8$.

Finalmente del conjunto $\#(P) = R_2 + R_3 + R_5 + R_6 = 47$ obtenemos que la región $R_2 = 7$. Para las regiones que abarca C resulta $R_4 = 4$ para que la suma de regiones de $\#(C) = 46$ y con el conjunto F $R_8 = 11$. Todo junto resulta el diagrama de Venn-Euler en la figura 1.11.

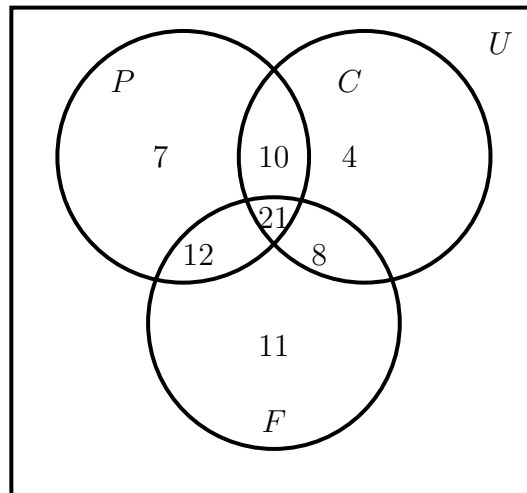


Figura 1.11: Pacientes centro de cardiología

Con esto podemos responder a cada una de las preguntas:

- Traduciendo a conjuntos tenemos que nos preguntan $\#(C \cap F) = 21 + 8 = 29$. Por lo tanto 29 pacientes tienen nivel de colesterol alto y fuman.
- 11 pacientes sólo fuman.
- 4 pacientes tienen sólo presión alta.
- 7 pacientes tienen colesterol alto.

1.6. Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Especifica cada uno de los siguientes conjuntos por extensión.

- El conjunto de los números impares entre 2 y 10.
- El conjunto de los números naturales mayores que 10 pero menores que 18.
- El conjunto de los meses que tienen 31 días.
- El conjunto de los números cuyo cuadrado es cero.

Ejercicio 1.6.2. Especifica los siguientes conjuntos en una forma constructiva (por comprensión).

- $L = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

1.6. EJERCICIOS

- c) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
- d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- e) $B = \{1, 9, 25, 49, 81, \dots\}$
- f) $E = \{2, 3, 5, 7\}$
- g) $X = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$
- h) $W = \{\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ejercicio 1.6.3. Escribir los siguientes conjuntos por: comprensión y extensión (según sea el caso).

- a) $A = \{\text{primavera, verano, otoño, invierno}\}$
- b) $B = \{x : x \text{ es una letra de la palabra salamandra } \}$
- c) $C = \text{Números enteros pares y positivos.}$
- d) $D = \text{Las letras de la palabra amigo.}$

Ejercicio 1.6.4. Escribe en notación conjuntista las siguientes afirmaciones.

- a) x es elemento de P .
- b) A no está contenido en M .
- c) A es subconjunto de B .
- d) M es subconjunto propio de N .
- e) M no es subconjunto de A .
- f) A es un conjunto vacío.
- g) P y Q son conjuntos iguales.

Ejercicio 1.6.5. Indica si los conjuntos descritos a continuación son finitos o infinitos.

- a) Las estaciones del año.
- b) $\{x : x \text{ es un número entero}\}$
- c) Los seres humanos que habitan en la Tierra.
- d) $\{1, 2, 3, \dots, 100000\}$
- e) $\{x : x \text{ es un número impar}\}$.
- f) $\{x : x \text{ es una ciudad del planeta Tierra}\}$.

- g) El conjunto de los múltiplos de 4.
 h) $\{x : x \text{ es un número racional mayor que 4 pero menor que 5}\}$

Ejercicio 1.6.6. Determina la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

- a) $A = \{x : x \text{ es un mes del año}\}$
 b) $B = \{x : x \text{ es un día de la semana}\}$
 c) $M = \{y : y \text{ es una vocal}\}$
 d) $N = \{x : x \text{ es un número entero positivo menor que 14}\}$
 e) $W = \{x : 2x = 2\}$
 f) $W = \{x : x \text{ es un número real y } x^2 = -9\}$
 g) $A = \{x : x \text{ es un número entero 15 y 16}\}$
 h) $A = \{11, 12, 13, \dots, 99\}$

Ejercicio 1.6.7. Dados los conjuntos:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$, $C = \{x : x \text{ es un número natural menor que 12}\}$, $D = \{x : x \text{ es una letra del alfabeto}\}$ $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- a) $8.6 \in C$
 b) $Z \in D$
 c) $8 \in A$
 d) $A \subset B$
 e) A y C son comparables.
 f) $A \subset C$
 g) $C \not\subset A$
 h) $E = C$
 i) $B \subset A$
 j) E y C son comparables
 k) $15 \notin E$

1.6. EJERCICIOS

Ejercicio 1.6.8. Determina cuáles de los siguientes conjuntos describen al conjunto vacío y cuáles no.

E = Conjunto de los profesores extranjeros de la UACM

F = Planteles de la UACM cuyo nombre empieza con W.

$G = \{x : x \text{ es un número positivo y negativo al mismo tiempo}\}$

Ejercicio 1.6.9. Considera los siguientes conjuntos $A = \{5, b, c, x, 3\}$, $B = \{x, c, 5\}$,

$C = \{2, 1, 3, 5, c, y, z, x, b\}$, $D = \{1, 2\}$ y $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Utilizando \in , \notin , \subset , $\not\subset$ llena según corresponda:

a) $b \in A$

b) $5 \in B$

c) $B \subset A$

d) $10 \in E$

e) $D \subset C$

f) $2 \in D$

g) $w \in C$

h) $E \subset D$

i) $C \subset E$

j) $x \in E$

Calcula la cardinalidad:

k) $\#A$

l) $\#B$

m) $\#C$

n) $\#D$

ñ) $\#E$

o) $\#\{x : x \text{ es múltiplo positivo de 5 menor que 40}\}$

Haz las siguientes intersecciones:

p) $A \cap B$

q) $D \cap B$

r) $C \cap D$

- s) $B \cap C$
 t) $A \cap (E \cap D)$
 u) $(A \cap C) \cap B$
 v) $C \cap (D \cap E)$

Ejercicio 1.6.10. Determina si el conjunto es finito o infinito

- a) $\{x : x \text{ es un ser humano vivo}\}$
 b) $\{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$
 c) $\{x : x \text{ es un río de la Tierra}\}$

Ejercicio 1.6.11. Considera los siguientes conjuntos $A = \{5, b, c, x, 3\}$, $B = \{x, c, 5\}$, $C = \{2, 1, 3, 5, c, y, z, x, b\}$, $D = \{1, 2\}$, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $U = \{a, b, c, x, y, z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Haz las siguientes operaciones:

- a) $A \cup B$
 b) $(A \cup E)^c$
 c) $(C \cap D)^c$
 d) $E \cup D$
 e) $B \cap C$
 f) $A \cup (E \cap D)$
 g) $(A \cup C) \cap B$
 h) $C \cap (D \cap E)$
 i) $A - B$
 j) $(B - C) \cup A$
 k) $C - D$
 l) $(D - A)^c$
 m) $U - A$
 n) A^c
 ñ) $U - B$

1.6. EJERCICIOS

o) B^c

p) C^c

Ejercicio 1.6.12. Dado el conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los conjuntos: $A = \{1, 4, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$, $D = \{x : x \in U \text{ y } x \text{ es par}\}$ y $E = \{x : x \in U \text{ y } x \text{ es impar}\}$, haz las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $D \cap E$

d) $B \cup C$

e) A^c

f) B^c

g) $B \cup E$

h) $A \cap U$

i) $(B \cup C)^c$

j) $(C \cap D)^c$

k) $A - C$

l) $A - D$

m) $A \cup (B \cap C)$

n) $(A \cap B) \cap C$

ñ) $(A \cup D) \cap E$

Ejercicio 1.6.13. Haz el diagrama correspondiente considerando que son conjuntos no comparables pero tampoco ajenos:

a) $B - A$

b) $(A \cap B)^c$

c) $(P \cup N) \cap M$

d) $(A \cup B)^c$

e) $A \cap (B \cap C)$

Ejercicio 1.6.14. Haz el diagrama de Venn de las siguientes operaciones entre conjuntos:

- a) $(M \cap N)^c$
- b) $M^c \cup N^c$
- c) Verifica que se obtiene el mismo resultado de los incisos anteriores:
- d) $P^c \cap Q^c$
- e) $(P \cup Q)^c$
- f) Verifica que se obtiene el mismo resultado de los incisos anteriores:
- g) $(M - N) \cap P$
- h) $(P \cap Q) \cup M$
- i) $(P \cup M) \cap (Q \cup M)$
- j) Verifica que se obtiene el mismo resultado de los incisos anteriores:
- k) $(N \cup M) \cap P$
- l) $(N \cap P) \cup (M \cap P)$
- m) Verifica que se obtiene el mismo resultado de los incisos anteriores:

Ejercicio 1.6.15. 65 niños de tercero de una escuela presentan caries, 95 encías inflamadas y 56 presentan tanto caries como encías inflamadas. 20 Ninguno de los dos.

- a) ¿Cuántos niños forman parte del tercer grado de la escuela?
- b) ¿Cuántos niños tienen sólo caries?
- c) ¿Cuántos niños sólo presentan encías inflamadas?

Ejercicio 1.6.16. En una escuela de idiomas trabajan 67 personas, de las cuales, 47 hablan el idioma inglés, 35 el francés y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas que trabajan en dicho instituto no hablan ni el inglés ni el francés?

Ejercicio 1.6.17. En un centro de salud en el pueblo de Emiliano Zapata, Tlaxcala, el doctor nuevo recibe la siguiente información: en el centro de salud se atiende a una población infantil de 85 niños. 50 tienen bajo peso, 35 tienen baja estatura y 20 tienen baja estatura y bajo peso.

- a) Determina cuántos niños no tienen peso bajo, ni estatura baja.
- b) ¿Cuántos niños sólo presentan estatura baja?

1.6. EJERCICIOS

Ejercicio 1.6.18. En un centro de cuidados geriátricos se realizaron pruebas de glucosa, triglicéridos y colesterol a los residentes. 57 tienen glucosa alta, 80 presentan colesterol alto y 75 presentan triglicéridos altos. 35 tienen glucosa alta y colesterol alto, 40 tienen glucosa alta y triglicéridos altos, 60 tienen colesterol y triglicéridos altos, 31 tienen glucosa, colesterol y triglicéridos altos. 15 no tienen altos ni la glucosa, ni el colesterol ni los triglicéridos.

- ¿Cuántos residentes tienen sólo glucosa alta?
- ¿Cuántos residentes tienen colesterol y triglicéridos altos pero no glucosa alta?
- ¿Cuántos residentes viven en el centro?

Ejercicio 1.6.19. De un grupo se conoce que a 19 les gustan las matemáticas, a 17 las artes, a 11 la historia; a 2 les gustan las tres; 12 prefieren matemáticas y artes; 7 historia y matemáticas; 5 artes e historia y a 5 alumnos ninguna de ellas, hallar:

- El número de alumnos que hay en el grupo.
- El número de alumnos a los cuales solamente les gustan las matemáticas y artes.
- El número de alumnos a los cuales les gustan solamente las artes e historia.
- El número de alumnos a los cuales únicamente les gusta las matemáticas.
- El número de alumnos a los cuales solamente les gusta la asignatura de artes.
- El número de alumnos a los cuales solamente les gusta la asignatura de historia.
- El número de alumnos a los cuales solamente les gusta matemáticas e historia.

Ejercicio 1.6.20. En un club que consta de 150 socios, hay:

- 20 socios que practican béisbol, fútbol y atletismo
- 25 que practican béisbol y atletismo
- 30 que practican fútbol y atletismo
- 40 que practican béisbol y fútbol
- 100 que practican fútbol
- 60 que practican béisbol
- 40 que practican atletismo

Hallar:

- El diagrama de Venn correspondiente

- b) El número de socios que no practican ningún deporte
- c) El número de socios que sólo practican beisbol
- d) El número de socios que sólo practican futbol

Ejercicio 1.6.21. Se aplicó una encuesta a 1200 personas sobre sus pasatiempos favoritos. Los resultados indican que: a 720 les gusta el cine, 620 escuchan música, 700 hacen ejercicio, 420 hacen ejercicio y les gusta el cine, 314 escuchan música y les gusta el cine, 220 hacen ejercicio y escuchan música y sólo 17 realizan las tres actividades.

- a) Haz el diagrama de Venn:
- b) ¿A cuántas personas no les gusta el cine, no escuchan música y no hacen ejercicio?
- c) ¿Cuántas personas no escuchan música, pero sí van al cine y hacen ejercicio?

Ejercicio 1.6.22. Una universidad tiene 1050 alumnos de primer ingreso. De ellos, 860 cursan matemáticas, 664 física, 388 redacción, 480 física y matemáticas, 270 redacción y matemáticas, 210 física y redacción, y todos llevan al menos una de las tres asignaturas.

- a) ¿Cuántos alumnos cursan física y matemáticas pero no redacción?
- b) ¿Cuántos alumnos cursan matemáticas y no llevan física ni redacción?

Números

El desarrollo de la ciencia médica a la par que el de los números es característica propia del avance de la humanidad. Los hombres de ciencia de la antigüedad dominaban varias áreas del conocimiento de esa época. Eran, a la vez médicos, astrónomos y matemáticos.

En este capítulo se revisarán los números así como sus operaciones básicas con el objetivo de resolver problemas de aplicación.

2.1. Números naturales

El sistema de numeración que usamos es el llamado indoarábigo, que usa nueve símbolos para representar los números del 1 al 9. El cero no era contemplado en este sistema, y para indicarlo se usaba un espacio vacío.

Observación 2.1. *Los números naturales son los que se usan para contar. Se denotan con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$*

Ejemplo 2.1.1

El botiquín básico está compuesto de:

- a) 1 termómetro
- b) 1 tijeras de punta redonda
- c) 1 cortauñas
- d) 5 gasas estériles
- e) 5 gasas de gel para quemaduras
- f) 1 paquete de algodón
- g) 3 vendas

- h) 10 curitas
- i) 1 botella de alcohol 96°
- j) 1 botella de agua oxigenada
- k) 6 pastillas de analgésicos
- l) 3 pastillas antidiarréicos
- m) 5 comprimidos antiinflamatorios

Observación 2.2. *Algunos autores también consideran al cero un número natural. En este texto no se considera como número natural.*

Al hacer las operaciones que conocemos que son suma, resta, multiplicación y división notemos lo siguiente:

- Siempre que hacemos la suma de dos números naturales, lo que obtenemos es un número natural. Por ejemplo $2 + 5 = 7$.
- Cuando hacemos la resta de dos números naturales, no siempre obtenemos un número natural. Por ejemplo $2 - 5 = -3$ donde -3 ya no es un número natural.
- Cuando hacemos la multiplicación de dos números naturales, siempre obtenemos un número natural. Por ejemplo $2 \cdot 5 = 2 \times 5 = 10$.
- Con la división pasa lo mismo que con la resta, si hacemos la división de dos números naturales, no se obtiene siempre un número natural. Por ejemplo,

$$\frac{5}{2} = 2.5.$$

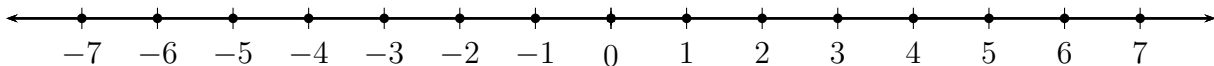
Dados los problemas que presentan los números naturales, con la operación de substracción aparecen en escena los números conocidos como enteros.

2.2. Números enteros

Definición 2.1. *Los números enteros son los números naturales incluyendo al cero y a todos los números con signo negativo. Los números enteros se denotan con la letra \mathbb{Z} y se escribe el conjunto como:*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Los números enteros se representan en forma gráfica:



Observación 2.3.

- Se utiliza para denotar a los enteros positivos cualquiera de las siguientes notaciones:
 \mathbb{N} o \mathbb{Z}^+ .
- Para denotar a los números negativos se utiliza la notación:
 \mathbb{Z}^- .

El 0 no está incluido en \mathbb{Z}^+

Los números negativos denotan cantidades que no se tienen o son contrarias a otras conocidas:

Ejemplo 2.2.1

- Temperaturas bajo cero. En la República Mexicana se tiene el registro en La Rosilla, Durango de la temperatura más baja hasta ahora registrada como -34°C .
- Deudas, las cuales normalmente en contabilidad se denotan con números rojos. Debo 15 pesos, en términos matemáticos queda como -15 .

2.2.1. Multiplicación de números enteros

Cuando se multiplican números negativos y positivos debemos utilizar la ley de los signos.

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (-) \cdot (+) &= (-) \\ (+) \cdot (-) &= (-) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \end{aligned}$$

Observación 2.4. Para recordar las leyes de los signos: signos iguales da “más”, signos distintos da “menos”.

Ejemplo 2.2.2

- $(2) \cdot (-3) = -6$
- $(5) \cdot (7) = 35$
- $(-11) \cdot (3) = 33$
- $(-4) \cdot (-6) = 24$

2.2.2. Suma y resta de números enteros

Cuando se hacen sumas o restas con números enteros debemos evitar confundirnos con la operación multiplicación. Aprender a leer las operaciones antes de hacerlas ayuda a no cometer errores.

Ejemplo 2.2.3

- $5 - 7$ se lee “cinco menos 7”. Podemos decir que tengo 5 pesos pero debo 7. Lo cual nos da por resultado que aún debo 2 pesos. Por lo tanto “ $5-7=-2$.”
- $-3 + (-6)$ se lee “menos tres más menos seis”. Esto es debo 3 pesos y añado una deuda de 6 pesos, lo cual implica que mi deuda aumenta por lo tanto debo 9 pesos. En consecuencia $-3 + (-6) = -9$.
- $12 - 5$ se lee “doce menos 5”. Tengo 12 pesos y debo 5 pesos, por lo tanto quedarán 7. Entonces $12 - 5 = 7$.

Uso de paréntesis

Se usan paréntesis para combinar sumas, restas y multiplicaciones de los números enteros. Los paréntesis tienen distintos usos y no siempre indican multiplicación.

- I. $(5)(3)$ en este caso los paréntesis indican multiplicación.
- II. $f(2)$, $\cos(30^\circ)$ en estos casos indica evaluación, como lo veremos en los capítulos 10 y 12.
- III. $(a + 2)$ en este caso indican agrupación, dando mayor importancia o prioridad a lo que está dentro del paréntesis.

Ejemplo 2.2.4

$2(3 + 5)$ en este caso podemos leer que indica tanto multiplicación como agrupación, recordemos que la agrupación tiene prioridad, por esta razón hacemos primero la suma $2(3 + 5) = 2(8) = 16$.

$7[3(-5 + 2) + 2]$ nuevamente la prioridad son los paréntesis, por esta razón debemos empezar con la suma, después la multiplicación por 3, después la suma y por último multiplicar por 7.

$$7[3(-5 + 2) + 2] = 7[3(-3) + 2] = 7[-9 + 2] = 7[-7] = -49.$$

Observación 2.5. *Notemos que las operaciones con números enteros, a diferencia de la lectura normal de izquierda a derecha, se hace de acuerdo con los paréntesis involucrados; esto es, se realizan primero las operaciones donde los paréntesis indican agrupación.*

2.2.3. Divisibilidad

Definición 2.2. *Un número es divisible por otro si el cociente al hacer la división es un número entero.*

Existen distintas pruebas de divisibilidad. Una prueba de divisibilidad es una forma rápida para saber si un número es dividido exactamente por otro sin hacer la división.

Pruebas de divisibilidad

- I. Un número es divisible por 2 si el último dígito es par, esto es, 0, 2, 4, 6, y 8.
- II. Un número es divisible por 3 si la suma de los dígitos es divisible por 3.
- III. Un número es divisible por 4 si el número formado por los últimos dos dígitos es divisible por 4.
- IV. Un número es divisible por 5 si el último dígito es 0 o 5.
- V. Un número es divisible por 6 si el número es divisible al mismo tiempo por 2 y 3.
- VI. Un número es divisible por 8 si el número formado por los últimos tres dígitos es divisible por 8.
- VII. Un número es divisible por 9 si la suma de los dígitos es divisible por 9.
- VIII. Un número es divisible por 10 si el último dígito es 0.

Observación 2.6. *Para el número 7 no tenemos un patrón de prueba de divisibilidad.*

Ejemplo 2.2.5

Determina cuáles números dividen a 216 exactamente:

- a) El 2 divide exactamente al 216 pues termina en 6 y éste es un número par.
- b) El 3 divide exactamente al 216 pues al sumar sus dígitos $2 + 1 + 6 = 9$ obtenemos 9, el cual es divisible por 3.
- c) El 4 divide exactamente al 216 pues podemos dividir de forma exacta al 16 entre 4.
- d) El 5 no divide exactamente al 216 pues no termina ni en 0 ni en 5.
- e) Como el 2 y el 3 dividen exactamente a 216 también lo hace el 6.
- f) El número 8 divide exactamente al 216.
- g) También el 9 divide exactamente al 216, dado que la suma es 9.
- h) El 10 no divide exactamente a 216 pues no termina en 0.

2.2.4. El cero y la operación división

Recordemos que la división está relacionado con la acción de repartir, cortar, distribuir exactamente.

- Si tengo 100 dulces para repartir entre 100 niños, haciendo la división de 100 entre 100, $\frac{100}{100} = 1$ obtenemos que le toca 1 dulce a cada niño.
- Si son 10 niños le tocan 10 dulces a cada uno, que es resultado de dividir 100 entre 10, esto es $\frac{100}{10} = 10$.
- Si son 5 niños, dividimos 100 entre 5: $\frac{100}{5} = 20$, por lo tanto, le tocan 20 dulces a cada uno.
- Claramente si es solamente un niño le tocan 100 dulces. $\frac{100}{1} = 100$
- Pero qué pasa si tengo 100 dulces y no hay niños a quien repartir, entonces no tiene sentido entregar los dulces, o repartirlos, por lo tanto la división entre 0 no tiene sentido.
- Si no tengo dulces para repartir, no importa la cantidad de niños, a cada uno le tocara exactamente nada. Esto es, si repartimos 0 entre cualquier número de niños, 1, 10, 20, o 100 el resultado es el mismo: 0.

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{10} = \frac{0}{20} = \frac{0}{100} = 0$$

Observación 2.7. *Si probamos a hacer la división entre cero en la calculadora da como resultado Ma ERROR*

2.3. Aplicaciones de los números enteros

Para entender y resolver los problemas, el profesional de la salud debe entender primero lo que se está preguntando y leer cada una de las ideas correspondientes, entendiendo que hay distintas palabras relacionadas con cada una de las operaciones con los números enteros.

Operación	Algunas palabras relacionadas
Suma (+)	Adición, total, añadir, sumar, agregar, adicionar, aumentar, incrementar, más, aumento, etcétera.
Resta (−)	Sustracción, diferencia, deducir, quitar, decrementar, menos, decremento, etcétera.
Multiplicación (×)	Doble (significa multiplicar por 2), triple (significa multiplicar por 3), cuádruple (significa multiplicar por 4), producto, 5 veces más (significa multiplicar por 5), etcétera.
División (÷)	Dividir, cortar, repartir, compartir, mitad (significa dividir entre 2), tercio (significa dividir entre 3), etcétera.
Igual (=)	Lo mismo que, idéntico, equivalente, exacto, resultado, etcétera.

Ejemplo 2.3.1

En un centro de salud de la Ciudad de México hay 25 voluntarios para el programa de pruebas de glucosa. Si cada voluntario toma 14 tiras para el glucómetro por semana, ¿cuántas tiras se distribuyen en una semana en total?

SOLUCIÓN: Para resolver el problema entendemos que nos preguntan en total cuántas tiras se distribuyen, en total son 25 veces 14, pues cada voluntario toma 14 tiras. Por lo tanto se trata de una multiplicación: $14 \times 25 = 350$. El total se distribuyen 350 tiras.

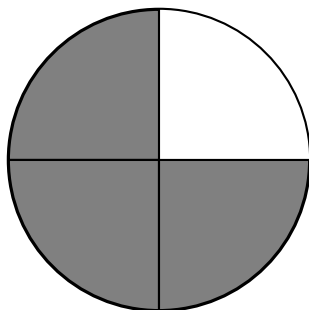
Ejemplo 2.3.2

La mantequilla clarificada a los 2 minutos incrementa su temperatura a 52° ; si su temperatura inicial era de 10° , ¿cuál es la temperatura a los 2 minutos?

SOLUCIÓN: En este caso incrementa significa sumar por lo cual sumamos $10^\circ + 52^\circ = 62^\circ$. Por lo tanto la temperatura a los 2 minutos es de 62° .

2.4. Números racionales

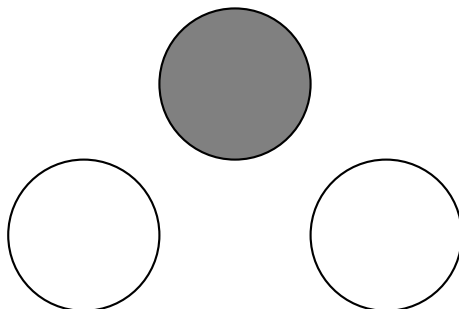
Hemos visto que no siempre la división de dos números enteros nos da como resultado un número entero. El ejemplo clásico es cuando queremos partir un pastel circular en 4 y se van a utilizar 3 piezas, esto se aprecia en la siguiente figura:



La fracción que representa a la figura es $\frac{3}{4}$

Definición 2.3. *Una fracción es un número que describe a la cantidad que representa una parte del grupo comparado con el grupo entero.*

Ejemplo 2.4.1



En este caso tenemos que el grupo entero son 3 y sólo tenemos uno sombreado, por lo tanto, $\frac{1}{3}$ es la cantidad que representa a la fracción.

Definición 2.4. *El numerador es el número de partes que son usadas y éste es el número que se escribe encima de la barra.*

Definición 2.5. *El denominador es el número de partes iguales necesarias para hacer un objeto entero, y éste se escribe debajo de la barra.*

Observación 2.8. El numerador es una cantidad, el denominador es la información que nos indica con qué estamos trabajando, es decir, la nombra o la denota.

Definición 2.6. Los números racionales son los cocientes de todos los números enteros entre los números enteros distintos de cero, y se denotan por $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \in \mathbb{Z} \right\}$

Para leer una fracción leemos el numerador como la cantidad que es y el denominador de acuerdo con la siguiente tabla:

$\frac{1}{2}$	un medio
$\frac{2}{3}$	dos tercios
$\frac{1}{4}$	un cuarto
$\frac{2}{5}$	dos quintos
$\frac{1}{6}$	un sexto
$\frac{2}{7}$	dos séptimos
$\frac{1}{8}$	un octavo
$\frac{2}{9}$	dos novenos
$\frac{1}{10}$	un décimo
$\frac{2}{11}$	dos onceavos
$\frac{5}{12}$	cinco doceavos

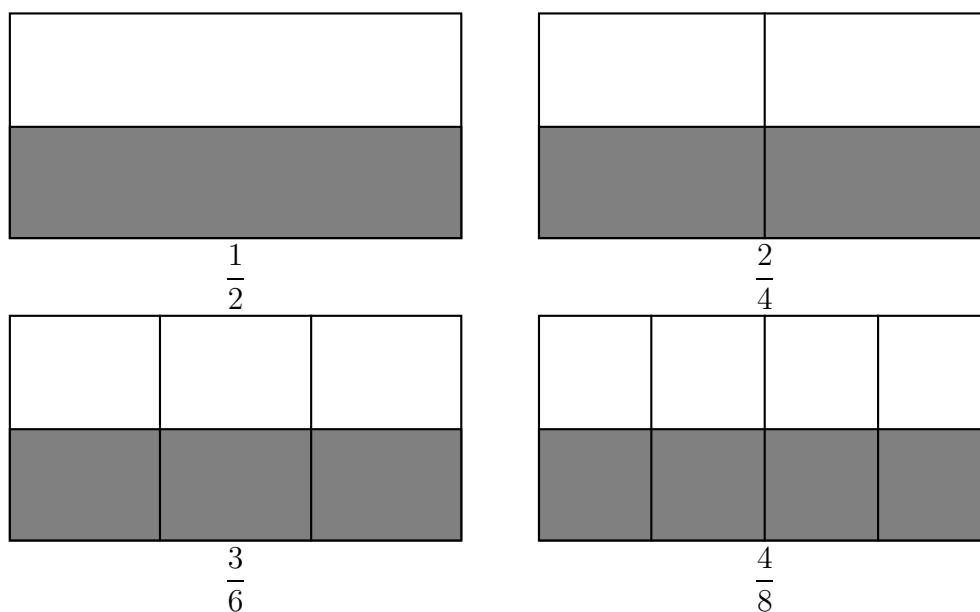
A partir el 11 lo que se agrega es un “avo”, 13 treceavo, 14 catorceavo, etcétera.

Observación 2.9. Los números enteros son racionales. Una de las formas de representarlos es $\frac{a}{1}$. Por ejemplo: $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2}$.

2.4.1. Fracciones equivalentes

Definición 2.7. *Las fracciones equivalentes son dos o más fracciones que representan a la misma cantidad.*

Ejemplo 2.4.2



Podemos ver que cada figura corresponde a la fracción descrita, por lo tanto, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, y $\frac{4}{8}$ son fracciones equivalentes.

Para obtener fracciones equivalentes multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el mismo valor.

Ejemplo 2.4.3

Obtener 3 fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$

$$\frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{7}{21}$$

$$\frac{1 \times 11}{3 \times 11} = \frac{11}{33}$$

Por lo tanto $\frac{5}{15}$, $\frac{7}{21}$, y $\frac{11}{33}$ son fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$.

Para determinar si dos fracciones son equivalentes hacemos el producto cruzado de cada una de las fracciones, esto es, numerador de una fracción por el denominador de la otra.

Ejemplo 2.4.4

Determinar si $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ son equivalentes.

$$\frac{2}{5} \quad \swarrow \quad \frac{4}{10} \qquad \frac{2}{5} \quad \nwarrow \quad \frac{4}{10}$$

Multiplicamos 2 por 10 cuyo resultado es 20.

Multiplicamos 5 por 4 cuyo resultado es 20.

Como obtenemos el mismo resultado, por lo tanto $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

Ejemplo 2.4.5

Determinar si $\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{19}$ son equivalentes.

$$\frac{3}{7} \quad \swarrow \quad \frac{6}{19} \qquad \frac{3}{7} \quad \nwarrow \quad \frac{6}{19}$$

$$3 \times 19 = 57$$

$$6 \times 7 = 42$$

Como $57 \neq 42$, por lo tanto $\frac{3}{7} \neq \frac{6}{19}$.

Observación 2.10. Otra forma para determinar si dos fracciones son equivalentes es haciendo la división que representan usando la calculadora, si son equivalentes se obtiene el mismo resultado.

2.4.2. Simplificación de fracciones

Para simplificar fracciones equivalentes, procedemos a dividir tanto el numerador como el denominador entre el mismo número. Recordamos las propiedades de divisibilidad de la página 45.

Ejemplo 2.4.6

a) $\frac{24}{16}$,

tanto el numerador como el denominador son divisibles por 4. Entonces

$$\frac{24 \div 4}{16 \div 4} = \frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2}.$$

b) $\frac{55}{20}$,

en este caso son divisibles por 5. Entonces

$$\frac{55 \div 5}{20 \div 5} = \frac{11}{4}$$

c) $\frac{90}{210}$,

cada uno es divisible por 10, entonces

$$\frac{90 \div 10}{210 \div 10} = \frac{9}{21},$$

aún podemos dividir entre 3. Esto es:

$$\frac{9 \div 3}{21 \div 3} = \frac{3}{7}$$

A partir de este momento en todos los ejercicios se va a hacer simplificación de fracciones.

2.4.3. Fracciones propias e impropias

Definición 2.8. *Una fracción cuyo denominador es mayor al numerador se llama fracción propia.*

Ejemplo 2.4.7

Ejemplos de fracciones propias son:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{12}{17}.$$

Definición 2.9. *Una fracción cuyo numerador es mayor que el denominador se llama fracción impropia.*

Ejemplo 2.4.8

Ejemplos de fracciones impropias son:

$$\frac{11}{3}, \frac{15}{2}, \frac{13}{7}, \frac{16}{5}.$$

Definición 2.10. *Una fracción mixta combina enteros con fracciones propias.*

Ejemplo 2.4.9

Ejemplos de fracciones mixtas son:

- $3\frac{1}{2}$
esta fracción se lee tres enteros un medio,
- $11\frac{2}{15}$
la cual se lee once enteros dos quinceavos.

Las fracciones impropias se pueden convertir en fracciones mixtas y viceversa.

Para convertir una fracción impropia en una mixta hacemos la división correspondiente: el cociente es el entero y el residuo es el numerador.

Ejemplo 2.4.10

La fracción impropia $\frac{7}{5}$

$$\text{denominador} \longrightarrow 5 \overline{) \begin{array}{l} 1 \\ 7 \\ 2 \end{array}} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{cociente} \\ \longleftarrow \text{numerador} \\ \longleftarrow \text{residuo} \end{array}$$

Por lo tanto $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$.

Para convertir una fracción mixta en una impropia lo que hacemos es multiplicar el denominador por el entero y le sumamos el numerador, y el resultado es el nuevo numerador.

Observación 2.11. *El denominador de una fracción impropia y de su correspondiente mixta es el mismo.*

Ejemplo 2.4.11

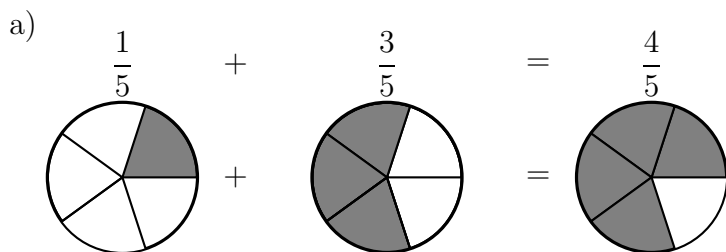
La fracción mixta $3\frac{5}{8}$ queda de la siguiente forma $8 \times 3 + 5 = 29$, por lo tanto, la fracción impropia correspondiente es $\frac{29}{8}$.

Observación 2.12.

- Las fracciones propias son menores que 1.
- Las fracciones impropias son mayores que 1.

2.4.4. Suma de fracciones

Si tienen el mismo denominador la suma de fracciones se hace simplemente sumando los numeradores.



b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Ejemplo 2.4.12

Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, sustituimos una o las dos fracciones por una que sea equivalente y que tenga los mismos denominadores.

Ejemplo 2.4.13

a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12}$

$$b) \frac{13}{16} + \frac{5}{8} = \frac{13}{16} + \frac{5 \times 2}{8 \times 2} = \frac{13}{16} + \frac{10}{16} = \frac{23}{16}$$

$$c) \frac{3}{5} + 7 = \frac{3}{5} + \frac{7}{1} = \frac{3 + 35}{5} = \frac{38}{5}$$

En resumen, la suma de dos fracciones cualquiera $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se hace mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

2.4.5. Resta de fracciones

Para hacer la resta hacemos algo similar a la suma al sustituir la fracción por otra equivalente, para que ambas fracciones tengan el mismo denominador. Obteniendo la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Ejemplo 2.4.14

$$a) \frac{1}{5} - \frac{4}{5}$$

como tienen el mismo denominador hacemos la resta de numeradores:

$$\frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1 - 4}{5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

$$b) \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{3 \times 8 - 4 \times 5}{4 \times 8} = \frac{24 - 20}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$c) \frac{3}{5} - \frac{8}{3} = \frac{9 - 40}{15} = \frac{-31}{15} = -\frac{31}{15}$$

$$d) 3 - \frac{7}{5} = \frac{3}{1} - \frac{7}{5} = \frac{15 - 7}{5} = \frac{8}{5}$$

2.4.6. Multiplicación de fracciones

La multiplicación de fracciones se hace de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 2.4.15

$$a) \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

$$b) \left(-\frac{7}{6}\right) \left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{14}{30} = -\frac{7}{15}$$

$$c) 5 \times \frac{9}{10},$$

para hacer esta multiplicación primero escribimos el 5 como fracción:

$$\frac{5}{1} \times \frac{9}{10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}$$

2.4.7. División de fracciones

Para hacer la división de dos fracciones podemos hacer la multiplicación de la primera por la segunda escrita de forma invertida esto es:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Otra técnica utilizada para hacer la división es la llamada “regla del sandwich”: multiplicación de extremos arriba y multiplicación de medios abajo

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 2.4.16

$$a) \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$b) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{(3)(16)}{(4)(7)} = \frac{48}{28} = \frac{12}{7}$$

$$c) \frac{5}{6} \div 4 = \frac{5}{6} \div \frac{4}{1} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

2.4.8. Decimales

Los decimales son otra forma de representar a los números racionales.

Conversión de fracciones a decimales

Para hacer la conversión de fracciones a decimales simplemente hacemos la división que representan. Cuando la división termina en un número finito de pasos obtenemos un decimal finito, cuando la división nunca termina obtenemos un decimal infinito.

Ejemplo 2.4.17

a) $\frac{1}{2}$ hacemos la división

$$\begin{array}{r} 0.5 \\ 2 \overline{)1.0} \\ \underline{0} \end{array}$$

Por lo tanto tenemos que la representación decimal de $\frac{1}{2}$ es 0.5

b) $\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{r} 0.8333 \\ 6 \overline{)5.0} \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \end{array}$$

En la división podemos observar que siempre se obtendrá como residuo 2 y en el cociente 3. La forma de escribir este resultado es

$$\frac{5}{6} = 0.8333 \dots = 0.8\bar{3}$$

la línea significa que ese dígito se repite de forma infinita.

Observación 2.13.

- *Sólo podemos sustituir una fracción por el decimal correspondiente cuando éste es finito y se escriben todos sus dígitos. Por ejemplo:*

2.4. NÚMEROS RACIONALES

$$\frac{1}{4} = 0.25, \frac{1}{16} = 0.0625.$$

- *Cuando se trata de una fracción cuya representación decimal es infinita no podemos sustituirla. En su caso será una aproximación*

$$\frac{1}{3} \approx 0.3333.$$

Conversión de decimales a fracciones

Para convertir un decimal a una fracción escribimos como numerador el número sin el punto decimal y como denominador el 1 con tantos ceros como posiciones decimales se tengan.

Ejemplo 2.4.18

a) 0.75

la fracción correspondiente es $\frac{75}{100}$

simplificando obtenemos

$$\frac{3}{4}.$$

b) 0.01

la fracción correspondiente es

$$\frac{1}{100}.$$

c) 0.105

la fracción correspondiente es

$$\frac{105}{1000}$$

simplificando obtenemos

$$\frac{21}{200}.$$

Si lo que se tiene es un decimal infinito el proceso para convertirlo en fracción es el siguiente:

1. Se multiplica el número por 10, 100, 1000, etcétera hasta que el número obtenido tenga los mismos decimales que el original.
2. Se resta el número original al multiplicado para desaparecer la parte decimal infinita. El resultado es el numerador de la fracción.
3. Si se multiplicó por 10, el denominador será el 9. Si se multiplico por 100 el denominador será 99, si se multiplicó por 1000 el denominador será 999 etcétera.
4. Si el numerador es aún un decimal, se convierte en fracción y se hace la división correspondiente.

Ejemplo 2.4.19

- a) $0.\overline{63}$, el decimal con el que estamos trabajando es $0.6363636363\dots$ como podemos observar sólo se necesita multiplicar por 100 para tener el mismo decimal infinito.

Al multiplicar por 100 obtenemos $63.6363636363\dots$, procedemos a hacer la resta:

$$\begin{array}{r} 63.\overline{63} \\ - 0.\overline{63} \\ \hline 63 \end{array}$$

El numerador es 63 y como multiplicamos por 100 el denominador es 99. Por lo tanto la fracción es

$$\frac{63}{99},$$

simplificamos y obtenemos

$$\frac{7}{11}.$$

- b) $0.1\overline{2}$ este número corresponde a $0.12222222\dots$ observamos que sólo se necesita multiplicar por 10, obteniendo

$$1.22222222\dots,$$

hacemos la resta

$$\begin{array}{r}
 \cancel{1.22222222 \dots} \\
 - \cancel{0.12222222 \dots} \\
 \hline
 1.1
 \end{array}$$

Por lo tanto el numerador es 1.1 y el denominador es 9, $\frac{1.1}{9}$ como el numerador es aún un decimal lo convertimos en fracción:

$$\begin{array}{r}
 \frac{11}{10} \\
 \frac{1}{9} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

haciendo la división obtenemos como resultado $\frac{11}{90}$.

Observación 2.14. *Notemos que cuando se hace la conversión del decimal infinito $0.99999 \dots$ el resultado es 1.*

2.4.9. Operaciones con decimales

Cuando se hace la suma de decimales lo que hacemos es alinear el punto decimal y proceder a sumar como lo hacemos habitualmente. Lo mismo hacemos cuando se trata de una resta.

En el caso de la multiplicación, contamos el número de cifras decimales y este es el número de lugares que contaremos de derecha a izquierda para poner el decimal.

En el caso de la división tenemos los siguientes casos:

- I. Cuando tanto el divisor como el dividendo tienen punto decimal, recorreremos tantos lugares como el divisor tenga y si faltan lugares en el dividendo agregamos cero.
- II. Cuando sólo el dividendo tiene punto decimal simplemente ponemos el punto decimal en el mismo lugar en el cociente.

Ejemplo 2.4.20

a) $3.56 + 2.89$ se escribe

$$\begin{array}{r}
 3.56 \\
 + 2.89 \\
 \hline
 6.45
 \end{array}$$

b) $4.07 + 5.8$ se escribe

$$\begin{array}{r} 4.07 \\ + 5.8 \\ \hline 9.87 \end{array}$$

c) $23.1 - 5.89$

$$\begin{array}{r} 23.10 \\ - 5.89 \\ \hline 17.21 \end{array}$$

d) $49.270 - 39.382$

$$\begin{array}{r} 49.270 \\ - 39.382 \\ \hline 9.888 \end{array}$$

e) 25.8×0.7

$$\begin{array}{r} 25.8 \quad \longleftarrow \text{un dígito} \\ \times 0.7 \quad \longleftarrow \text{un dígito} \\ \hline 18.06 \quad \longleftarrow \text{dos dígitos} \end{array}$$

f) 0.78×100

$$\begin{array}{r} 0.78 \\ \times 100 \\ \hline 00 \\ 00 \\ \hline 78 \\ \hline 78.00 \end{array}$$

2.4. NÚMEROS RACIONALES

g) $218.4 \div 12$

$$\begin{array}{r} 18.2 \\ 12 \overline{)218.4} \\ \underline{98} \\ 24 \\ \underline{0} \end{array}$$

h) $114 \div 3.8$ La división queda $3.8 \overline{)114}$; como el divisor tiene un punto decimal reescribimos la división recorriendo un lugar el punto decimal en el dividendo: $38 \overline{)1140}$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 38 \overline{)1140} \\ \underline{00} \\ 00 \end{array}$$

Observación 2.15.

- Cuando se multiplica por 10 el punto decimal se recorre un lugar a la derecha.
- Cuando se multiplica por 100 el punto decimal se recorre dos lugares a la derecha.
- Cuando se divide entre 10 el punto decimal se recorre un lugar a la izquierda.
- Cuando se divide entre 100 el punto decimal se recorre dos lugares a la izquierda.

2.4.10. Aplicaciones de números racionales y decimales

Leemos cuidadosamente cada enunciado y entendemos qué se nos están preguntando.

Ejemplo 2.4.21

Un frasco contiene $\frac{3}{4}$ onzas de un medicamento. Si el paciente toma $\frac{3}{16}$ onzas del frasco, ¿cuántas onzas quedan en el frasco?

SOLUCIÓN: Para solucionar este problema, entendemos qué nos preguntan: cuánto queda en el frasco. Para eso hacemos la resta de lo que tenemos originalmente menos lo que se usó, por lo tanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{12}{16} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}.$$

La solución es:

en el frasco quedan $\frac{9}{16}$ onzas del medicamento.

Ejemplo 2.4.22

Un paciente recibe $\frac{1}{4}$ de una tableta que contiene $\frac{3}{4}$ de miligramo de un medicamento. ¿Qué cantidad en miligramos recibió el paciente?

SOLUCIÓN: En este caso podemos leer que recibió un cuarto de tableta por lo tanto la tableta se dividió entre 4, la operación adecuada es la división

$$\frac{3}{4} \div 4 = \frac{3}{4} \div \frac{4}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

El paciente recibió $\frac{3}{16}$ de miligramo del medicamento.

Observación 2.16. Cuando en un problema se solicita obtener cualquier fracción de una cantidad, la operación que se hace es una multiplicación, como podemos observar en el ejemplo anterior. Por ejemplo

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{5}{4}$$

se calcula con la multiplicación

$$\frac{2}{3} \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

2.5. Números irracionales

Definición 2.11. Los números irracionales son aquellos que no se pueden escribir como un cociente $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros distintos de cero. Para denotar a los números irracionales se puede usar \mathbb{I} o, como son el complemento de los racionales, \mathbb{Q}^c .

2.5.1. Números irracionales famosos

Uno de los números irracionales más conocidos es π : este es el número que es resultado de dividir la circunferencia entre el diámetro de cualquier círculo.

$$\pi \approx 3.14159265358979323846 \dots$$

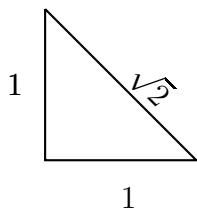
Características interesantes de π :

2.5. NÚMEROS IRRACIONALES

- Ha sido aproximado por todas las culturas antiguas
- Los egipcios lo aproximaron con la fracción $\frac{256}{81} \approx 3.1605$
- Los babilonios con $\frac{25}{8} = 3.125$
- Los griegos usaron: $3\frac{1}{7} \approx 3.14286$
- Los chinos $\frac{157}{50} = 3.14$
- Hasta el 2010 se han encontrado 5000000000000 dígitos de π
- Una forma de memorizar los 20 primeros dígitos es con este poema, sólo hay que contar las letras de cada palabra:

Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros

Otro número que es famoso es $\sqrt{2}$, que es lo que mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados miden uno:



Características del número irracional $\sqrt{2}$:

- Es conocido como la constante pitagórica
- Los primeros 20 dígitos de $\sqrt{2}$ son: 1.414213562373095048801...
- La fracción $\frac{99}{70} \approx 1.414285$ la aproxima con 4 decimales
- $\cos(45^\circ) = \text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

El número e también es irracional, se le conoce como número de Euler o constante de Napier.
Características del número e :

- $e \approx 2.71828182\dots$

■

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \frac{6}{6 + \frac{7}{7 + \frac{8}{\dots}}}}}}}$$

- Es utilizado en las funciones de crecimiento de población

2.5.2. Construcción de números irracionales

Podemos construir fácilmente números irracionales escribiendo los dígitos decimales de forma que no se conviertan en una repetición.

Ejemplo 2.5.1

Son ejemplos de números irracionales:

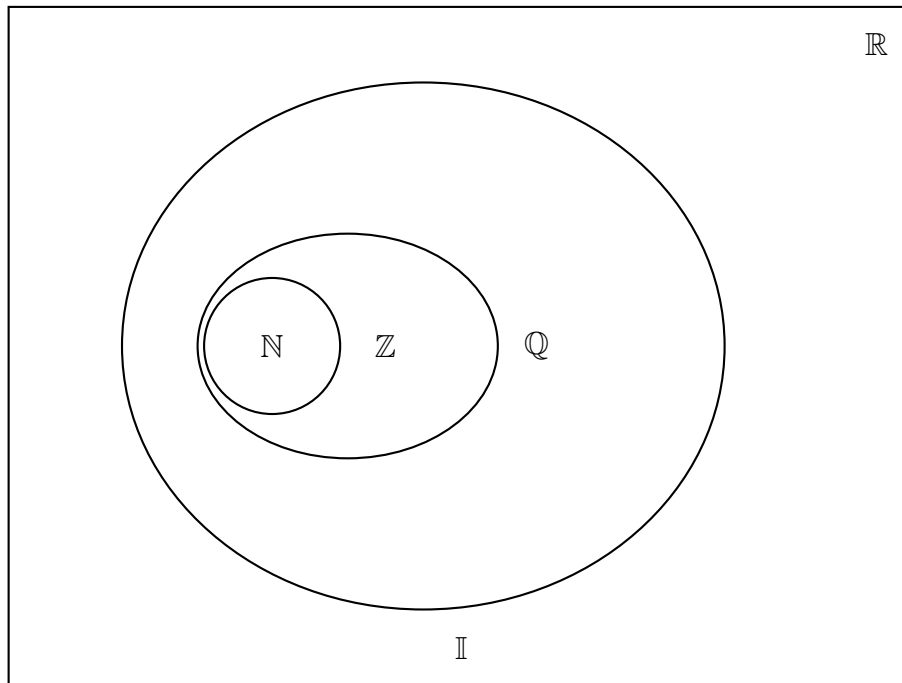
- 1.01001000100001000001...
- 0.1234567891011121314151617...
- 0.101101110111011110111110...

2.6. Números reales

Definición 2.12. *Los números reales son la unión de los números irracionales y los números racionales. Se denotan por $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$*

Las relaciones de los conjuntos de números son:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



2.7. Ejercicios

Ejercicio 2.7.1. Haz las siguientes multiplicaciones:

- a) $(-5) \cdot (-2)$
- b) $(4) \cdot (11)$
- c) $(8) \cdot (5) \cdot (-1)$
- d) $(-9) \cdot (7)$

Ejercicio 2.7.2. Haz las siguientes operaciones:

- a) $-5 - 6$
- b) $-2 + 5$
- c) $-7 + 12$
- d) $5 - 9$
- e) $-2 - 1 - 9$

Ejercicio 2.7.3. Haz las siguientes operaciones con enteros:

- a) $5 - (-10)$

- b) $-7 + (-9)$
 c) $7 - 4(3 + 2)$
 d) $2 + [(-2 + 8) + (5 - 11)]$
 e) $-(8 + 4 - 10) + (2 - 12)$
 f) $1 + 3[(8 - 9) + (10 - 8)]$
 g) $45 - 5[6 + 4 - (3 - 1)]$

Ejercicio 2.7.4. Agrupa los siguientes números de acuerdo a su divisibilidad:

1764	11130	296048
3278	49000	446075
65	6775	786312
365	82722	954560

- a) números que son divididos exactamente por 2
 b) números que son divididos exactamente por 3
 c) números que son divididos exactamente por 5
 d) números que son divididos exactamente por 10

Ejercicio 2.7.5. Entre las 7 de la mañana y el mediodía la temperatura subió 13°C . Si a las 7 de la mañana la temperatura era de -5°C , ¿qué temperatura indicaba el termómetro al mediodía?

Ejercicio 2.7.6. ¿Qué distancia hay entre el suelo del pozo de una mina que está situado a 518 metros de profundidad y el tejado del centro de salud que está a una altura de 17 metros?

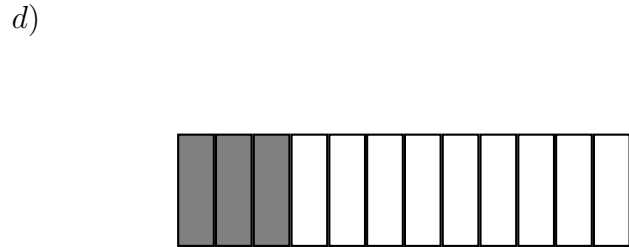
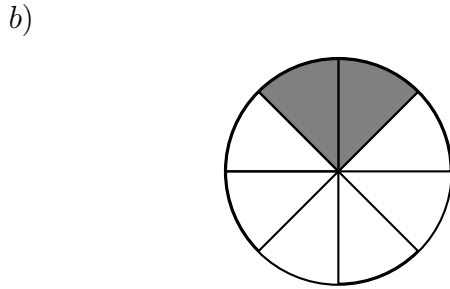
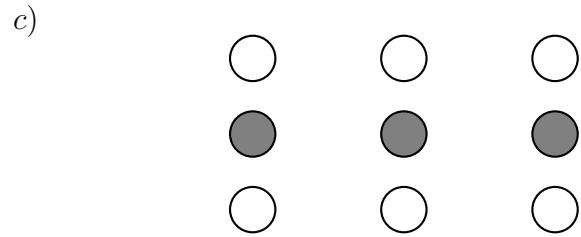
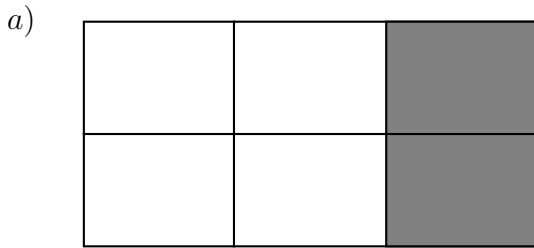
Ejercicio 2.7.7. Un globo se eleva desde una ciudad a nivel del mar. Al principio del vuelo se eleva 2000 metros. Después desciende 1200 metros, más tarde vuelve a subir 700 metros. En el momento de aterrizar baja 600 metros. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra la ciudad donde aterriza?

Ejercicio 2.7.8. En un videojuego, se da 1 punto por cortar una manzana, 2 puntos por cortar un plátano, se quitan 10 puntos si se corta una bomba. ¿Cuántos puntos tuvo al final un jugador si cortó 25 plátanos, 13 manzanas y una bomba?

Ejercicio 2.7.9. Un interno está buscando al doctor Rodríguez en el hospital. Él bajó al sótano -3 pues le dijeron que estaba en el estacionamiento, al no encontrarlo subió al quinto piso y ahí lo encontró. Si la búsqueda del interno empezó en el segundo piso, ¿cuántos pisos recorrió en total?

Ejercicio 2.7.10. En cada figura determina un par de fracciones equivalentes:

2.7. EJERCICIOS



Ejercicio 2.7.11. Determina 4 fracciones equivalentes para cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{1}{7}$

e) $\frac{9}{10}$

f) $\frac{3}{4}$

g) $\frac{7}{8}$

h) $\frac{3}{11}$

Ejercicio 2.7.12. Determina cuáles de las siguientes parejas de fracciones son equivalentes y cuáles no lo son:

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{15}{25}$

b) $\frac{11}{16}$ y $\frac{22}{31}$

c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$

d) $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$

e) $\frac{10}{12}$ y $\frac{20}{24}$

Ejercicio 2.7.13. Convertir las siguientes fracciones impropias a mixtas:

a) $\frac{18}{7}$

b) $\frac{22}{3}$

c) $\frac{13}{4}$

d) $\frac{11}{2}$

e) $\frac{45}{11}$

Ejercicio 2.7.14. Convertir las siguientes fracciones mixtas a fracciones impropias:

a) $2\frac{7}{11}$

b) $4\frac{1}{2}$

c) $10\frac{2}{3}$

d) $5\frac{4}{7}$

e) $2\frac{5}{9}$

Ejercicio 2.7.15. Haz las siguientes sumas:

a) $\frac{9}{5} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{6}{13} + \frac{19}{13}$

2.7. EJERCICIOS

c) $\frac{10}{11} + \frac{7}{11}$

d) $\frac{7}{5} + \frac{1}{2}$

e) $\frac{8}{9} + \frac{2}{3}$

f) $\frac{9}{11} + \frac{4}{5}$

g) $\frac{11}{4} + \frac{1}{16}$

Ejercicio 2.7.16. Haz las siguientes restas:

a) $\frac{5}{4} - \frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3} - \frac{5}{8}$

c) $\frac{3}{7} - \frac{8}{14}$

d) $\frac{3}{5} - \frac{1}{25}$

e) $\frac{8}{9} - \frac{1}{27}$

f) $\frac{7}{2} - \frac{2}{11}$

Ejercicio 2.7.17. Hacer las siguientes multiplicaciones:

a) $\left(\frac{8}{9}\right) \left(\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(\frac{11}{4}\right) \left(-\frac{5}{3}\right)$

c) $\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right)$

d) $\left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{1}{4}\right)$

e) $\left(\frac{1}{16}\right) \left(\frac{4}{5}\right)$

f) $\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

g) $7\left(\frac{3}{4}\right)$

Ejercicio 2.7.18. Hacer las siguientes divisiones:

a) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{6}$

b) $\frac{7}{24} \div \frac{3}{12}$

c) $\frac{5}{16} \div 10$

d) $30 \div \frac{5}{6}$

e) $\frac{5}{8} \div \frac{10}{2}$

f) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$

Ejercicio 2.7.19. Escribe los decimales correspondientes a las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{7}{11}$

e) $\frac{1}{9}$

Ejercicio 2.7.20. Convierte los siguientes decimales a la fracción más simple correspondiente:

a) 0.24

b) 0.2

c) 0.3333

d) 0.305

2.7. EJERCICIOS

e) 0.0625

Ejercicio 2.7.21. Escribe los siguientes decimales infinitos a la fracción más simple correspondiente:

a) $0.\overline{21}$

b) $0.\overline{4}$

c) $0.7\overline{2}$

d) $0.\overline{36}$

e) $1.1\overline{52}$

Ejercicio 2.7.22. Haz las siguientes operaciones:

a) $50.7 + 194.85$

b) $3.02 + 12$

c) $25 + 1.8 + 0.5$

d) $100 + 0.5 + 90.4$

e) $24 - 7.98$

f) $1.01 - 0.0009$

g) $76.2 - 0.07$

h) $83.02 - 24.61$

i) $16.9 - 8.11$

j) 45.8×7

k) 4.82×0.3

l) 0.97×0.45

m) 76×0.04

n) 6.2×3.5

ñ) $122.5 \div 4.5$

o) $1.6 \div 0.12$

p) $0.18 \div 0.02$

q) $28.7 \div 4$

r) $327 \div 5.2$

Ejercicio 2.7.23. ¿Cuánto medicamento se obtiene en total si se mezclan $\frac{3}{4}$ de onza del medicamento *A* con $\frac{1}{2}$ onza del medicamento *B*?

Ejercicio 2.7.24. Un frasco contiene $\frac{3}{4}$ gramos de cierto medicamento. Si un paciente toma $\frac{1}{2}$ gramo, ¿cuántos gramos quedan en el frasco?

Ejercicio 2.7.25. Un paciente debe recibir $2\frac{1}{2}$ litros de una solución en forma intravenosa. Si ya se le administraron $1\frac{1}{8}$ litros, ¿cuánta solución falta por darle?

Ejercicio 2.7.26. ¿Cuántas tabletas de $\frac{1}{2}$ miligramo se pueden hacer si se dispone de 20 miligramos?

Ejercicio 2.7.27. ¿Cuál es el volumen total de un medicamento si se mezclan $\frac{3}{4}$ mililitro del medicamento *A* con $1\frac{1}{3}$ mililitros del medicamento *B*?

Ejercicio 2.7.28. ¿Cuántos miligramos se necesitan para producir 12 pastillas de $\frac{3}{4}$ miligramo cada una?

Ejercicio 2.7.29. David tomó $\frac{1}{3}$ de onza de su medicamento y 2 horas después él toma $\frac{4}{5}$ de onza. ¿Cuánto medicamento consumió David hasta el momento?

Ejercicio 2.7.30. Un archivo médico indica que $\frac{1}{3}$ de los expedientes son para individuos con huesos rotos. Si en total son 14391 expedientes. ¿Cuántos expedientes son de personas con huesos rotos?

Ejercicio 2.7.31. Una enfermera llena el gabinete de medicamento con 14 botellas de dextrosa. Cada botella se llenó con $16\frac{2}{3}$ onzas de solución. ¿Cuántas onzas de dextrosa hay en el gabinete?

Ejercicio 2.7.32. El administrador de un centro de salud determina que el personal debe ser reducido aproximadamente $\frac{1}{12}$. ¿Cuántos puestos deben ser eliminados si trabajan 144 personas en dicho centro?

Ejercicio 2.7.33. Un frasco contiene 75 tabletas. Cada tableta tiene 0.25 gramos de cierto medicamento. ¿Cuántos gramos del medicamento contiene el frasco?

Ejercicio 2.7.34. Un bebé toma 3.5 onzas 6 veces durante el día. ¿Cuánta leche toma en total?

Ejercicio 2.7.35. Encontrar el peso total de dos contenedores, si el contenedor *A* pesa 3.45 kg y contenedor *B* pesa 7.86 kg.

Ejercicio 2.7.36. La temperatura normal del cuerpo es aproximadamente 36.2° C. ¿Cuál es la temperatura si está 1.3° C arriba de lo normal?

Ejercicio 2.7.37. Encuentra el costo total de dos medicamentos si uno cuesta \$36.75 y el otro cuesta \$15.25.

2.7. EJERCICIOS

Ejercicio 2.7.38. Un dispensador de gel antibacterial contiene 10.23 litros. ¿Cuántos frascos de 0.33 litros se pueden llenar con el gel?

Ejercicio 2.7.39. La dosis diaria de un medicamento es de 15 miligramos. Si un frasco contiene 3000 miligramos, ¿cuántos días durará el frasco de medicamento?

Ejercicio 2.7.40. El costo de un cuarto de hospital es 6740.58 pesos por día, ¿cuánto cuesta una estancia de 5 días en el hospital?

Ejercicio 2.7.41. Las cuentas de electricidad del consultorio del doctor Gómez son: 252.80, 321.42 y 281.70. ¿Cuál fue el costo total de electricidad de estos tres bimestres?

Razones, proporciones y porcentajes

A mayor cantidad de personas enfermas se necesitan más recursos médicos, ya sean medicamentos, hospitales o personal. En cambio, a mayor prevención, disminuye la cantidad de personas enfermas. Esto es un claro ejemplo de cómo el profesional de la salud debe relacionar cantidades utilizando razones y proporciones. Este es el tema del presente capítulo cuya meta es resolver problemas especialmente relacionados a dosis, tema que se tratará en el capítulo 4.

3.1. Razones

Definición 3.1. Una razón es una comparación de dos números a y b . Notación: la comparación de los dos números se puede escribir como fracción $\frac{a}{b}$ o escribiendo dos puntos entre ambos números $a : b$.

Ejemplo 3.1.1

- a) $\frac{4}{5}$ o $4 : 5$ es la comparación de 4 a 5.
- b) $\frac{9}{2}$ o $9 : 2$ es la comparación de 9 a 2
- c) Hay 19 empleados en la unidad de urgencias y 35 trabajan en la unidad de terapia intensiva de un hospital.

I. La razón que compara a los empleados en las dos unidades se puede expresar como:

$$\frac{19}{35} \text{ o } 19 : 35.$$

II. La razón de los emplados en la unidad de urgencias con respecto al total es:

$$\frac{19}{54}$$

3.2. APLICACIONES

III. La razón de la cantidad de empleados de la unidad de terapia intensiva con respecto a las dos unidades es:

$$39 : 54$$

Las razones como fracciones se pueden simplificar a su mínima expresión.

Ejemplo 3.1.2

Simplificar las siguientes razones a su mínima expresión.

a) 80 mililitros a 40 mililitros:

$$\frac{80}{40} = \frac{2}{1} \text{ o } 2 : 1.$$

b) \$1500 pesos a \$300 pesos:

$$\frac{1500}{300} = \frac{5}{1} \text{ o } 5 : 1$$

c) 14 centímetros a 8 centímetros:

$$\frac{14}{8} = \frac{7}{4} \text{ o } 7 : 4$$

d) 18 onzas a 81 onzas:

$$\frac{18}{81} = \frac{2}{9} \text{ o } 2 : 9.$$

3.2. Aplicaciones

Ejemplo 3.2.1

Expresar la razón del latido normal del corazón: 70 latidos por minuto, a la razón durante ejercicio vigoroso: 130 latidos por minuto.

$$\frac{70 \frac{\text{latidos}}{\text{min}}}{130 \frac{\text{latidos}}{\text{min}}} = \frac{7}{13} \text{ o } 7 : 13$$

Ejemplo 3.2.2

En la obra de Leonardo DaVinci encontramos que en el hombre de Vitruvio, el pintor establece una serie de razones en el cuerpo humano.

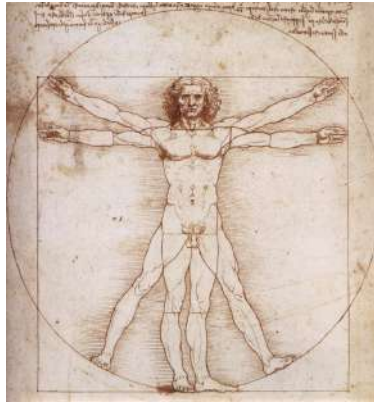


Figura 3.1: El hombre de Vitruvio de Leonardo DaVinci

De acuerdo con las notas del propio Leonardo DaVinci, en el Hombre de Vitruvio se dan algunas razones como las siguientes:

- Una palma equivale al ancho de cuatro dedos: 1 palma : 4 dedos.
- Un pie equivale al ancho de cuatro palmas: 1 pie: 4 palmas.
- Un antebrazo equivale al ancho de seis palmas: 1 antebrazo: 6 palmas.
- La altura de la cabeza hasta la barbilla es un octavo de la altura de un hombre. 1 : 8

Ejemplo 3.2.3

Si a 2 onzas de una solución de ácido bórico se añaden 598 onzas de agua, ¿cuál es la razón de las onzas de ácido bórico a las onzas de la solución?

SOLUCIÓN: En este caso primero tenemos que calcular cuál es la solución total, esto es 598 onzas + 2 onzas = 600 onzas. Entonces la razón correspondiente es:

$$\frac{2 \text{ onzas}}{600 \text{ onzas}} = \frac{2}{600} = \frac{1}{300},$$

por lo tanto 1 : 300.

3.3. Proporciones

Definición 3.2. *Una proporción es una ecuación o igualdad entre dos razones.*

Notación: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a : b = c : d$

Ejemplo 3.3.1

Una proporción se puede escribir con palabras de la siguiente manera:

5 es a 8 lo que N es a 16.

Usando notación tenemos

$$\frac{5}{8} = \frac{N}{16} \text{ o } 5 : 8 = N : 16$$

Para resolver proporciones usamos el mismo procedimiento para comprobar si dos fracciones son equivalentes, esto es, hacemos el producto cruzado.

Ejemplo 3.3.2

a) Encuentra el valor de N , el cual cumple la proporción

$$\frac{8}{N} = \frac{2}{3}$$

Hacemos el producto cruzado y obtenemos

$$3 \cdot 8 = 2 \cdot N$$

cuyo resultado es

$$24 = 2N.$$

Para terminar sólo dividimos entre 2

$$N = \frac{24}{2} = 12$$

Por lo tanto $N = 12$.

b) Resolver la proporción

$$2 : 5 = C : 20$$

se reescribe como:

$$\frac{2}{5} = \frac{C}{20}.$$

Hacemos el producto cruzado obteniendo

$$2 \cdot 20 = 5 \cdot C, \text{ después: } 40 = 5C$$

y finalmente

$$C = \frac{40}{5} = 8,$$

por lo tanto, $C = 8$.

3.4. Aplicaciones

Ejemplo 3.4.1

De acuerdo con el ejemplo 3.2.2 si la altura de un hombre son cuatro antebrazos, determina a cuántas palmas equivale.

SOLUCIÓN: Las razones involucradas son:

1 antebrazo es a 6 palmas y 4 antebrazos es a P palmas.

Escribimos la siguiente proporción

$$1 : 6 = 4 : P$$

observamos que se deben respetar las unidades si tenemos “antebrazos : palmas” debe ser lo mismo para la segunda razón. Resolvemos

$$\frac{1}{6} = \frac{4}{P},$$

$$P = (4)(6) = 24,$$

por lo tanto 4 antebrazos corresponden a 24 palmas.

3.4. APLICACIONES

Otras proporciones de interés para profesionales de la salud son las mezclas llamadas soluciones.

Definición 3.3. *Una solución es el líquido en el cual la sustancia o sustancias son disueltas. La sustancia es usualmente agua.*

Definición 3.4. *El soluto es la sustancia que se disuelve en un líquido. El soluto es el medicamento.*

La razón entre el soluto y la solución es llamada la concentración de la solución.

$$\frac{\text{cantidad de medicamento}}{\text{cantidad de solución}} = \text{concentración de la solución}$$

Una solución 1 : 5 significa que 1 parte del soluto (medicamento) es a 5 partes de solución. Esta es la mínima expresión pues la razón 2 : 10 es equivalente.

Ejemplo 3.4.2

Hay medicamentos en muchas formas, una es en cristales. Hay 3 partes de ácido bórico en 12 partes de solución.

- Expresa la concentración de la solución.
- ¿Cuántas partes de ácido bórico se necesitan para tener la misma concentración si tenemos 20 partes de solución?

SOLUCIÓN: Resolvemos de la siguiente forma:

- La concentración de la solución es

$$3 : 12 = \frac{3}{12}$$

simplificando tenemos que la concentración es $\frac{1}{4}$.

- Utilizamos la proporción

$$1 : 4 = S : 20$$

obtenemos

$$\frac{1}{4} = \frac{S}{20}$$

entonces $20 = 4S$ y tenemos finalmente

$$S = \frac{20}{4} = 5,$$

por lo tanto se necesitan 5 partes de ácido bórico para tener la misma concentración.

Definición 3.5. *Dos magnitudes X y Y son directamente proporcionales si se cumple que cuando X aumenta también aumenta Y , y cuando X disminuye también lo hace Y . La razón $k = \frac{Y}{X}$ es llamada la razón de proporcionalidad.*

Cantidades directamente proporcionales en ciencias de la salud son, en nutrición y preparación de alimentos: si se tiene una receta, la cantidad de personas es directamente proporcional a cada uno de los ingredientes, también dos ingredientes en una receta son directamente proporcionales.

Ejemplo 3.4.3

Para hacer un pastel de queso se requieren 750 gramos de queso crema y 200 gramos de azúcar. Si se quiere hacer un pastel más grande con 1000 gramos de queso crema, determina cuánta azúcar se necesita.

SOLUCIÓN: Procedemos $750 : 200$ lo que $1000 : A$.

$$\frac{750}{200} = \frac{1000}{A}$$

haciendo el producto cruzado

$$A(750) = (200)(1000)$$

donde obtenemos

$$A = \frac{(200)(1000)}{750} = 266\frac{2}{3}.$$

Se requieren aproximadamente $266\frac{2}{3}$ gramos de azúcar.

Definición 3.6. *Dos magnitudes X y Y son inversamente proporcionales si se cumple que cuando X aumenta Y disminuye o cuando X disminuye Y aumenta. En este caso la razón de proporcionalidad se calcula con $\frac{Y}{\frac{1}{X}} = YX = k$.*

Observación 3.1. $\frac{1}{X}$ es llamado el recíproco de X

La ley de Boyle es un ejemplo de proporcionalidad inversa. La ley de Boyle es expresada con la siguiente ecuación

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

donde

3.4. APLICACIONES

- P_1 =presión inicial del gas
- V_1 =volumen inicial del gas
- P_2 =presión actual del gas
- V_2 =volumen actual del gas

De acuerdo con la ley de Boyle, cuando la presión aumenta, el volumen disminuye.

Ejemplo 3.4.4

300 mililitros de gas están bajo una presión de 4 atmósferas. ¿Cuál será el volumen del gas a 3 atmósferas?

SOLUCIÓN: Leyendo los datos obtenemos que

$P_1 = 4$, $V_1 = 300$ y $P_2 = 3$

y sustituimos en la fórmula

$$(4)(300) = (3)V_2$$

de donde

$$V_2 = \frac{(4)(300)}{3} = 400.$$

Por lo tanto el volumen sería de 400 mililitros.

Ejemplo 3.4.5

Si 8 enfermeras hacen el trabajo de vacunación en una población en 9 días, ¿en cuánto tiempo lo hacen 24 enfermeras?

SOLUCIÓN: A mayor número de enfermeras el trabajo se hará en un menor tiempo, por está razón ambas cantidades son inversamente proporcionales. Escribimos la proporción en términos del recíproco, esto es:

$$8 : \frac{1}{9} = 24 : \frac{1}{X},$$

esto es,

$$\frac{8}{1} = \frac{24}{X}$$

haciendo las divisiones respectivas obtenemos

$$(8)(9) = 24(X)$$

entonces

$$X = \frac{(8)(9)}{24} = 3.$$

Por lo tanto 24 enfermeras harán el trabajo en 3 días.

3.5. Porcentajes

Definición 3.7. *Un porcentaje es una razón que compara una cantidad con un ciento. Notación $x : 100 = \frac{x}{100} = x\%$.*

Razón	Fracción	Decimal	Porcentaje
1 : 100	$\frac{1}{100}$	0.01	1 %
25 : 100	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	0.25	25 %
6 : 100	$\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$	0.06	6 %
10 : 100	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	0.10	10 %

Observación 3.2. *El símbolo % se escribe siempre a la derecha de la cantidad. Se lee por ciento y significa sobre 100.*

Ejemplo 3.5.1

Escribir las siguientes razones, decimales y fracciones en términos de porcentajes:

- a) 3 : 20. Empezamos escribiendo la fracción correspondiente $\frac{3}{20}$ y tenemos dos formas de encontrar el porcentaje correspondiente, una es escribiendo una fracción equivalente de tal forma que se tenga 100 como denominador:

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \times 5}{20 \times 5} = \frac{15}{100} = 15\%$$

3.5. PORCENTAJES

La otra forma es haciendo la división y obteniendo el decimal correspondiente; para obtener el porcentaje correspondiente recorremos el punto decimal dos lugares a la derecha y ése es el porcentaje correspondiente

$$\frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$$

b) 0.3 reescribiendo tenemos $0.30 = 30\%$

$$c) \frac{36}{200} = \frac{36 \div 2}{200 \div 2} = \frac{18}{100} = 18\%$$

$$d) \frac{2}{7} \approx 0.2857 \approx 28.57\%$$

$$2.75 = 275\%$$

$\frac{1}{2}$ es a 100

se reescribe como

$$\frac{\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{200} = \frac{1 \div 2}{200 \div 2} = \frac{0.5}{100} = 0.5\%$$

3.5.1. Convertir porcentajes a fracciones y decimales

El porcentaje significa una cantidad sobre 100. Para escribir la fracción equivalente escribimos el porcentaje como numerador y 100 como denominador. Esto es $x\% = \frac{x}{100}$.

Para escribir el decimal correspondiente, recorremos el punto decimal 2 lugares a la izquierda o hacemos la división de la fracción indicada.

Ejemplo 3.5.2

a) 35%

empezamos reescribiendo

$$35\% = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$$

Para reescribir como decimal simplemente recorremos el punto decimal 2 lugares a la izquierda, esto es,

$$35\% = 0.35.$$

b) 146 %

como fracción es

$$\frac{146}{100} = 1\frac{46}{100} = 1\frac{23}{50}.$$

El decimal es

$$146\% = 1.46$$

c) $66\frac{2}{3}\%$.

Como fracción

$$66\frac{2}{3}\% = \frac{66\frac{2}{3}}{100} = \frac{\frac{200}{3}}{100} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}.$$

El decimal correspondiente no es exacto y sólo se puede aproximar, esto es

$$\frac{2}{3} \approx 0.6666.$$

3.6. Aplicaciones

La concentración de una solución es usualmente expresada en términos de porcentaje. El proceso para escribir la concentración en términos de porcentaje es el mismo que usamos para convertir una razón en una fracción.

Cuando tenemos las mismas unidades simplemente hacemos el cambio de razón o fracción. En el caso de solutos sólidos, la concentración de la solución es un porcentaje por peso (masa). Esto es el porcentaje de la masa de solución total con la que contribuyó el soluto. En este texto para facilitar los cálculos se considera que 1 gramo = 1 mililitro.

$$\frac{\text{masa del soluto}}{\text{volumen de la solución}} \times 100.$$

Una solución con una concentración al 4% de ácido bórico (por peso) será 4 partes de ácido bórico y 100 partes de solución.

Ejemplo 3.6.1

Escribir la concentración en términos de porcentaje:

3.6. APLICACIONES

a) 7 partes de cloruro de sodio y 50 partes de solución. La razón correspondiente es

$$7 : 50,$$

escrita como fracción es

$$\frac{7}{50}$$

y lo reescribimos como porcentaje

$$\frac{7 \times 2}{50 \times 2} = \frac{14}{100} = 14\%.$$

La concentración de cloruro de sodio es del 14 %.

b) 30 mililitros de alcohol etílico puro y 75 mililitros de solución.

$$\frac{30}{75} = 0.4 = 0.40 = 40\%.$$

La concentración del alcohol etílico es del 40 %.

c) 50 gramos de glucosa en 1 litro de solución. Primero tenemos que hacer la conversión y considerar 50 gramos como 50 mililitros y 1 litro como 1000 mililitros. Esto es

$$50 : 1000 = \frac{50}{1000} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

La concentración de glucosa es del 5 %.

Otras aplicaciones de porcentajes son:

- I. Calcular el porcentaje de una cantidad.
- II. Calcular qué porcentaje representa una cantidad comparada con otra.
- III. Calcular cuál cantidad es el total, si conocemos una parte y el porcentaje que representa.

Ejemplo 3.6.2

Calcular el 80 % de 40.

SOLUCIÓN: Para calcular este porcentaje escribimos primero las razones correspondientes: el número que buscamos es a 40 lo que 80% es a 100%, esto es

$$N : 40 = 80 : 100.$$

Reescribimos esta expresión como fracciones

$$\frac{N}{40} = \frac{80}{100},$$

resolviendo

$$N = \frac{40 \times 80}{100} = 32.$$

El 80% de 40 es 32.

Observación 3.3. Cuando calculamos un porcentaje, una forma sencilla de hacerlo es multiplicando por el decimal equivalente al porcentaje que se desea calcular. Por ejemplo $80\% = 0.8$, hacemos el producto $0.8(40) = 32$.

Ejemplo 3.6.3

¿Qué porcentaje de 300 es 180?

SOLUCIÓN: Nuevamente escribimos las razones correspondientes

$$300 : 180 = 100\% : x\%.$$

Reescribimos como fracciones

$$\frac{300}{180} = \frac{100\%}{x\%},$$

hacemos el producto cruzado:

$$300x = 180(100),$$

finalmente,

$$x = \frac{180(100)}{300} = 60.$$

Por lo tanto 180 es el 60% de 300.

3.6. APLICACIONES

Observación 3.4. Para calcular qué porcentaje es una cantidad de otra, una forma directa de hacerlo es dividir el número entre el total que se busca y traducir el decimal correspondiente al porcentaje. Por ejemplo: $\frac{180}{300} = 0.6 = 60\%$.

Ejemplo 3.6.4

¿75 es el 15 % de qué número?

SOLUCIÓN: Escribimos la proporción correspondiente

$$75 : N = 15\% : 100\%.$$

Reescribimos como fracciones y obtenemos

$$\frac{75}{N} = \frac{15}{100}$$

$$100(75) = N(15),$$

entonces tenemos:

$$N = \frac{75(100)}{15} = 500.$$

Por lo tanto 500 es el número cuyo 15 % es 75.

Ejemplo 3.6.5

Si aproximadamente el 36 % de 410 pacientes son hombres, ¿cuántos pacientes son mujeres?

SOLUCIÓN: Para resolver este problema podemos hacerlo de dos formas distintas:

a) Calculamos la cantidad de pacientes hombres y lo restamos al total de pacientes. El 36 % de 410 es

$$410(0.36) = 147.6 \approx 148.$$

Hacemos la resta $410 - 148 = 262$.

b) El otro método es que si el 36 % son hombres, entonces el 64 % son mujeres, y calculamos directamente el

64 % de 410,

esto es,

$$410(0.64) = 262.4 \approx 262.$$

Por cualquiera de los dos métodos obtenemos el mismo resultado esto es que en total son aproximadamente 262 mujeres.

Calcular porcentajes nos permite precisar datos presentados en material impreso o en los medios.

Ejemplo 3.6.6

En el periódico La Jornada del 21 de mayo de 2009, tenemos el siguiente extracto del reportaje de Ángeles Cruz Martínez: *Crecen casos de dengue 25 por ciento respecto de la misma fecha de 2008* "En lo que va del año se han registrado 3 mil 456 casos de dengue, equivalente a un aumento de 25 por ciento, 676 más con respecto a la misma fecha de 2008, cuando se reportaron dos mil 783 enfermos. Las entidades donde se concentra este incremento son Colima, Michoacán, Sinaloa y Nayarit."

¿Es correcta la información sobre el porcentaje entre los datos de ambos años como se indica?

SOLUCIÓN: Podemos leer que se dan los datos de 2009 y del 2008 que son respectivamente 3456 y 2783 si hacemos la resta tenemos 673 y no 676. Ahora calculamos el porcentaje: esto es qué porcentaje es 676 con respecto a 2783. Este porcentaje se calcula $\frac{676}{2783} = 0.2429 = 24.29\%$. En este caso se trata casi del 24%. En este párrafo hemos encontrado dos datos que no corresponden totalmente a la verdad.

Ejemplo 3.6.7

Si 7.2 gramos de una solución de 20 gramos son alcohol, ¿qué porcentaje de la solución es alcohol?

SOLUCIÓN: Sabemos que el total es 20 y la parte es 7.2 entonces $\frac{7.2}{20} = 0.36 = 36\%$. El 36% es alcohol.

3.7. Ejercicios

Ejercicio 3.7.1. Expresar las siguientes razones y escribir en la fracción más simple

- a) 1 a 5
- b) 2 a 11
- c) 2 gramos a 9 gramos
- d) 3 centímetros a 27 centímetros
- e) 25 litros a 5 litros

3.7. EJERCICIOS

Ejercicio 3.7.2. Si 35 onzas de un químico son combinadas con 65 de agua, ¿cuál es la razón del químico a las onzas de la solución?

Ejercicio 3.7.3. Escribe la razón de la tensión de oxígeno (100 mm) a la sangre en venas (40 mm).

Ejercicio 3.7.4. Si 10 onzas de alcohol son añadidas a 80 onzas de agua, ¿cuál es la razón de alcohol a la solución?

Ejercicio 3.7.5. Si 3 gramos de azúcar son añadidos a 87 gramos de agua, ¿cuál es la razón de los gramos de azúcar a los gramos de la solución?

Ejercicio 3.7.6. En un maratón un corredor tiene un pulso de 68 latidos/min. Después de completar el maratón, su corazón tiene un pulso de 110 latidos/min. Expresa la razón del corazón normal comparado con el corazón después del maratón.

Ejercicio 3.7.7. Resolver las siguientes proporciones:

a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{b}$

b) $\frac{4}{1} = \frac{x}{4}$

c) $\frac{2}{C} = \frac{1}{10}$

d) $\frac{6}{5} = \frac{r}{10}$

e) $P : 100 = 3 : 10 = 3 : 10$

f) $2 : R = 5 : 15$

g) $a : 25 = \frac{1}{2} : 5$

h) $8 : 4 = 10 : n$

i) $\frac{t}{8} = \frac{7}{1}$

j) $\frac{3}{4} = \frac{30}{y}$

k) $0.7 : 10 = x : 100$

l) $10 : d = 1.5 : 6$

Ejercicio 3.7.8. La glicerina es un líquido. Se tienen 8 mililitros de glicerina en 24 mililitros de solución. Expresa la concentración de la solución.

Ejercicio 3.7.9. La concentración de cierta solución es 1 : 5. Si son 15 mililitros del medicamento, ¿cuántos mililitros de solución son?

Ejercicio 3.7.10. La concentración de una solución de Lysol es 1 : 20. Si son 1000 mililitros de solución, ¿cuántos mililitros de Lysol son?

Ejercicio 3.7.11. Una dosis de una solución 2 : 50 es administrada a un paciente. Cada dosis es de 0.5 mililitros:

- a) ¿Cuánto medicamento es necesario para administrar 5 dosis?
- b) Usando proporción encuentra la cantidad de medicamento.

Ejercicio 3.7.12. La concentración de la solución de sal y agua es 3 : 7. ¿Cuánta sal debe ser añadida a 420 gramos de agua para preparar una solución con esta concentración?

Ejercicio 3.7.13. Una nutrióloga requiere que cada paciente reciba 4 onzas de proteína. ¿Cuánta proteína se requiere para 47 pacientes?

Ejercicio 3.7.14. 18 gramos de ácido clorhídrico neutralizan 20 gramos de lejía. ¿Cuántos gramos de lejía se neutralizan con 1080 gramos de ácido clorhídrico?

Ejercicio 3.7.15. Usa la ley de Boyle para resolver. Si 340 mililitros de un gas están bajo una presión de 4 atmósferas, ¿cuál será el volumen del gas a una presión de 5 atmósferas?

Ejercicio 3.7.16. Una casa de campo se renta a 6 enfermeras y cada una paga \$36. Si dicha casa es alquilada por 5 enfermeras, ¿cuánto pagará cada una?

Ejercicio 3.7.17. Usa la notación de porcentaje para expresar cada una de las siguientes cantidades:

- a) 23 es a 100
- b) 13 : 100
- c) 40 es a 50
- d) 200 es a 100
- e) 135 : 100
- f) 0.4 es a 100
- g) 200 es a 200
- h) $\frac{1}{4}$
- i) 120 es a 1000
- j) $\frac{2}{5}$
- k) $\frac{23}{25}$

3.7. EJERCICIOS

- l) $\frac{13}{20}$
- m) $\frac{10}{10}$
- n) $\frac{3}{50}$
- ñ) $\frac{80}{200}$
- o) 0.230
- p) 0.1
- q) 0.032
- r) 0.55
- s) 0.09
- t) 3.50
- u) 1.25

Ejercicio 3.7.18. Expresa los siguientes porcentajes como fracción y como decimal:

- a) 20 %
- b) 60 %
- c) $33\frac{1}{3}$ %
- d) 5 %
- e) 0.2 %
- f) 7.5 %
- g) 6.25 %
- h) 120 %
- i) 150.5 %
- j) 210 %

Ejercicio 3.7.19. Escribe las siguientes concentraciones en términos de porcentajes:

- a) 9 gramos de cloruro de sodio y 50 mililitros de solución.

b) 5 tabletas que contienen 0.4 gramos de soluto se disuelven en 100 mililitros de solución.

Ejercicio 3.7.20. ¿Cuál es la concentración de una solución cuando 7 gramos de cristales de ácido bórico se añaden a una solución de 500 mililitros?

Ejercicio 3.7.21. Encontrar el 12.2 % de 208.

Ejercicio 3.7.22. 28 representa qué porcentaje de 50.

Ejercicio 3.7.23. 70 % de qué número es 55.

Ejercicio 3.7.24. Determinar el 0.7 % de 200.

Ejercicio 3.7.25. Qué porcentaje de 3.50 es 2.1.

Ejercicio 3.7.26. 45 es 50 % de que número.

Ejercicio 3.7.27. Calcular el 250 % de 50.

Ejercicio 3.7.28. Qué porcentaje de 7 es 35.

Ejercicio 3.7.29. 3.56 es 41.2 % de qué número.

Ejercicio 3.7.30. ¿Cuál número corresponde al 8 % de 1000?

Ejercicio 3.7.31. Encontrar el 9 % de 750.

Ejercicio 3.7.32. 100 es 0.02 % de qué número.

Ejercicio 3.7.33. 95 % de las 3000 enfermeras que trabajan en un hospital tienen base. ¿Cuántas enfermeras tienen la base?

Ejercicio 3.7.34. Si 9.9 gramos de una solución de 45 gramos es alcohol, ¿qué porcentaje de la solución es alcohol?

Ejercicio 3.7.35. En un estudio de habilidades matemáticas necesarias para ocupaciones en salud se regresaron 139 cuestionarios. Estos cuestionarios representan 60 % de los cuestionarios que se enviaron a distintas instituciones. ¿Cuántos cuestionarios se enviaron en total?

Ejercicio 3.7.36. Cierta mineral comprende el 0.9 % del peso de un adulto. Si una persona contiene 0.653 kg del mineral, ¿cuál es el peso del adulto?

Ejercicio 3.7.37. Las secreciones biliares constituyen aproximadamente el 8 % del total de secreciones internas de un adulto. Si un adulto tiene 400 mililitros de secreciones biliares en un día, ¿cuánto es el total de sus secreciones?

Ejercicio 3.7.38. Un medicamento fue administrado a 160 pacientes, sólo 5 % mostraron una reacción negativa. ¿Cuántos pacientes tuvieron una reacción negativa?

Ejercicio 3.7.39. Un reporte oficial indica seis de 10 personas que tuvieron resfriado se recuperaron en 2 días. ¿Qué porcentaje se recuperó en 2 días?

Ejercicio 3.7.40. Un hospital tiene 450 camas. Si el 20 % de las camas no está ocupado, ¿cuántas camas están vacías?

Ejercicio 3.7.41. Un paciente tiene una cuenta hospitalaria de 6000 pesos, si 1500 fueron de medicamentos. ¿Qué porcentaje de la cuenta hospitalaria corresponde al medicamento?

3.7. EJERCICIOS

Ejercicio 3.7.42. Una enfermera aplicó a 21 estudiantes la vacuna de polio. Si estos estudiantes representan el 42 % del número total de estudiantes que deben recibir la vacuna, ¿cuántos estudiantes deben recibir la vacuna?

Ejercicio 3.7.43. Considera el siguiente párrafo de La Jornada del 17 de septiembre de 2011. *Caries, en 80 por ciento de los niños y en casi toda la población adulta: especialista Ángeles Cruz Martínez.* “De acuerdo con un estudio de la SSA, de 165 mil personas que por primera vez acudieron al dentista, 80 por ciento presentaba daño en algún grado. ”
¿Cuántas personas presentan algún daño por caries?

Cálculo de dosis

Calcular la dosis de un medicamento requiere de cuidado y habilidad por parte del profesional de la salud. La Norma Oficial Mexicana de etiquetado de medicamentos es la **NOM-072-SSA1-1993**. Cuando se trata de niños es importante identificar no sólo la edad sino el peso y talla, no necesariamente se debe dar la misma cantidad de medicamento a dos niños de 4 años. En este capítulo se verán algunos ejemplos de cómo calcular dosis.

Cuadro 4.1: Abreviaturas utilizadas en los medicamentos

C°	grado Celsius
cbp	cuanto baste para
cs	cantidad suficiente
csp	cantidad suficiente para
g	gramos
<i>G.I.</i>	símbolo para Medicamento Genérico Intercambiable
<i>mcg</i> o μg	microgramo
<i>mEq</i>	miliequivalente
<i>mg</i>	miligramo
<i>ml</i> o <i>mL</i>	mililitro
<i>mmol</i>	milimol
<i>mOsmol</i>	miliosmol
<i>SC</i>	subcutánea
<i>SSA</i>	Secretaría de Salud
<i>U</i>	unidad
<i>UI</i>	unidad internacional

Cuadro 4.2: Vías de administración

<i>IA</i>	intraarticular
<i>IL</i>	intralesional
<i>IM</i>	intramuscular
<i>IV</i>	intravenosa

4.1. Cálculo de dosis cuando el medicamento es cápsula o tableta

Ejemplo 4.1.1

Una dosis de 100 *mg* es ordenada, y la tableta disponible es de 25 *mg*. ¿Cuántas tabletas son necesarias por dosis?

SOLUCIÓN: Para resolver este problema escribimos las razones correspondientes; en este caso, como es inversamente proporcional, a menor cantidad de miligramos necesitamos más tabletas

$$100 : 1 = 25 : \frac{1}{x}$$

entonces

$$\frac{100}{1} = \frac{25}{\frac{1}{x}}$$

Hacemos las operaciones respectivas y obtenemos

$$x = \frac{100}{25}.$$

La dosis debe ser de 4 tabletas de 25 *mg*.

Frecuentemente la cantidad de cápsulas o tabletas necesarias para un periodo de tiempo debe ser calculada. Además si se trata de antibióticos, la receta no se surte completa para todo el tratamiento, sino por partes.

Ejemplo 4.1.2

El tratamiento de 100 *mg* cada 4 horas por 3 días es ordenado, se tiene disponible tabletas de 50 *mg*. ¿Cuál es la cantidad total de tabletas necesarias para todo el tratamiento?

SOLUCIÓN: Empezamos calculando la dosis correspondiente,

$$100 : 1 = 50 : \frac{1}{x}$$

esto es

$$x = \frac{100}{50} = 2.$$

4.1. CÁLCULO DE DOSIS CUANDO EL MEDICAMENTO ES CÁPSULA O TABLETA

Entonces son 2 tabletas por dosis.

Por otro lado, cada 4 horas debe ser tomado un total de 6 dosis por día. Haciendo el cálculo por día tenemos que son

$$2 \times 6 = 12$$

tabletas por día y por último multiplicamos por 3 días:

$$12 \times 3 = 36.$$

La cantidad total de tabletas es 36 para todo el tratamiento.

Muchas veces el medicamento se ordena en cierta unidad pero se encuentra disponible en una diferente. La conversión de unidades debe hacerse antes de determinar la cantidad de tabletas o cápsulas necesarias.

Ejemplo 4.1.3

Se recetó una dosis de 0.6 gramos, sólo se dispone de tabletas de 300 mg. ¿Cuántas tabletas se necesitan para una dosis?

SOLUCIÓN: Lo primero que se debe hacer es convertir gramos a miligramos.

$$1g : 1000mg = 0.6g : x$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{0.6}{x}$$

$$x = 0.6(1000) = 600$$

por lo tanto 0.6 g son 600 mg.

$$600 : 1 = 300 : \frac{1}{x}$$

haciendo las operaciones correspondientes tenemos

$$x = \frac{600}{300} = 2.$$

Se deben tomar 2 tabletas de 300 mg.

4.2. Cálculo de dosis cuando se da el medicamento en forma líquida

Cuando se preparan medicamentos en forma líquida, éstas se preparan en un frasco. En el frasco se indica la concentración del medicamento. Se debe hacer el cálculo para determinar la dosis que se debe administrar al paciente.

Ejemplo 4.2.1

Se recetan 50 mg del medicamento, de un frasco de 10 centímetros cúbicos (cc) con una concentración de 100 mg/cc. ¿Cuántos cc sacar del frasco?

SOLUCIÓN: La proporción correspondiente es:

$$\frac{50mg}{N} = \frac{100mg}{1cc}.$$

Resolvemos haciendo el producto cruzado

$$50 = N(100)$$

$$N = \frac{50}{100} = 0.5.$$

Por lo tanto, se requiere una dosis de 0.5 centímetro cuadrado del frasco.

Algunas veces el medicamento viene en dos frascos, uno contiene el medicamento en polvo mientras que el otro contiene el líquido que se necesita para diluirlo.

Ejemplo 4.2.2

Se requiere administrar 200000 unidades de medicamento de un frasco que contiene 500000 unidades combinado con 5 cc de líquido para diluirlo. ¿Cuántos cc se deben administrar del frasco?

SOLUCIÓN: Primero calculamos la concentración de combinar el líquido con las unidades de medicamento, esto es

$$\frac{500000 \text{ unidades}}{5cc} = 100000 \text{ unidades /cc.}$$

La proporción correspondiente es

$$\frac{200000 \text{ unidades}}{Ncc} = \frac{100000 \text{ unidades}}{1cc}.$$

Hacemos el producto cruzado

$$100000N = 200000,$$

concluimos que

$$N = \frac{200000}{100000} = 2.$$

Entonces se deben administrar 2cc.

4.3. Preparación de soluciones

La mayoría de las soluciones hechas con medicamento son preparadas y expresadas como el cociente del peso del medicamento y el volumen de la solución. Este cociente se representa como un porcentaje. Así, una solución al 50 % significa que:

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{50g \text{ medicamento}}{100cc \text{ de solución}}$$

La ecuación anterior se lee “50 gramos de medicamento es disuelta en 100 cc de solución”.

Ejemplo 4.3.1

Escribe las siguientes soluciones como un cociente usando gramos y centímetros cúbicos:

a) Solución al 25 %. Se escribe como

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{25g \text{ medicamento}}{100cc \text{ de solución}}$$

b) Solución al 5 %. Se representa como

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{5g \text{ medicamento}}{100cc \text{ de solución}}$$

Ejemplo 4.3.2

¿Qué cantidad de medicamento se tiene en 250cc de una solución al 10 %

SOLUCIÓN: Dado que la solución es al 10 % tenemos que el cociente correspondiente es

$$\frac{10g}{100cc}.$$

4.3. PREPARACIÓN DE SOLUCIONES

Usando el cociente anterior podemos escribir la proporción

$$\frac{N}{250cc} = \frac{10g}{100cc}$$

Resolvemos haciendo el producto cruzado

$$N100 = 250(10)$$

$$N = \frac{250(10)}{100} = 25.$$

Por lo tanto en dicha solución se tienen 25 gramos del medicamento.

También se puede calcular la concentración si tenemos el volumen y la cantidad de medicamento.

Ejemplo 4.3.3

Una solución de 200 cc contiene 40 g de medicamento. ¿Cuál es el porcentaje de concentración de la solución?

$$\text{SOLUCIÓN: } N\% = \frac{N}{100cc} = \frac{40g}{200cc}$$

Resolvemos la proporción

$$N(200) = 100(40),$$

$$N = \frac{100(40)}{200} = 20.$$

Por lo tanto la solución está al 20 %.

También podemos preguntarnos por el volumen de la solución.

Ejemplo 4.3.4

¿Cuántos centímetros cúbicos de una solución al 5 % se pueden hacer con 10 gramos de medicamento?

SOLUCIÓN: La proporción correspondiente es

$$\frac{5g}{100cc} = \frac{10g}{Ncc}. \quad 5N = 100(10)$$

entonces

$$N = \frac{100(10)}{5} = 200cc.$$

4.4. Diluyendo soluciones

Cuando se tiene una solución con una concentración mayor, se puede hacer a partir de ésta una solución con menor concentración.

La fórmula que se utiliza es la siguiente:

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

- C_1 = concentración de la solución disponible
- V_1 = volumen de la solución disponible
- C_2 = concentración de la solución que se busca
- V_2 = volumen de la solución que se necesita

Ejemplo 4.4.1

Si 1000 cc de una solución al 10 % es ordenada, ¿qué cantidad de solución al 20 % es necesaria para preparar la solución que se necesita?

SOLUCIÓN: $C_1 = 20\%$, $V_1 = ?$, $C_2 = 10\%$ y $V_2 = 1000cc$

Sustituyendo en la fórmula

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

$$(20\%)V_1 = (10\%)(1000cc)$$

despejando tenemos que

$$V_1 = \frac{(10)(1000)}{20} = 500.$$

Entonces necesitamos 500 cc al 20 %. Para obtener la cantidad de solvente que se debe agregar simplemente se hace la resta de los volúmenes

$$V_2 - V_1 = 1000cc - 500cc = 500cc.$$

Por lo tanto se necesitan 500 cc al 20 % y se deben agregar 500 cc para obtener 1000 cc al 10 %.

4.5. Razón de los medicamentos intravenosos

Las soluciones intravenosas (IV) deben ser monitoreadas para establecer la razón de flujo de la solución en el paciente.

Definición 4.1. La razón de flujo es el número de gotas por minuto que fluyen a través del catéter en el paciente. Esta razón será denotada por la letra R y se calcula con la siguiente fórmula:

$$R = \frac{(\text{Cantidad de solución})(\text{factor de goteo})}{\text{tiempo (60 minutos / hora)}}$$

Definición 4.2. *El factor de goteo es el número de gotas necesarias para tener 1 centímetro cúbico.*

Dependiendo del equipo se produce un tamaño diferente de gotas. Comúnmente son 60 gotas por centímetro cúbico.

La cantidad de solución corresponde a los centímetros cúbicos que debe recibir el paciente. El tiempo de administración que se requiere para administrar el medicamento al paciente usualmente se maneja en horas.

Ejemplo 4.5.1

Un bolsa con una solución intravenosa de 1000 cc se coloca a un paciente y fluye durante 5 horas con un factor de goteo de 20 gotas/cc. ¿Cuál es la razón de flujo?

SOLUCIÓN: Notamos por la fórmula que se trata de un problema de conversión en lugar de un problema de proporción.

$$R = \frac{(1000cc)(20gotas/cc)}{(5hr)(60min/hr)} \approx 66.6cc/min$$

4.6. Ejercicios

Ejercicio 4.6.1. Calcula el número de tabletas o cápsulas necesarias por dosis:

- Se ordenaron tabletas de 300 mg y hay disponibles tabletas de 50 mg.
- Se ordenaron cápsulas de 250 mg y hay disponibles cápsulas de 125 mg.
- Se ordenaron tabletas de 50 mg y hay disponibles tabletas de 100 mg.

Ejercicio 4.6.2. Para cada uno de los siguientes tratamientos calcular el número total de cápsulas o tabletas:

- Una cápsula de 100 mg dos veces por día es ordenada por 7 días. Si sólo hay cápsulas de 25 mg disponibles, ¿cuántas cápsulas se necesitan en total para todo el tratamiento?
- 150 mg cada 3 horas por 5 días. Si hay disponibles tabletas de 50 mg, ¿cuántas tabletas se necesitan en total?

Ejercicio 4.6.3. Calcula la cantidad de cápsulas o tabletas necesarias por dosis:

- Se ordenó una dosis de 0.5 g y hay disponibles cápsulas de 125 mg.
- Se recetó una dosis de 500 mg y hay disponibles tabletas de 0.25 g.

Ejercicio 4.6.4. Calcula la cantidad total de tabletas necesarias por día

- Se recetó 0.4 g cada 2 horas, pero sólo hay tabletas de 200 mg.

- b) Se ordenó una dosis de 75 mg cada 6 horas; sólo hay disponibles tabletas de 150 mg.
- c) La receta establece que la dosis debe ser 10 mg cada 4 horas, ¿cuántas tabletas se necesitan si sólo hay de 5 mg?

Ejercicio 4.6.5. 35 mg de un medicamento son recetados. Se dispone de un frasco de 2 cc cuya concentración es 50mg/cc. Determina la cantidad de cc requerida.

Ejercicio 4.6.6. 20 mg de un medicamento son recetados. Se dispone de un frasco de 10 cc cuya concentración es 50mg/cc. Determina la cantidad de cc requerida.

Ejercicio 4.6.7. 60 mg de un medicamento son recetados. Se dispone de un frasco de 5 cc cuya concentración es 40mg/cc. Determina la cantidad de cc requerida.

Ejercicio 4.6.8. 300000 unidades se requiere administrar de un frasco que contiene 1000000 unidades reconstituido con 5cc de líquido para diluir. ¿Cuántos cc deben ser administrados del frasco?

Ejercicio 4.6.9. 50000 unidades son ordenadas. Un frasco que contiene 1000000 unidades es reconstituida con 10 cc de líquido para diluir. ¿Cuántos cc deben ser administrados del frasco con el medicamento reconstituido?

Ejercicio 4.6.10. ¿Cuánto medicamento hay en 20 cc de una solución al 8 %?

Ejercicio 4.6.11. ¿Cuánto medicamento hay en 50 cc de una solución al 1 %?

Ejercicio 4.6.12. Una solución de 75 cc contiene 30 gramos de medicamento. ¿Cuál es el porcentaje de concentración de la solución?

Ejercicio 4.6.13. Una solución de 300 cc contiene 3 g de medicamento. ¿Cuál es el porcentaje de la concentración?

Ejercicio 4.6.14. ¿Cuántos cc de una solución al 2 % pueden hacerse con 6 g de medicamento?

Ejercicio 4.6.15. ¿Cuántos cc de una solución al 10 % pueden hacerse con 5 g de medicamento?

Ejercicio 4.6.16. Si 500 cc de una solución al 5 % son solicitados, ¿qué cantidad de solución al 25 % es necesaria y qué cantidad de líquido es necesario para preparar la solución al 5 %?

Ejercicio 4.6.17. 400 cc de una solución al 3 % son ordenados. Hay disponible una solución al 15 %. ¿Qué cantidad de solución al 15 % se necesita y qué cantidad de líquido se debe agregar?

Ejercicio 4.6.18. 200 cc de una solución al 15 % son solicitados. En bodega sólo hay disponible una solución al 30 %. ¿Qué cantidad solución al 30 % es necesaria y qué cantidad de solvente es necesario agregar?

Ejercicio 4.6.19. Se necesitan 1000 cc de una solución al 2 %. Se tiene disponible solución al 40 %. ¿Qué cantidad de solución y qué cantidad de solvente se necesitan agregar para preparar la solución al 2 %?

Ejercicio 4.6.20. Una bolsa con una solución intravenosa de 1000 cc se coloca y fluye durante 15 horas con un factor de goteo de 30gotas/cc. Determina la razón de flujo correspondiente.

Ejercicio 4.6.21. Calcular la razón de flujo de una solución intravenosa contenida en una bolsa de 2000 cc con un factor de goteo de 20 que se coloca durante 15 horas.

Ejercicio 4.6.22. Una bolsa que contiene 500 cc de solución se coloca en un paciente y fluye a un factor de goteo de 15 por 3 horas. Determina la razón de flujo correspondiente.

Ecuaciones de primer grado

Las razones vistas en el Capítulo 3 son también ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ya conocemos un método para resolverlas. En este capítulo se verá la metodología para resolver cualquier tipo de ecuación de primer grado de una incógnita, suponiendo que tiene solución con el objetivo de resolver problemas de aplicación en Ciencias de la Salud.

5.1. Definición

Una ecuación de primer grado es una igualdad que contiene una incógnita. Usualmente se le asigna la letra x o una letra minúscula. El exponente más grande con el que aparece la incógnita es el uno. La igualdad consta de dos miembros llamados: primer miembro y segundo miembro.

Ejemplo 5.1.1

$$2 + 4x = 7 - 2x$$

es una ecuación de primer grado donde la incógnita es x , los miembros son: primer miembro $2 + 4x$ y segundo miembro $7 - 2x$.

Definición 5.1. *La solución de una ecuación es el valor que al ser sustituido en lugar de la variable cumple con la igualdad.*

Para la ecuación del ejemplo 5.1.1 el 1 no es solución pues

$$6 = 2 + 4(1) \neq 7 - 2(1) = 5$$

pues 6 no es igual a 5.

$$\frac{5}{6}$$

es solución de acuerdo con

$$\frac{32}{6} = \frac{12 + 20}{6} = 2 + 4\left(\frac{5}{6}\right) = 7 - 2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{42 - 10}{6} = \frac{32}{6}$$

pues obtenemos el mismo resultado en ambos lados.

Las ecuaciones de primer grado tienen: o una solución, o ninguna o una infinidad.

5.1.1. Ecuaciones equivalentes

Definición 5.2. *Dos ecuaciones son equivalentes si sus soluciones son las mismas.*

Ejemplo 5.1.2

$$x^2 + 4x = 7 - 2x \text{ y } x^2 + 6x = 7$$

son equivalentes pues

1 y -7

son soluciones de la primer ecuación

$$x^2 + 4x = 7 - 2x$$

pues

$$5 = (1)^2 + 4(1) = 7 - 2(1) = 5$$

y

$$21 = (-7)^2 + 4(-7) = 7 - 2(-7) = 21.$$

Por otro lado también se cumple para la segunda ecuación

$$x^2 + 6x = 7$$

pues

$$7 = (1)^2 + 6(1) = 7$$

y

$$7 = (-7)^2 + 6(-7) = 7.$$

En la siguiente sección veremos un método para encontrar la solución de una ecuación si aplicamos las propiedades de la igualdad que se resumen en lo siguiente:

“TODO LO QUE LE HAGAS A UN MIEMBRO DE LA IGUALDAD SE LO HACES AL OTRO”.

Este método conocido como despeje no se puede aplicar a todos los tipos de ecuaciones. Como veremos, una ecuación de segundo grado no siempre se puede despejar.

5.2. Propiedades de la igualdad

5.2.1. Propiedad de la suma de la igualdad

La ecuación $a = b$ es equivalente a $a + c = b + c$ para cualquier número c .

Ejemplo 5.2.1

$$x - 3 = 9$$

si se suma 3 a ambos miembros tenemos

$$x - 3 + 3 = 9 + 3$$

a su vez haciendo las operaciones se tiene que

$$x = 12.$$

5.2.2. Propiedad de la resta de la igualdad

La ecuación $a = b$ es equivalente a $a - c = b - c$ para cualquier número c .

Ejemplo 5.2.2

$$x + \frac{1}{2} = 7$$

si se resta $\frac{1}{2}$

a ambos miembros se tiene que

$$x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7 - \frac{1}{2}$$

cuando hacemos las operaciones obtenemos

$$x = \frac{13}{2}$$

5.2.3. Propiedad de la multiplicación de la igualdad

La ecuación $a = b$ es equivalente a $a(c) = b(c)$ para cualquier número c .

Ejemplo 5.2.3

$$\frac{x}{3} = 5$$

si multiplicamos 3

a ambos miembros tenemos

$$3\left(\frac{x}{3}\right) = 3(5)$$

haciendo las operaciones obtenemos que $x = 15$.

5.2.4. Propiedad de la división de la igualdad

La ecuación $a = b$ es equivalente a $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ para cualquier número $c \neq 0$

Ejemplo 5.2.4

$$-6x = 12$$

dividimos entre -6 ambos miembros así

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{12}{-6}$$

obtenemos

$$x = -2.$$

La traducción coloquial de estas propiedades es:

Observación 5.1. *Lo que debemos entender: no les salen patitas y se pasan del otro lado, simplemente estamos aplicando las propiedades de la igualdad.*

5.3. Estrategia para resolver ecuaciones de primer grado

1. Leer la ecuación e identificar los miembros.
2. Si hay operaciones por hacer, efectuarlas primero.
3. Si aparece la incógnita en ambos miembros, lo que debemos hacer es aplicar las propiedades de la igualdad hasta que todos los términos con incógnita queden en el mismo miembro y los que no en el otro.

Cuadro 5.1: Propiedades de la igualdad

Propiedad	Traducción
Suma	Si está sumando al miembro lo pasamos del otro lado de la igualdad restando al otro miembro.
Resta	Si está restando al miembro lo pasamos del otro lado de la igualdad sumando al otro miembro.
Multiplicación	Si está multiplicando al miembro lo pasamos del otro lado de la igualdad dividiendo al otro miembro.
División	Si está dividiendo al miembro lo pasamos del otro lado de la igualdad multiplicando al otro miembro.

4. Hacer las operaciones.
5. Aplicar las propiedades de la igualdad hasta que en alguno de los miembros quede sola la incógnita.

Notemos que cada vez que hacemos algo debemos escribir la ecuación equivalente que queda, de preferencia, en un nuevo renglón.

Ejemplo 5.3.1

$$2x + 4 - x + 2 = 0$$

Notamos que podemos reducir términos semejantes

$$x + 6 = 0$$

como el 6 está sumando pasa al otro miembro restando

$$x = 0 - 6$$

finalmente

$$x = 6.$$

Ejemplo 5.3.2

5.3. ESTRATEGIA PARA RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

$$4y - 3 = 3y + 8$$

Notamos que no podemos simplificar, pero hacemos las operaciones necesarias para dejar las incógnitas de un lado y los números del otro. Como 3 esta restando en un miembro pasa al otro miembro sumando

$$4y = 3y + 8 + 3$$

Como $3y$ esta sumando pasa al otro miembro restando $4y - 3y = 8 + 3$ Simplificamos $y = 11$ y encontramos la solución.

Ejemplo 5.3.3

$$7(a + 1) - 1 - a = 6(a + 1)$$

Hacemos las operaciones

$$7a + 7 - 1 - a = 6a + 6$$

Simplificamos

$$6a + 6 = 6a + 6$$

Movemos lo que necesitamos

$$6a - 6a = 6 - 6$$

Simplificamos

$$0 = 0$$

¿Qué significa? Pues que tiene una infinidad de soluciones. No importa el valor que se sustituya siempre será solución.

Ejemplo 5.3.4

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{16} = 22$$

Hacemos primero las operaciones indicadas

$$\frac{16x + 6x}{96} = 22$$

Como 96 esta dividiendo a todo el miembro pasa al otro miembro multiplicando

$$16x + 6x = 22(96)$$

$$22x = 2112$$

como 22 esta multiplicando pasa al otro miembro dividiendo.

$$x = \frac{2112}{22} = 96$$

esto es la solución es $x = 96$.

5.4. Resolución de problemas

Para resolver problemas se debe leer cuidadosamente cada uno de los enunciados involucrados. Una parte importante de los enunciados es el verbo. Por definición el verbo es la acción del sujeto. En este caso cuando resolvemos un problema localizar el verbo nos puede indicar cuál es el lugar del signo igual (=) de la ecuación.

5.4.1. Estrategia para resolver problemas

- I. No espantarse
- II. Leer el problema y entender qué se pregunta.
- III. Asignamos una letra a lo que se pregunta, si son dos incógnitas, dos letras, etcétera. Escribimos qué es cada letra como si fuera un diccionario.
- IV. Traducimos cada idea, esto es hasta el primer punto, coma o y.
- V. Resolvemos
- VI. Escribimos la respuesta como un enunciado sin olvidar poner las unidades correspondientes.

Ejemplo 5.4.1

¿Qué número aumentado en 17 da 47?

SOLUCIÓN: Nos está preguntando un número, entonces escribimos x : número. Después leemos el único enunciado localizamos el verbo que en este caso es "da" notaremos que la mayoría de las veces donde está el verbo corresponde al igual. Así leemos antes del verbo "da" dice el número aumentado en 17 lo cual en lenguaje algebraico queda $x + 17$ y después sólo tenemos 47, por lo tanto nos queda la ecuación $x + 17 = 47$.

Lenguaje común	¿Qué número aumentado en 17	da	47?
Lenguaje algebraico	$x + 17$	=	47

Resolvemos la ecuación:

$$x + 17 = 47$$

$$x = 47 - 17 = 30$$

Por lo tanto la solución es el número 30.

Ejemplo 5.4.2

Entre Luis y Antonio reúnen 840 pesos. Sabiendo que *Antonio* tiene 125 pesos más que Luis, calcular los pesos que tiene cada uno.

SOLUCIÓN: Notamos que lo que preguntan es cuánto dinero tiene cada uno, entonces son dos incógnitas y escribimos:

a: dinero de Antonio

b: dinero de Luis

Trabajamos con el primer enunciado

Lenguaje común	Entre Luis y Antonio	reúnen	840 pesos
Lenguaje algebraico	$a + b$	=	840

Trabajamos con el segundo enunciado.

Lenguaje común	Sabiendo que Antonio	tiene	125 pesos más que Luis,
Lenguaje algebraico	a	=	$b+125$

Tenemos dos ecuaciones:

$$a + b = 840 \text{ y } a = b + 125$$

como aún no se han visto sistemas de ecuaciones, sustituimos la segunda en el primera para obtener una ecuación de primer grado que es:

$$b + 125 + b = 840$$

Resolviendo

$$b + 125 + b = 840$$

$$2b + 125 = 840$$

$$2b = 840 - 125 = 715$$

$$b = \frac{715}{2} = 357.5$$

Como ya tenemos el valor de *b* podemos sustituirlo en la segunda ecuación y obtenemos

$$a = 357.5 + 125 = 482.5$$

Entonces la solución es que Luis tiene 357.5 pesos y Antonio 482.5.

5.5. Ejercicios

Ejercicio 5.5.1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 5 = 8$

b) $x - 3 = 7$

c) $2b = -6$

d) $\frac{m}{2} = 1$

e) $\frac{3m}{4} = 3$

f) $2p + 3 = 7$

g) $6p - 5 = 7$

h) $4x + 5 = 2x + 9$

i) $2(x + 5) = 8$

j) $-2(x - 4) = 3(x - 6)$

k) $6(3x - 2) = 12x + 3(x - 10)$

l) $5(m + 2) - 3(m - 1) = 5(m + 3)$

m) $\frac{b}{3} - b12 + 14 = 1$

n) $\frac{b}{4} + 52 - b6 = 5$

ñ) $\frac{x}{6} - \frac{2x - 1}{6} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) = 0$

Ejercicio 5.5.2. La diferencia entre un número y 5 es 8. Calcula ese número.

Ejercicio 5.5.3. Repartir 300 pesos entre tres amigos de modo que cada uno reciba 5 pesos más que el anterior.

Ejercicio 5.5.4. Repartir 300 cajas de medicamentos entre tres centros de salud de modo que el segundo reciba 16 cajas más que el primero y el tercero 28 cajas más que el segundo.

Ejercicio 5.5.5. Los $\frac{7}{13}$ del valor de un baumanómetro más 45 pesos suman 675 pesos. ¿Cuánto vale el baumanómetro?

Ejercicio 5.5.6. Un pinar y un estetoscopio cuestan en total 4000 pesos. Si el estetoscopio vale el cuádruple que el pinar, ¿cuánto cuesta cada uno?

5.5. EJERCICIOS

Ejercicio 5.5.7. Un médico gasta $\frac{1}{2}$ de su sueldo en comida; $\frac{1}{5}$ de su sueldo en vivienda y $\frac{1}{6}$ de su sueldo en vestido. Si todavía le sobran 20 000 pesos, ¿cuánto gana de sueldo?

Ejercicio 5.5.8. Halla un número cuya mitad, tercera y cuarta parte sumen 39.

Ejercicio 5.5.9. Calcula dos números impares consecutivos que sumen 24.

Ejercicio 5.5.10. Un nutriólogo y su mujer ganan entre los dos 10000 pesos diarios. Sabiendo que la mujer gana $\frac{2}{3}$ de lo que gana el marido, calcula lo que gana cada uno.

Ejercicio 5.5.11. En una granja hay conejos y gallinas, contándose en total 39 cabezas y 126 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Ejercicio 5.5.12. La madre de Luis tiene triple edad que él y dentro de 14 años sólo tendrá el doble de la que entonces tenga Luis. Calcula la edad actual de cada uno.

Ejercicio 5.5.13. El perímetro de un triángulo isósceles es 15 cm y el lado desigual es la mitad de uno de los lados iguales. Calcula la longitud de cada uno de los lados.

Ejercicio 5.5.14. Durante una Feria de la Salud se entregaron 1000 separadores de libros de dos clases. Los de figura normal costaban \$2 pesos y los otros con la forma de cápsula \$2.50 cada uno. Si se gastaron en total \$2200 pesos en estos separadores, ¿cuántos separadores se obsequiaron de cada clase?

Desigualdades de primer grado

Algunos datos en ciencias de la salud no corresponden exclusivamente a un número único. En ciertas situaciones es necesario manejar un conjunto de datos que no se pueden listar pues son números reales; por ejemplo, el rango de temperatura corporal normal no es exclusivamente 36°C . En este capítulo se verá la resolución de desigualdades de distintos tipos.

6.1. Propiedades de las desigualdades

Una de las propiedades fundamentales del conjunto de los números reales es que sus elementos se pueden ordenar.

La propiedad de tricotomía establece que para cualquier par de números reales a y b se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:

- I. Que a sea mayor que b ; denotado por $a > b$.
- II. Que a sea menor que b ; denotado por $a < b$.
- III. Que sean iguales; denotado por $a = b$.

Definición 6.1. *Si la diferencia $a - b$ es un número positivo, entonces decimos que a es mayor que b .*

Notación $a > b$.

Ejemplo 6.1.1

- a) $7 > 4$, ya que $7 - 4 = 3$ es positivo.
- b) $2 > -3$, ya que $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ y 5 es positivo.
- c) $-1 > -5$, ya que $-1 - (-5) = -1 + 5 = 4$.
- d) $0 > -2$, ya que $0 - (-2) = 0 + 2 = 2$.

Definición 6.2. Si la diferencia $a - b$ es un número negativo, entonces decimos que a es menor que b . Notación $a < b$

Ejemplo 6.1.2

- a) $4 < 9$, ya que $4 - 9 = -5$.
- b) $-6 < -2$, ya que $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$.
- c) $-5 < 5$, ya que $-5 - (5) = -5 - 5 = -10$.
- d) $-6 < 0$, ya que $-6 - (0) = -6$.

Definición 6.3. Si $a - b = 0$, entonces $a = b$.

Definición 6.4. Un enunciado que señala que una expresión es mayor que, mayor que o igual a, menor que, o menor que o igual a otra expresión es una desigualdad.

Observación 6.1. Todo número negativo es menor que cero.

Frecuentemente en la resolución de problemas es conveniente combinar una desigualdad con una igualdad utilizando los siguientes símbolos: $=$, $>$ o $<$.

Así $x \geq y$ significa: x es mayor o igual que y .

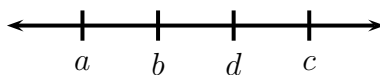
$x \leq y$ significa: x es menor o igual que y .

Definición 6.5. La dirección del símbolo de desigualdad se denomina sentido de la desigualdad.

Ejemplo 6.1.3

Las expresiones $x > 2$ y $x > 7$ son desigualdades que tienen el mismo sentido, mientras que $x > a$ y $b < c$ son desigualdades con sentidos contrarios.

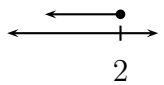
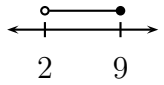
Los símbolos de desigualdades $<$ y $>$ tienen también una interpretación geométrica en la recta real o recta numérica. Si $a < b$, significa que a está a la izquierda de b ; si $c > d$ significa que sobre la recta de los números reales c está a la derecha de d , como se muestra en la siguiente figura:



6.2. Intervalos

Si consideramos un conjunto continuo sobre la recta numérica, es decir, un conjunto que incluya todos los puntos que corresponden a los números racionales e irracionales, comprendido entre dos números (y posiblemente los incluya a ellos también), entonces nos referiremos a este conjunto como un intervalo de la recta numérica; éste será representado por una línea continua. Se muestran estos conceptos en la tabla 6.1:

Ejemplo 6.2.1

Intervalo	Desigualdad	Gráfica
$(-\infty, 2]$	$x \leq 2$	
$(2, 9]$	$2 < x \leq 9$	

Ejemplo 6.2.2

De acuerdo con la Norma Oficial Mexicana NOM-003-SSA1-2012 “Para la disposición de sangre humana y sus componentes con fines terapéuticos”, los donadores de sangre deben ser mayores o iguales a 18 años y menores o iguales a 65 años. Esto queda representado con la siguiente desigualdad:

x : edad del donador de sangre

$$18 \leq x \leq 65$$

6.3. Operaciones con intervalos

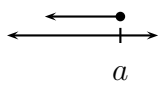
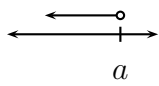
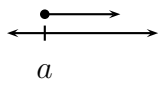
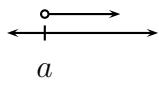
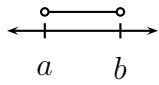
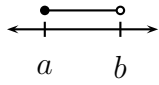
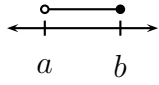
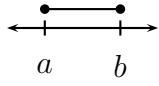
Los intervalos son conjuntos de cuyos elementos no se puede hacer una lista. Para manejarlos vamos a utilizar desigualdades y gráficas. Las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento son las mismas que se vieron en la sección 1.4.

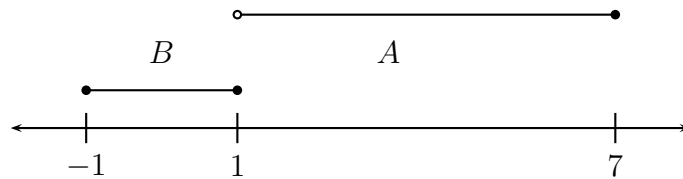
Ejemplo 6.3.1

Sean $U = \mathbb{R}$, $A = (1, 7]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-5, -2]$ y $D = (1, 7)$.

a) $A \cup B$ Para encontrar la solución hacemos las gráficas correspondientes:

Cuadro 6.1: Intervalos

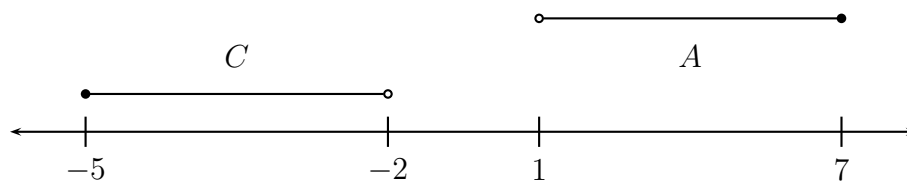
Notación del intervalo	Notación de desigualdad	Gráfica	Conjunto solución
$(-\infty, a]$	$x \leq a$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que x es menor o igual a a ”.
$(-\infty, a)$	$x < a$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que x es menor que a ”.
$[a, \infty)$	$x \geq a$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que x es mayor o igual a a ”.
(a, ∞)	$x > a$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que x es mayor que a ”.
(a, b) Intervalo abierto	$a < x < b$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que $x > a$ y $x < b$ ”.
$[a, b)$ Intervalo semiabierto	$a \leq x < b$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que $x \geq a$ y $x < b$ ”.
$(a, b]$ Intervalo semiabierto	$a < x \leq b$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que $x > a$ y $x \leq b$ ”.
$[a, b]$ Intervalo cerrado	$a \leq x \leq b$		$C.S. = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ Se lee: “El conjunto solución es igual al conjunto de números reales, tales que $x \geq a$ y $x \leq b$ ”.



Leemos de izquierda a derecha todos los intervalos pues se trata de la unión, es decir, tenemos todos los reales entre -1 y 7 . Lo cual nos da como conjunto solución el intervalo

$$A \cup B = [-1, 7].$$

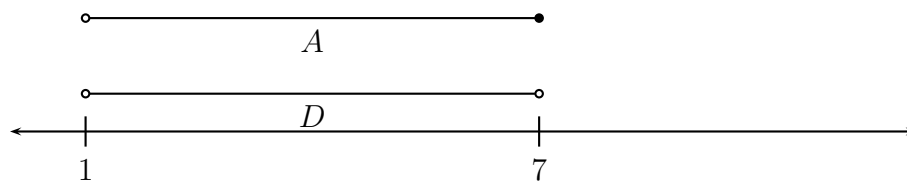
b) $A \cap C$ Las gráficas correspondientes son:



Leemos nuevamente de izquierda a derecha buscando puntos en común. Como estos dos intervalos no tienen intersección el resultado es el conjunto vacío. Por lo tanto

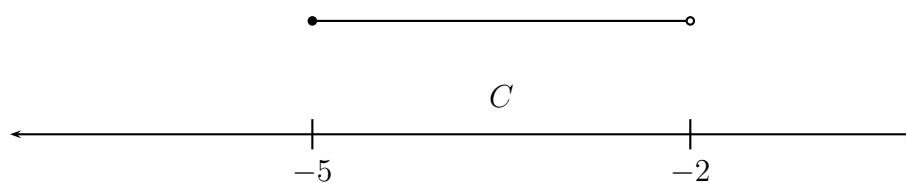
$$A \cap C = \emptyset$$

c) $A - D$



En el caso de la resta, primero ubicamos el intervalo al que le vamos a restar el otro intervalo. Como se puede ver estos dos intervalos son casi iguales, la diferencia es que 7 no es elemento de D . Por lo tanto, se quitan todos los elementos de A excepto el 7 , y el resultado es

$$A - C = \{7\}.$$

d) C^c 

Como sabemos el complemento son todos los elementos que no pertenecen al intervalo. Por lo tanto leyendo de izquierda a derecha empezamos con el menos infinito, como -5 sí está en C , entonces no está en su complemento y por lo tanto el intervalo será abierto. Como en -2 es abierto el complemento será cerrado. Por lo tanto la solución es

$$C^c = (-\infty, -5) \cup [-2, \infty).$$

6.4. Propiedades de las desigualdades

Para trabajar con desigualdades es importante conocer sus propiedades, que se enumeran a continuación:

- I. El sentido de una desigualdad no cambia si se suma o se resta un mismo número real a sus dos miembros; por ejemplo, si a , b y c son tres números reales, donde $a > b$, entonces:
 - a) Si $a > b$ esto implica que $a + c > b + c$
 - b) Si $a > b$ entonces $a - c > b - c$
- II. El sentido de una desigualdad no se altera si se multiplica o divide a ambos miembros por un mismo número real positivo: Si a , b y c son tres números reales donde $a > b$ y $c > 0$, entonces:
 - a) Si $a > b$ entonces $ac > bc$
 - b) Si $a > b$ entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- III. Si se multiplica o divide a ambos miembros de una desigualdad por un mismo número real negativo, el sentido de la desigualdad se invierte; por ejemplo, si a , b y c son tres números reales donde $a < b$ y c es un número negativo ($c < 0$), entonces:
 - a) Si $a > b$ entonces $ac < bc$
 - b) Si $a > b$ entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- IV. Propiedad transitiva de la desigualdad: Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$; $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

6.5. Solución de desigualdades

Definición 6.6. Si se tiene una desigualdad con una variable, entonces decimos que todo valor de ésta, que hace que la desigualdad se cumpla, es una solución de dicha desigualdad y el conjunto que contiene todas sus soluciones es su conjunto solución.

Observación 6.2. Resolver una desigualdad significa encontrar su conjunto solución.

Definición 6.7. Si dos o más desigualdades tienen el mismo conjunto solución decimos que son equivalentes.

6.5.1. Desigualdades lineales con una variable

Definición 6.8. Si en una desigualdad aparece una sola variable con exponente uno, decimos que dicha desigualdad es lineal.

Para resolver una desigualdad lineal la escribimos como una sucesión de desigualdades equivalentes cada vez más simples, es decir, en forma parecida a la solución de una ecuación lineal; o sea, el objetivo es despejar la “ x ” y obtener la desigualdad equivalente, más simple que la original, aplicando las propiedades adecuadas.

Ejemplo 6.5.1

Encontrar el conjunto solución de la desigualdad $5x - 4 > 11$. Empezamos a trabajar con la desigualdad aplicando exclusivamente las propiedades de la sección: 6.4.

$$5x > 11 + 4$$

$$5x > 15$$

$$x > \frac{15}{5}$$

$$x > 5$$

Por lo tanto el intervalo que es el conjunto solución: $(5, \infty)$.

Ejemplo 6.5.2

Encontrar el conjunto solución de la desigualdad $6 - 2x < 4$

Con el fin de que el término que contiene la variable x tenga signo positivo, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por -1 , y obviamente cambiaremos el sentido de la desigualdad.

$$(6 - 2x)(-1) > 4(-1)$$

$$-6 + 2x > -4$$

$$2x > -4 + 6$$

$$2x > 2$$

$$x > \frac{2}{2}$$

$$x > 1$$

Por lo tanto el conjunto solución es: $(1, \infty)$.

6.6. Desigualdades compuestas

Definición 6.9. La unión de dos desigualdades con las palabras “y” u “o”, se denomina desigualdad compuesta.

Ejemplo 6.6.1

a) $x + 5 > 3$ y $x - 5 < 7$.

b) $x + 7 > 3$ o $x + 7 < -3$

Observación 6.3.

- El conjunto solución de una desigualdad compuesta que contenga la palabra “y” está formado por la intersección de los conjuntos solución de ambas.
- El conjunto solución de una desigualdad compuesta que contenga la palabra “o” está formado por la unión de los conjuntos solución de ambas.

Ejemplo 6.6.2

Encontrar el conjunto solución para la desigualdad compuesta: $x + 5 > 3$ y $x - 5 < 7$. Resolviendo la primera obtenemos:

$$x > 3 - 5$$

$$x > -2$$

el intervalo que obtenemos es

$$(-2, \infty).$$

Resolviendo la segunda

$$x < 7 + 5$$

$$x < 12$$

el intervalo que obtenemos es

$$(-\infty, 12).$$

$$C.S. = (-\infty, 12) \cap (-2, \infty) = (-2, 12).$$

Ejemplo 6.6.3

Encontrar el intervalo que corresponde a la solución de la desigualdad compuesta $x+7 > 3$ o $x+7 < -3$.

Resolviendo la primer desigualdad tenemos que

$x > -4$, así obtenemos el intervalo

$$(-4, \infty)$$

cuando resolvemos la segunda tenemos

$$x < -10$$

así que el intervalo queda

$$(-\infty, -10).$$

Así el $c.s. = (-\infty, -10) \cup (-4, \infty)$.

Esta unión no se puede simplificar para que quede un sólo intervalo por esta razón la dejamos indicada.

Ejemplo 6.6.4

Determina el conjunto solución de la siguiente desigualdad compuesta:

$$2x - 9 > -7 \text{ y } 2x - 9 < 7.$$

Podemos resolverla como en el ejemplo 6.6.2, determinando el conjunto solución de cada desigualdad y después haciendo la intersección, o notemos lo siguiente: podemos reescribir la primera como $-7 < 2x - 9$ y así reescribir las dos como

6.7. APLICACIONES CON DESIGUALDADES

$$-7 < 2x - 9 < 7.$$

Ahora, para resolver la anterior, notemos que cambia a tres miembros, así que todo lo que le hagamos a uno se lo hacemos a los tres.

Así, sumamos 9 a cada uno:

$$-7 + 9 < 2x - 9 + 9 < 7 + 9$$

obteniendo

$$2 < 2x < 16;$$

después dividimos entre 2

$$\frac{2}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{16}{2}$$

obteniendo

$$1 < x < 8.$$

Así $c.s. = (1, 8)$.

6.7. Aplicaciones con desigualdades

Ahora debemos añadir a nuestro vocabulario palabras relacionadas con $>$, $<$ como serían: mayor que, menor que, inferior a, mínimo, máximo, superior a, sin olvidar menos y más.

Ejemplo 6.7.1

Traduce al lenguaje algebraico las siguientes afirmaciones, especificando claramente el significado de la incógnita:

- a) Pedro tiene menos de 15 años.
- b) La glucosa debe ser mayor o igual a $70mg/dL$ pero menor a 105.

SOLUCIÓN: a) x :edad de Pedro

$$x < 15$$

b) g :Glucosa

$$70 \leq g < 105$$

Ejemplo 6.7.2

Juan gana más de 3 salarios mínimos. ¿Cuánto gana si el salario mínimo es de 54.80?

SOLUCIÓN: x : salario de Juan

Entonces obtenemos la desigualdad:

$$x > (54.80)(3) = 164.40.$$

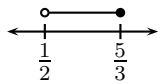
Entonces Juan gana más de 164.40 pesos diarios.

6.8. Ejercicios

Ejercicio 6.8.1. Escribe la gráfica, la desigualdad, y el conjunto solución correspondientes al intervalo $(-\infty, 3]$.

Ejercicio 6.8.2. Escribe el intervalo, la gráfica y el conjunto solución correspondientes a la desigualdad $-3 \leq x < 4$.

Ejercicio 6.8.3. Escribe el intervalo, la desigualdad y el conjunto solución correspondientes a



Ejercicio 6.8.4. Escribe el intervalo, la desigualdad y la gráfica correspondientes al conjunto solución $c.s. = \{x \in \mathbb{R} : x > -2.\}$

Ejercicio 6.8.5. Considera los siguientes intervalos $A = (-1, 9)$, $B = [-5, 5]$, $C = (0.5, 3]$, $D = [-10, -5)$, $E = (7, 9]$. Haz las operaciones que se indican:

- a) $A \cup B$
- b) $C \cup D$
- c) $A \cup E$
- d) $B \cup D$
- e) $A \cup D$
- f) $A \cap B$
- g) $C \cap D$
- h) $A \cap E$
- i) $B \cap D$
- j) $A \cap D$

6.8. EJERCICIOS

- k) $C - D$
- l) $E - A$
- m) $B - D$
- n) $D - A$
- ñ) $E - B$
- o) A^c
- p) C^c considera $U = A$
- q) B^c
- r) D^c
- s) E^c
- t) $A \cap (B \cup C)$
- u) $(E \cup D) \cup C$
- v) $A \cap (E \cap C)$
- w) $(A \cap B) \cup (C \cup D)$

Ejercicio 6.8.6. Sean $U = [-2, 10]$, $A = (1, 7]$, $B = \left(-1, \frac{4}{3}\right)$, $C = [5, 10)$ y $D = [1, 10]$. Haz las siguientes operaciones:

- a) D^c
- b) $A \cup C$
- c) $B \cup C$
- d) $D \cap C$
- e) $B \cap C$
- f) $A - B$
- g) A^c
- h) $B - C$
- i) $(A \cap C) \cup D$
- j) $(A \cap D)^c$

k) $(A \cup B) \cup C$

l) B^c

Ejercicio 6.8.7. Resuelve las siguientes desigualdades describiendo el conjunto solución en forma de intervalos y en forma gráfica:

a) $5x - 1 \geq 2x + 4$

b) $5x - 2 \geq 14 - 3x$

c) $6x - 5 \leq -10x - 4$

d) $\frac{2}{3}x - 3 \leq -1$

e) $5 - \frac{2}{7}x > 15$

f) $-2 - \frac{x}{4} < \frac{1+x}{3}$

g) $3(x-1) - 2(x+3) < 4x$

h) $3(1-2x) < -2 - 2(x+3) - 4$

Ejercicio 6.8.8. Resuelve las siguientes desigualdades, expresa el resultado como un intervalo:

a) $x + 7 \geq 3$

b) $-6 \leq 2 + x$

c) $2x + 4 \leq 8 + x$

d) $7 < x - 5 \leq 10$

e) $-5 < 2x - 3 < 1$

f) $2x - 1 < 4x - 3$

g) $5x + 2 \leq 2x - 5$

h) $\frac{2x-1}{3} < 1 - \frac{x-2}{5}$

i) $x + 1 > 5x - 7$

j) $4(x+2) + 16 > 3(1-x)$

k) $\frac{x}{2} + \frac{x}{7} \geq \frac{9}{7}$

6.8. EJERCICIOS

Ejercicio 6.8.9. Resuelve las siguientes desigualdades compuestas:

- a) $15 - 3x > -6$ y $15 - 3x < 6$
- b) $2x + 5 > 3$ o $2x + 5 > -3$
- c) $-4 \leq 3x + 2 \leq 17$
- d) $-10 < 5(x + 3) \leq 5$
- e) $2x + 3 > 4$ o $3x - 1 < 8$
- f) $-16 \leq 5x - 6 < 10$
- g) $21 < 3(5 - 2x) < 39$
- h) $-1 \leq \frac{3 - x}{2} \leq \frac{1}{2}$

Ejercicio 6.8.10. Resuelve las siguientes desigualdades:

- a) $1 \leq \frac{5x + 4}{6} < 4$
- b) $-7 > x - 5$ o $x - 5 \geq 10$
- c) $-5 < 2x - 3$ y $2x - 3 < 1$
- d) $-3 < \frac{7x - 5}{4} \leq 4$
- e) $6(x - 3) > 4$ o $2x - 3 < -2$
- f) $2 \leq \frac{2x}{5} - \frac{x}{3} < 6$
- g) $2 > \frac{9 - x}{2} > 1$

Ejercicio 6.8.11. Traduce y resuelve en su caso los siguientes ejercicios:

- a) Dentro de tres años tendré más de 18 años.
- b) El triple de un número más ocho unidades es mayor que 50.
- c) Con 480 pesos puedo comprar 4 discos, pero no me alcanza para comprar 5. ¿Entre qué valores se encuentra el precio de un disco?
- d) Aunque al doble de la edad de mi hermano mayor le sumásemos 12 años, obtendríamos un número menor de 50. ¿Cuál es la edad máxima de mi hermano?

- e) Ángel dice: “El triple de mi edad más tres años es mayor que el doble de mi edad más 18 años”.
¿Qué edad tiene Ángel como mínimo?

Ejercicio 6.8.12. ¿Cuáles son los números cuyo triple no sobrepasa su doble en más de 20 unidades?

Ejercicio 6.8.13. Un vendedor de medicamentos de cierta empresa A tiene un sueldo fijo de 60000 pesos mensuales y una comisión de 5000 pesos por cada lote vendido. Otra empresa B paga una comisión de 8000 pesos por lote vendido, pero el sueldo fijo que ofrece es de 30000 pesos al mes. ¿Cuántos lotes debe vender el vendedor de la empresa A para obtener una ganancia mayor que el vendedor de la B ?

Ejercicio 6.8.14. Un alumno de álgebra y geometría analítica de salud realizó dos exámenes de Matemáticas obteniendo calificaciones respectivas de 5.5 y 6.7 puntos. ¿Cuánto debe sacar como mínimo en el tercero para aprobar con 7, si la nota final es la media aritmética de las tres calificaciones?

Rectas

Las razones vistas en el capítulo 3 pueden ser representadas utilizando rectas, que es el tema que trataremos en este capítulo. Veremos los conceptos básicos y distintas representaciones con el objetivo de representar cantidades relacionadas de forma lineal aplicadas a ciencias de la salud.

7.1. El sistema de coordenadas rectangulares

Definición 7.1. *Un par ordenado es una pareja de números que se escriben dentro de un paréntesis y cuyo orden indica su lugar. El primer número o componente corresponde al valor en el llamado eje X o de las abscisas (una recta real horizontal) y el segundo valor corresponde al valor en el eje Y o de las ordenadas (recta real vertical).*

Un par ordenado se representa gráficamente por medio de un punto que se encuentra en la intersección de dos rectas numéricas que le corresponden a dichos valores. El primer número de este par se llama abscisa y el segundo ordenada.

Cada una de las parejas de números $(1, 2)$, $(-1, 5)$ y $(3, -2)$ es un par ordenado.

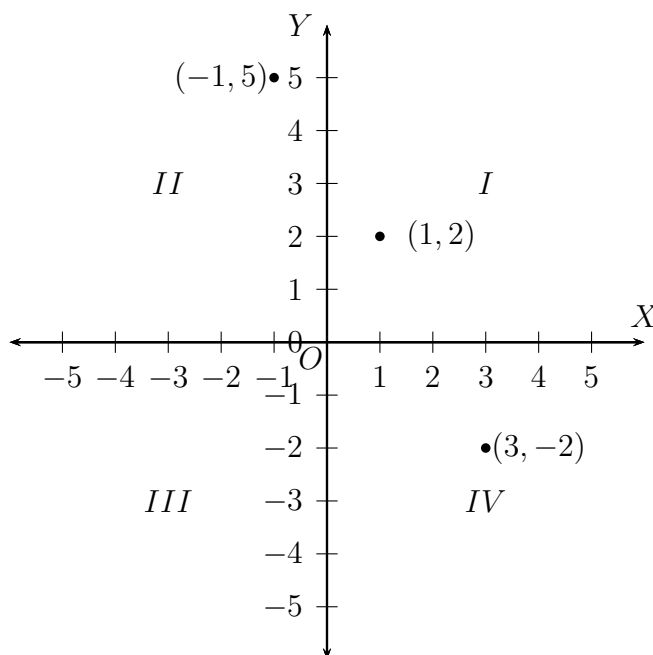


Figura 7.1: Plano cartesiano

Al punto cero común se le llama origen.

Los ejes forman los cuatro cuadrantes, numerados como I, II, III y IV, como se aprecia en la figura 7.1. Este sistema también es llamado plano cartesiano.

Notación, por ejemplo el punto $(1, 2)$, lo denotamos con una letra mayúscula digamos A , o como $A(1, 2)$.

En el capítulo 5 estudiamos ecuaciones de primer grado (también conocidas como lineales) de una sola variable. La solución de tales ecuaciones es un número real.

Ahora examinaremos las ecuaciones lineales con dos variables y éstas tienen soluciones que se escriben como pares ordenados. Por lo general, a diferencia de las ecuaciones lineales con una variable, las ecuaciones con dos variables tendrán un número infinito de soluciones.

Para determinar los pares ordenados que satisfacen la ecuación, seleccionamos cualquier número para una de las variables, lo sustituimos en la ecuación por esa variable y luego resolvemos para la otra variable.

Ejemplo 7.1.1

Determina los pares ordenados que satisfacen la ecuación $2x + 3y = 6$ para los valores $x = 0$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ y $y = 3$

SOLUCIÓN: Sustituimos $x = 0$ en la ecuación $2x + 3y = 6$ para encontrar el par correspondiente.

$$2x + 3y = 6$$

$$2(0) + 3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2.$$

Entonces el punto $(0, 2)$ es solución de la ecuación $2x + 3y = 6$. A este punto le asignamos la letra A . Hacemos lo mismo con $y = 1$ entonces:

$$2x + 3(1) = 6$$

$$2x = 6 - 3 = 3$$

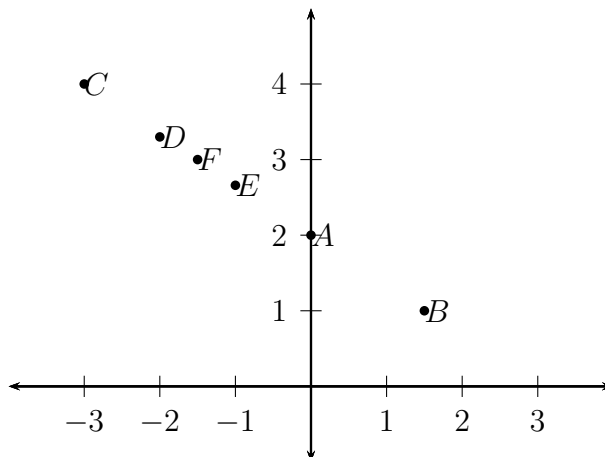
$$x = \frac{3}{2}.$$

También $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ es solución, a este punto le asignamos la letra B .

Haciendo lo mismo para los puntos:

Punto	Obtenemos	Asignamos
$x = -3$	$(-3, 4)$	C
$x = -2$	$\left(-2, \frac{10}{3}\right)$	D
$x = -1$	$\left(-1, \frac{8}{3}\right)$	E
$y = 3$	$\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$	F

Si localizamos todos los puntos cartesianos obtenemos la figura 7.1



Como podemos observar en la figura 7.1 los puntos están sobre una línea recta.

Observación 7.1.

- *Notemos que para hacer la gráfica de una recta sólo necesitamos dos puntos.*
- *Podemos tener rectas horizontales, verticales y oblicuas. Esta inclinación también nos da información de la recta.*

7.2. Pendiente

Definición 7.2. *La pendiente de una recta es su inclinación.*

Para describir y calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ utilizamos la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

No importa qué puntos utilicemos, la pendiente siempre es igual a la razón de la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las abscisas, esto es, mide la proporción entre lo que se eleva y lo que se avanza o recorre horizontalmente:

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$$

Entonces si tenemos $m = \frac{3}{2}$ significa que nos elevamos 3 unidades y avanzamos 2 horizontalmente.

Ejemplo 7.2.1

Determinar la pendiente de la recta $3x - 2y = 2$.

SOLUCIÓN: La recta $3x - 2y = 2$ tiene pendiente $m = \frac{3}{2}$.

Para verificarlo primero hacemos la gráfica para esto necesitamos dos puntos, tomemos $x = 2$,

$$6 - 2y = 2$$

$$4 = 2y$$

$$y = 2,$$

Por lo tanto uno punto es $(2, 2)$.

Para el otro punto tomamos $x = -2$,

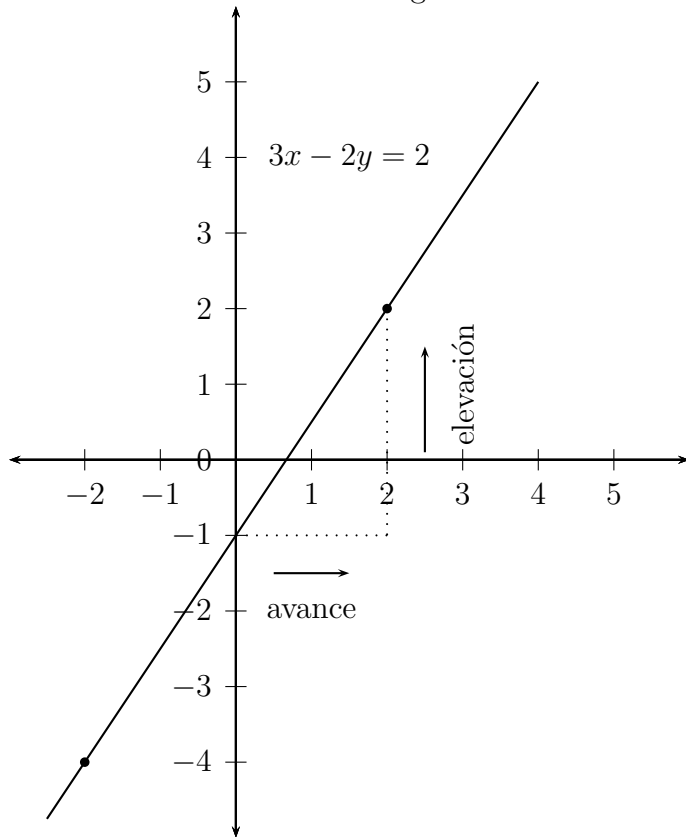
$$-6 - 2y = 2;$$

$$-6 - 2 = 2y;$$

$$y = -4$$

Por lo tanto obtenemos el punto es $(-2, -4)$.

Trazamos los puntos $(2, 2)$ y $(-2, -4)$.

Figura 7.2: Gráfica de la recta $3x - 2y = 2$ 

Notemos que en la recta de la figura 7.2 no importa en qué punto empecemos si nos movemos dos a la derecha y tres hacia arriba regresamos a la recta. Se tienen cuatro tipos de pendientes.

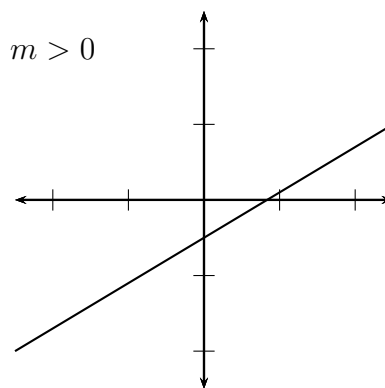


Figura 7.3: Pendiente positiva

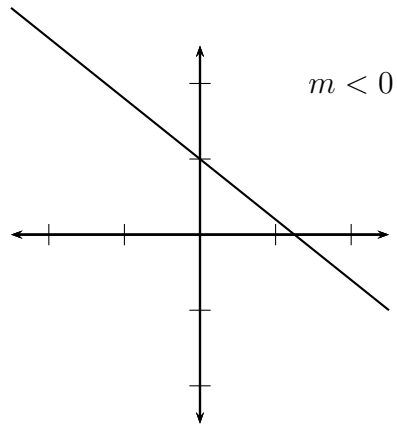


Figura 7.4: Pendiente negativa

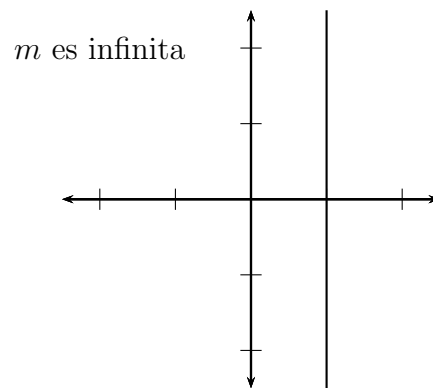


Figura 7.5: Pendiente infinita

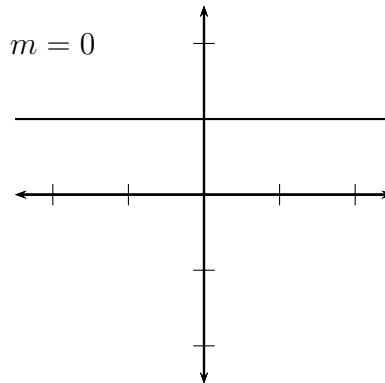


Figura 7.6: Pendiente nula

7.2.1. Fórmulas de la recta

Notemos que si despejamos y de la ecuación $3x - 2y = 2$ del ejemplo 7.2.1 obtenemos

$$2y = 3x - 2$$

$$y = \frac{3x - 2}{2}.$$

Hacemos el cociente

$$y = \frac{3}{2}x - 1,$$

no es casualidad que aparezca la fracción $\frac{3}{2}$ multiplicando a la variable x , esto siempre va a suceder con cualquier recta.

Por otro lado notemos que -1 es precisamente donde cruza la recta el eje Y , es decir, cruza por el punto $(0, -1)$, a este punto se llama ordenada al origen y se denota con la letra b .

Definición 7.3. *La fórmula pendiente (m) ordenada a la origen (b) tiene la forma:*

$$y = mx + b$$

Vamos a poder escribir la ecuación de una recta en las siguientes formas, las cuales tienen un nombre específico:

Forma	Nombre
$Ax + By = C$	Ecuación lineal o forma general de la recta
$y = mx + b$	Pendiente ordenada al origen

Cuadro 7.1: Formas de la recta

Dependiendo de la información que nos den y el problema que nos pidan resolver será la fórmula a utilizar.

Información	Gráfica	Ecuación
Dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$	Se localizan ambos puntos y se traza la recta que los cruza.	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Dan un punto $A(x_1, y_1)$ y la pendiente m	Se localiza el punto en el plano, se usa la pendiente para encontrar otro y se traza una línea que los una.	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Dan la pendiente m y la ordenada al origen b	Se localiza el valor b en el eje y se usa la pendiente para encontrar otro punto y se traza la línea recta.	$y = mx + b$

Cuadro 7.2: Gráficas y ecuación de la Recta

Observación 7.2. Las fórmulas del cuadro 7.2 sólo aplican si la pendiente es positiva o negativa.

7.2.2. Rectas con pendiente infinita y pendiente cero

Las rectas con pendiente infinita pasan por puntos que tienen la misma abscisa, es decir, todos los puntos tienen el mismo valor en x . La gráfica corresponde a una línea vertical como se ve en la figura 7.5.

Se llama infinita pues al sustituir dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como $x_1 = x_2$ en la fórmula de pendiente obtenemos división entre cero.

La ecuación correspondiente a las rectas con pendiente infinita es:

$$x = a$$

donde a es la abscisa al origen, es decir que esta recta cruza el eje x .

Por otro lado las rectas con pendiente cero pasan por puntos que tienen la misma ordenada, esto es, todos los puntos tienen el mismo valor en y . La gráfica corresponde a una línea horizontal como se ve en la figura 7.6.

Se llama pendiente cero pues al sustituir dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la fórmula como $y_1 = y_2$ obtenemos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0.$$

En resumen:

Pendiente	Gráfica	Ecuación
$m = 0$	Recta horizontal que pasa por el $(0, b)$	$y = b$
m infinita	Recta vertical que cruza por el $(a, 0)$	$x = a$

7.3. Intersecciones con los ejes

Las intersecciones con los ejes son: ordenada al origen que pasa por el punto $(0, b)$ del eje Y , y la otra intersección es la abscisa al origen que pasa por el punto $(a, 0)$ del eje X .

Observación 7.3.

- Cuando una recta tiene pendiente positiva o negativa siempre interseca tanto al eje X como al eje Y .
- Cuando la recta tiene pendiente cero y $y \neq 0$ interseca al eje Y en un punto.
- Cuando se trata de la recta $y = 0$ estamos hablando del eje X .
- Cuando la recta tiene pendiente infinita y $x \neq 0$ interseca al eje X en un punto.
- Cuando se trata de la recta $x = 0$ estamos hablando del eje Y .

Para calcular la intersección con el eje y se sustituye $x = 0$ en la ecuación de la recta y se despeja y .

Para obtener la intersección con el eje x se evalúa $y = 0$ y se despeja x .

Ejemplo 7.3.1

Encuentra las intersecciones con los ejes de la ecuación $4x + 6y = 12$:

SOLUCIÓN: Para encontrar la ordenada al origen o intersección con el eje y , despejamos y , obteniendo

$$y = \frac{12 - 4x}{6};$$
$$y = -\frac{4}{6}x + 2$$

por lo tanto la ordenada al origen es $(0, 2)$.

Otra forma es evaluando $x = 0$, obtenemos $6y = 12$ y claramente $y = 2$.

Para encontrar la abscisa al origen, despejamos x , obtenemos

$$x = \frac{12 - 6y}{4} = 3 - \frac{6}{4}y$$

si $y = 0$ entonces $x = 3$,

con lo que la abscisa origen da $(3, 0)$.

Por lo tanto las intersecciones con los ejes son: $(0, 2)$ y $(3, 0)$.

7.3.1. Forma canónica de la recta

Definición 7.4. Cuando hemos encontrado las intersecciones de una recta podemos escribir la ecuación de la recta en otra forma poco usada llamada simétrica o canónica, que corresponde a la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde x está dividida por el valor de la abscisa y y está dividida por el valor de la ordenada al origen, y la suma es igual a 1.

Observación 7.4. Si se escribe la recta en la forma canónica podemos leer directamente valores de intersección con los ejes, el valor que divide a x es la intersección con el eje x y el valor que divide a y es la intersección con el eje y .

Ejemplo 7.3.2

Escribir la forma canónica de la ecuación $4x + 6y = 12$.

SOLUCIÓN: Obtenemos la forma canónica cuando dividimos cada miembro entre 12.

$$\frac{4x + 6y}{12} = \frac{12}{12}$$

obteniendo

$$\frac{4x}{12} + \frac{6y}{12} = 1$$

simplificando obtenemos

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Por lo tanto las intersecciones son $(3, 0)$ y $(0, 2)$.

7.4. Aplicaciones de las rectas

Muchos problemas se pueden modelar utilizando una ecuación lineal con dos incógnitas, es decir una recta.

Ejemplo 7.4.1

Una farmacéutica, produce dos medicamentos, el medicamento A y el medicamento B . Cada medicamento A requiere 3 horas de laboratorio, mientras que el medicamento B requiere 2 horas de laboratorio. Esta semana la empresa dispone de 60 horas para fabricar estos productos.

- Encontrar la ecuación que representa la fabricación de estos medicamentos.
- Si se tiene un pedido de 15 medicamentos del tipo A , cuántos puedo hacer del tipo B .
- Si se tiene un pedido de 12 medicamentos del tipo B , cuántos puedo hacer del tipo A .
- Hacer la gráfica con los puntos obtenidos. Considera como el eje horizontal a A y como el eje vertical a B .
- ¿Qué significa la pendiente en este caso?
- ¿Qué significan en el problema las intersecciones con los ejes?

SOLUCIÓN: Para empezar asignamos a cada letra:

- A : cantidad de medicamentos tipo A producidos.
 B : cantidad de medicamentos tipo B producidos.

Para empezar con el inciso a) tenemos que encontrar la ecuación correspondiente, en este caso la ecuación es

$$3A + 2B = 60,$$

para producir el medicamento A se ocupan 3 horas, por lo tanto se multiplican para obtener las horas, lo mismo para el medicamento B ; la suma de estas dos da 60.

En el caso del inciso b) si se solicitan $A = 15$ entonces sustituimos en la ecuación

7.4. APLICACIONES DE LAS RECTAS

$$3(15) + 2B = 60.$$

Despejamos y obtenemos que

$$B = \frac{60 - 45}{2} = 7.5$$

Esto es, se harían 7.5 medicamentos tipo B .

Para el inciso c) $B = 12$

$$3A + 2(12) = 60$$

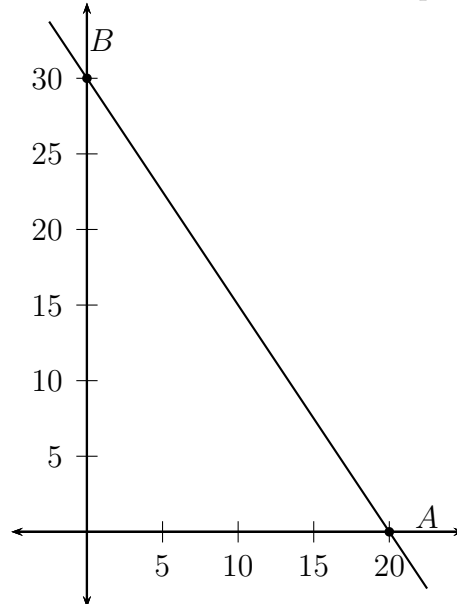
despejamos A obteniendo

$$A = \frac{60 - 2(12)}{3} = 12.$$

Se pueden hacer 12 de cada tipo.

La gráfica podemos hacerla con los puntos obtenidos. Como el eje horizontal es A y el eje vertical es B , los puntos son de la forma (A, B) , por lo tanto, obtenemos del inciso b) $(15, 7.5)$ y por el inciso c) $(12, 12)$, quedando la figura 7.7.

Figura 7.7: Gráfica medicamentos tipo A y B



La pendiente en este caso es negativa y significa que a mayor producción de medicamentos A tendremos una menor cantidad de medicamentos B .

Las intersecciones son $(20, 0)$ y $(0, 30)$ y significan la cantidad de producción de cada tipo de un medicamento.

En el caso de que se dediquen las 60 horas, se producirán 20 medicamentos A o 30 medicamentos B .

Ejemplo 7.4.2

Al Doctor Fonseca le toma 50 minutos atender 8 pacientes, pero al Doctor Herrera le toma sólo 40 minutos hacerlo.

- Determina la relación existente entre el número de minutos que puede trabajar cada Doctor para atender 8 pacientes.
- Haz la gráfica correspondiente.

SOLUCIÓN: Para encontrar la relación del inciso a), es decir, la ecuación correspondiente debemos entender cómo están relacionados los tiempos de trabajo de cada Doctor. Asignamos al doctor Fonseca la posición de x y al Doctor Herrera la posición y .

Si sólo trabaja el Doctor Fonseca y el Doctor Herrera no lo hace tenemos el siguiente punto $(50, 0)$. Por otro lado si el Doctor Herrera trabaja y el Doctor Fonseca no, tenemos $(0, 40)$. Por lo tanto usamos la fórmula:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

hacemos la sustitución y obtenemos:

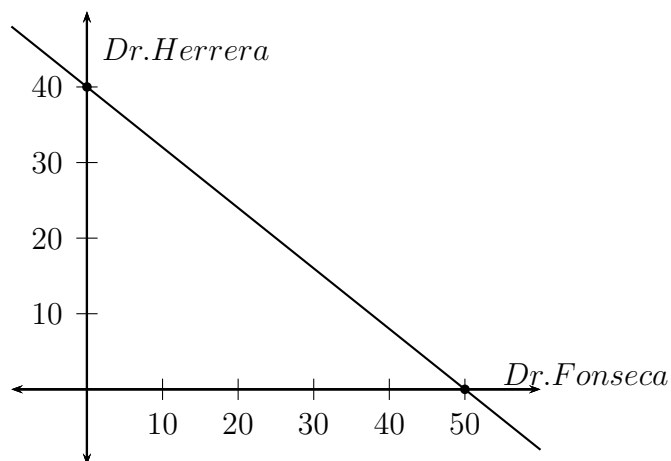
$$y - 0 = \frac{40 - 0}{0 - 50}(x - 50)$$

quedando la ecuación:

$$y = -\frac{4}{5}(x - 50) = -\frac{4}{5}x + 40$$

Para obtener la gráfica simplemente trazamos la recta sobre los puntos $(50, 0)$ y $(0, 40)$.

Figura 7.8: Tiempos de atención Doctor Fonseca y Doctor Herrera



7.5. Ejercicios

Ejercicio 7.5.1. Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano:

- a) $A(3, 1)$
- b) $B(-5, 6)$
- c) $C(4, -1)$
- d) $D(-4, -5)$
- e) $E(-5, 0)$
- f) $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$
- g) $G(0, 0)$

Ejercicio 7.5.2. Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano:

- a) $A(-1, 3)$
- b) $B(-2, -2)$
- c) $C(4, 1)$
- d) $D(3, -4)$

e) $E(-3, 2)$.

Ejercicio 7.5.3. Haz la gráfica de las siguientes rectas tabulando 3 puntos:

a) $2x - 5y = 10$

b) $3x + y = -3$

c) $-3x + 4y = 12$

Ejercicio 7.5.4. Haz la gráfica de la recta que pasa por los puntos dados y determina la pendiente:

a) $A(-2, 4)$ y $B(-8, -9)$

b) $C(2, -1)$ y $D(-2, 1)$

c) $E(0, 0)$ y $F(2, 4)$

Ejercicio 7.5.5. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto y pendiente dados y escribe la ecuación en la forma $y = mx + b$:

a) $A(-6, -3)$ y $m = 1$

b) $C(4, 1)$ y $m = \frac{-1}{2}$

c) $D(2, 6)$ y $m = \frac{2}{3}$

Ejercicio 7.5.6. Dada la ecuación de la recta encuentra la pendiente m y la ordenada al origen b :

a) $4x - 3y + 12 = 0$

b) $y + 2x - 3 = 0$

c) $x - 3y - 6 = 0$

Ejercicio 7.5.7. Considera la recta cuya ecuación es $y - 3x = 1$:

a) Haz la gráfica.

b) Encuentra la pendiente.

c) Determina las intersecciones con los ejes.

d) Determina si el punto $A(0, 1)$ pertenece a la recta.e) Determina si el punto $B(-1, 2)$ pertenece a la recta.

Ejercicio 7.5.8. Determina la gráfica de la recta cuya ecuación es $x = 3$.

Ejercicio 7.5.9. Determina la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = -2$.

7.5. EJERCICIOS

Ejercicio 7.5.10. Encuentra la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente y ordenada al origen dada:

$$m = \frac{1}{4} \text{ y } b = 2$$

$$m = -2 \text{ y } b = -1$$

Ejercicio 7.5.11. Justifica tu respuesta.

- a) ¿ $A(1, 1)$ pertenece a la recta $y = 3x - 2$?
- b) ¿ $B(3, 4)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos $C(1, 2)$ y $D(3, -2)$?
- c) ¿ $E(-1, 3)$ pertenece a la recta con pendiente 2 y que pasa por el punto $F(1, 1)$?

Ejercicio 7.5.12. Encuentra la pendiente, ordenada al origen y gráfica de las siguientes ecuaciones de la recta:

a) $3x - 2y + 6 = 0$

b) $x + 4y - 5 = 0$

c) $4y - 2x = 8$

Ejercicio 7.5.13. Encuentra la gráfica y la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(2, 3)$ y $B(4, 3)$.

Ejercicio 7.5.14. Encuentra la gráfica y la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $C(-2, -4)$ y $D(-2, -5)$.

Ejercicio 7.5.15. Considera la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-1, 4)$.

- a) Haz la gráfica de la recta.
- b) Encuentra la pendiente m .
- c) Determina la ecuación de la recta.
- d) Da la ordenada al origen b .
- e) ¿El punto $C(10, -7)$ pertenece a la recta?
- f) ¿El punto $D(-2, 3)$ pertenece a la recta?

Ejercicio 7.5.16. Considera la recta $4x - 5y + 5 = 0$.

- a) Encuentra la pendiente m .
- b) Determina la ordenada al origen b .
- c) Encuentra intersecciones.

- d) Haz la gráfica.
e) ¿Pertenece el punto $A(-1, 1/5)$ a la recta?

Ejercicio 7.5.17. Dada la ecuación lineal $2x + 3y = 12$ determina:

- a) La forma punto pendiente
b) La pendiente
c) Las intersecciones con los ejes
d) Tres puntos por los que pase la recta
e) La gráfica

Ejercicio 7.5.18. Si la pendiente de una recta es $m = \frac{1}{3}$ y la recta pasa por el punto $(10, 4)$, determina la ecuación general de la recta y su gráfica.

Ejercicio 7.5.19. Determina la ecuación y dibuja la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(-3, 3)$ y $(4, 3)$.

Ejercicio 7.5.20. Encuentra la forma punto pendiente y la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, -2)$ y $(4, 3)$.

Ejercicio 7.5.21. Considera la recta que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-2, 1)$:

- a) Determina la pendiente.
b) Encuentra la ordenada al origen.
c) Escribe la ecuación en la forma general.
d) Encuentra las intersecciones con los ejes de la recta.
e) Dibuja la gráfica.

Ejercicio 7.5.22. Determina la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = \frac{2}{5}$ y pasa por el punto $(4, -3)$.

Ejercicio 7.5.23. Determina la ecuación de la recta si interseca al eje x en el punto $x = 2$ y al eje y en el punto $y = 4$.

Ejercicio 7.5.24. Determina si los puntos P y Q dados pertenecen o no a la recta dada:

- a) $P(1, 7)$, $Q(-3, 1)$, $y = 2x + 5$
b) $P(2, 1)$, $Q(1, 2)$, $y = 2$
c) $P(4, -1)$, $Q(2, 2)$, $x + y = 3$

7.5. EJERCICIOS

Ejercicio 7.5.25. La farmacéutica “ABC” produce medicamentos con un costo de \$13 c/u . La empresa tiene costos diarios fijos (luz, renta, salarios, etcétera) que ascienden a \$300 y planea vender cada medicamento producido a \$19 c/u .

- Determina la ecuación lineal que existe entre la ganancia, G , de la empresa y el número, n , de medicamentos producidos diarios.
- Haz la gráfica de esta relación.
- Describir el significado de la pendiente y la ordenada al origen.

Ejercicio 7.5.26. La longitud, L (en centímetros), de un feto de 12 semanas o más de edad, se puede establecer como la ecuación $L = 1.53E - 6.7$ aproximadamente, con E igual a la edad en semanas.

- Dibuja esta relación.
- Describe el significado de la pendiente y de la ordenada al origen.
- Determina la longitud del feto a las 15 semanas.

Ejercicio 7.5.27. Un libro de medicina se deprecia linealmente. Si su valor hace cuatro años era de \$1800 y ahora vale \$1000 :

- Determina la ecuación que describe el valor V (en pesos) del libro en términos de tiempo (en años).
- Calcula el valor del libro el año pasado.
- Calcula el valor del libro para el próximo año.

Ejercicio 7.5.28. Un avión está a 22 kilómetros de la pista en donde aterrizará y vuela a una altura de 3 kilómetros. Determina la pendiente de su descenso.

Ejercicio 7.5.29. La suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180° . Si es un triángulo rectángulo, determina la relación que existe entre los valores en grados de los ángulos no rectos y grafica esta relación. ¿Por qué sólo hay gráfica en el primer cuadrante?

Ejercicio 7.5.30. En el curso de Psicología se realizarán dos exámenes, el primero tiene un valor del 35% y el segundo del 65%. La escala de calificaciones en cada examen es de 1 a 100. Si x y y representan las calificaciones del primer y segundo exámenes respectivamente, y un alumno quiere obtener una calificación de 70, escribe la ecuación lineal que hay entre x y y , luego dibuja esta ecuación.

Ejercicio 7.5.31. La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por $F = \frac{9}{5}C + 32$:

- Traza la gráfica de esta ecuación, considerando C en el eje horizontal y F en el eje vertical.

- b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la ordenada al origen y que representa?

Ejercicio 7.5.32. Si C es el nivel de colesterol y s las semanas de ejercicio transcurridas, se puede aproximar esta relación con la recta $C = -3s + 215$.

- a) Traza la gráfica de esta ecuación, considera C en el eje vertical y s en el eje horizontal
- b) ¿Qué representa la pendiente? ¿Qué representa la ordenada al origen?
- c) ¿Cuál es el nivel de colesterol a las 5 y a las 12 semanas?

Ejercicio 7.5.33. Conforme el aire seco se eleva, se expande y enfría. Si la temperatura a nivel del suelo es de $20^\circ C$ y a una altitud de 1 km es de $10^\circ C$, expresa la temperatura T (en $^\circ C$) en el eje vertical, y en el eje horizontal la altitud h . (Supongamos que la expresión es lineal).

- a) Traza la gráfica de la recta obtenida. ¿Qué representa la pendiente?
- b) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

Ejercicio 7.5.34. La carretera de Oaxtepec a Xochimilco en el tramo entre Santa Ana Tlacotenco y Tecomitl es una recta y desciende en forma pronunciada hacia Tecomitl. Este tramo tiene una pendiente del 6%, lo que significa que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Al conducir por esta carretera se observa que se ha descendido una distancia de 300 metros. ¿Cuál es el cambio en la distancia horizontal?

Ejercicio 7.5.35. Un consultorio adquiere una computadora por \$4000. Después de 4 años se espera que el valor de la misma sea de \$200. Para fines de contabilización, el consultorio utiliza la depreciación lineal para obtener el valor de la computadora en un tiempo dado. Esto quiere decir que si V es el valor de la misma en el tiempo t , entonces se utiliza una ecuación lineal para relacionar V con t .

- a) Obtén la ecuación lineal que relaciona a V con t (V asígnala al eje vertical y t al eje horizontal).
- b) ¿Qué representa la pendiente y la intersección con el eje vertical?

Ejercicio 7.5.36. Un fabricante de aparatos médicos encuentra que, si produce x baumanómetros en un mes, su costo de producción está dado por la ecuación $y = 60x + 30000$ pesos.

- a) Traza la gráfica de esta ecuación.
- b) ¿Qué representan la pendiente y la intersección de la recta con el eje y ?

Ejercicio 7.5.37. Los biólogos han observado que la frecuencia del canto de los grillos de una cierta especie está relacionado con la temperatura ambiental, y la relación parece ser una recta. Un grillo produce 120 sonidos por minuto a $70^\circ F$ y 168 por minuto a $80^\circ F$.

- a) Obtén la ecuación de la recta que relaciona la temperatura t (eje vertical) y el número de sonidos por minuto n (eje horizontal).

7.5. EJERCICIOS

b) Si los grillos están cantando a 150 sonidos por minuto, estima la temperatura ambiental.

Ejercicio 7.5.38. El costo mensual de conducir un automóvil depende del número de kilómetros recorridos. Luisa observó que durante el mes de mayo gastó \$380 por 480 km, y en *junio* \$460 por 800 km:

- a) Expresa el costo mensual C (eje vertical) en relación de la distancia recorrida d (eje horizontal), suponiendo que se trata de una ecuación lineal (recta).
- b) ¿Cuánto gastará si recorre 1500 km en un mes?
- c) Traza la gráfica de la ecuación.
- d) ¿Qué representa la pendiente de la recta?
- e) ¿Qué representa la intersección con el eje vertical?

Sistemas de ecuaciones lineales

Cuando hablamos de sistemas de ecuaciones en particular, cuando se trata de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, estamos trabajando con dos rectas. Si las rectas se cruzan en un sólo punto tenemos una solución. Algunos problemas de mezclas y porcentajes requieren de los métodos que veremos en este capítulo.

8.1. Rectas paralelas

Definición 8.1. *Dos rectas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ son paralelas si sus pendientes son iguales, es decir, $m_1 = m_2$.*

Observación 8.1. *Si tenemos que $b_1 = b_2$ entonces se trata de la misma recta.*

Ejemplo 8.1.1

Las rectas $3x + 2y = 12$ y $6x + 4y = 16$ son paralelas.

SOLUCIÓN: Verificamos esto encontrando las pendientes de ambas. Despejando de la primera recta obtenemos

$$y = \frac{12 - 3x}{2} = -\frac{3}{2}x + 6$$

por lo tanto la pendiente es

$$m_1 = -\frac{3}{2}.$$

Hacemos lo mismo con la segunda recta y obtenemos:

$$y = \frac{16 - 6x}{4} = -\frac{6}{4}x + 4$$

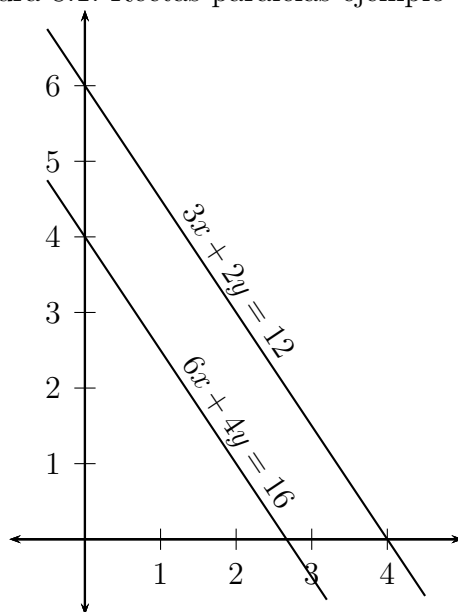
así la pendiente

8.1. RECTAS PARALELAS

$$m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2},$$

por lo tanto tienen la misma pendiente y esto lo podemos verificar en la figura 8.1 al hacer las gráficas de ambas rectas.

Figura 8.1: Rectas paralelas ejemplo 8.1.1



Observación 8.2. *Es muy importante hacer tanto lo gráfico como lo geométrico para verificar los resultados en ambos lenguajes.*

Ejemplo 8.1.2

Ahora consideremos las rectas $2x - y = 4$ y $-4x + 2y = -8$.

SOLUCIÓN: Hacemos el despeje de cada uno y obtenemos:

$$y = 2x - 4 \text{ y } y = \frac{4x - 8}{2} = 2x - 4.$$

Como podemos observar no sólo tienen la misma pendiente, también tienen la misma ordenada al origen, por lo tanto se trata de la misma recta.

Observación 8.3.

- *Cuando hablamos de dos rectas, la intersección de éstas es la solución al sistema de ecuaciones que forman.*

- Las rectas paralelas, como en el ejemplo 8.1.1, no se intersectan y por lo tanto no tienen puntos en común, y decimos que no tienen solución.
- Las rectas del ejemplo 8.1.2 se intersectan en todos los puntos, y si se trata de dar solución al sistema decimos que el sistema tiene un número infinito de puntos que son solución.

8.2. Rectas perpendiculares

Definición 8.2. Las rectas perpendiculares al intersectarse forman un ángulo de 90° . Dos rectas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ son perpendiculares cuando $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Observación 8.4.

- Cuando las rectas no son paralelas ni perpendiculares, simplemente decimos que son oblicuas.
- Las rectas perpendiculares, como las oblicuas, se intersectan en un sólo punto.

Ejemplo 8.2.1

Verificar que las rectas $3x - y = 2$ y $x + 3y = 9$ son perpendiculares.

SOLUCIÓN: Despejando de la primera recta obtenemos:

$$y = 3x - 2$$

y despejando de la segunda tenemos:

$$y = \frac{9 - x}{3} = -\frac{x}{3} + \frac{9}{3} = -\frac{x}{3} + 3$$

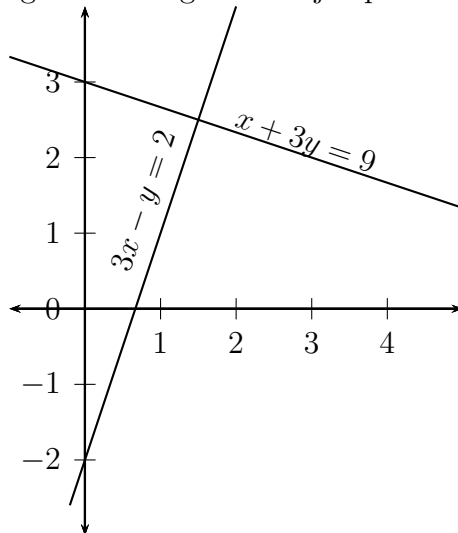
esto es $m_1 = 3$ y $m_2 = -\frac{1}{3}$.

Verifiquemos que se cumple

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$3 = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Figura 8.2: Figura del ejemplo 8.2.1



Como podemos ver la intersección está aproximadamente en $x = 1.5$ y $y = 2.5$. Hacemos la sustitución y vemos que efectivamente se cumplen ambas ecuaciones en el punto $(1.5, 2.5)$ $3(1.5) - 2.5 = 2$ y $1.5 + 3(2.5) = 9$.

Ejemplo 8.2.2

Verificar que $4x - 2y = -2$ y $2y + 6x = -8$ son oblicuas.

SOLUCIÓN: Haciendo el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores obtenemos como despeje

$$y = \frac{4x + 2}{2} = 2x + 1$$

y

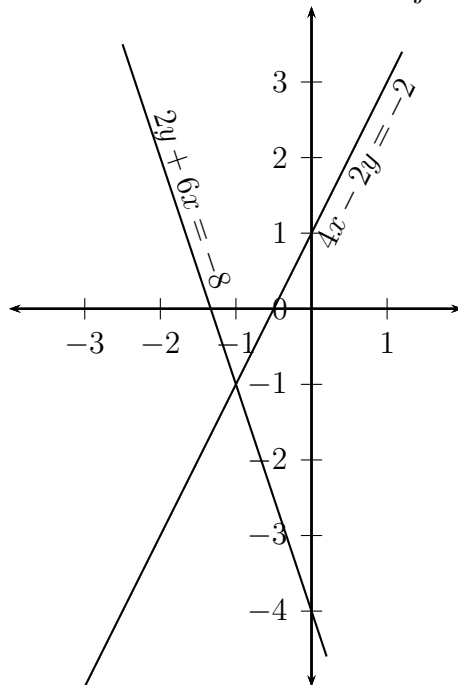
$$y = \frac{-6x - 8}{2} = -3x - 4$$

por lo que tenemos como pendientes $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$ por lo tanto no son paralelas y como

$$2 \neq -\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

tampoco son perpendiculares, entonces sólo podemos concluir que son oblicuas.

Figura 8.3: Gráficas de las rectas del ejemplo 8.2.2



En este caso podemos ver que la solución está en el punto $(-1, -1)$ al hacer la sustitución obtenemos: $4(-1) - 2(-1) = -2$ y $2(-1) + 6(-1) = -8$. Por lo tanto $(-1, -1)$ es efectivamente la solución.

Observación 8.5. *No siempre podemos determinar la solución por este método llamado gráfico. Pero podemos aproximar las soluciones.*

8.3. Método sustitución

Hasta el momento en muchos problemas que hemos visto aparecen dos incógnitas o hasta tres, y el método utilizado de forma natural es hacer sustitución para trabajar con una incógnita. El método consiste en despejar la incógnita que sea más fácil de cualquiera de las dos ecuaciones y después sustituir este despeje en la otra. Resolvemos la ecuación que queda y regresamos a la primera ecuación para sustituir el valor obtenido, y de esta forma el valor que nos falta.

Ejemplo 8.3.1

Resolver

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 14 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando el método de sustitución.

8.3. MÉTODO SUSTITUCIÓN

SOLUCIÓN: Observamos que la más sencilla de despejar es la y de la segunda ecuación; así obtenemos:

$$2x - 2 = y \text{ esto es } y = 2x - 2$$

sustituimos esto en la primera ecuación esto es:

$$3x + 2(2x - 2) = 14$$

y resolvemos la ecuación obtenida

$$3x + 4x - 4 = 14;$$

$$7x = 14 + 4;$$

$$x = \frac{18}{7}.$$

Después sustituimos este valor en

$$y = 2x - 2 = 2\left(\frac{18}{7}\right) - 2 = \frac{22}{7}.$$

Por lo tanto la solución es:

$$x = \frac{18}{7} \text{ y } y = \frac{22}{7}.$$

Ejemplo 8.3.2

Resolver el siguiente sistema por sustitución:

$$2x - 3y = 1$$

$$x + 3y = 5$$

SOLUCIÓN: En este caso la que es más fácil de despejar es la x de la segunda ecuación; obtenemos

$$x = 5 - 3y$$

sustituimos en la primera ecuación y obtenemos:

$$2(5 - 3y) - 3y = 1;$$

$$10 - 6y - 3y = 1;$$

$$-9y = 1 - 10;$$

$$-9y = -9;$$

$$y = \frac{-9}{-9} = 1 \text{ sustituimos } x = 5 - 3(1) = 2.$$

Por lo tanto la solución $x = 2$ y $y = 1$.

Observación 8.6. El método de sustitución nos conviene cuando x o y tienen coeficiente 1 o -1 en alguna de las ecuaciones pues despejar es muy fácil.

8.4. Método de igualación

Cuando ninguna de las dos incógnitas tiene coeficiente 1 o -1 despejar involucra fracciones, las cuales para algunas personas no son tan agradables de resolver.

Para usar el método de igualación lo que hacemos ahora es:

- I. Escoger una de las incógnitas.
- II. Despejar la incógnita elegida en las dos ecuaciones.
- III. Igualar las ecuaciones.
- IV. Resolver la ecuación de primer grado que resulta.

Ejemplo 8.4.1

Considerar el siguiente sistema y resolver por el método de igualación:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: Escogemos x . Despejando la primera ecuación queda:

$$x = \frac{6 + 3y}{2}$$

y la segunda

$$x = \frac{12 - 2y}{3}$$

ahora lo que hacemos es igualar ambas ecuaciones obteniendo:

$$\frac{6 + 3y}{2} = \frac{12 - 2y}{3}$$

multiplicamos cruzado

$$3(6 + 3y) = 2(12 - 2y)$$

$$18 + 9y = 24 - 4y;$$

$$9y + 4y = 24 - 18;$$

$$13y = 6;$$

8.4. MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$y = \frac{6}{13}.$$

Después sustituimos el resultado en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$x = \frac{6 + 3\left(\frac{6}{13}\right)}{2} = \frac{48}{13}$$

Por lo tanto la solución $x = \frac{48}{13}$ y $y = \frac{6}{13}$.

Ejemplo 8.4.2

Resolver

$$\begin{aligned}4x - 11y &= -3 \\6x + 7y &= 19\end{aligned}$$

aplicando el método de igualación.

SOLUCIÓN: Escogemos x ; despejando de la primera queda:

$$x = \frac{-3 + 11y}{4}$$

y la segunda

$$x = \frac{19 - 7y}{6}$$

igualamos ambas ecuaciones obteniendo

$$\frac{-3 + 11y}{4} = \frac{19 - 7y}{6}$$

$$6(-3 + 11y) = 4(19 - 7y);$$

$$-18 + 66y = 76 - 28y;$$

$$66y + 28y = 76 + 18 ;$$

$$94y = 94;$$

$$y = \frac{94}{94} = 1.$$

Después sustituimos el resultado en cualquiera de las ecuaciones:

$$x = \frac{-3 + 11(1)}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Por lo tanto la solución es $x = 2$ y $y = 1$.

8.5. Método de suma y resta

Este método consiste en reescribir las ecuaciones y sustituirlas por otras equivalentes, tales que, al sumarlas o restarlas desaparezca una de las incógnitas.

Para hacer esto vamos a multiplicar convenientemente constantes de tal forma que tengan el mismo coeficiente con distinto signo. Al sumarlos se anulan y queda una ecuación muy sencilla de resolver.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ 3x + 2y &= 19 \end{aligned}$$

En este caso multiplicamos por 3 la primera y por -2 la segunda, así la x tendrá en una coeficiente 6 y en la otra -6 .

$$\begin{aligned} 3(2x - 3y) &= 3(4) \\ -2(3x + 2y) &= -2(19) \end{aligned} ;$$

$$\begin{array}{r} 6x - 9y = 12 \\ -6x - 4y = -38 \\ \hline -13y = -26 \end{array}$$

las sumamos y obtenemos $-13y = -26$;

$$y = \frac{-26}{-13} = 2$$

sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo, la primera

$$2x - 3(2) = 4$$

y resolvemos

$$\begin{aligned} 2x &= 4 + 6 \\ x &= \frac{10}{2} = 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es $x = 5$ y $y = 2$.

Ejemplo 8.5.1

Resolver el siguiente sistema por el método de suma y resta:

$$\begin{aligned} 4x - 11y &= -3 \\ 6x + 7y &= 19 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: Multiplicamos ahora 6 por la primera y -4 por la segunda, así x tendrá como coeficiente 24 y -24 .

$$\begin{array}{r} 6(4x - 11y) = 6(-3) \\ -4(6x + 7y) = -4(19) \\ \\ 24x - 66y = -18 \\ -24x - 28y = -76 \\ \hline -94y = -94 \end{array}$$

sumando obtenemos

$$\begin{aligned} -94y &= -94 \\ y &= \frac{-94}{-94} = 1 \end{aligned}$$

sustituimos en la primera ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} 4x - 11(1) &= -3 \\ 4x &= -3 + 11 = 8 \\ x &= \frac{8}{4} = 2. \end{aligned}$$

La solución es $x = 2$ y $y = 1$.

8.6. Resolución de problemas

Aplicamos la misma estrategia descrita en la sección 5.4.

Ejemplo 8.6.1

La Asociación Nacional de Cardiólogos de de la Ciudad de México organizó una fiesta a la que fueron 133 de sus miembros. El ingreso total por boletos de admisión fue 58450 pesos. El precio de los boletos fue 300 por socio y 650 por socio y pareja. ¿Cuántos socios asistieron con pareja?

SOLUCIÓN: Primero hacemos la asignación de las variables:

- x : Cantidad de socios que asistieron sin pareja
- y : Cantidad de socios que asistieron con pareja

Del primer enunciado obtenemos que asistieron un total de 133 miembros o socios:

$$x + y = 133.$$

En el segundo enunciado obtenemos un total, y en el tercero cuánto pagó cada socio. Con estos dos enunciados obtenemos la ecuación

$$300x + 650y = 58450.$$

Para resolver este sistema de ecuaciones utilizamos cualquiera de los métodos antes mencionados. Despejamos de la primera ecuación a x

$$x = 133 - y$$

y sustituimos en la segunda ecuación obteniendo:

$$300(133 - y) + 650y = 58450$$

$$39900 - 300y + 650y = 58450$$

$$350y = 58450 - 39900$$

$$y = \frac{18550}{350} = 53.$$

Sustituimos para obtener el valor de x ,

$$x = 133 - (53) = 80.$$

En conclusión, asistieron 53 socios con pareja y 80 fueron solos.

8.6.1. Problemas de porcentaje

En este tipo de problemas se debe tener un buen manejo del cálculo de porcentajes, los cuales se ven en la sección 3.5.

Ejemplo 8.6.2

Dos sumas de dinero que totalizan 20000 pesos ganan, respectivamente, 5% y 6% de interés anual. Encontrar las cantidades si juntas ganan 1080.

SOLUCIÓN: x : es la cantidad de dinero que está al 5%

y : es la cantidad de dinero que está al 6%

Del primer enunciado obtenemos que

$$x + y = 20000,$$

8.6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

el último enunciado nos indica que el 5% de la cantidad x más el 6% de la cantidad y dan un total de 1080, escribimos el porcentaje como fracción y la traducción correspondiente queda:

$$\frac{5}{100}x + \frac{6}{100}y = 1080.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

Despejamos y de la primera ecuación

$$y = 20000 - x$$

y sustituimos en la segunda

$$\frac{5}{100}x + \frac{6}{100}(20000 - x) = 1080$$

realizamos la multiplicación indicada y obtenemos:

$$\frac{5}{100}x + 1200 - \frac{6}{100}x = 1080$$

$$\frac{5}{100}x - \frac{6}{100}x = 1080 - 1200$$

$$-\frac{1}{100}x = -120$$

$$x = \frac{-120}{-\frac{1}{100}} = 12000$$

sustituimos x para obtener y

$$y = 20000 - x = 20000 - 12000 = 8000.$$

La solución por lo tanto es 12000 pesos están al 5% y 8000 están al 6%.

Ejemplo 8.6.3

Un medico realizó dos inversiones de un total de \$10000 pesos. En una de las inversiones obtuvo un 10% de utilidad, pero en la otra tuvo una pérdida de 12%. Si la pérdida neta fue de \$540, ¿qué cantidad tenía en cada inversión?

SOLUCIÓN: a : cantidad cuya ganancia es el 10%

b : cantidad cuya perdida es el 12%

Del primer enunciado tenemos que

$$a + b = 10000.$$

Como se trata de una pérdida podemos hacer uso de números negativos; resulta lo siguiente:

$$\frac{10}{100}a - \frac{12}{100}b = -540$$

despejamos a de la primera ecuación,

$$a = 10000 - b$$

sustituimos en la segunda ecuación,

$$\frac{10}{100}(10000 - b) - \frac{12}{100}b = -540$$

haciendo las operaciones

$$1000 - \frac{10}{100}b - \frac{12}{100}b = -540$$

$$-\frac{22}{100}b = -540 - 1000$$

$$-\frac{22}{100}b = -1540$$

$$b = \frac{-1540}{-\frac{22}{100}} = 7000$$

sustituimos para obtener la cantidad a ,

$$a = 10000 - b = 10000 - 7000 = 3000$$

\$3000 pesos fue la cantidad en que se tuvo una ganancia del 10% y \$7000 pesos fue la cantidad en la que se tuvo una pérdida del 12%.

8.6.2. Problemas de mezclas

En los problemas de mezclas se manejan porcentajes, y cantidad de volumen de soluciones. Estos problemas pueden resolverse usando una sola incógnita. En esta sección se trabajará con una o dos variables.

Ejemplo 8.6.4

¿Cuántos litros de agua deben agregarse a 6 litros de una solución de sal al 8% y agua, para producir otra al 5% de sal?

SOLUCIÓN: x : volumen de agua que se debe agregar.

y : volumen final de solución.

Del primer enunciado obtenemos que

$$y = x + 6$$

ahora vamos a incorporar los porcentajes correspondientes de sal que se deben tener en cada cantidad de la solución.

8% de 6,

0% de x

y

5% de y

obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{8}{100}(6) + \frac{0}{100}(x) = \frac{5}{100}y$$

sustituimos la primera ecuación que se obtuvo

$$\frac{8}{100}(6) + \frac{0}{100}(x) = \frac{5}{100}(x + 6)$$

$$\frac{48}{100} = \frac{5}{100}x + \frac{30}{100}$$

podemos multiplicar por 100 a ambos lados

$$48 = 5x + 30$$

$$5x = 48 - 30$$

$$x = \frac{18}{5} = 3.6$$

Se deben agregar 3.6 litros de agua.

Observación 8.7. *En este tipo de problemas debemos entender que se están manejando cantidades de volumen y sustancia. De este modo, cuando se plantea una ecuación, las cantidades deben coincidir en cada una, esto es litros, onzas, gramos etcétera.*

Ejemplo 8.6.5

Un estudiante de Promoción de la Salud mezcló 48 onzas de una solución de yodo al 4% con 40 onzas de una solución al 15% de la misma sustancia. ¿Cuál es el porcentaje de yodo en la mezcla?

SOLUCIÓN: x : porcentaje de yodo de la mezcla final.

El volumen final es la suma de 48 y 40 esto es 88.

Calculamos la cantidad de yodo de cada mezcla:

$$\frac{4}{100}(48) + \frac{15}{100}(40) = \frac{x}{100}(88)$$

multiplicamos por 100 a ambos lados

$$4(48) + 15(40) = 88x$$

$$192 + 600 = 88x$$

$$792 = 88x$$

$$x = \frac{792}{88} = 9$$

La mezcla final es una solución al 9% de yodo.

8.7. Ejercicios

Ejercicio 8.7.1. Determina si los siguientes sistemas de rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas, así como el punto de intersección si aplica.

a)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 \\ 4x - 6y &= -7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -1 \\ 2x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

8.7. EJERCICIOS

c)
$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 2 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x - 6y &= 1 \\ 2x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.7.2. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es paralela a la recta $4x - 2y = 6$. Haz las gráficas de ambas rectas.

Ejercicio 8.7.3. Determina la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $6x - 3y = 9$ y que tiene ordenada al origen 2. Haz las gráficas de las rectas.

Ejercicio 8.7.4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método gráfico.

a)
$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x + 3y &= -1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 7x - 3y &= 16 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.7.5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

a)
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y &= 0 \\ x + \frac{2}{3}y &= 8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + 3y &= -3 \\ 4x + y &= 5 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.7.6. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación.

a)
$$\begin{aligned} 2x - 2y &= -6 \\ 3x + 3y &= -9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ 3x - 2y &= 11 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x + 10y &= 1 \\ 8x - 15y &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.7.7. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de suma y resta.

a)
$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 6 \\ 4x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 24x - 12y &= -24 \\ 3x + 2y &= -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 6x + 8y &= 10 \\ 9x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.7.8. Haz la gráfica del sistema de ecuaciones y encuentra la intersección (solución, si la tiene) de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 3x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 4x + 3y &= -1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad x + y &= -1 \\ 7x - 3y &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad x + 2y &= 8 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad 24x - 12y &= -24 \\ 3x + 2y &= -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 6x + 8y &= 10 \\ 9x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad 3x + 3y &= 6 \\ 4x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad 2x - 2y &= 2 \\ 3x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad 2x - 2y &= -6 \\ 3x + 3y &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad 2x + 3y &= 3 \\ 3x - 2y &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad 4x + 10y &= 1 \\ 8x - 15y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad x + 4y &= 4 \\ 3x + 6y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m)} \quad \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y &= \frac{5}{6} \\ 6x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

8.7. EJERCICIOS

$$\begin{aligned} \text{n) } 4x + 10y &= -6 \\ 8x - 15y &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\text{n) }} 3x - 2y &= -29 \\ 4x - 3y &= -41 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.7.9. La suma de dos números es 1529 y su diferencia es 101. Hallar esos números.

Ejercicio 8.7.10. En un día feriado un estudiante fue a su casa yendo y viniendo por diferentes caminos. El viaje de regreso fue más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total fue de 69km. Determina cuál fue la distancia recorrida en cada tramo.

Ejercicio 8.7.11. Un cuidador ocasional de automóviles cobra 5 pesos por hora antes de la medianoche y 7.50 después de la media noche. El número de horas que trabajó antes de la medianoche fue el cuádruple menos una hora de lo que trabajó después de medianoche. Determina cuántas horas trabajó en cada periodo, si en total ganó 105 pesos.

Ejercicio 8.7.12. La colecta de la Cruz Roja en una escuela primaria fue de 1071 pesos. Si había 650 niños y cada uno puso una moneda de un peso o de dos pesos, ¿cuántas monedas de cada valor se recolectaron?

Ejercicio 8.7.13. A cierta ciudad situada en una isla se transportan diariamente 50 paquetes de medicamento, haciéndose parte del recorrido en camión y parte en helicóptero. En cada viaje el camión transporta 10 paquetes y el helicóptero 6. El helicóptero hace un viaje más que el doble de viajes del camión. ¿Cuántos viajes efectúa cada uno al día?

Ejercicio 8.7.14. Dos sumas de dinero que totalizan \$45000 ganan, respectivamente, 6.8 % y 8.4 % de interés anual. Encuentra ambas cantidades si juntas dan una ganancia de \$3524.

Ejercicio 8.7.15. El doctor Jaimes tiene \$10000 pesos invertidos al 6 %. ¿Cuánto debe invertir al 7.5 % para que el interés de ambas inversiones le den un ingreso de \$4862.

Ejercicio 8.7.16. La nutrióloga Pérez invirtió dos sumas iguales de dinero, una de al 5.25 % y la otra de 7.75 %. ¿Cuánto invirtió en total si su ganancia por el interés fue de \$1040 pesos.

Ejercicio 8.7.17. La dentista Ramírez realizó dos inversiones cuya diferencia es \$18000. La inversión menor es al 7.8 % y la mayor al 8.6 %. Determina las cantidades invertidas si el ingreso anual total por intereses es de \$2860.

Ejercicio 8.7.18. El señor López invirtió una parte de \$40000 pesos al 6.2 % y el resto al 7.4 %. Si su ingreso por la inversión al 7.4 % fue de \$1440 más que la inversión al 6.2 %, ¿qué tanto estaba invertido a cada tasa?

Ejercicio 8.7.19. El promotor de salud de un pequeño hospital realizó dos inversiones con un total de \$30000 pesos. En una de ellas obtuvo 20 % de ganancia, pero en la otra perdió un 25 %. Si la pérdida neta fue de \$3000 pesos, ¿cuánto tenía en cada inversión?

Ejercicio 8.7.20. Teodoro compró 2 kilogramos de arcilla oscura y 3 kilogramos de arcilla clara, pagando en total \$22. Más tarde necesitó 1 kilogramo de arcilla oscura y 2 kilogramos de arcilla clara, que todo junto costó \$13. ¿Cuánto pagó por kilogramo de cada tipo de arcilla?

Ejercicio 8.7.21. Andrés y Mónica midieron el perímetro del patio de un centro de salud en Tlaxcala y determinaron que era 42 metros más largo que ancho y que tenía un perímetro de 228 metros. ¿Cuáles fueron la longitud y el ancho del patio?

Ejercicio 8.7.22. El precio de admisión a una obra de teatro de secundaria fue de \$3 para estudiantes y \$4.50 para público en general. Si se vendieron 450 boletos para un total de \$1555.50, ¿cuántos boletos de cada clase se vendieron?

Ejercicio 8.7.23. Una compañía de teléfonos cobra a sus clientes cierta cantidad por el primer minuto de una llamada de larga distancia y otra cantidad por minuto adicional. Un cliente efectúa dos llamadas a la misma ciudad, una de 36 minutos por \$29.30 y otra de 13 minutos por \$10.90. Determina el costo del primer minuto y de cada minuto adicional de ambas llamadas.

Ejercicio 8.7.24. ¿Cuántos galones de agua deben agregarse a 2 galones de una solución de sal al 10 % y agua, para producir una solución al 4 %?

Ejercicio 8.7.25. ¿Cuántas onzas de alcohol deben añadirse a 100 onzas de una solución al 12 % de yodo en alcohol para obtener una solución al 8 % de yodo?

Ejercicio 8.7.26. ¿Cuántos litros de una solución de sal al 30 % deben agregarse a 10 litros de igual solución al 16 % para producir una al 20 %?

Ejercicio 8.7.27. ¿Cuántos litros de una solución de ácido al 80 % deben añadirse a 15 litros de igual solución al 6 % para hacer una al 20 %?

Ejercicio 8.7.28. Un químico mezcló 200 gramos de una solución de yodo al 30 % con 500 gramos de otra solución de yodo. ¿Cuál es el porcentaje de yodo en la segunda solución si la mezcla es de 20 % de yodo?

Ejercicio 8.7.29. Una estudiante mezcló 30 litros de una solución desinfectante al 46 % con 55 litros de otra. ¿Cuál es el porcentaje de desinfectante en la segunda si la mezcla contiene 24 % de desinfectante?

Ejercicio 8.7.30. La diferencia de dos números es 40, y $\frac{1}{6}$ de su suma es 11. Hallar los números.

Ejercicio 8.7.31. 5 trajes y 3 sombreros cuestan 4180 pesos; y 8 trajes y 9 sombreros 6940. Hallar el precio de un traje y de un sombrero.

Ejercicio 8.7.32. En un cine, 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan 512 pesos, y 17 de niño y 15 de adulto 831. Hallar el precio del boleto de niño y el de adulto.

Ejercicio 8.7.33. El doble de la edad de Ana excede en 50 años a la edad de Beto, y un cuarto de la edad de Beto es 35 años menos que la edad de Ana. Hallar ambas edades.

Ejercicio 8.7.34. Si a 5 veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316. Si a 9 veces el menor se le resta el cuádruple del mayor el resultado es 83. Hallar los números.

Ejercicio 8.7.35. Se tienen \$11.30 en 78 monedas de a 20 centavos y de 10 centavos. ¿Cuántas monedas son de 10 centavos y cuántas de 20 centavos?

Ejercicio 8.7.36. Con 174 pesos compré 34 libros de a 3 y de a 7 pesos. ¿Cuántos libros compré de cada precio?

Ejercicio 8.7.37. Si Mateo le da a Carlos una de sus canicas, ambos tendrían el mismo número de canicas. Ahora si Carlos le da una a Mateo tendrá el triple de canicas de lo que le queda a Carlos. ¿Cuántas canicas tiene cada uno?

Ecuaciones de segundo grado

Definición 9.1. En general las ecuaciones de segundo grado tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a los coeficientes los vamos a conocer con los nombres: a coeficiente cuadrático que debe cumplir $a \neq 0$, b coeficiente lineal y c como el coeficiente independiente.

Todas las ecuaciones de segundo grado las podemos resolver con la fórmula general que es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como veremos en los siguientes casos a veces es más fácil o más rápido no usarla.

9.1. Primer caso: $b = 0$

En este caso podemos simplemente despejar pues sólo hay términos con x^2 .

Ejemplo 9.1.1

Encontrar las soluciones de $x^2 - 4 = 0$

SOLUCIÓN: Como el 4 está restando, lo pasamos del otro lado sumando

$$x^2 = 4.$$

Ahora sacamos raíz cuadrada a ambos lados

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

entonces las dos soluciones son

$$+2 \text{ y } -2.$$

Si queremos utilizar la fórmula general primero leemos los coeficientes

$$a = 1, b = 0 \text{ y } c = -4.$$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{\pm 4}{2} = \pm 2$$

Llegamos a las mismas soluciones.

Ejemplo 9.1.2

Resolver $4(x^2 + 1) - 2x^2 = 22$

SOLUCIÓN: Primero tenemos que reducir términos semejantes

$$4x^2 + 4 - 2x^2 = 22$$

$$2x^2 = 22 - 4 = 18$$

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

por lo tanto las soluciones son: 3 y -3 .

Si queremos resolver esta ecuación por medio de la fórmula general primero tenemos que escribirla de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

esto es, hacemos los mismos pasos hasta que obtenemos

$$2x^2 = 18$$

y la reescribimos como

$$2x^2 - 18 = 0$$

pues para poder usar la fórmula general siempre tiene que estar igualada a cero la ecuación.

Ahora $a = 2$, $b = 0$ y $c = -18$. Sustituyendo en la fórmula general tenemos:

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(2)(-18)}}{2(2)} = \frac{\sqrt{144}}{4} = \frac{\pm 12}{4} = \pm 3$$

9.2. Segundo caso: $c = 0$

Cuando el coeficiente independiente es cero, la ecuación se vuelve muy sencilla pues $x = 0$ siempre es solución y sólo tenemos que buscar la otra solución, por lo cual sólo necesitamos factorizar.

Ejemplo 9.2.1

Resolver la siguiente ecuación de segundo grado $4x^2 - 5x = 0$

SOLUCIÓN: Notamos que podemos factorizar x así que obtenemos

$$x(4x - 5) = 0$$

esto es, tenemos un producto que da cero, entonces cualquiera de los dos factores es cero. Si el primero es cero tenemos la primera solución que es $x = 0$, si $4x - 5 = 0$ obtenemos la segunda solución despejando x , es decir,

$$x = \frac{5}{4}$$

Ejemplo 9.2.2

Resolver la ecuación de segundo grado $6x^2 = -8x$

SOLUCIÓN: Primero debe quedar igual a cero. Entonces

$$6x^2 + 8x = 0$$

factorizando tenemos

$$x(6x + 8) = 0$$

así $x = 0$ es una solución y

$$x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \text{ es la otra solución.}$$

9.3. Tercer caso: $a = 1$

Cuando el coeficiente cuadrático es uno, factorizamos buscando dos números que multiplicados den c y que sumados o restados den b .

Ejemplo 9.3.1

Resolver $x^2 + 4x + 3 = 0$

SOLUCIÓN: Se factoriza

$$(x + 3)(x + 1) = 0.$$

A su vez

$$x + 3 = 0 \text{ y } x + 1 = 0$$

dan las soluciones

$$x = -3 \text{ y } x = -1.$$

Ejemplo 9.3.2

Resolver $x^2 - 7x = 18$

SOLUCIÓN: Nuevamente primero reescribimos igual con cero

$$x^2 - 7x - 18 = 0.$$

Ahora al factorizar obtenemos

$$(x - 9)(x + 2) = 0$$

resolviendo

$$x - 9 = 0 \text{ y } x + 2 = 0$$

obtenemos las soluciones

$$x = 9 \text{ y } x = -2.$$

En cualquier otro caso, simplemente usando las propiedades de la igualdad, escribimos la ecuación igualada a cero y utilizamos la fórmula general.

9.4. Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 9.4.1

Dos números positivos que se diferencian por 3 unidades, multiplicados dan 88. Halla dichos números.

SOLUCIÓN: Primero asignamos letras a los números:

x : primer número

y : segundo número

Hasta la primera coma entendemos que la diferencia es de 3 así que obtenemos la ecuación

$$x - y = 3,$$

de la segunda parte obtenemos que

$$xy = 88.$$

Despejamos x de la primera y obtenemos

$$x = 3 + y$$

lo sustituimos en la segunda ecuación y obtenemos

$$(3 + y)y = 88$$

lo cual nos da la ecuación de segundo grado, reescribimos

$$3y + y^2 = 88.$$

Aplicamos la fórmula general y obtenemos $a = 1$, $b = 3$ y $c = -88$.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-88)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 352}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-3 \pm 19}{2}.$$

Obteniendo las dos soluciones

$$x_1 = \frac{-3 - 19}{2} = -\frac{22}{2} = -11 \text{ y } x_2 = \frac{-3 + 19}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Entonces nos quedamos con la segunda pues nos piden números positivos: las soluciones son 8 y 11.

9.5. Ejercicios

Ejercicio 9.5.1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

b) $9x^2 - 25 = 0$

c) $3x^2 + x - 4 = 0$

d) $x^2 + 9 = 0$

e) $4x^2 + 3x = 0$

f) $64x^2 + 1 = 0$

g) $x^2 + 6 = 5x$

h) $16x^2 + 10x - 9 = 0$

i) $2x^2 - 8 = 0$

j) $6x^2 + 4x = 0$

k) $8x^2 + 2x - 15 = 0$

l) $x^2 + 8x + 15 = 0$

m) $2x^2 - x + 5 = 0$

n) $3x^2 - 27 = 0$

ñ) $36x^2 - 144 = 0$

o) $2x^2 = 200$

p) $7x^2 + 17 = 0$

q) $16x^2 - 5 = 0$

r) $x^2 + 5x = 0$

s) $11x^2 - 3x = 0$

t) $5x^2 = 15x$

u) $x^2 - 9x + 20 = 0$

v) $x^2 + 2x - 15 = 0$

w) $x^2 - 3x - 28 = 0$

x) $6x^2 + 5x = 4$

Ejercicio 9.5.2. Encuentra un número tal que el doble de su cuadrado sea igual a seis veces ese número.

Ejercicio 9.5.3. La edad de un niño será dentro de 3 años el cuadrado de la que tenía hace tres. Halla los años que tiene.

Ejercicio 9.5.4. El salón de usos múltiples de un centro de salud es rectangular y mide 3 metros más de largo que de ancho. El área de su superficie es de $36 m^2$. Hallar las dimensiones.

Ejercicio 9.5.5. Para cubrir completamente los pisos de dos consultorios de un hospital se utilizan $62 m^2$ de alfombra. El piso del primer consultorio mide un metro más de largo que de ancho. El otro consultorio mide $0.6 m$ más de ancho que lo que mide de largo el primer consultorio y su largo es el doble de lo que mide el largo del primer consultorio. Halla las dimensiones de los pisos de los consultorios.

Ejercicio 9.5.6. Un grupo de estudiantes de Promoción de la Salud compró un regalo de \$300 repartiéndose el costo en partes iguales. Si hubiera habido 5 estudiantes más, cada uno habría pagado \$2 pesos menos. ¿Cuánto dio cada estudiante?

Ejercicio 9.5.7. Un vendedor compró un paquete de medicamentos en \$104. Conservó 4 y vendió el resto con una utilidad de \$6 en cada uno, logrando una utilidad total de \$22. ¿Cuántas cajas de medicamentos contenía el paquete que compró?

Ejercicio 9.5.8. La cubierta de una mesa cuadrada tiene un marco de 2 centímetros. Si $\frac{2}{3}$ de su área está dentro del marco, ¿cuáles son las dimensiones de la cubierta?

Ejercicio 9.5.9. Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm. menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.

Ejercicio 9.5.10. Se tienen dos cuadrados distintos y el lado de uno de ellos es 4 cm. mayor que el lado del otro. Averigua la longitud de los dos lados sabiendo que la suma de sus áreas es $808 cm^2$.

Ejercicio 9.5.11. Halla dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 103.

Ejercicio 9.5.12. El perímetro de un rectángulo es 42 cm. Si la diagonal mide 15 cm, halla el ancho del rectángulo. (Pon un lado en función del otro).

Ejercicio 9.5.13. Al aumentar $5m$ el lado de un cuadrado, su área aumenta en $75m^2$. Calcula el lado del cuadrado.

Ejercicio 9.5.14. Encuentra 2 enteros consecutivos positivos cuyo producto es 56.

Ejercicio 9.5.15. El largo de un rectángulo mide 6 metros más que su ancho. Si su área es de $280 m^2$, determina largo y ancho.

Ejercicio 9.5.16. Don Gabriel es 4 veces mayor que Héctor. Si el producto de los números que expresan sus edades es 256, ¿cuál es la edad de Héctor?

Funciones

Definición 10.1. Una función es una regla entre dos conjuntos, el primero llamado dominio y el segundo llamado codominio. Se tiene que cumplir que, a cada elemento del dominio le corresponda alguno del codominio, sin lugar a ambigüedades.

Observación 10.1. Podemos pensar una función como una pregunta, la cual debe tener una respuesta que no sea ambigua.

Ejemplo 10.0.1

Consideremos como dominio el conjunto de estudiantes de un curso, y la pregunta o función es la edad. Ésta sí es función pues cada estudiante tiene edad, y para no equivocarnos, podemos definir el codominio como el conjunto de números enteros positivos, pues nadie tiene edad negativa, entre 1 y 90.

Podemos representarlo gráficamente en la figura 10.0.1:

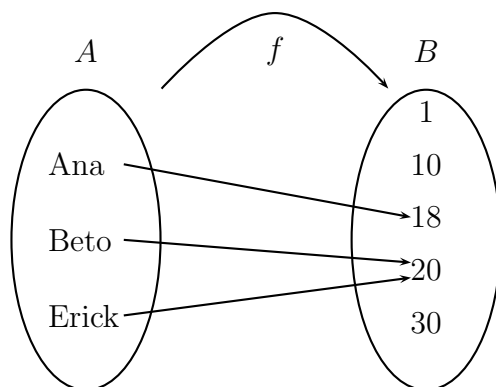


Figura 10.1: Función Edad

También podemos escribir esta función de la siguiente forma:

$$f(\text{Ana}) = 18$$

$$f(\text{Beto}) = 20$$

$$f(\text{Erick}) = 20$$

Observación 10.2. *Lo anterior, por el paréntesis no significa, que se multiplique; en este caso significa que se evalúa, y se lee como “efe de Ana es igual a 18.”*

Ejemplo 10.0.2

Consideremos el conjunto de los meses. La pregunta estación correspondiente a, ¿será función? Llamamos a esta función g .

SOLUCIÓN: Notamos que

$$g(\text{enero}) = \text{invierno}$$

$$g(\text{febrero}) = \text{invierno}$$

$$g(\text{marzo}) = ?$$

Aquí nos enfrentamos al problema de saber qué estación corresponde a marzo, pues no podemos decir invierno, ya que el día 21 entra la primavera; esto es, la respuesta es ambigua y por lo tanto la relación g no es una función.

Ahora, ¿qué pasa cuando trabajamos sólo con conjuntos de números? esto es, cuando dominio y codominio son números reales \mathbb{R} .

Para empezar, en lugar de líneas relacionando ambos conjuntos, escribimos una fórmula que nos dice qué operaciones hacer, y gráficamente localizamos puntos en el plano cartesiano que después unimos para obtener la gráfica.

Ejemplo 10.0.3

En la siguiente función $f(x) = 2x - 3$ determinar lectura y evaluación de los valores 0, 1, 2.

SOLUCIÓN: En este caso, el número nos pide multiplicarlo por 2 y restarle 3. Las evaluaciones dan

$$f(0) = 2(0) - 3 = -3$$

$$f(1) = 2(1) - 3 = -1$$

$$f(2) = 2(2) - 3 = 1$$

10.1. Representación gráfica de funciones

Para dibujar la gráfica hacemos la llamada tabulación, que consiste en hacer evaluaciones en la función dada. Tradicionalmente lo que hacemos es evaluar los valores $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ en la función.

10.1.1. Gráfica de rectas

Ejemplo 10.1.1

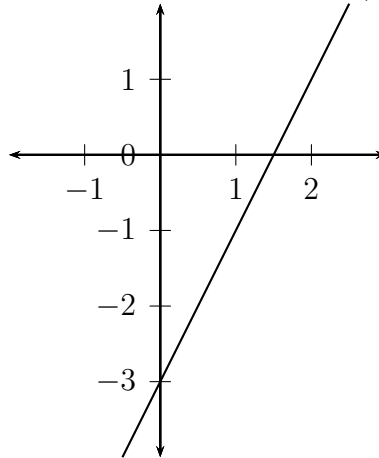
Hacer la gráfica de $f(x) = 2x - 3$

SOLUCIÓN: Se hace la tabulación siguiente

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-3	-9	$(-3, -9)$
-2	-7	$(-2, -7)$
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-1	$(1, -1)$
2	1	$(2, 1)$
3	3	$(3, 3)$

En este caso se trata de una recta cuya gráfica es:

Figura 10.2: Gráfica de la función $f(x) = 2x - 3$



Observación 10.3. Además podemos escribir y en lugar de $f(x)$, esto es $y = 2x - 3$ por lo que decimos que y está en función de x , además que x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Observación 10.4. Notemos que cuando se trata de una recta no es necesario que hagamos tantas evaluaciones, de hecho podemos hacer la gráfica como la hacemos usualmente.

10.1.2. Gráficas de cuadráticas

Hacemos la tabulación escogiendo en principio los valores enteros de $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

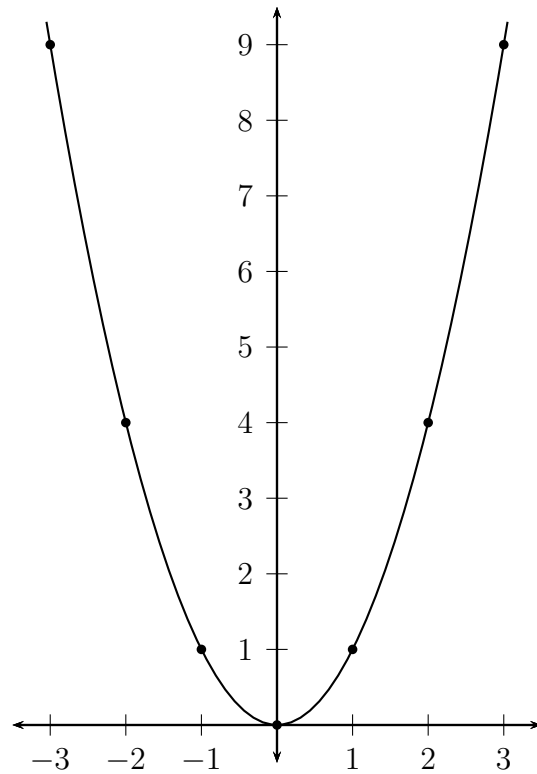
Ejemplo 10.1.2

Hacer la gráfica de la cuadrática $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN: La evaluación correspondiente es:

x	g(x)	(x,g(x))
-3	9	(-3, 9)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)

Figura 10.3: Gráfica de la función $f(x) = x^2$



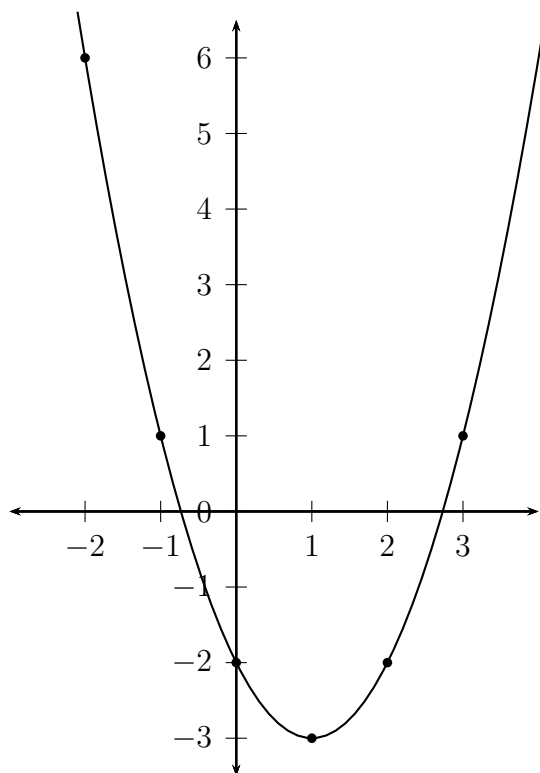
Ejemplo 10.1.3

Hacer la gráfica de $h(x) = x^2 - 2x - 2$

SOLUCIÓN:

x	$h(x)$	$(x, h(x))$
-3	13	$(-3, 13)$
-2	6	$(-2, 6)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-3	$(1, -3)$
2	-2	$(2, -2)$
3	1	$(3, 1)$

Figura 10.4: Gráfica de la función $h(x) = x^2 - 2x - 2$



10.1.3. Método gráfico para resolver ecuaciones de segundo grado

Cuando resolvemos ecuaciones de segundo grado por medio del método gráfico igualamos a cero. Tomamos del ejemplo anterior $x^2 - 2x - 2 = 0$, lo que buscamos gráficamente es localizar en qué valores cruza la gráfica el eje x .

Resolviendo la ecuación notamos que $a = 1$, $b = -2$, $c = -2$. Al sustituir estos valores en la fórmula general obtenemos $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$. 12 no tiene raíz exacta pero aproximadamente las soluciones son $x_1 \approx 2.73$, $x_2 \approx -0.73$, mismas que podemos observar son aproximadamente los puntos donde cruza la gráfica de la figura 10.4.

Observación 10.5. Cuando hacemos una gráfica de una función cuadrática y ésta no cruza el eje x , podemos concluir que no tiene solución la ecuación cuadrática igualada a cero.

Ejemplo 10.1.4

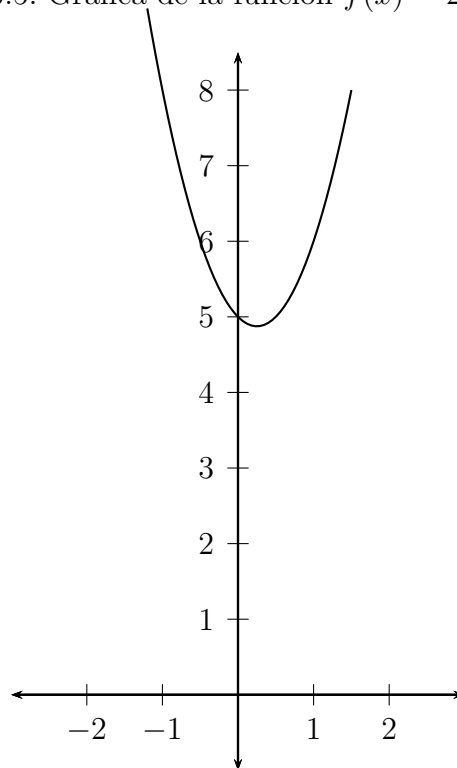
Verificar usando el método gráfico que $2x^2 - x + 5 = 0$ no tiene solución.

SOLUCIÓN: Tabulamos la función correspondiente que es $f(x) = 2x^2 - x + 5$

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-3	26	$(-3, 26)$
-2	15	$(-2, 15)$
-1	8	$(-1, 8)$
0	5	$(0, 5)$
1	6	$(1, 6)$
2	11	$(2, 11)$
3	20	$(3, 20)$

Parte de la gráfica es:

Figura 10.5: Gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - x + 5$



Se observa que la gráfica no cruza el eje x . Por lo tanto $f(x) = 2x^2 - x + 5$ nunca es igual a cero y en consecuencia $2x^2 - x + 5 = 0$ no tiene solución.

10.2. Funciones pares e impares

Definición 10.2. Una función f es par si al evaluar un número y su negativo obtenemos el mismo resultado esto es: $f(x) = f(-x)$.

Definición 10.3. Una función f es impar si al evaluar un número y su negativo obtenemos que sus resultados son diferentes sólo en signo, esto es $f(x) = -f(-x)$ y $f(-x) = -f(x)$.

Observación 10.6.

- Cuando una función es par, su gráfica del lado izquierdo del eje Y es un reflejo del lado derecho, por esta razón podemos sólo hacer la evaluación de algunos valores positivos pues los valores negativos tendrán los mismos resultados.
- Cuando se detecta que una función es impar, hacemos las evaluaciones correspondientes de los valores positivos, y para obtener los números negativos le cambiamos el signo a los resultados.
- Existen funciones que no son pares ni impares.

Ejemplo 10.2.1

Verificar que la función $f(x) = x^2 - 2$ es par

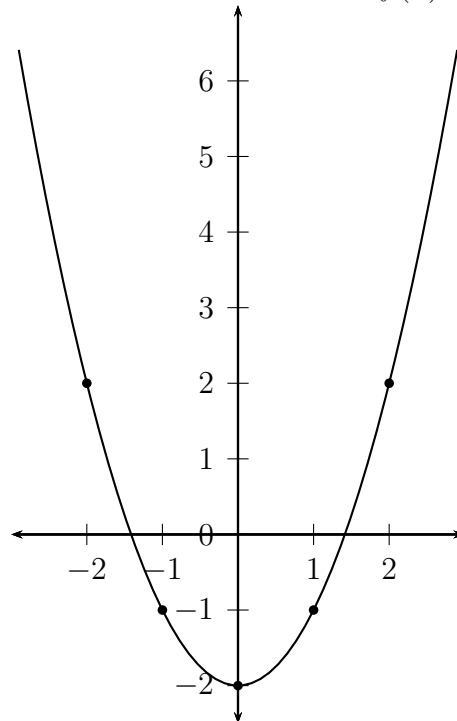
SOLUCIÓN: Para constatar de que se trata de una función par se evalúa $-x$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x).$$

Hacemos la siguiente tabulación:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$	$(-x, f(x))$
0	-2	(0, -2)	
1	-1	(1, -1)	(-1, -1)
2	2	(2, 2)	(-2, 2)
3	7	(3, 7)	(-3, 7)

Obtenemos la siguiente gráfica de la figura 10.6

Figura 10.6: Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2$ 

Ejemplo 10.2.2

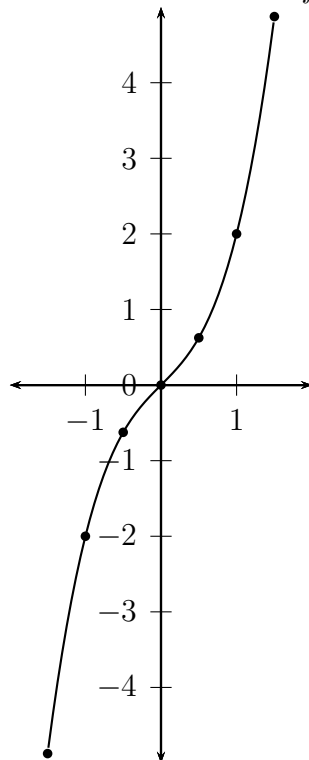
La función $g(x) = x^3 + x$ es una función impar pues al hacer la evaluación

$$-g(-x) = -((-x)^3 + (-x)) = -(-x^3 - x) = x^3 + x = g(x)$$

hacemos la tabulación correspondiente:

x	$g(x)$	$(x, g(x))$	$(-x, -g(x))$
0	0	(0, 0)	
0.5	0.625	(0.5, 0.625)	(-0.5, -0.625)
1	2	(1, 2)	(-1, -2)
1.5	4.875	(1.5, 4.875)	(-1.5, -4.875)

y obtenemos la siguiente gráfica de la figura 10.7

Figura 10.7: Gráfica de la función $f(x) = x^3 + x$ 

Ejemplo 10.2.3

Verificar qué tipo de función es $h(x) = x + 1$

SOLUCIÓN: Notamos que

$$h(-x) = -x + 1 \neq h(x)$$

a su vez

$$-h(-x) = -((-x) + 1) = x - 1 \neq -h(x)$$

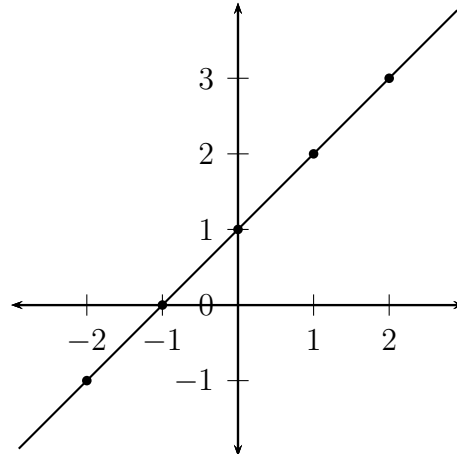
por lo tanto $h(x)$ no es par ni impar.

Hacemos la tabulación:

x	$h(x)$	$(x, h(x))$
-3	-2	$(-3, -2)$
-2	-1	$(-2, -1)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	1	$(0, 1)$
1	2	$(1, 2)$
2	3	$(2, 3)$
3	4	$(3, 4)$

Obtenemos la gráfica de la figura 10.8

Figura 10.8: Gráfica de la función $f(x) = x + 1$



10.3. Transformaciones de funciones

Cuando tenemos identificada la gráfica de una función f , y ésta se ve modificada por una constante podemos esbozar la gráfica de la nueva función sin hacer la tabulación correspondiente.

10.3.1. Traslación de funciones

Teorema 10.1. *Sea f una función cuya gráfica es conocida y $c > 0$ entonces:*

- I. *Si $g(x) = f(x) + c$ se traslada la gráfica de $f(x)$ c unidades hacia arriba.*
- II. *Si $g(x) = f(x) - c$ se traslada la gráfica de $f(x)$ c unidades hacia abajo.*
- III. *Si $g(x) = f(x + c)$ se traslada la gráfica de $f(x)$ c unidades hacia la izquierda.*
- IV. *Si $g(x) = f(x - c)$ se traslada la gráfica de $f(x)$ c unidades a la derecha.*

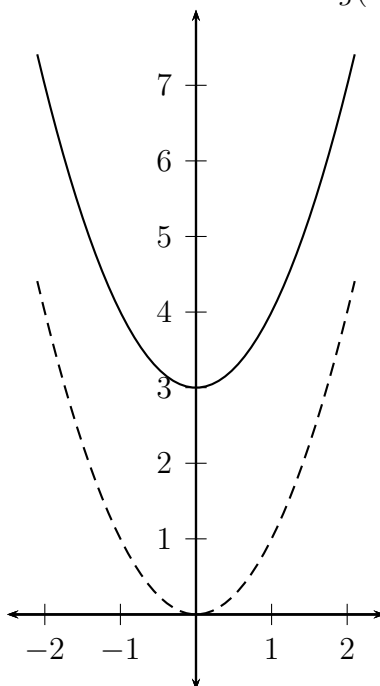
Ejemplo 10.3.1

Haz la gráfica de las siguientes funciones:

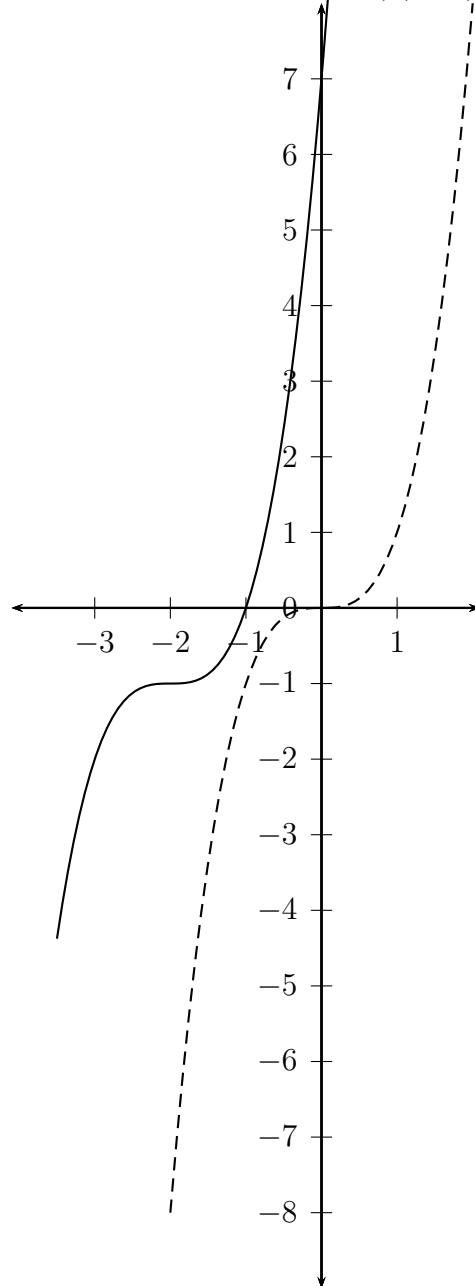
- a) $g(x) = x^2 + 3$
- b) $h(x) = (x + 2)^3 - 1$

SOLUCIÓN: a) $g(x) = x^2 + 3$ entonces simplemente se traslada la gráfica de $f(x) = x^2$ 3 unidades hacia arriba de acuerdo con la figura 10.9

Figura 10.9: Gráfica de la función $g(x) = x^2 + 3$



b) $h(x) = (x + 2)^3 - 1$ en este caso se traslada la gráfica de la cúbica $f(x) = x^3$ 2 lugares hacia la izquierda y un lugar hacia abajo. Obtenemos la gráfica de la figura 10.10

Figura 10.10: Gráfica de la función $h(x) = (x + 2)^3 - 1$ 

10.3.2. Dilatación de funciones

Cuando se multiplica una función por una constante la gráfica de la función se estira o se aplana.

Definición 10.4. Sea f una función cuya gráfica se conoce y $g(x) = k \cdot f(x)$

1. Si $k > 1$ la gráfica de la función se “estira”

II. Si $0 < k < 1$ la gráfica de la función se “aplana”

Ejemplo 10.3.2

a) $g(x) = 2x^2$

b) $h(x) = \frac{x}{4}$

SOLUCIÓN: a) $g(x) = 2x^2$ esto es el doble de la función cuadrática. La gráfica correspondiente se observa en la siguiente figura 10.11

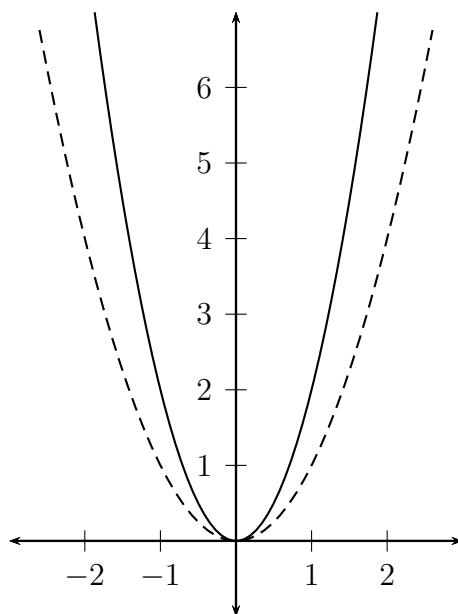


Figura 10.11: Gráfica de la función $g(x) = 2x^2$

b) $h(x) = \frac{x}{4}$ esto es la cuarta parte de la función cuadrática, como se muestra en la gráfica de la figura 10.12

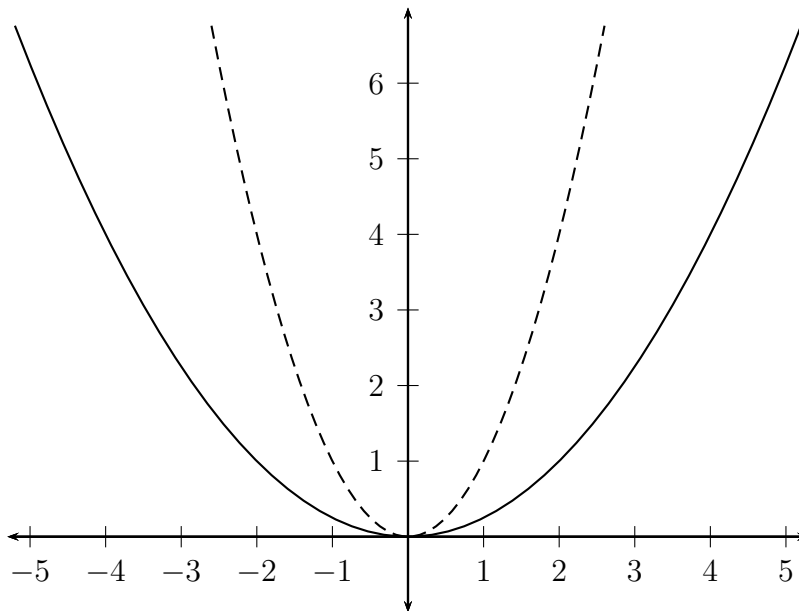


Figura 10.12: Gráfica de la función $h(x) = \frac{x^2}{4}$

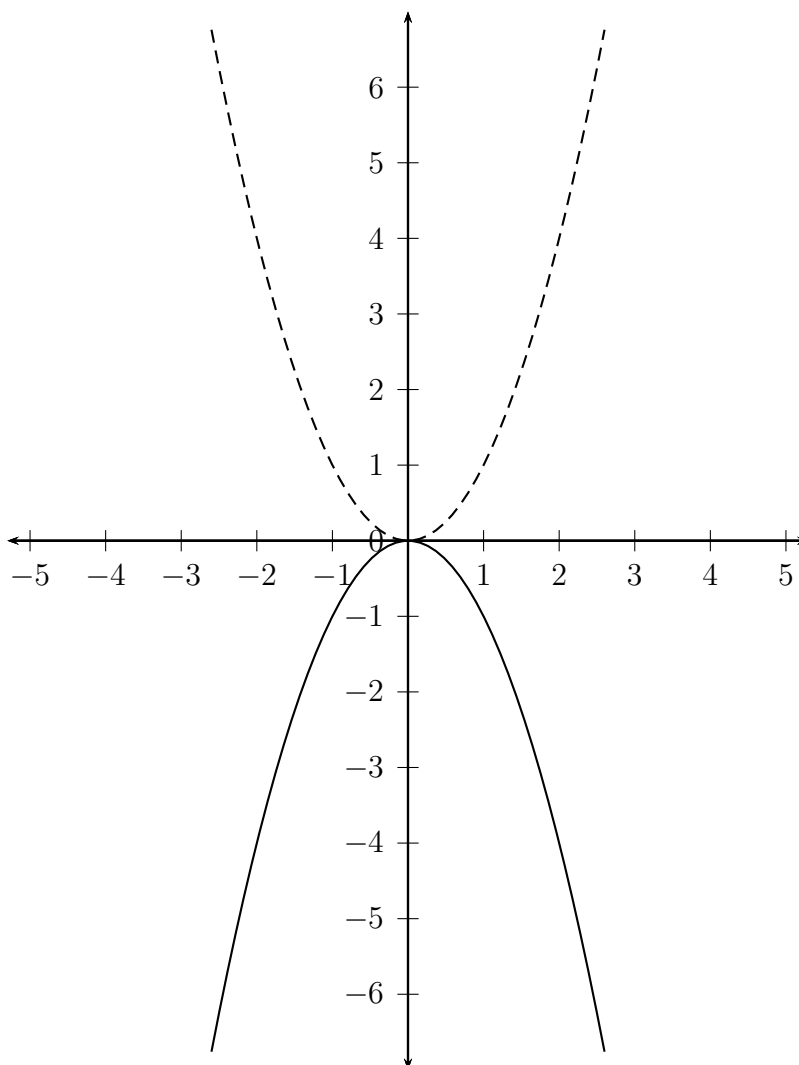
10.3.3. Reflexión de funciones

Otra transformación de funciones es cuando se observa que la función sólo difiere con un signo negativo.

Definición 10.5. Sea f una función cuya gráfica se conoce, entonces: si $g(x) = -f(x)$, la gráfica correspondiente es la de f , reflejada con respecto al eje X .

Ejemplo 10.3.3

Esboza la gráfica de $g(x) = -x^2$

Figura 10.13: Gráfica de la función $g(x) = -x^2$

SOLUCIÓN:

10.4. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Definición 10.6. Una función f es inyectiva si para x_1 y x_2 (elementos del dominio), $x_1 \neq x_2$ y entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observación 10.7. Para determinar de forma gráfica si una función es inyectiva se trazan líneas horizontales: si éstas tocan sólo en un punto a la función, es inyectiva; si tocan en 2 puntos, no es inyectiva.

Definición 10.7. Una función f se dice que es suprayectiva o sobreyectiva si para cada elemento y del codominio existe un elemento del dominio x tal que $f(x) = y$.

Observación 10.8. Para determinar en forma gráfica si una función es sobreyectiva, trazamos rectas horizontales, recorremos todo el eje Y y debe tocar a la gráfica de la función al menos en un punto. Si esto pasa se trata de una función suprayectiva.

Definición 10.8. Una función f se dice que es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Ejemplo 10.4.1

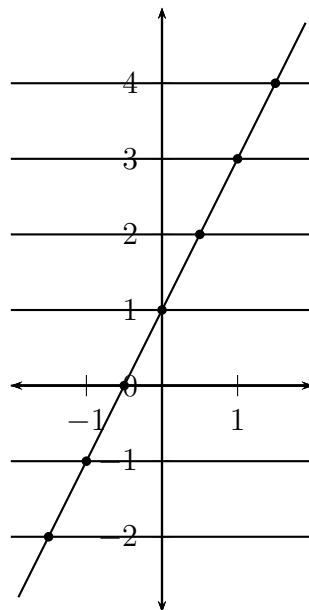
Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, suprayectivas y en su caso biyectivas.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2$

SOLUCIÓN: a) La función $f(x) = 2x + 1$ es inyectiva pues si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, restando -1 a ambos lados se obtiene $2x_1 = 2x_2$, dividimos entre 2 y se cumple que $x_1 = x_2$.

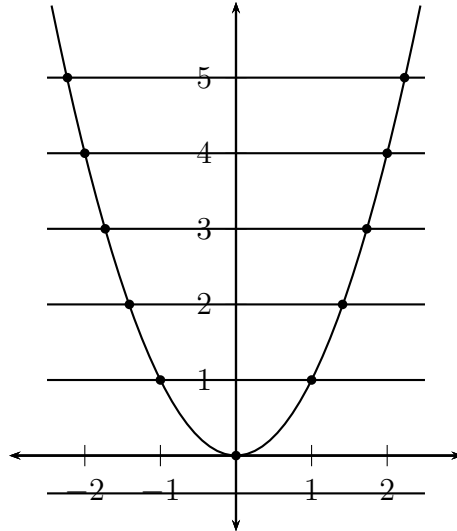
Figura 10.14: Gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$



Podemos observar en la figura 10.14 que al trazar las líneas horizontales éstas cruzan en un sólo punto a la gráfica de la recta, por lo tanto es inyectiva; también es sobreyectiva pues cada línea horizontal cruza la gráfica en un punto; y podemos concluir además que es biyectiva.

b) La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva pues $f(2) = f(-2) = 4$.

Figura 10.15: Gráfica de la función $f(x) = 2x^2$



Podemos observar en la figura 10.15 que al menos una de las rectas horizontales toca la gráfica en dos puntos, por lo tanto, la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Tampoco es sobreyectiva pues no tenemos gráfica para números negativos, esto quiere decir que no existe un número que al cuadrado sea igual a -1 . Además no es biyectiva.

10.5. Función inversa

Definición 10.9. Sea $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ cuyo dominio es $[a, b]$ y cuyo codominio es $[c, d]$ si la función f es biyectiva, entonces existe $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ cuyo dominio es el codominio de f $[c, d]$ y cuyo codominio es el dominio de f $[a, b]$. f^{-1} es llamada la función inversa de f .

Observación 10.9. f^{-1} el menos uno indica que es inversa. Evitar confundirlo como un exponente.

Para obtener la función inversa lo que se hace es igualar la función a una variable y después despejar x . Se sustituye la variable por x y se obtiene finalmente la función inversa.

Ejemplo 10.5.1

Determinar la función inversa de la función $f(x) = \frac{2x + 1}{3}$.

SOLUCIÓN: Como se trata de una recta sabemos que es biyectiva, y dominio y codominio son igual a \mathbb{R} .

Hacemos $a = \frac{2x+1}{3}$. Despejamos x de la ecuación obtenemos:

$$3a = 2x + 1,$$

$$3a - 1 = 2x$$

$$x = \frac{3a - 1}{2}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{2}$.

La gráfica de f aparece punteada en la figura 10.16

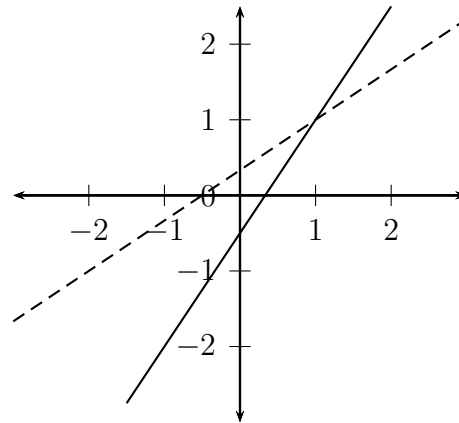


Figura 10.16: Gráficas de la función $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ y función inversa $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$

Ejemplo 10.5.2

Determinar inversa de $g(x) = x^2$ adecuando dominio y codominio.

SOLUCIÓN: La función cuadrática $g(x) = x^2$ es biyectiva con dominio $[0, \infty)$ y codominio $[0, \infty)$. $a = x^2$ despejamos para determinar la función inversa $x = \sqrt{a}$, queda $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, con dominio $[0, \infty)$ y codominio $[0, \infty)$. La gráfica correspondiente es 10.17

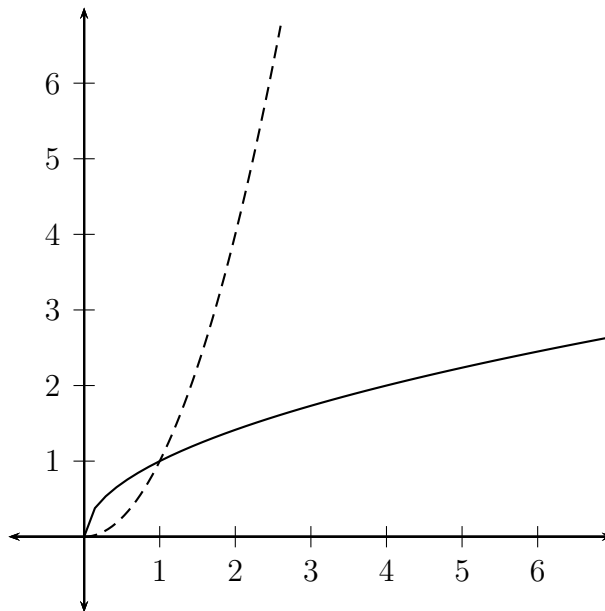


Figura 10.17: Gráficas de la función $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ y función inversa $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$

10.6. Función valor absoluto

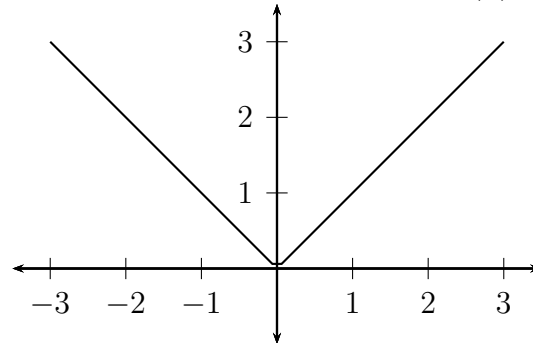
Definición 10.10. Sea $x \in \mathbb{R}$, la función valor absoluto de x se denota como $f(x) = |x|$ y se define como:

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

10.6.1. Características de $f(x) = |x|$

- I. El dominio de la función valor absoluto son todos los números reales \mathbb{R} .
- II. La función valor absoluto es par pues $f(x) = f(-x)$. Notemos que si $x > 0$ entonces $-x < 0$ y por lo tanto $f(x) = x$ y $f(-x) = -(-x) = x$. Sucede lo mismo si $x < 0$.
- III. Hacemos la tabulación correspondiente para obtener la gráfica:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$	$(-x, f(x))$
0	0	(0, 0)	
1	1	(1, 1)	(-1, 1)
2	2	(2, 2)	(-2, 2)
3	3	(3, 3)	(-3, 3)

Figura 10.18: Gráfica de la función $f(x) = |x|$ 

iv. Como podemos observar en la gráfica 10.18, la función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por ende no es biyectiva, y por lo tanto no tiene inversa.

10.7. Ejercicios

Ejercicio 10.7.1. Determina si las siguientes relaciones son funciones o no.

- Estatura de los niños de un grupo en el jardín de niños. Usa como dominio un grupo de niños.
- El deporte que practican los estudiantes de AGAS. Usa como dominio un grupo.
- ¿Cuántos días tiene un mes? Usa como dominio los meses del año.
- Mes correspondiente al signo zodiacal. Usa como dominio los 12 signos del Zodiaco.

Ejercicio 10.7.2. Sea $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Haz las siguientes evaluaciones:

- $f(1)$
- $f(-7)$
- $f(-3)$
- $f(0)$

Ejercicio 10.7.3. Sea $g(a) = (1 + a)(3a - 2)$. Haz las siguientes evaluaciones:

- $g(-2)$
- $g(0)$
- $g(1)$
- $g(2)$

10.7. EJERCICIOS

Ejercicio 10.7.4. Sea $t(p) = \frac{4p + 1}{2p^2 + 7p - 4}$. Haz las siguientes evaluaciones:

a) $t\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $t(2)$

c) $t(-1)$

Ejercicio 10.7.5. Considera $f(x) = 6x^3 - 5x^2 - 10x + 2$. Haz las siguientes evaluaciones:

a) $f(2)$

b) $f(-5)$

c) $f(4)$

d) $f(-1)$

Ejercicio 10.7.6. Considera $g(a) = \frac{1 + a}{3a - 2}$. Haz las siguientes evaluaciones:

a) $g(-2)$

b) $g(0)$

c) $g(1)$

d) $g(2)$

Ejercicio 10.7.7. Considera $h(x) = \sqrt{3x + 1}$. Haz las siguientes evaluaciones:

a) $h\left(-\frac{1}{3}\right)$

b) $h(5)$

c) $h(-5)$

d) $h(2)$

Ejercicio 10.7.8. Haz las gráficas correspondientes a las siguientes funciones.

a) $f(x) = x - 3$

b) $g(x) = 4x + 7$

c) $h(x) = 3x - 8$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

e) $g(x) = 2x^2 + 5x - 2$

f) $h(x) = -3x^2 + 4x + 2$

Ejercicio 10.7.9. Determina si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = \frac{x^2}{4}$

b) $g(x) = x^4 - 1$

c) $h(x) = x^2 + x$

d) $f(x) = -x^3$

e) $g(x) = x^5 - x^3$

f) $h(x) = x^3 + 1$

g) $f(x) = x$

h) $g(x) = x - 1$

i) $h(x) = x^2 + 1$

Ejercicio 10.7.10. Haz la gráfica correspondiente haciendo las traslaciones:

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 2$

b) $g(x) = x + 3$

c) $h(x) = (x - 1)^3$

d) $f(x) = x - 1$

e) $g(x) = (x + 3)^2 - 2$

f) $h(x) = x^3 + \frac{1}{2}$

Ejercicio 10.7.11. Esboza la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x$

b) $h(x) = \frac{x^3}{3}$

c) $g(x) = \frac{x}{2}$

d) $f(x) = 4(x - 1)$

10.7. EJERCICIOS

e) $h(x) = \frac{x^2}{2} - 1$

f) $g(x) = 2x^3$

Ejercicio 10.7.12. Esboza la gráfica correspondiente:

a) $f(x) = -x^3$

b) $g(x) = -(x^2 + 1)$

c) $h(x) = -x$

Ejercicio 10.7.13. Determina cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:

a) $f(x) = -3x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = 1 - x^2$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \frac{x-1}{5}$

e) $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$

f) $f(x) = x^4 + 2$

Ejercicio 10.7.14. Determina la función inversa dominio y codominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $g(x) = x^3$

c) $h(x) = \frac{3x-7}{5}$

d) $f(x) = (x-1)^2 + 2$, tomar como dominio $[1, \infty)$ y codominio $[2, \infty]$

e) $g(x) = 2x^3 + 1$

Ejercicio 10.7.15. Haz la gráfica de las siguientes transformaciones de la función valor absoluto:

a) $f(x) = |x| + 1$

b) $g(x) = |x - 2|$

c) $h(x) = \frac{|x|}{3}$

d) $f(x) = |x - \frac{1}{2}| + 4$

e) $f(x) = -|x|$

Ejercicio 10.7.16. Haz la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

b) $g(x) = 3x^2 - x - 4$

c) $h(x) = 4x - 3$

d) $g(x) = 9 - 4x^2$

Ejercicio 10.7.17. Haz la evaluación que se pide de las siguientes funciones, localiza en el plano los puntos y esboza la gráfica:

a) $f(x) = 7 - 3x$ $f(2)$, $f(-3)$, $f(5)$, $f(0)$

b) $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

c) $f(x) = 8^x$ en $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

d) $h(x) = \ln(x)$ en $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Logaritmos y exponenciales

11.1. Potencias de 10 y exponenciales

Las potencias de 10 son una forma de escribir en forma reducida números muy grandes o muy pequeños.

Ejemplo 11.1.1

a) $1000 = 1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1 \times 10^3$

b) $10000 = 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1 \times 10^4$

En el número 1×10^4 , 10 se llama base y 4 es llamado exponente.

Observación 11.1. I. *La base es siempre un número positivo.*

II. *El exponente puede tomar cualquier valor: positivo, nulo o negativo.*

III. *El exponente cuando es positivo indica el número de veces que se debe multiplicar por la base.*

IV. *Cuando el exponente es nulo, el resultado es 1.*

V. *Si el exponente es negativo indica el número de veces que se debe dividir entre la base.*

Ejemplo 11.1.2

Escribir el número equivalente a las siguientes potencias

a) 5×10^0

b) 2×10^{-3}

SOLUCIÓN:

a) $5 \times 10^0 = 5 \times 1 = 5$

b) $2 \times 10^{-3} = \frac{2}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0.002$

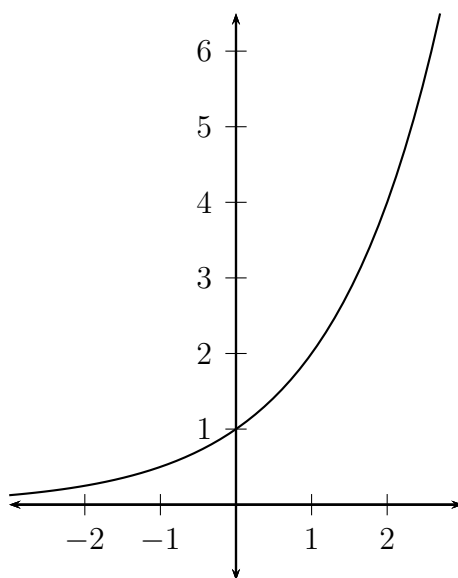
Ejemplo 11.1.3

Escribir la función correspondiente a la función $f(x) = 2^x$.

SOLUCIÓN: Como el exponente puede tomar cualquier valor, en este caso sí podemos hacer la evaluación con los valores: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8

Figura 11.1: Gráfica de la función $f(x) = 2^x$

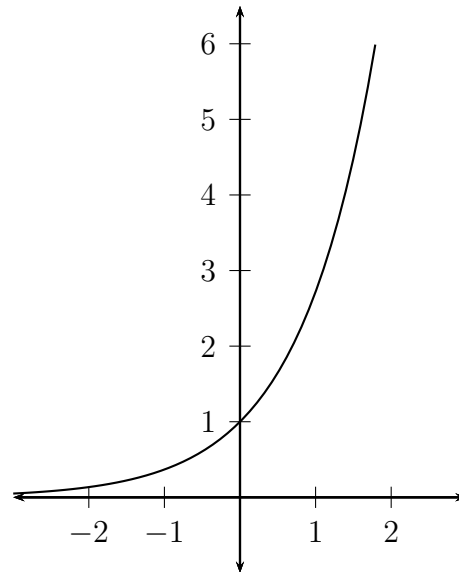


Observamos que la función $f(x) = 2^x$ es inyectiva y es sobreyectiva en el intervalo $(0, \infty)$ del eje Y .

11.2. Función exponencial

La función $f(x) = e^x$ es conocida como la función exponencial. El número e es irracional (sección 2.5)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.0497	0.1353	0.3678	1	2.7182	7.3890	20.0855

Figura 11.2: Gráfica de la función $f(x) = e^x$ 

11.3. Leyes de los exponentes

Sea $a > 0$

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $(ab)^n = a^n b^n$

III. $(a^n)^m = a^{nm}$

IV. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

VI. $a^0 = 1$ si $a \neq 0$

VII. $\frac{1}{a} = a^{-1}$

VIII. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

IX. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

X. $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

Ejemplo 11.3.1

a) $3^2 3^3 = 3^5 = 243$

b) $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$

c) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

d) $(2^4)^3 = 2^{12} = 4096$

e) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

f) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$

g) $9^{\frac{3}{2}} = (9^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{729} = 27$ o

$9^{\frac{3}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27,$

es decir, obtenemos lo mismo.

h) $((25)(9))^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$

i) $2^{-2} \cdot 2^{-5} = 2^{-2+(-5)} = 2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

11.4. Logaritmos

El logaritmo de un número x en base b pregunta a qué exponente debe elevarse b para obtener x .

Esto se denota $\log_b x = L$, se lee “logaritmo base b de x es igual a L .”

Para verificar se debe cumplir $b^L = x$.

Ejemplo 11.4.1

Determinar los logaritmos siguientes:

- a) $\log_2 8$
- b) $\log_8 64$
- c) $\log_9 3$
- d) $\log_7 1$

SOLUCIÓN:

a) $\log_2 8 = ?$

Nos preguntamos a qué exponente tenemos que elevar el 2 para obtener 8, esto es, encontrar x tal que $2^x = 8$ sabemos que ese número es el 3.

Por lo tanto $\log_2 8 = 3$

b) $\log_8 64 = 2$ pues $8^2 = 64$

c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ pues $9^{\frac{1}{2}} = 3$

d) $\log_7 1 = 0$ pues $7^0 = 1$

11.5. Cálculo de logaritmos

Usando la calculadora podemos determinar directamente logaritmos base 10, usando la tecla “log”, y los logaritmos base e denotado por \ln llamado logaritmo natural.

Ejemplo 11.5.1

$$\log_{10} 20 = \log 20 \approx 1.30103$$

$$\ln 5 \approx 1.60944$$

$$\log 163 \approx 2.21219$$

Para calcular un logaritmo en cualquier base podemos utilizar cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$\log_b N = \frac{\log N}{\log b}$$

o

$$\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}$$

Ejemplo 11.5.2

a) Calculamos $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.32193$

notamos que $2^{2.32193} \approx 5$

b) $\log 100 = 2$

c) $\ln 2 \approx 0.693$

d) $\log 7 \approx 0.845$ notemos $10^{0.845} \approx 6.998$

e) $\log_3 1.5 \approx 0.369$

f) $\log_{86} 3 \approx 0.246$

g) $\log_4 \frac{1}{2} = -0.5$

11.6. Propiedades de los logaritmos

Las siguientes propiedades se cumplen sin importar la base $b > 0$ con la que se esté trabajando.

I. $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$

II. $\log_b \left(\frac{M}{N} \right) = \log_b M - \log_b N$

III. $\log_b M^r = r \log_b M$

En el siguiente ejemplo, se aplican las propiedades anteriores para encontrar los valores de logaritmos que se pueden verificar utilizando una calculadora.

Ejemplo 11.6.1

a) $\log(3 \cdot 4) = \log 3 + \log 4 = 0.4771 + 0.6021 = 1.0792$

b) $\ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln 3 - \ln 2 = 1.0986 - 0.6931 = 0.4055$

$$c) \log 3^2 = 2 \log 3 = 2(0.4771) = 0.9542$$

Además, podemos reescribir ya sea desarrollando o compactando, cualquier expresión algebraica que involucra logaritmos.

Ejemplo 11.6.2

Utilizar las propiedades de logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones logarítmicas

$$a) y = \log \left(\frac{cx}{x-3} \right)$$

$$b) y = \ln x^2 \sqrt[3]{2x+3}$$

$$c) y = \frac{1}{2} \log(x-y) - \frac{1}{3} \log x$$

$$d) y = \ln c - \ln x + 3 \ln(x+1)$$

SOLUCIÓN:

$$a) y = \log \left(\frac{cx}{x-3} \right) = \log cx - \log(x-3) = \log c + \log x - \log(x-3)$$

$$b) y = \ln x^2 \sqrt[3]{2x+3} = \ln x^2 + \ln \sqrt[3]{2x+3} = 2 \ln x + \frac{1}{3} \ln(2x+3)$$

$$c) y = \frac{1}{2} \log(x-y) - \frac{1}{3} \log x = \log(x-y)^{\frac{1}{2}} - \log x^{\frac{1}{3}} = \log \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$d) y = \ln c - \ln x + 3 \ln(x+1) = \ln \left(\frac{c}{x} \right) + \ln(x+1)^3 = \ln \left(\left(\frac{c}{x} \right) (x+1)^3 \right) = \ln \left(\frac{c(x+1)^3}{x} \right)$$

11.7. Gráfica de la función logaritmo

A diferencia de los polinomios, donde podemos escoger como valores para evaluar $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, en este caso no podemos tomar valores negativos o cero. Tiene sentido preguntar a qué valor tenemos que elevar, digamos 2, para obtener 0 o un número negativo, pues esto no está definido.

Ejemplo 11.7.1

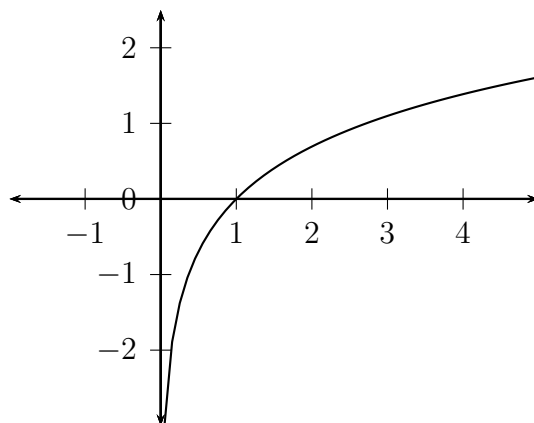
Hacer la gráfica de $f(x) = \ln x$

11.7. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO

SOLUCIÓN: Para hacer la tabulación tomamos valores positivos esto es $x > 0$:

x	0.001	1	2	3	4	5
$f(x)$	-6.9077	0	0.6931	1.0986	1.3862	1.6094

Figura 11.3: Gráfica de la función $f(x) = \ln x$



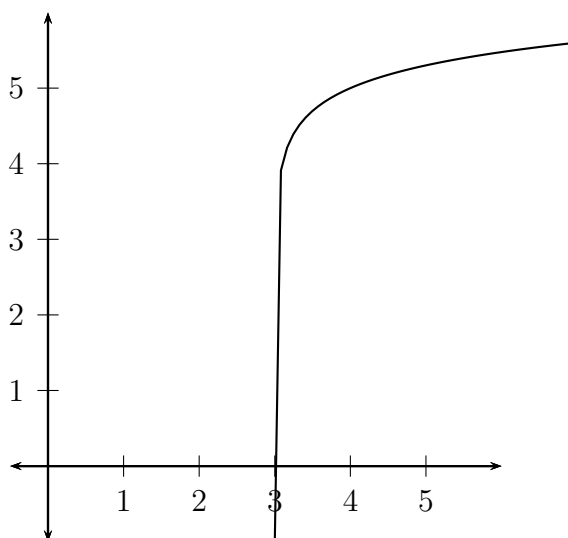
La función $f(x) = \ln(x)$ es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 11.7.2

Hacer la gráfica de $f(x) = \log(x - 3) + 5$

SOLUCIÓN: Notamos que $x - 3 > 0$, pues logaritmo no está definida ni en cero ni para números negativos. Como $x - 3 > 0$ tenemos que $x > 3$ y hacemos la siguiente tabulación:

x	3.1	4	5	6	7	8
$f(x)$	4	5	5.3010	5.4771	5.6020	5.6989

Figura 11.4: Gráfica de la función $f(x) = \log(x - 3) + 5$ 

También se puede hacer la traslación correspondiente 3 lugares a la derecha y 5 lugares arriba.

11.8. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Para resolver este tipo de ecuaciones, agregamos a la lista de propiedades de la igualdad 5.1 las siguientes propiedades:

- I. Si $a = b$ entonces $\ln a = \ln b$.
- II. Si $a = b$ entonces $e^a = e^b$.
- III. Si $a = b$ entonces $\log_c a = \log_c b$.
- IV. Si $a = b$ entonces $x^a = x^b$.
- V. Si $\ln a = b$ entonces $a = e^b$.
- VI. Si $\log_x a = b$ entonces $a = x^b$.
- VII. Si $e^a = b$ entonces $a = \ln b$.
- VIII. Si $x^a = b$ entonces $a = \log_x b$.
- IX. $\ln(e^x) = x$
- X. $e^{\ln x} = x$
- XI. $\log_b(b^x) = x$

XII. $b^{\log_b x} = x$

Ejemplo 11.8.1

Resolver $3^x = 7$

SOLUCIÓN: Un procedimiento para resolver $3^x = 7$ es calcular logaritmo base 3 a ambos lados para aplicar la propiedad XI:

$$\log_3(3^x) = \log_3(7),$$

por lo cual

$$x = \log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} = 1.7712$$

Ejemplo 11.8.2

Resolver $3^{x+4} = 5^{x+2}$

SOLUCIÓN: Calculamos logaritmo a ambos, lados esto es

$$\ln(3^{x+4}) = \ln(5^{x+2})$$

aplicamos propiedades de logaritmos, obtenemos:

$$(x + 4) \ln 3 = (x + 2) \ln 5$$

queda una ecuación de primer grado:

$$(\ln 3)x + (\ln 3)4 = (\ln 5)x + (\ln 5)2$$

$$(\ln 3)x - (\ln 5)x = (\ln 5)2 - (\ln 3)4$$

$$x(\ln 3 - \ln 5) = (\ln 5)2 - (\ln 3)4$$

$$x = \frac{(\ln 5)2 - (\ln 3)4}{\ln 3 - \ln 5} = 2.3013$$

Además podemos hacer la comprobación correspondiente evaluando en la ecuación original del ejemplo anterior

$$1015 \approx 3^{2.3013+4} = 5^{2.3013+2} \approx 1015.$$

Ejemplo 11.8.3

Resolver $1 + 2^{x-1} = 7$ **SOLUCIÓN:** Aplicamos propiedades de la igualdad

$$2^{x-1} = 7 - 1 = 6$$

ahora calculamos logaritmo a ambos lados:

$$\ln 2^{x-1} = \ln 6$$

$$(x - 1) \ln 2 = \ln 6$$

$$(\ln 2)x - \ln 2 = \ln 6$$

$$x = \frac{\ln 6 + \ln 2}{\ln 2} \approx 3.5849$$

11.9. Aplicaciones de las funciones exponenciales

En esta sección se usarán las propiedades de logaritmos y exponenciales para resolver problemas.

Ejemplo 11.9.1

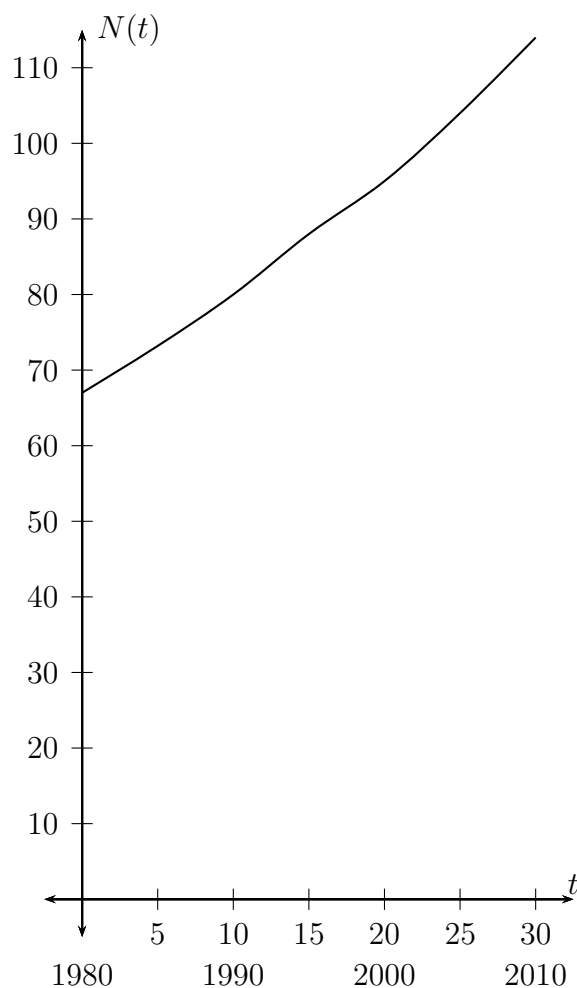
La población $N(t)$ (en millones) de la República Mexicana, t años después de 1980, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 67e^{0.0177t}$.

- Haz la gráfica
- ¿Cuántos habitantes tenía la República Mexicana en 1980?
- ¿Cuántos habitantes en 1985?
- ¿Cuándo tendrá 150 millones de habitantes?

SOLUCIÓN: En este caso nos dice que empieza en 1980, esto no significa que $t = 1980$, lo que se tiene es que $t = 0$, 1981 corresponde a $t = 1$ etcétera. Hacemos la siguiente tabulación:

año	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
t	0	5	10	15	20	25	30
$N(t)$	67	73.199	79.973	87.374	95.45	104.29	113.942

Figura 11.5: Población de México a partir de 1980



Con la tabla podemos decir que en 1980 la población en México era de 67 millones de habitantes. En el año 1985 eran 73.199 millones de habitantes aproximadamente.

Para saber cuándo serán 150 millones de habitantes: en este caso la incógnita es t , por lo que nos queda la ecuación:

$$150 = 67e^{0.0177t}$$

$$\frac{150}{67} = e^{0.0177t}$$

$$\ln\left(\frac{150}{67}\right) = \ln(e^{0.0177t})$$

$$\ln 150 - \ln 67 = 0.0177t$$

$$t = \frac{\ln 150 - \ln 67}{0.0177} \approx 45.53$$

Sumando esto a 1980 obtenemos que, aproximadamente a mediados del 2025, la población en México será de 150 millones.

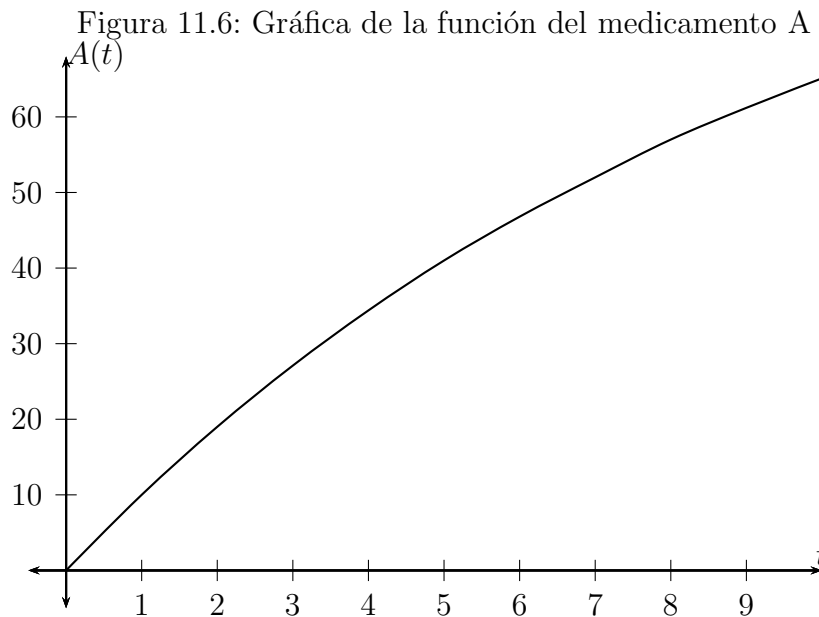
Ejemplo 11.9.2

Si se ingiere una pastilla de 100mg contra el asma y hay ausencia del medicamento en el cuerpo cuando se toma por primera vez, la cantidad total A en el torrente sanguíneo, después de t minutos, está pronosticada por $A(t) = 100(1 - (0.9)^t)$ para $0 \leq t \leq 10$.

- a) Traza la gráfica de la función.
- b) Determina cuántos miligramos entran al torrente sanguíneo a los 2 minutos.
- c) Determina cuántos miligramos entran al torrente sanguíneo a los 5 minutos.
- d) Determina los minutos necesarios para que 50 miligramos del fármaco entren en el torrente sanguíneo.

SOLUCIÓN: a) La gráfica corresponde a la tabulación

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(t)$	0	10	19	27.1	34.39	40.95	46.85	52.17	56.95	61.25	65.13



- b) Entran 19mg a los 2 minutos.
- c) Entran 40.95 mg a los 5 minutos.

d) Ahora resolvemos la ecuación

$$50 = 100(1 - 0.9^t)$$

obtenemos

$$\frac{50}{100} = 1 - 0.9^t$$

después

$$0.9^t = 1 - \frac{50}{100} = 0.5$$

y calculando \ln a ambos lados tenemos

$$\ln 0.9^t = \ln 0.5$$

aplicando la propiedad correspondiente tenemos

$$t \ln 0.9 = \ln 0.5$$

y finalmente

$$t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.9} = 6.5$$

esto es, aproximadamente a los seis minutos y medio se tienen 50 mg del fármaco en el torrente sanguíneo.

11.10. Ejercicios

Ejercicio 11.10.1. Escribe usando potencias de 10 los siguientes números

- a) 100
- b) 100000
- c) 1000000

Ejercicio 11.10.2. Haz la gráfica de las siguientes funciones exponenciales

- a) $f(x) = 3^x - 7$

b) $f(x) = 3e^x + 2$

c) $f(x) = (1 - 10^x) + 5$

Ejercicio 11.10.3. Utiliza leyes de los exponentes para hacer las siguientes operaciones

a) $36^{\frac{1}{2}}$

b) $(2 \cdot 3)^4$

c) $81^{\frac{1}{2}} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$

d) $\frac{5^8}{5^{-3}}$

e) 3^{-2}

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

Ejercicio 11.10.4. Encuentra los siguientes logaritmos

a) $\log_3 9$

b) $\log_6 36$

c) $\log_4 \frac{1}{64}$

d) $\log_{10} 100$

e) $\log_{49} 7$

Ejercicio 11.10.5. Haz los siguientes ejercicios usando la calculadora

a) $\log 1000$

b) $\ln 2.71$

c) $\log_4 8$

d) $\log_9 27$

e) $\log 101$

f) $\ln 10$

g) $\log_{12} 144$

h) $\log_8 \frac{1}{64}$

11.10. EJERCICIOS

i) $\log_{36} 6$

Ejercicio 11.10.6. Desarrolla las siguientes expresiones

a) $y = \ln \left(\frac{x^3}{x+1} \right)$

b) $y = \log(x^3 y^5)$

c) $y = \ln \left(\frac{\sqrt{x+y}}{(x-2y)^3} \right)$

d) $\log \left(\frac{4x}{y^2} \right)$

e) $\log(x^8 b^7)$

f) $\log \left(\frac{7(x+1)^{14}}{y^5} \right)$

Ejercicio 11.10.7. Compacta las siguientes ecuaciones a un sólo logaritmo

a) $y = \log 3 + \log x$

b) $y = 2 \ln x - \frac{1}{3} \ln y$

c) $y = \ln 3 - \ln 9 + \ln 27$

d) $\log 3 + 4 \log x - 4 \log y$

e) $\log 5 - \log 6 + \log 3$

f) $3 \log(x+1) - \frac{1}{2} \log(x-2)$

Ejercicio 11.10.8. Haz la gráfica de las siguientes funciones logarítmicas

a) $f(x) = 3 \ln(x+1) - 1$

b) $g(x) = \log(9x) - 5$

Ejercicio 11.10.9. Haz la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x) = \log_3(6x)$

b) $g(x) = \log_x 2$

c) $h(x) = e^x - 5$

d) $f(x) = (0.5)^{2x}$

e) $g(x) = \frac{\ln(x+5)}{2}$

f) $h(x) = 3^x - 2$

Ejercicio 11.10.10. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $4^x = 64$

b) $3^{2x-1} = 27$

c) $\log_6 3 + \log_6(x+6) = 2$

d) $2^{x^2+1} = 2^{2x}$

Ejercicio 11.10.11. Resuelve las siguientes ecuaciones (da la solución aproximada con cuatro cifras decimales)

a) $5e^{2x-1} + 11 = 30$

b) $4 \ln(5x+3) - 3 = 16$

c) $5 \log(7x+2) + 3 = 13$

d) $2^{5x-4} - 4 = 60$

e) $e^{-2x}e^{3x} = e^4$

f) $4(1 + 2e^{-5x})^3 = 20$

g) $\log_8 16 + \log_8(x-2) = 2$

Ejercicio 11.10.12. Determina qué propiedades de los exponentes se usan en las siguientes expresiones

a) $5((0.2)^2)^3$

b) $(3(2)^2)(-4(2)^5)$

c) $\frac{2^5 3^7}{2^2 3^9}$

d) $(-5)^6$

e) 2^{-10}

f) $(4^{-2})(4^{-6})$

Ejercicio 11.10.13. Calcula los siguientes logaritmos y exponentes

a) $\log_3 18$

11.10. EJERCICIOS

- b) 0.3^5
- c) $\log_2 16384$
- d) $\log 2000$
- e) $\ln 89$
- f) $\log_{0.25} 5$
- g) $2^{-0.5}$
- h) $\log_2 56$

Ejercicio 11.10.14. La fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$ permite calcular la presión del aire $p(h)$ ($lb/pulg^2$) a una altitud de h pies sobre el nivel del mar.

- a) Haz la gráfica correspondiente
- b) ¿Cuál es la presión al nivel del mar?
- c) ¿Cuál es la presión a 10000 pies sobre el nivel del mar?
- d) ¿A qué altitud h la presión del aire será de $10lb/pulg^2$?

Ejercicio 11.10.15. El peso W (en kg) de una elefanta africana, a la edad de t (en años), puede aproximarse mediante $W(t) = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3$.

- a) Aproxima le peso al nacer
- b) Haz la gráfica correspondiente
- c) Estima la edad de una elefanta africana de $1800kg$

Ejercicio 11.10.16. El cuerpo elimina un producto a través de la orina. Supón que para una dosis de $10mg$, la cantidad $A(t)$ restante en el cuerpo t horas después, está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$, y que para que sea efectiva, al menos $2mg$ deben estar en el cuerpo.

- a) Haz la gráfica de la función
- b) Determina cuántos miligramos restan en el cuerpo a las 3 horas
- c) Indica cuándo quedarán $2mg$ en el cuerpo

Ejercicio 11.10.17. El aumento de la altura arbórea se describe a menudo mediante una ecuación logística. Supón que la altura h (en pies) de un árbol de edad t (en años) es $h = \frac{120}{1 + 200e^{-0.2t}}$.

- a) Traza la gráfica correspondiente

- b) ¿Cuál será su altura a los 10 años?
- c) ¿Cuál será su altura a los 20 años?
- d) ¿A qué edad medirá 50 pies?

Ejercicio 11.10.18. A un grupo de estudiantes de nivel elemental se les enseñó a dividir durante una semana y luego se les examinó; la calificación promedio fue de 8.5. De ahí en adelante se les practicó un examen semejante, sin repasar la materia. La función $n(t)$ (t dado en semanas) que representa la nota promedio está dada por $n(t) = \frac{86 - e^t}{10}$.

- a) Haz la gráfica de la función hasta la semana $t = 4$
- b) Determina en cuántas semanas sin repaso obtendrán calificación reprobatoria (esto es menor a 6)

Ejercicio 11.10.19. El número de bacterias de un cultivo está dado por la fórmula $N(t) = 500e^{0.45t}$ donde t se mide en horas.

- a) ¿Cuál es el número inicial de bacterias?
- b) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo después de 3 horas?
- c) ¿Después de cuántas horas será 10000 el número de bacterias?
- d) Haz la gráfica de la función N

Ejercicio 11.10.20. La población de la ciudad de Brujas en Bélgica fue de 112000 en 1994, y la función de crecimiento de la población dada en t años es $B(t) = 112000e^{0.04t}$.

- a) Determina la población en el año 2000
- b) ¿En qué año alcanzará la población la cifra de 200000?
- c) Haz la gráfica de la función $B(t)$

Ejercicio 11.10.21. Un cultivo se inicia con 8600 bacterias. Después de una hora, el conteo alcanza 10000.

- a) Determina el valor a en la función $N(t) = 8600e^{at}$ (usa 4 cifras decimales)
- b) Comprueba el resultado a la hora usando la fórmula para calcular la población de bacterias en $t = 1$
- c) Determina el número de bacterias después de 2 horas
- d) ¿Después de cuántas horas se duplicará el número de bacterias?

11.10. EJERCICIOS

Ejercicio 11.10.22. En una cena se sirve un tazón de sopa caliente. Empieza a enfriarse de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, de forma que su temperatura en el tiempo t está dada por $T(t) = 18 + 63e^{-0.05t}$ donde t se mide en minutos y T en C° .

- a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?
- b) ¿Cuál es la temperatura después de 10 minutos?
- c) ¿Después de cuánto tiempo llegará a la temperatura de $36^\circ C$?
- d) Haz la gráfica

Trigonometría

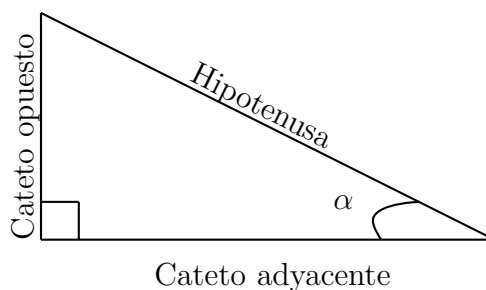
La trigonometría es la rama de la matemática que comprende la medición de triángulos. Los triángulos podemos clasificarlos en tres tipos:

- Un triángulo equilátero es aquel donde todos los lados miden lo mismo.
- Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual.
- Un triángulo escaleno tiene todos sus lados desiguales.

En general, si conocemos parte de la información de un triángulo, podemos determinar cuanto miden sus lados o sus ángulos interiores.

Definición 12.1. *Un triángulo rectángulo es un triángulo escaleno que tiene un ángulo recto, es decir, mide 90° .*

Cada uno de los lados de un triángulo rectángulo recibe un nombre, estos nombres dependen de cuál de los ángulos restantes distintos a 90° se ocupa.



Definición 12.2. *La hipotenusa es el lado más largo del triángulo rectángulo.*

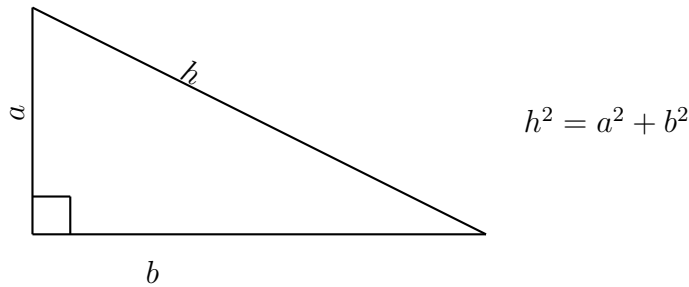
Definición 12.3. *El cateto opuesto es el lado que queda justo frente del ángulo α .*

Definición 12.4. *El cateto adyacente es el lado que, junto con la hipotenusa, forma el ángulo α . (Recordemos que "adyacente" significa "junto a".)*

12.1. Teorema de Pitágoras

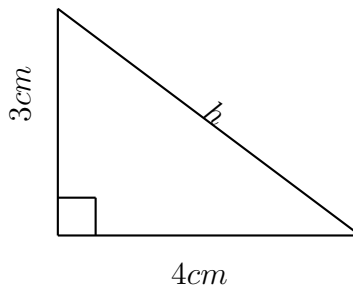
Usando este teorema podemos calcular un lado cuando nos dan la información de los otros dos.

Teorema 12.1. *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



Ejemplo 12.1.1

Determina cuánto mide el lado h ; considera que está dado en centímetros:



SOLUCIÓN: Notemos que no conocemos la hipotenusa, así que sustituimos los otros datos en la fórmula

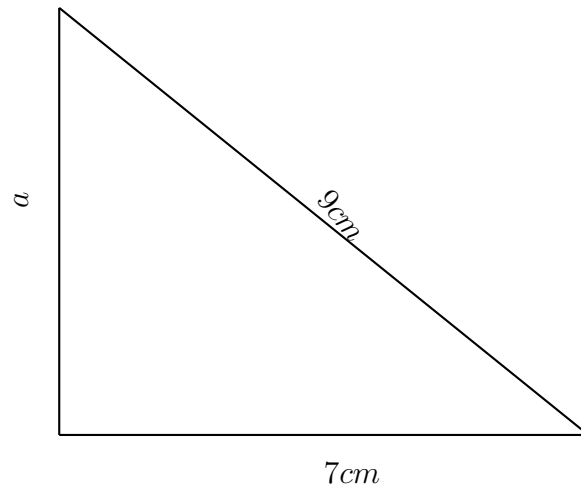
$$h^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$h = \sqrt{25} = 5.$$

En este caso no consideramos la raíz negativa pues se trata de una medida de longitud, la cual es positiva. Por lo tanto el lado que falta mide 5 centímetros.

Ejemplo 12.1.2

Determina cuántos centímetros mide el lado a



SOLUCIÓN: Ahora sustituimos la información. En este caso son la hipotenusa y un cateto:

$$9^2 = a^2 + 7^2$$

obteniendo

$$81 = a^2 + 49$$

despejamos

$$a^2 = 81 - 49 = 32$$

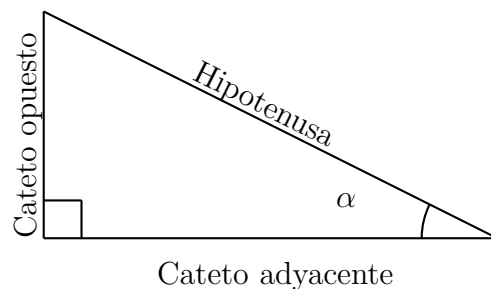
esto es

$$a = \sqrt{32} \approx 5.65.$$

Por lo tanto el cateto a mide aproximadamente 5.65 centímetros.

12.2. Razones trigonométricas

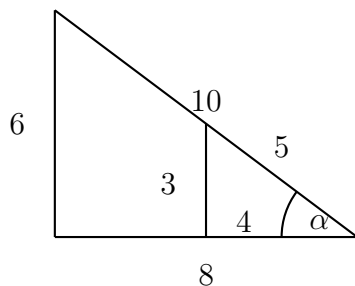
Los lados y el ángulo distinto al recto de un triángulo rectángulo están relacionados por las razones trigonométricas. Las tres principales son:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ \operatorname{cos}(\alpha) &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \operatorname{tan}(\alpha) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \end{aligned}$$

Ejemplo 12.2.1

Los griegos notaron que las fracciones o razones anteriores se cumplían siempre para triángulos con el mismo ángulo, por ejemplo los siguientes triángulos:



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \text{cos}(\alpha) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{tan}(\alpha) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Observación 12.1. *Éstas se leen “seno de alfa, coseno de alfa y tangente de alfa”. NO ESTÁN MULTIPLICANDO. Si queremos “pasarlas al otro lado” su nombre cambia a arcsen el cual se lee “arcoseno”, arccos que se lee “arcocoseno” y arctan que se lee “arcotangente” conocidas como funciones trigonométricas inversas.*

Para calcular estas tres razones trigonométricas, usamos la calculadora: seno aparece como “sin”, coseno como “cos” y tangente como “tan”, mientras que las inversas se obtienen con *shift* o *2ndf* y son las que están arriba, que se abrevian como:

$$\text{arcsen} = \text{sen}^{-1} \quad \text{arccos} = \text{cos}^{-1} \quad \text{y} \quad \text{arctan} = \text{tan}^{-1}.$$

Entonces para aproximar α de la primera razón obtenemos

$$\alpha = \text{arcsen} \left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \right)$$

en el caso del ejemplo 12.2.1

$$\alpha = \text{arc sen}(0.6) \approx 36.869^\circ$$

se puede verificar esto usando un transportador y calculando las otras dos:

$$\text{cos}(36.869) \approx 0.8$$

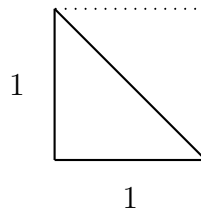
y

$$\text{tan}(36.869) \approx 0.749.$$

Observamos que se obtienen aproximadamente los valores originales.

Ejemplo 12.2.2

Encuentra tangente, seno y coseno de:



SOLUCIÓN: En este caso cateto opuesto y cateto adyacentes son iguales, estamos hablando de la mitad de un cuadrado, por lo que sabemos que cada uno de los ángulos mide 45° que es la mitad de 90° . Entonces:

$$\tan(45^\circ) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Para calcular seno y coseno necesitamos el valor de la hipotenusa, usando la fórmula tenemos

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

entonces

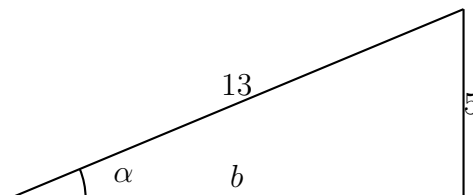
$$h = \sqrt{2}$$

usando las fórmulas de seno y coseno tenemos que

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{cos}(45^\circ).$$

Ejemplo 12.2.3

Considera el siguiente triángulo, determinar b , $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ y α .



12.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

SOLUCIÓN: Para el cateto que no se conoce, usamos el teorema de Pitágoras, esto es

$$13^2 = 5^2 + b^2$$

$$169 = 25 + b^2$$

despejamos y obtenemos

$$b = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Determinar $\text{sen}(\alpha)$ $\text{cos}(\alpha)$ y $\text{tan}(\alpha)$.

Usamos las fórmulas y sustituimos directamente:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{5}{13},$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{12}{13}$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{5}{12}.$$

Para encontrar α usamos cualquiera de las anteriores, digamos

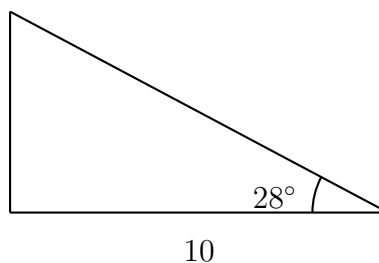
$$\text{cos}(\alpha) = \frac{12}{13}$$

despejamos α obteniendo

$$\alpha = \text{arc cos} \left(\frac{12}{13} \right) \approx 22.6^\circ.$$

Ejemplo 12.2.4

Considera el siguiente triángulo



a) Determinar la hipotenusa

b) Determinar cateto opuesto

SOLUCIÓN: a) Para hacer este ejercicio notamos que la información que nos dan es cateto adyacente y ángulo. Para calcular la hipotenusa buscamos la razón que utiliza cateto adyacente e hipotenusa, entonces

$$\cos(28^\circ) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{10}{h}$$

esto es, podemos despejar h :

$$h = \frac{10}{\cos(28^\circ)} \approx 11.32 \text{ es decir la hipotenusa vale } 11.32.$$

b) No es conveniente utilizar el valor que acabamos de obtener pues es aproximado, por lo cual usamos la razón que está relacionada:

$$\tan(28^\circ) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{10}$$

despejamos a , obteniendo

$$a = 10 \tan(28^\circ) \approx 5.31$$

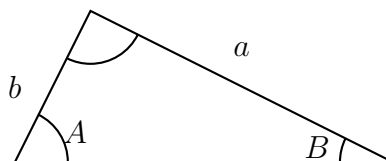
con esto ya terminamos, pero podemos verificar que obtuvimos resultados coherentes al usar el teorema de Pitágoras, esto es

$$128.14 = 11.32^2 \approx 10^2 + 5.31^2 = 128.19.$$

12.3. Ley de senos y ley de cosenos

El Teorema de Pitágoras sólo se cumple para los triángulos rectángulos. En el caso de los triángulos oblicuos, se cumplen las siguientes leyes de los senos y de los cosenos.

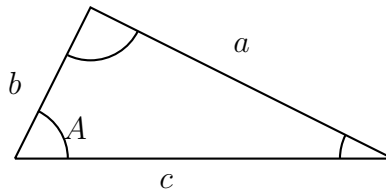
Teorema 12.2. *Ley de los senos.* En cualquier triángulo, la razón de las longitudes de cualquier par de lados es igual a la razón de los senos de los ángulos opuestos correspondientes. $\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b}$



12.3. LEY DE SENOS Y LEY DE COSENOS

Teorema 12.3. *Ley de los cosenos. En cualquier triángulo se cumple que el cuadrado del lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto por el coseno del ángulo opuesto.*

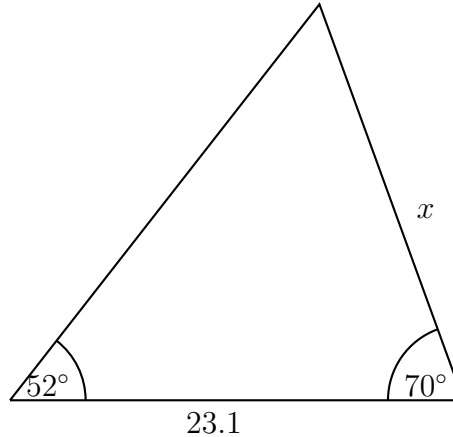
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$



Para determinar qué ley se va a usar, se identifica la información que se da y la que se pide.

Ejemplo 12.3.1

Determinar x en el siguiente triángulo:



SOLUCIÓN: Resolvemos primero determinando cuál es el ángulo que falta, sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo da 180° , por lo tanto,

$$180^\circ - 70^\circ - 52^\circ = 58^\circ.$$

En este caso se usa la ley de los senos pues sólo se conoce un lado

$$\frac{\text{sen}52^\circ}{x} = \frac{\text{sen}58^\circ}{23.1}.$$

Puesto que 52° es el ángulo opuesto a x y 58° es el opuesto a 23.1 , lo que resta es despejar. Para esto primero resolvamos los productos cruzados obteniendo

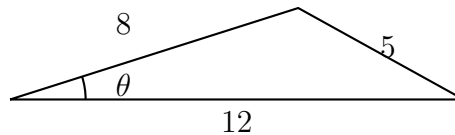
$$23.1(\text{sen}52^\circ) = x(\text{sen}58^\circ)$$

finalmente

$$x = \frac{23.1(\text{sen}52^\circ)}{\text{sen}58^\circ} = 21.46.$$

Ejemplo 12.3.2

Determina el ángulo θ



SOLUCIÓN: En este triángulo conocemos todos los lados pero no los ángulos, entonces no podemos utilizar la ley de los senos. En este caso se pide ángulo opuesto al lado que mide 5, por lo tanto: $a = 5$, $b = 12$ y $c = 8$ sustituimos en la fórmula.

$$5^2 = 8^2 + 12^2 - 2(8)(12) \cos \theta,$$

desarrollando tenemos

$$25 = 208 - 192 \cos \theta.$$

Procedemos a despejar θ , primero se despeja

$$\cos \theta = \frac{25 - 208}{-192}$$

y finalmente

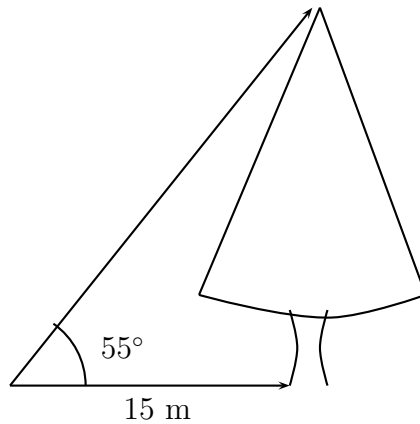
$$\theta = \arccos\left(\frac{25 - 208}{-192}\right) \approx 17.61^\circ.$$

12.4. Aplicaciones

Usamos el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas cuando tenemos un problema donde aparece un triángulo rectángulo. En el caso de cualquier otro triángulo usamos la ley de los senos o la de los cosenos dependiendo de la información proporcionada.

Ejemplo 12.4.1

Un árbol que se encuentra junto a un hospital debe ser cortado por razones de seguridad. Dado que hay cables de alta tensión, la única dirección en la que se debe tirar es frente al edificio. El árbol está a 30 metros del edificio. Un supervisor se para justo a una distancia de 15 metros del árbol y mide en ese punto el ángulo de elevación que es de 55° . Encuentra la altura del árbol y decide si es razonable cortar el árbol sin pegarle al edificio.



SOLUCIÓN: Como podemos observar en la figura, el triángulo que se forma con la altura del árbol y la distancia al punto donde está el observador es un triángulo rectángulo, entonces, usamos razones trigonométricas para encontrar la altura del árbol. En este caso buscamos la altura, que es el cateto opuesto al ángulo 55° y el dato que se conoce es el cateto adyacente. Por lo tanto, la razón trigonométrica es la tangente

$$\tan 55^\circ = \frac{\text{altura}}{15 \text{ metros}},$$

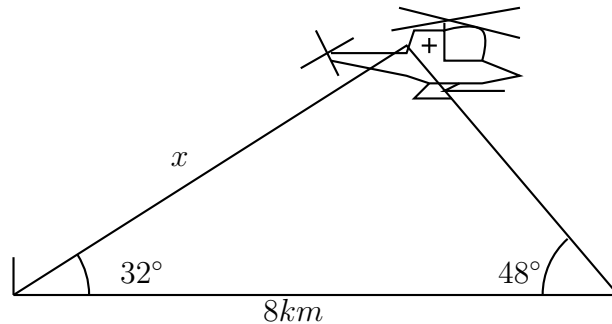
despejamos la altura y obtenemos

$$\text{altura} = 15 \tan 55^\circ \approx 21.42 \text{ metros.}$$

Concluimos que se puede cortar el árbol sin que se corra riesgo de pegarle al edificio.

Ejemplo 12.4.2

El piloto de una ambulancia aérea está volando sobre una carretera recta en San Luis Potosí. Él encuentra que los ángulos de depresión a dos postes indicadores de kilómetros, separados por 8 km de distancia entre sí, tienen los valores de 32° y 48° . Determina la distancia de la ambulancia aérea al poste de la izquierda de la siguiente figura.



SOLUCIÓN: Notamos que ahora se trata de un triángulo oblicuo, recordemos que la suma de los ángulos justo donde está la ambulancia aérea debe ser de 180° , por lo tanto el ángulo opuesto al lado de 8 km es de 100° . El ángulo opuesto al lado x es el de 48° .

En este caso se usa ley de los senos

$$8 : \text{sen}100^\circ = x : \text{sen}48^\circ,$$

entonces,

$$\frac{8}{\text{sen}100^\circ} = \frac{x}{\text{sen}48^\circ}$$

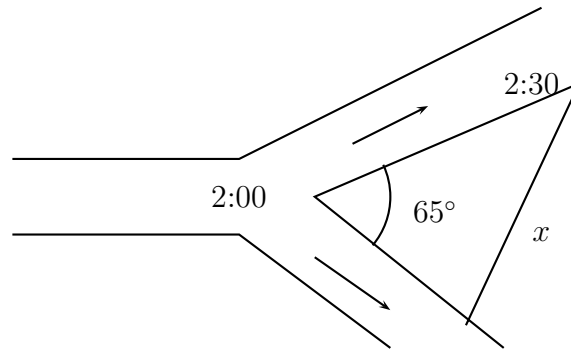
Despejamos para obtener

$$x = \frac{8\text{sen}48^\circ}{\text{sen}100^\circ} \approx 6.0368.$$

La distancia aproximada del primer poste a la ambulancia es de aproximadamente 6 kilómetros.

Ejemplo 12.4.3

Una carretera diverge en dos carreteras rectas que forman un ángulo de 65° . Dos ambulancias salen de la intersección a las 2 : 00 p.m., una viaja a $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y la otra a $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿Qué distancia separa a las ambulancias a las 2 : 30 p.m.?



SOLUCIÓN: Primero debemos calcular las distancias que recorren ambas ambulancias en media hora: la ambulancia que va a una velocidad de $80 \frac{km}{h}$ en media hora recorre 40 km y la que va a $50 \frac{km}{h}$ recorre 25 km. Como sólo conocemos el ángulo opuesto del lado que buscamos se utiliza la ley de cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

$$c^2 = (40)^2 + (25)^2 - 2(40)(25) \cos 65^\circ \approx 1379.76,$$

por lo tanto,

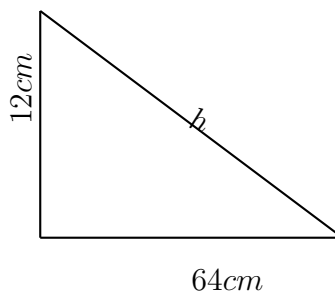
$$c \approx \sqrt{1379.76} \approx 37.145$$

Media hora después las ambulancias están separadas por 37.145 kilómetros.

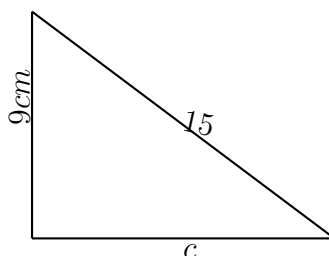
12.5. Ejercicios

Ejercicio 12.5.1. Encuentra el lado que falta en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

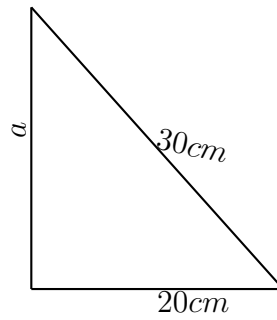
a)



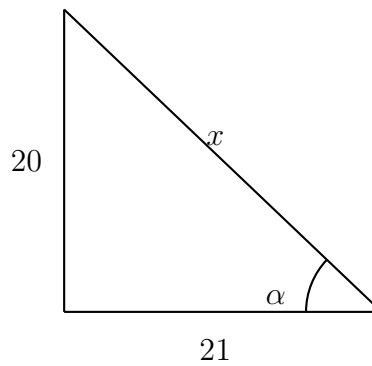
b)



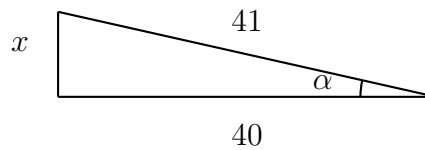
c)



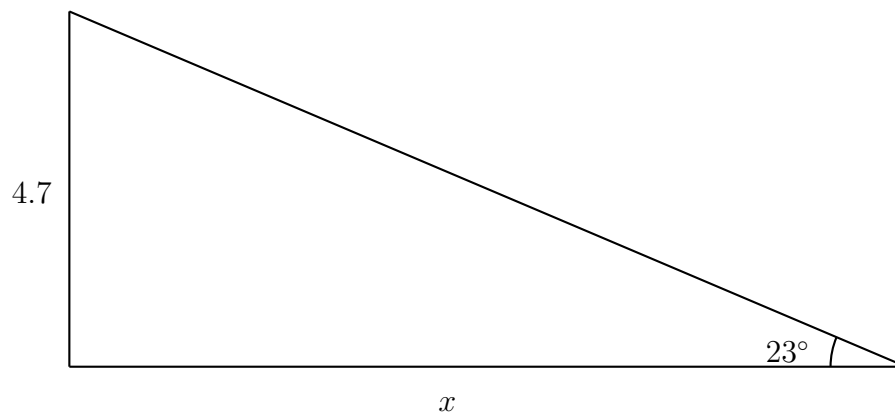
Ejercicio 12.5.2. Determina x , $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$, $\text{tan}(\alpha)$ y α .



Ejercicio 12.5.3. Determina α y x del siguiente triángulo.

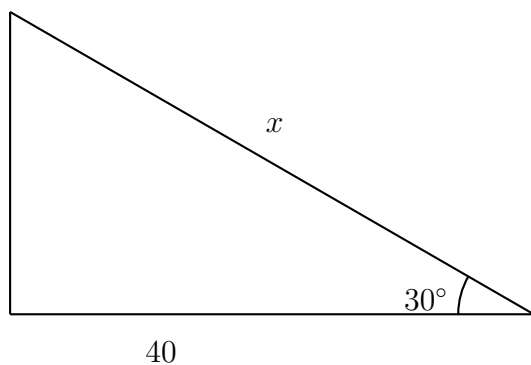


Ejercicio 12.5.4. Determina el valor de x del siguiente triángulo.



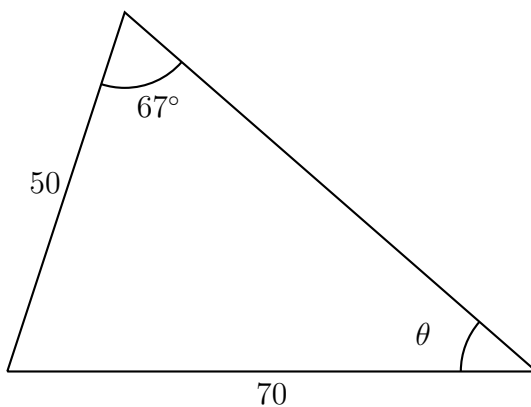
12.5. EJERCICIOS

Ejercicio 12.5.5. Determina el valor de x del siguiente triángulo.

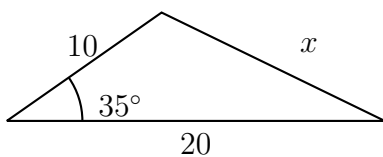


Ejercicio 12.5.6. Determina el lado x o el ángulo θ de los siguientes triángulos:

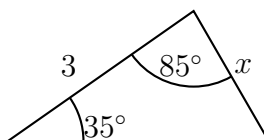
a)



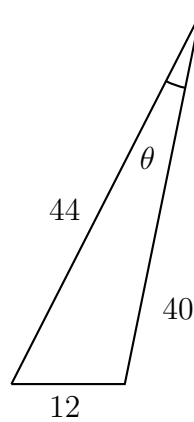
b)



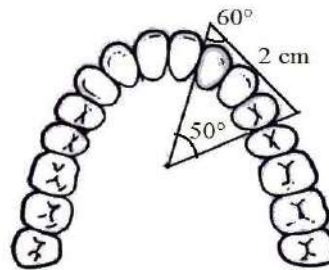
c)



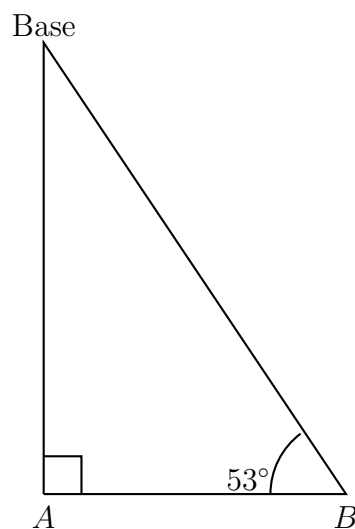
d)



Ejercicio 12.5.7. Determina los lados que faltan del triángulo que se forma con los dientes indicados y una perforación en la lengua de acuerdo con la siguiente figura

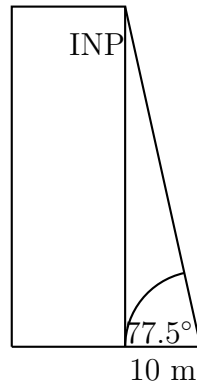


Ejercicio 12.5.8. Dos socorristas se encuentran separados por 5280 m. Ambos se dirigen a su base. Si el socorrista A está en línea recta a la base y el socorrista B sabe que el punto donde está forma un ángulo de 53° con la base, ¿a qué distancia de la base están ambos socorristas?

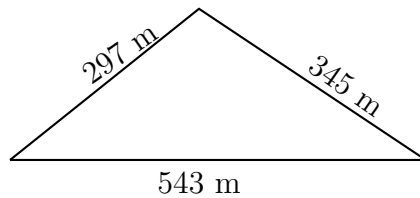


12.5. EJERCICIOS

Ejercicio 12.5.9. El ángulo de elevación a la parte superior de la Torre de Investigación del Instituto Nacional de Pediatría, desde una distancia de 10 m de la base del edificio, se ha determinado que es de 77.5° sobre el nivel del piso. Utilizando esta información determina la altura de la Torre.



Ejercicio 12.5.10. En un terreno triangular que mide de cada lado 345 m, 297 m y 543 m se va a construir un complejo hospitalario ¿Cuánto miden sus ángulos internos?

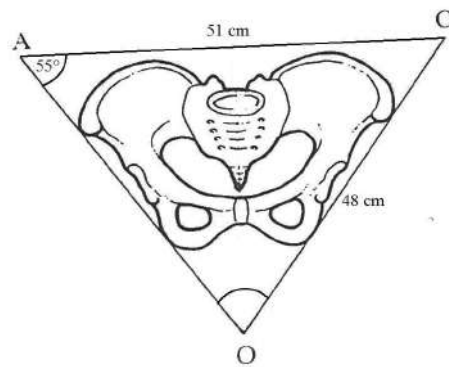


Ejercicio 12.5.11. Una escalera de 6 metros está apoyada contra un edificio, de tal manera que el ángulo entre el piso y la escalera es de 75° . ¿Qué altura alcanza la escalera sobre el edificio?

Ejercicio 12.5.12. Un paralelogramo tiene lados de longitud 3 cm y 5 cm y un ángulo de 50° . Determina la longitud de las diagonales.

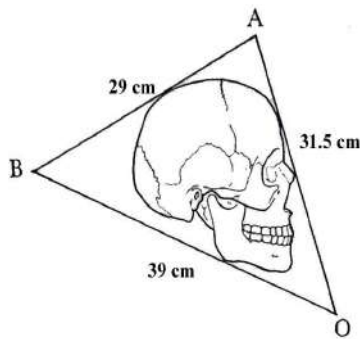
Ejercicio 12.5.13. Un edificio de 29 metros proyecta una sombra de 36 metros de largo. ¿Cuál es el ángulo que se forma con respecto al suelo?

Ejercicio 12.5.14. Determina el ángulo de la pelvis en el punto O de acuerdo con los datos de la siguiente figura:



Ejercicio 12.5.15. Una antena está sostenida por un cable. Si la antena está separada de la base del cable por 57 m y el ángulo que forma el cable con el suelo es de 22° , encuentra la altura de la antena.

Ejercicio 12.5.16. Determina el ángulo interior del maxilar si el cráneo inscrito en un triángulo presenta las medidas de la siguiente figura:



Bibliografía

- [Ma2010] MARTÍNEZ DE FLORES Graciela, GONZÁLEZ GARZA Marcela, TORRE MARINA Covadonga. *Iniciación en las técnicas culinarias*. 2 ed., Limusa (2010).
- [Do1978] DOLCIANI Mary, BERMAN Simon, FRELICH Juliu. *Álgebra Moderna*. Publicaciones Cultural (1978).
- [Go1990] GOBRAN Alfonse. *Álgebra Elemental*. Grupo Editorial Iberoamérica (1990).
- [La2018] LARSON Ron. *Precalculo*. Grupo Cengage Learning (2018).
- [Mi2019] MILLER Julie, GERKEN Donna. *Álgebra universitaria y trigonometría*. McGraw-hill (2019).
- [Pr2006] PRADO Carlos, SANTIAGO Rubén, AGUILAR Gerardo, RODRÍGUEZ Guillermo. *Precálculo: enfoque de resolución de problemas*. Pearson Educación (2006).
- [Sw2018] SWOKOWSKI Earl W., COLE Jeffery. *Álgebra y trogonometría con geometría analítica*. Primera edición. Cengage Learning (2018).

Índice alfabético

- abscisa al origen, 139
- abscisas, 131
- base, 205, 208
- base 10, 205
- cateto opuesto, 225
- conjuntos
 - ajenos, 23
 - aplicaciones, 26
 - cardinalidad, 18
 - comparables, 20
 - complemento, 25
 - conjunto unitario, 18
 - conjunto Universo, 21
 - conjunto vacío, 17
 - definición, 15
 - descripción, 16
 - descripción por extensión, 16, 17
 - diferencia, 24
 - elemento, 15
 - finitos, 18
 - iguales, 19
 - infinitos, 18
 - intersección, 22
 - propiedades, 23
 - notación, 15
 - relaciones, 19
 - subconjunto propio, 20
 - subconjuntos, 19
 - unión, 23
 - propiedades, 24
- coordenadas rectangulares, 131
- coseno, 227
- decimal finito, 57
- decimal infinito, 57
- decimales
 - suma, 60
- denominador, 48
- desigualdades, 115
 - aplicaciones, 124
 - conjunto solución, 121
 - lineales, 121
 - propiedades, 120
- desigualdades compuestas, 122
- desigualdades equivalentes, 121
- diagramas de Venn-Euler, 21
- directamente proporcional, 81
- divisibilidad, 45
 - pruebas de, 45
- dosis, 95
- e, 65
- ecuaciones de primer grado, 105
- ecuaciones de segundo grado, 171
- ecuaciones equivalentes, 106
- exponencial
 - aplicaciones, 215
 - función, 206
 - gráfica, 206
- exponente, 205
- fórmula general ecuaciones de segundo grado, 171
- factor de goteo, 102
- fracción, 48
 - mixta, 53
- fracciones
 - impropias, 52
 - propias, 52
- fracciones equivalentes, 50
- función
 - absoluto, 198
 - biyectiva, 195
 - dilatación, 191

- exponencial, 206
- impar, 186
- inversa, 196
- inyectiva, 194
- par, 185
- reflexión de una, 193
- sobreyectiva, 194
- transformación, 189
- funciones, 179
 - definición, 179
- hipotenusa, 225
- igualación, método de, 157
- intervalos, 117
 - operaciones, 117
- intravenosas
 - soluciones, 101
- inversamente proporcionales, 81
- ley de los cosenos, 232
- ley de senos, 231
- leyes de los exponentes, 207
- leyes de los signos, 43
- logaritmo
 - cálculo de, 209
 - definición de, 208
- método de igualación, 157
- medicamentos intravenosos, 101
- número
 - π , 63
 - e , 64
 - divisible, 45
- números
 - decimales, 57
 - enteros, 42
 - irracionales, 63
 - naturales, 41
 - racionales, 49
 - reales, 65
- numerador, 48
- ordenada al origen, 137
- ordenada la origen, 139
- ordenadas, 131
- pendiente, 134
 - fórmula, 134
- Pitágoras
 - teorema, 226
- plano Cartesiano, 132
- porcentajes %, 83
- problemas
 - estrategia, 109
- propiedad de tricotomía, 115
- propiedades de la igualdad, 107
- proporciones, 78
- razón, 75
- recta
 - Forma canónica, 140
 - forma pendiente ordenada al origen, 137
 - pendiente cero, 138
 - pendiente infinita, 138
- rectas
 - oblicuas, 153
 - paralelas, 151
 - perpendiculares, 153
- seno, 227
- sentido de la desigualdad, 116
- Sistema de ecuaciones, 151
- solución, 80
 - concentración, 80
- soluto, 80
- suma y resta, método de, 159
- sustitución, método de, 155
- tangente, 227
- triángulo
 - equilátero, 225
 - escaleno, 225
 - isósceles, 225
- trigonometría, 225
 - aplicaciones, 234
- variable dependiente, 181
- variable independiente, 181

Matemáticas para ciencias de la salud
de Julia Iztaccihualt Muñoz Guerra
se terminó de imprimir en diciembre de 2023
en el taller Reproducciones Gráficas del Sur,
Amatl 20, col. Sto. Domingo,
alc. Coyoacán, CP 04369, Ciudad de México,
con un tiraje de 700 ejemplares.
Cuidado de la edición: Ana Beatriz Alonso Osorio.
Diseño de portada: Alejandra Riba
Diseño editorial: Julia Iztaccihualt Muñoz Guerra.

Las/los profesionales de la salud habrán de necesitar diversos tópicos de las matemáticas básicas que les serán imprescindibles durante su práctica, como el manejo de dosis y administración de medicamentos. *MATEMÁTICAS PARA CIENCIAS DE LA SALUD* propone este vínculo al presentar una introducción clara y sencilla a cada una de las temáticas que habrán de requerir, indicando su importancia, aplicabilidad y momentos de uso en ámbitos de la salud como la medicina, la nutrición, la enfermería o la promoción de la salud. El material aprovecha tablas e imágenes para reforzar los planteamientos, e incorpora una abundante cantidad de problemas y ejemplos para su aplicación cotidiana. Los temas se exponen en capítulos que se abordan de manera gradual y sistemática, permitiendo a la/el estudiante aprender y reforzar matemáticas, y vinculándolas siempre a situaciones plausibles del cuidado y la atención a la salud humana.

Julia Iztaccihualt Muñoz Guerra es Licenciada en Matemáticas y Maestra en Ciencias por la UAM Iztapalapa. Ha impartido cursos de matemáticas en sus diferentes niveles y especialidades, incluyendo Modelación Matemática e Ingeniería en Software en la UAM y en la UACM San Lorenzo Tezonco, donde actualmente es profesora investigadora de tiempo completo. Sus áreas de interés son la Criptografía, la Teoría de Autómatas, la Estadística y la enseñanza de las matemáticas.

