

# UACM

Universidad Autónoma  
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

**Aplicaciones del Álgebra Lineal en el Procesamiento de Imágenes Digitales**

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

**Merari Rubalcaba Vela**

Director de la Tesis

**Dr. Maurilio Velasco Fuentes**

Ciudad de México, noviembre de 2024

## SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

### RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

#### DERECHOS RESERVADOS<sup>©</sup>

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

---

## Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi tía Verónica Manjarrez Medina, cuyo apoyo incondicional y constante me permitió cursar y completar mi licenciatura. Su motivación y aliento fueron esenciales para alcanzar este logro académico. Gracias por creer en mí y por brindarme el respaldo necesario en todo momento.

También deseo agradecer profundamente a mi asesor, Dr. Maurilio Velasco Fuentes, por su invaluable apoyo, guía y paciencia a lo largo de mi carrera universitaria. Su conocimiento y orientación fueron fundamentales para el desarrollo y culminación de esta tesis. Agradezco su dedicación y compromiso en cada etapa del proceso.

A ambos, mi eterna gratitud.

Asimismo, quiero agradecer a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, un lugar que me brindó las herramientas y el ambiente necesario para crecer tanto académica como personalmente. Agradezco a todos mis profesores, cuya dedicación, conocimiento y pasión por la enseñanza me inspiraron a continuar esforzándome en cada etapa de mi carrera. Cada uno de ellos contribuyó significativamente a mi formación, proporcionándome una base sólida para desarrollar mis competencias y habilidades.

Además, no puedo dejar de agradecer a mis amigos, quienes han sido un apoyo fundamental durante mi trayectoria universitaria. Su amistad, comprensión y aliento me dieron la fuerza para superar los momentos difíciles y celebrar los logros alcanzados. Gracias por su presencia constante y por compartir este camino académico conmigo, haciendo de esta experiencia un proceso más enriquecedor y significativo.

Finalmente, deseo expresar mi sincero agradecimiento a los lectores de esta tesis, Lic. Verónica Pérez González, Dr. Daniel Maisner Bush y Dr. Huitzilin Yépez Martínez, por su tiempo, dedicación y valiosas observaciones durante el proceso de revisión. Sus aportaciones han sido fundamentales para mejorar la calidad de este trabajo.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Resumen . . . . .	1
1.2	Introducción . . . . .	2
1.3	Objetivos . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Fundamentos del Álgebra Lineal</b>	<b>4</b>
2.1	Vectores y Matrices . . . . .	4
2.1.1	Vectores . . . . .	4
2.1.2	Operaciones de Vectores . . . . .	5
2.1.3	Suma de vectores . . . . .	5
2.1.4	Multiplicación por un Escalar . . . . .	5
2.1.5	Matrices . . . . .	5
2.1.6	Operaciones de Matrices . . . . .	6
2.2	Matriz Identidad . . . . .	7
2.2.1	Propiedad . . . . .	8
2.3	Matriz Traspuesta . . . . .	8
2.4	Matriz Triangular . . . . .	9
2.5	Determinantes . . . . .	9
2.5.1	Propiedades . . . . .	9
2.5.2	Cálculo de Determinantes . . . . .	10
2.6	Matriz Adjunta . . . . .	11
2.6.1	Propiedades . . . . .	11
2.7	Matriz Inversa . . . . .	12
2.7.1	Propiedades . . . . .	12
2.7.2	Cálculo de la Matriz Inversa . . . . .	12
2.8	Matriz Ortogonal . . . . .	13
2.9	Matriz Simétrica . . . . .	13
2.10	Matriz Semidefinida Positiva . . . . .	14
2.11	Matriz de Toeplitz . . . . .	14
2.12	Espacios Vectoriales . . . . .	16
2.12.1	Espacios Vectoriales Usuales . . . . .	17
2.12.1.1	El Espacio Vectorial Euclidiano $\mathbb{R}^2$ . . . . .	17
2.12.1.2	El Espacio de Polinomios $\mathbb{P}_n[x]$ . . . . .	17
2.12.1.3	El Espacio de Matrices $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . . . . .	18

2.13	Teorema Espectral . . . . .	18
2.14	Normas . . . . .	19
2.14.1	Normas Usuales de Vectores . . . . .	19
2.14.2	Norma de Frobenius . . . . .	20
2.14.3	Dependencia e Independencia Lineal . . . . .	21
2.14.4	Imagen y Núcleo de una Matriz . . . . .	21
2.14.5	Núcleo (Kernel o Espacio Nulo) . . . . .	21
2.14.6	Rango Numérico . . . . .	22
2.15	Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	22
2.15.1	Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales . . . . .	22
2.15.2	Métodos de Resolución . . . . .	22
2.16	Valores y Vectores Propios . . . . .	23
2.16.1	Ecuación Característica . . . . .	23
2.16.2	Cálculo de los Vectores Propios . . . . .	24
2.17	Proyecciones . . . . .	25
2.18	Suma Directa . . . . .	26
2.19	Proyecciones e Inversa de Moore-Penrose . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Descomposición en Valores Singulares</b>	<b>28</b>
3.1	Teorema de la Descomposición en Valores Singulares . . . . .	28
3.2	Propiedades . . . . .	30
3.3	Valores Singulares . . . . .	30
3.3.1	Cálculo de la SVD de una Matriz . . . . .	30
3.4	Aproximación de Rango Bajo por Medio de la SVD . . . . .	36
3.5	Teorema de Eckhart-Young-Mirsky . . . . .	36
3.6	Una Idea de Cómo Elegir Eficientemente el Valor de $k$ . . . . .	37
3.7	Cómo Funciona la $SVD$ en la Compresión de Datos . . . . .	37
3.8	Imágenes Digitales . . . . .	41
3.9	Aplicación a la Compresión de Imágenes Digitales con Ayuda de Matlab . . . . .	41
3.9.1	Ejemplo de una Imagen Comprimida por $SVD$ Para Diferentes Valores de $k$ . . . . .	44
3.9.2	Comparación Entre la Imagen Original y una Comprimida . . . . .	45
3.9.3	Segunda Imagen Comprimida por $SVD$ Para Diferentes Valores de $k$ . . . . .	48
3.9.4	Comparación Entre la Imagen Original y una Comprimida . . . . .	49
3.10	Código Para $\mathcal{E}_r(k)$ (ec. 3.5) en MATLAB . . . . .	52
3.11	Código de MATLAB para la Compresión de Imágenes . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Inversa de Moore-Penrose</b>	<b>57</b>

4.1	Definición de Moore . . . . .	57
4.2	Definición de Penrose . . . . .	57
4.3	Relación entre SVD y la Inversa de Moore-Penrose . . . . .	60
4.4	Inversa de Moore-Penrose como un límite . . . . .	60
4.5	Aplicación al Proceso de Restauración del Desenfoque Causado por un Movimiento Lineal Uniforme . . . . .	64
4.5.1	El Proceso de Restauración del Desenfoque en la Práctica . . . . .	66
4.5.2	Desenfoque Vertical ( $k=180$ ) . . . . .	67
4.5.3	Desenfoque Horizontal ( $\ell = 180$ ) . . . . .	68
4.5.4	Desenfoque Combinado ( $k=180$ y $\ell = 180$ ) . . . . .	69
4.6	Código en MATLAB de la Remoción del Desenfoque Causado por un Movimiento Lineal Uniforme . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>

# CAPÍTULO 1

## Preliminares

### Contenido

- ❑ *Resumen*
- ❑ *Objetivos*
- ❑ *Introducción*

### 1.1 Resumen

Esta tesis analiza dos técnicas del álgebra lineal aplicadas al procesamiento de imágenes digitales: la descomposición en valores singulares (SVD por sus siglas en inglés) y la inversa de Moore-Penrose. Se explora el uso de la SVD como herramienta para la compresión de imágenes digitales. Se estudia cómo la SVD puede descomponer una imagen, representada por una matriz, en componentes ortogonales y una matriz diagonal, lo que permite una representación más compacta de la información de la imagen. Se analiza la selección del número de valores singulares y la reconstrucción de la imagen comprimida. Se realiza una evaluación exhaustiva de la calidad de las imágenes comprimidas en comparación con las originales, mediante el uso de métricas como el error cuadrático medio (MSE) y el pico de la relación señal-ruido (PSNR). Además, se estudia la aplicación de la inversa generalizada de Moore-Penrose en el contexto del desenfocado horizontal o vertical y, cuando son independientes, se puede aplicar a un desenfocado combinado, tanto horizontal como vertical. También se desarrollan algoritmos en MATLAB basados en la compresión y corrección de desenfocado en imágenes digitales.

## 1.2 Introducción

El álgebra lineal, es una rama de las matemáticas que estudia los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales. Como disciplina matemática, desempeña un papel fundamental en diversos campos científicos y aplicaciones tecnológicas. Dentro de este vasto espectro, el procesamiento de imágenes digitales emerge como un dominio donde los principios y conceptos del álgebra lineal se convierten en herramientas esenciales para comprender, analizar y manipular información visual. Este campo multidisciplinario se nutre de la capacidad del álgebra lineal para representar imágenes mediante matrices y vectores, al establecer una conexión profunda entre la teoría matemática y la práctica en la interpretación de datos.

Este trabajo busca explorar y profundizar ciertos aspectos de la intersección entre el álgebra lineal y el procesamiento de imágenes digitales, al destacar su importancia y relevancia en la resolución de desafíos específicos dentro de este campo. A medida que nos sumergimos en el análisis de técnicas y métodos, se revelará cómo las herramientas provenientes del álgebra lineal proporcionan una base teórica sólida para abordar cuestiones prácticas. En el ámbito del procesamiento de imágenes, la SVD se ha convertido en un método clave para la compresión de imágenes, al reducir la redundancia en los datos visuales sin sacrificar la calidad. Por otro lado, la inversa de Moore-Penrose es una extensión de la idea de la matriz inversa que puede aplicarse a matrices que no necesariamente son cuadradas o invertibles.

## 1.3 Objetivos

1. El objetivo principal de este trabajo es mostrar la teoría matemática que se aplica en el procesamiento de imágenes digitales, particularmente:
  - Estudiar la Descomposición en Valores Singulares (SVD), detallando su aplicación en la compresión de imágenes.
  - Investigar y analizar la inversa de Moore-Penrose aplicada a la corrección de desenfoque causado por un movimiento lineal en imágenes.
2. Desarrollar algoritmos eficientes en MATLAB para la compresión y corrección de desenfoque, basados en SVD y la inversa de Moore-Penrose, respectivamente.
3. Documentar de manera clara y concisa los hallazgos, metodologías y resultados obtenidos en la tesis, siguiendo las convenciones de escritura académica en  $\text{\LaTeX}$ . En este proceso se ha utilizado la plantilla **ElegantBook**, diseñada y desarrollada por Ethan Deng y Liam Huang, distribuida bajo LaTeX Project Public Licence, v1.3c o posterior, la cual ha facilitado la presentación y el formato profesional del documento.

# CAPÍTULO 2

## Fundamentos del Álgebra Lineal

### Contenido

- ❑ *Vectores y Matrices*
- ❑ *Matriz Inversa*
- ❑ *Matriz de Toeplitz*
- ❑ *Matrices Ortogonales*
- ❑ *Norma de Frobenius*
- ❑ *Espacios Vectoriales*
- ❑ *Valores y Vectores Propios*
- ❑ *Teorema Espectral*

La teoría del álgebra lineal utilizada en la tesis es la estándar del álgebra lineal. Incluye *vectores*, *matrices*, *espacios vectoriales*, *transformaciones lineales* y *valores propios*, que forman la base teórica sobre la cual se desarrollan las aplicaciones discutidas en los capítulos 3 y 4. Sin embargo, para los propósitos específicos de este trabajo, se incluirá, en la sección correspondiente, una revisión más detallada de dos herramientas importantes que son fundamentales para los objetivos de este proyecto: *la descomposición en valores singulares (3.1)* y *la inversa de Moore-Penrose (4.2)*.

### 2.1 Vectores y Matrices

En álgebra lineal, los vectores y matrices son conceptos fundamentales. Un vector es una entidad que tiene magnitud y dirección, y puede representarse como una secuencia ordenada de números reales o complejos. Por otro lado, una matriz es una colección bidimensional de números organizados en filas y columnas.

#### 2.1.1 Vectores

Un vector  $\vec{v}$  de dimensión  $n$  puede expresarse como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Aquí,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son las coordenadas del vector.

## 2.1.2 Operaciones de Vectores

### 2.1.3 Suma de vectores

Consideremos dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La suma de estos vectores es:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ -1+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

### 2.1.4 Multiplicación por un Escalar

Si multiplicamos el vector  $\vec{v}$  por el escalar  $-3$ , obtenemos:

$$-3\vec{v} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.1.5 Matrices

#### Definición 2.1 (Matrices)

Sean  $m$  y  $n$  dos números naturales. Una matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$  es un arreglo rectangular de números, llamados entradas o elementos que consta de  $m$  filas y  $n$  columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las matrices con entradas  $a_{ij}$  en  $\mathbb{R}$ , donde  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , lo denotaremos por  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{R}^{mn}$ .



**Nota.** Por simplicidad, una matriz se denota por un elemento representativo encerrado entre paréntesis:  $(a_{ij})$ , donde el subíndice  $i$  representa el número de fila y el subíndice  $j$  el número de columna. Las filas se enumeran de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha.

**Definición 2.2 (Matriz Diagonal)**

La diagonal principal de una matriz cuadrada  $A$  consiste de todos los elementos de la forma  $a_{ii}$ . Una matriz cuadrada  $D = (d_{ij})$  cuyos elementos fuera de la diagonal principal sean todos iguales a cero, se llama *matriz diagonal* y se denota por  $D = \mathbf{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}) = \mathbf{diag}(d_{ij})$ . Usaremos los términos matriz diagonal generalizada o matriz diagonal rectangular para una matriz  $m \times n$  con todas sus entradas diferentes de  $a_{ii}$  iguales a cero.



**Nota.** Una matriz de tamaño  $1 \times n$  recibe el nombre de matriz fila o vector fila; mientras que una matriz de tamaño  $m \times 1$  se llama matriz columna o vector columna. El conjunto de todas las matrices de tamaño  $n \times n$  se denota por  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y sus elementos se llaman matrices cuadradas de orden  $n$ .

**2.1.6 Operaciones de Matrices****Definición 2.3 (Suma de Matrices)**

Si  $A$  y  $B$  son matrices del mismo tamaño, su suma  $A + B$  es la matriz formada al sumar las entradas correspondientes. Es decir, si  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$ , entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$



**Nota.** La suma de matrices no está definida para matrices de diferente tamaño.

**Definición 2.4 (Multiplicación de Matrices por un Escalar)**

Si  $A$  es cualquier matriz y  $k$  es cualquier número, la multiplicación por escalar  $kA$  es la matriz que se obtiene de  $A$  al multiplicar cada una de sus entradas por  $k$ . Es decir, si  $A = (a_{ij})$  y  $k$  es cualquier número, entonces

$$kA = (ka_{ij})$$

**Definición 2.5 (Multiplicación de Matrices)**

Si  $A = (a_{ij})$  es una matriz  $m \times n$  y  $B = (b_{ij})$  es una matriz  $n \times r$ , el producto  $C = AB = (c_{ij})$  es una matriz de tamaño  $m \times r$ . El elemento  $c_{ij}$  se calcula como sigue:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$



O, esquemáticamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kr} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ir} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix}$$

**Nota.** El producto de dos matrices,  $A$  por  $B$  (en ese orden), está definido si el número de columnas de  $A$  es igual al número de filas de  $B$ .

**Ejemplo 2.1** Consideremos las siguientes matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

El producto de estas matrices es:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} (1 \cdot -1 + 2 \cdot 2) & (1 \cdot 0 + 2 \cdot -3) \\ (3 \cdot -1 + 4 \cdot 2) & (3 \cdot 0 + 4 \cdot -3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Matriz Identidad

### Definición 2.6 (Matriz Identidad)

Una matriz identidad, denotada como  $I_n$ , es una matriz cuadrada de orden  $n$  en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás elementos son iguales a 0. La podemos visualizar como:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$



### 2.2.1 Propiedad

La matriz identidad tiene la propiedad de que, para cualquier matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$ , se cumple que:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A \quad (2.6)$$

## 2.3 Matriz Traspuesta

### Definición 2.7 (Matriz Traspuesta)

Si  $A$  es una matriz de tamaño  $m \times n$ , la traspuesta de  $A$ , denotada por  $A^T$ , es la matriz de tamaño  $n \times m$  que se obtiene de  $A$  al intercambiar filas por columnas; es decir, la primera fila de  $A^T$  es la primera columna de  $A$ , la segunda fila de  $A^T$  es la segunda columna de  $A$ , etc. Formalmente, si  $A$  es una matriz de tamaño  $m \times n$  con elementos  $a_{ij}$ , la traspuesta  $A^T$  será una matriz de tamaño  $n \times m$  cuyos elementos  $a_{ji}$  se definen como:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \quad (2.7)$$

**Ejemplo 2.2** Consideremos la siguiente matriz para ilustrar el concepto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Entonces la matriz traspuesta de  $A$  es:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

### Teorema 2.1

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices del mismo tamaño y sea  $k$  un escalar. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. Si  $A$  es una matriz  $m \times n$ , entonces  $A^T$  es una matriz  $n \times m$
2.  $(A^T)^T = A$
3.  $(kA)^T = kA^T$

$$4. (A + B)^T = A^T + B^T$$



## 2.4 Matriz Triangular

### Definición 2.8 (Matriz Triangular)

Una *matriz triangular* es una matriz cuadrada en la cual todos los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son cero. Si todos los elementos por encima de la diagonal son cero, se denomina matriz triangular inferior; si todos los elementos por debajo de la diagonal son cero, se denomina matriz triangular superior. Se denota como  $A = (a_{ij})$  y es:

- Triangular inferior si  $a_{ij} = 0$  para todo  $i < j$
- Triangular superior si  $a_{ij} = 0$  para todo  $i > j$



## 2.5 Determinantes

En álgebra lineal, un determinante es una función que asocia a cada matriz cuadrada  $A$  denotado como  $\det(A)$  o  $|A|$ , un número real. Los determinantes tienen varias aplicaciones en el ámbito matemático y científico.

### Definición 2.9 (Determinante)

Dada una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , el determinante se define como:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \quad (2.10)$$

donde  $S_n$  es el grupo de permutaciones de  $n$  elementos,  $\sigma$  es una permutación,  $\text{sgn}(\sigma)$  es el signo de la permutación y  $a_{i, \sigma(i)}$  es el elemento de la matriz en la fila  $i$  y la columna correspondiente al valor  $\sigma(i)$  de la permutación.



### 2.5.1 Propiedades

Sean  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , entonces se cumplen:

- **Multiplicatividad:**  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  para matrices cuadradas  $A$  y  $B$  del mismo orden.
- **Invertibilidad:** Una matriz cuadrada  $A$  es invertible si y solo si  $\det(A) \neq 0$ .

- **Transposición:**  $\det(A^T) = \det(A)$  para cualquier matriz cuadrada  $A$ .
- **Intercambio de filas:** Si se intercambian dos filas de una matriz  $A$ , el determinante cambia de signo:  $\det(A) = -\det(A)$ .
- **Multiplicación de una fila por un escalar:** Si se multiplica una fila de  $A$  por un escalar  $k$ , el determinante de la nueva matriz es  $k \cdot \det(A)$ .
- **Suma de un múltiplo de una fila a otra fila:** Al sumar un múltiplo de una fila a otra, el determinante de  $A$  no cambia.
- **Matriz identidad:**  $\det(I) = 1$  para la matriz identidad  $I$  de cualquier orden.
- **Matriz triangular:** El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los elementos en su diagonal principal.

### 2.5.2 Cálculo de Determinantes

Existen diversos métodos para calcular determinantes, como la expansión por cofactores, la regla de Sarrus para matrices 3x3, y la regla de Laplace.

Consideremos la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

El determinante de  $B$  se calcula como sigue:

$$|B| = \det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

Si usamos operaciones elementales de fila, podemos simplificar la matriz y calcular el determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} & \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - \frac{1}{2}F_1} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ & = 2 \times 3 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $|B| = \det(B) = 24$ .

## 2.6 Matriz Adjunta

### Definición 2.10 (Matriz Adjunta)

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . La matriz adjunta de  $A$ , denotada como  $\text{adj}(A)$ , se define como la transpuesta de la matriz de cofactores de  $A$ . Para una matriz  $A = (a_{ij})$ , el cofactor  $C_{ij}$  se define como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

donde  $A_{ij}$  es la submatriz que resulta de eliminar la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $A$ .

Entonces, la matriz de cofactores de  $A$ , denotada como  $\text{Cof}(A)$ , es la matriz cuyos elementos son los cofactores  $C_{ij}$ :

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = (C_{ij})$$

La matriz adjunta  $\text{adj}(A)$  es la transpuesta de la matriz de cofactores  $\text{Cof}(A)$ :

$$\text{adj}(A) = \text{Cof}(A)^T$$



### 2.6.1 Propiedades

La matriz adjunta tiene varias propiedades importantes, entre las cuales se destacan:

- Si  $A$  es una matriz cuadrada no singular, entonces  $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$ , donde  $I$  es la matriz identidad del mismo orden que  $A$ .
- En particular, si  $\det(A) \neq 0$ , la matriz inversa de  $A$  (definición 2.11) puede expresarse en términos de la adjunta como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

**Ejemplo 2.3** Consideremos la matriz  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La matriz de cofactores de  $A$  es:

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz adjunta  $\text{adj}(A)$  es:


$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## 2.7 Matriz Inversa

### Definición 2.11 (Matriz Inversa)

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Decimos que  $A$  tiene una matriz inversa si existe una matriz  $A^{-1}$  de orden  $n$  tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \quad (2.13)$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ . Si tal matriz  $A^{-1}$  existe, decimos que  $A$  es una matriz invertible o no singular. 

### 2.7.1 Propiedades

Algunas propiedades importantes de la matriz inversa son:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

### 2.7.2 Cálculo de la Matriz Inversa

Para calcular la inversa de una matriz  $A$ , se pueden utilizar varios métodos, como:

- **Método de Gauss-Jordan:** Consiste en aplicar operaciones elementales de fila para transformar  $A$  en la matriz identidad y, simultáneamente, aplicar las mismas operaciones a la matriz identidad para obtener  $A^{-1}$ .
- **Método de Cramer:** La inversa de  $A$  se puede calcular por medio de la fórmula  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ , donde  $\text{adj}(A)$  es la matriz adjunta de  $A$  y  $\det(A)$  es el determinante de  $A$ .

**Ejemplo 2.4** Consideremos la matriz  $A$  de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para encontrar  $A^{-1}$ , primero calculamos su determinante:

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Luego, la matriz adjunta de  $A$  es:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de  $A$  es:


$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 2.8 Matriz Ortogonal

### Definición 2.12 (Matriz Ortogonal)

Una *matriz ortogonal*  $Q$  en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuadrada que cumple la propiedad:

$$Q^T Q = Q Q^T = I_n,$$

donde  $Q^T$  es la matriz traspuesta de  $Q$  e  $I_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n$ . 

Esto significa que las columnas de  $Q$  son vectores ortonormales, es decir, cada columna tiene norma 1 y es ortogonal a las demás columnas. Además, notemos que  $Q^T$  es la inversa de  $Q$ , esto es,  $Q^{-1} = Q^T$ .

## 2.9 Matriz Simétrica


### Definición 2.13 (Matriz Simétrica)

Una *matriz simétrica* en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuadrada  $A$  que cumple la propiedad:

$$A = A^T$$


### Teorema 2.2

Sea  $A$  una matriz simétrica de orden  $n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ . Entonces:

1. Todos los valores propios de  $A$  son reales.
2. Existe una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por vectores propios ortogonales de  $A$ . 

En otras palabras,  $A$  es diagonalizable mediante una matriz ortogonal. Por lo tanto, toda matriz simétrica se puede expresar como:

$$A = QDQ^T,$$

donde  $Q$  es una matriz ortogonal cuyas columnas son vectores propios de  $A$ , y  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de  $A$ .

## 2.10 Matriz Semidefinida Positiva

### Definición 2.14 (Matriz Semidefinida Positiva)

Una matriz  $A$  en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es *semidefinida positiva* si satisface

$$\vec{v}^T A \vec{v} \geq 0 \text{ para todo } \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$



### Teorema 2.3

Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ . Entonces  $A^T A$  y  $AA^T$  son matrices semidefinidas positivas.



### Teorema 2.4

Sea  $A$  una matriz real, simétrica y semidefinida positiva. Entonces los valores propios de  $A$  (cf. sec. 3.1) son no negativos.



## 2.11 Matriz de Toeplitz

### Definición 2.15 (Matriz de Toeplitz)

Una matriz de Toeplitz es una matriz cuadrada  $T = (t_{ij})$  de orden  $n \times n$  con la propiedad de que los elementos que formen una diagonal paralela a la diagonal principal sean iguales, a estas diagonales las llamaremos diagonales constantes. Formalmente, la matriz de Toeplitz se define como:

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$



Si  $t_{ij}$  representa el elemento de la matriz en la fila  $i$  y la columna  $j$ , entonces los valores  $t_{ij}$  son constantes a lo largo de cada diagonal, es decir,  $t_{ij} = t_{i+1,j+1}$ . Esta propiedad de la matriz de Toeplitz la hace particularmente útil en diversas aplicaciones, como procesamiento de señales, álgebra lineal numérica y teoría de la información.

**Ejemplo 2.5** Supongamos que queremos calcular y mostrar una matriz Toeplitz para el siguiente vector

$$\vec{v} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5) \quad (2.15)$$

La matriz Toeplitz se construye al usar los elementos de este vector como valores de la primera fila y las columnas se rellenan con desplazamientos hacia abajo de este vector. Por lo tanto la matriz Toeplitz correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Sin embargo, en este trabajo adoptaremos una definición más general de matriz de Toeplitz. Definiremos una matriz de Toeplitz como una matriz (que puede ser cuadrada o no) en la cual todos los elementos que pertenecen a una misma diagonal paralela a la diagonal principal (generalizada) son iguales. Formalmente, una matriz  $T$  es de Toeplitz si para cualquier par de índices  $(i, j)$  y  $(k, l)$ , los elementos satisfacen la siguiente propiedad:

$$T_{i,j} = T_{k,l} \quad \text{si} \quad i - j = k - l, \quad (2.17)$$

Para ilustrar esto, consideremos la siguiente matriz de Toeplitz  $T$ :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

En esta matriz, los elementos en cada diagonal paralela a la diagonal principal son constantes. Por ejemplo:

1. La diagonal principal contiene los elementos 1.
2. La primera diagonal por encima de la principal contiene los elementos 2.
3. La segunda diagonal por encima de la principal contiene los elementos 3, y así sucesivamente.

De manera similar, las diagonales debajo de la diagonal principal también contienen elementos constantes.

En la sección 4.5 usaremos matrices de Toeplitz de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} & \cdots & \frac{1}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} & \cdots & \frac{1}{\ell} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} & \cdots & \frac{1}{\ell} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} & \cdots & & \frac{1}{\ell} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde  $\ell$  es un entero positivo y cada fila tiene  $\ell$  elementos diferentes de 0.

## 2.12 Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial es una estructura algebraica que satisface ciertas propiedades y permite la combinación lineal de elementos. Formalmente se tiene lo siguiente.

### Definición 2.16 (Espacio Vectorial)

Un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  es un conjunto no vacío  $V$  de objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones

$$\begin{aligned} \text{suma de vectores:} \quad & + : V \times V \longrightarrow V \\ & (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{multiplicación por escalar:} \quad & \cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \\ & (a, \vec{v}) \mapsto a \cdot \vec{v} = a \vec{v} \end{aligned}$$

tal que para todo  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  y  $a, b \in \mathbb{K}$  se cumplen los siguientes axiomas:

1.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (conmutatividad de la suma)
2.  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (asociatividad de la suma)
3. Existe  $\vec{0} \in V$  tal que  $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  para todo  $\vec{u} \in V$  (existencia del vector cero)

4. Existe  $-\vec{u} \in V$  tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$  (existencia de inversos aditivos)
5.  $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$  (asociatividad de la multiplicación por escalar)
6.  $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$  (distributividad 1)
7.  $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$  (distributividad 2)
8. Para  $1 \in \mathbb{K}$ , se tiene  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$  (identidad para la multiplicación)



## 2.12.1 Espacios Vectoriales Usuales

### 2.12.1.1 El Espacio Vectorial Euclidiano $\mathbb{R}^2$

Consideremos el espacio vectorial euclidiano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , cuyos elementos son los pares ordenados  $(x, y)$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Esto es:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad (2.20)$$

Las operaciones de suma y multiplicación por escalares en  $\mathbb{R}^2$  están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ c \cdot (x, y) &= (c \cdot x, c \cdot y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  son elementos arbitrarios de  $\mathbb{R}^2$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

### 2.12.1.2 El Espacio de Polinomios $\mathbb{P}_n[x]$

Consideremos el espacio vectorial de polinomios de grado no mayor que  $n$ , denotado como  $\mathbb{P}_n[x]$ . Los elementos de  $\mathbb{P}_n[x]$  son polinomios de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Las operaciones de suma y multiplicación por escalares en  $\mathbb{P}_n[x]$  son definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \\ c \cdot p(x) &= c \cdot a_0 + c \cdot a_1x + \dots + c \cdot a_nx^n \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios arbitrarios en  $\mathbb{P}_n[x]$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

### 2.12.1.3 El Espacio de Matrices $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

El conjunto de todas las matrices de tamaño  $m \times n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ , denotado por  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , es:

$$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) := \left\{ \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ para toda } i, j \right\}.$$

Este conjunto tiene una estructura de espacio vectorial con las operaciones de suma de matrices y multiplicación por escalar.


## 2.13 Teorema Espectral

El siguiente teorema 2.5 y su demostración están tomados de [4].

### Teorema 2.5 (Teorema Espectral)

Cualquier matriz simétrica  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tiene una descomposición espectral de la forma

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T = U \Lambda U^T$$

donde la matriz  $U = (\vec{u}_1 \mid \cdots \mid \vec{u}_n)$  es ortogonal (ie,  $U^T U = U U^T = I_n$ ) y está compuesta por vectores propios o eigenvectores de  $A$ , mientras que la matriz  $\Lambda$  es la matriz diagonal  $\Lambda = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  formada por los valores propios o eigenvalores of  $A$ . Esta factorización de  $A$  se conoce como descomposición simétrica por eigenvalores o valores propios (SED). 

**Demostración:** La demostración se hace por inducción sobre la dimensión  $n$  de la matriz  $A$ . El resultado es inmediato para  $n = 1$ . Ahora, sea  $n > 1$  y supongamos que el resultado se vale para cualquier matriz de tamaño  $n-1$ . Consideremos la función  $t \rightarrow p(t) = |tI - A|$ , donde  $p(t)$  es un polinomio de grado  $n$ , llamado el polinomio característico de  $A$ . Por el teorema fundamental del álgebra,  $p(t)$  tiene  $n$  raíces complejas (contadas con multiplicidad), que llamaremos eigenvalores de  $A$  y los denotaremos por  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Si  $\lambda$  es un eigenvalor de  $A$ ; ie,  $\det(\lambda I - A) = 0$ , entonces  $\lambda I - A$  debe ser una matriz no invertible, lo cual significa que existe un vector real  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tal que  $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ . Normalizamos  $\vec{u}$  de tal forma que  $\vec{u}^T \vec{u} = 1$ . Así,  $\vec{u}^T A \vec{u} = \lambda$  es real. Esto es, los valores propios de una matriz simétrica siempre son reales.

Ahora, consideremos el eigenvalor  $\lambda_1$  y un vector propio asociado  $\vec{u}_1$ . Mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, podemos calcular una matriz  $V_1$  de dimensión  $n \times (n-1)$  tal que  $[\vec{u}_1 | V_1]$  sea ortogonal. Por inducción, podemos escribir la matriz simétrica  $V_1^T A V_1$  de dimensión  $(n-1) \times (n-1)$  como  $Q_1^T \Lambda_1 Q_1$ , donde  $Q_1$  es una matriz  $(n-1) \times (n-1)$  formada por vectores propios y  $\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  son los  $n-1$  eigenvalores of  $V_1^T A V_1$ . Finalmente, definimos la matriz  $U_1 = V_1 Q_1$  de tamaño  $n \times (n-1)$ . Por construcción, la matriz  $U = (\vec{u}_1 | U_1)$  es ortogonal. Entonces tenemos

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ U_1^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T A \vec{u}_1 & \vec{u}_1^T A U_1 \\ U_1^T A \vec{u}_1 & U_1^T A U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix},$$

donde hemos aprovechado el hecho de que  $U_1^T A \vec{u}_1 = \lambda_1 U_1^T \vec{u}_1 = 0$  y  $U_1^T A U_1 = \Lambda_1$ .

Así, hemos dado una matriz ortogonal  $U$  de dimensión  $n \times n$  tal que  $U^T A U$  es diagonal. Esto prueba el teorema. ■

## 2.14 Normas

### Definición 2.17 (Norma de Vectores)

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el campo real  $\mathbb{R}$ . Una norma en  $V$  es una función  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  que asigna un número real no negativo  $N(\vec{v})$  a cada vector  $\vec{v} \in V$  y que satisface las siguientes propiedades para todo  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  y toda  $\lambda \in \mathbb{R}$

- (i)  $N(\vec{u}) \geq 0$  y  $N(\vec{u}) = 0$  si y solo si  $\vec{u} = \vec{0}$
- (ii)  $N(\lambda \vec{u}) = |\lambda| N(\vec{u})$
- (iii)  $N(\vec{u} + \vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v})$



**Nota.** De (ii) se tiene que  $N(-\vec{u}) = N(\vec{u})$ ; mientras que de (iii)  $|N(\vec{u}) - N(\vec{v})| \leq N(\vec{u} - \vec{v})$ .

### 2.14.1 Normas Usuales de Vectores

**Ejemplo 2.6** Algunas normas habituales son las siguientes.

1. Sea  $V = \mathbb{R}$  y  $N(x) = |x|$  el valor absoluto de  $x$ .
2. Sea  $V = \mathbb{C}$  y  $N(z) = |z|$  el módulo de  $z$ .
3. Sea  $V = \mathbb{R}^n$ . Para todo  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$  tenemos tres normas estándar:
  - (a) La norma-1  $\|\vec{x}\|_1$  definida por

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

(b) La norma euclidiana  $\|\vec{x}\|_2$  definida por

$$\|\vec{x}\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

(c) La norma del supremo  $\|\vec{x}\|_\infty$  definida por

$$\|\vec{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

En general, definimos la norma  $\ell^p$  para  $p \geq 1$  por

$$\|\vec{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

### Definición 2.18 (Norma de Matrices)

Sea  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de matrices cuadradas. Una norma de matrices  $N$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es una norma con la propiedad adicional de que

$$N(AB) \leq N(A)N(B)$$

para toda  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .



### Definición 2.19 (Norma Inducida)

Dada cualquier norma de vectores  $\|\cdot\|$  en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , la norma inducida en el espacio de matrices cuadradas  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se define como

$$\|A\| = \text{máx}_{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}} \frac{\|A\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \text{máx}_{\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{v}\|=1} \|A\vec{v}\|$$



## 2.14.2 Norma de Frobenius

### Definición 2.20 (Norma de Frobenius de una Matriz)

La norma de Frobenius de una matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , denotada por  $\|A\|_F$  o  $N_F(A)$ , se define como

$$\|A\|_F = N_F(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} = \sqrt{\text{tr}(AA^T)} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$$



**Nota.** La norma de Frobenius de una matriz  $A$  es función de los valores singulares de  $A$  (cf. sec. 3.1) pues si  $A = U\Sigma V^T$ , entonces

$$\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}((U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T) = \text{tr}(\Sigma^T \Sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2$$

### 2.14.3 Dependencia e Independencia Lineal

#### Definición 2.21 (Dependencia Lineal)

Un conjunto de vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  en un espacio vectorial se dice que es *linealmente dependiente* si existe una combinación lineal de estos vectores igual al vector cero, donde al menos uno de los coeficientes es diferente de cero. Es decir, existen escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , no todos iguales a cero, tales que:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$$



#### Definición 2.22 (Independencia Lineal)

Un conjunto de vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  es *linealmente independiente* si la única solución a la combinación lineal que iguala al vector cero es aquella en la que todos los coeficientes son cero. Es decir:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \iff c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$



### 2.14.4 Imagen y Núcleo de una Matriz

#### Definición 2.23 (Imagen de una Matriz)

Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . El *rango* o *imagen* de  $A$ , denotado por  $\mathcal{R}(A)$  o por  $\mathcal{I}m(A)$ , es el conjunto de todos los vectores que se pueden expresar como  $A\vec{v}$  para algún vector  $\vec{v}$  en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . En otras palabras, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de  $A$ . Formalmente,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{I}m(A) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^m : \vec{u} = A\vec{v} \text{ para algún } \vec{v} \in \mathbb{R}^n\}$$



La imagen de  $A$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$  y se llama también el *espacio columna* de la matriz.

### 2.14.5 Núcleo (Kernel o Espacio Nulo)

#### Definición 2.24 (Núcleo)

Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . El *núcleo* de  $A$ , también conocido como el *espacio nulo* de  $A$  y denotado por  $\mathcal{N}(A)$ , es el conjunto de todos los vectores  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tales que  $A\vec{v} = \vec{0}$ . Es decir,

$$\mathcal{N}(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : A\vec{v} = \vec{0}\}$$



### 2.14.6 Rango Numérico

#### Definición 2.25 (Rango Numérico de una Matriz)

El rango numérico de una matriz  $A$ , denotado por  $\rho(A)$  o  $\text{rank}(A)$ , es el número máximo de columnas o filas linealmente independientes de  $A$ .



## 2.15 Sistemas de ecuaciones lineales

#### Definición 2.26 (Sistemas de ecuaciones lineales)

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que comparten un conjunto común de variables. Estas ecuaciones pueden representarse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \quad (2.23)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables o incógnitas,  $a_{ij}$  son los coeficientes y  $b_i$  son los términos constantes.



### 2.15.1 Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden clasificarse en tres categorías principales:

1. **Sistema Compatible Determinado:** Un sistema que tiene una única solución.
2. **Sistema Compatible Indeterminado:** Un sistema que tiene infinitas soluciones.
3. **Sistema Incompatible:** Un sistema que no tiene solución.

**Nota.** La clasificación se basa en el número de soluciones que tiene el sistema y está relacionada con el comportamiento de la matriz aumentada asociada (2.24) cuando se usa el concepto de rango.

### 2.15.2 Métodos de Resolución

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales como el siguiente

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (2.24)$$

Entre ellos se encuentran:

- **Método de Eliminación:** Consiste en eliminar una variable en cada paso para reducir el sistema a uno más simple.
- **Método de Sustitución:** Consiste en despejar una variable en una ecuación y sustituirla en las demás ecuaciones.
- **Método de Matrices:** Utiliza operaciones matriciales para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

## 2.16 Valores y Vectores Propios

Los valores propios y vectores propios son conceptos fundamentales en el álgebra lineal, son herramientas esenciales en el análisis de matrices y sistemas lineales. Su aplicación se extiende a una variedad de disciplinas, desde la diagonalización de matrices hasta la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Comprender estos conceptos es esencial para abordar problemas complejos en el ámbito matemático y científico en general.

### Definición 2.27 (Valor Propio o Autovalor)

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Un escalar  $\lambda$  se llama valor propio de  $A$  si existe un vector no nulo  $\vec{v}$  tal que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ .



### Definición 2.28 (Vector Propio o Autovector)

Dado un valor propio  $\lambda$  de una matriz  $A$ , un vector no nulo  $\vec{v}$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda$  si  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ .



### 2.16.1 Ecuación Característica

Para encontrar los valores propios de una matriz  $A$ , resolvemos la ecuación característica:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (2.25)$$

donde  $I$  es la matriz identidad. La solución de esta ecuación proporciona los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de  $A$ .

### 2.16.2 Cálculo de los Vectores Propios

Una vez que se han determinado los valores propios, los vectores propios correspondientes se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0} \quad (2.26)$$

Este sistema se resuelve para cada valor propio, lo cual nos da un conjunto de vectores propios  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

**Ejemplo 2.7** Consideremos la siguiente matriz como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Para encontrar los valores propios, resolvemos la ecuación característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ :

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

Esto nos lleva a la ecuación característica:

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática, encontramos dos valores propios distintos:  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 1$ . Para encontrar los vectores propios correspondientes, sustituimos cada valor propio en  $A - \lambda I$  y resolvemos el sistema de ecuaciones homogéneo resultante.

Para  $\lambda_1 = 2$ :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos  $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ , se tiene una infinidad de vectores propios asociados con  $\lambda = 1$ , por ejemplo,  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Para  $\lambda_2 = 1$ :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al resolver  $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ , encontramos otra infinidad de vectores propios asociados con  $\lambda = 2$ , por ejemplo,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## 2.17 Proyecciones

Un producto interior sobre un espacio vectorial  $V$  se puede usar para definir una proyección ortogonal  $P$  de  $V$  sobre un subespacio  $X$  de  $V$ . Una propiedad algebraica de una proyección ortogonal  $P$  es que  $P^2 = P$ , llamada **idempotencia**. Esta propiedad es realmente suficiente para definir una proyección sobre un espacio vectorial no necesariamente equipado con un producto interno. Supondremos que  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{L}(V)$  denotará el espacio de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $V$ .

### Definición 2.29 (Proyección)

Un operador lineal  $P \in \mathcal{L}(V)$  es una proyección si  $P^2 = P \circ P = P$ .



**Nota.** Si  $P$  es una proyección, entonces por inducción,  $P^n = P \circ \dots \circ P = P$  para todo  $n > 1$ .

**Ejemplo 2.8** Si  $P \in \mathcal{L}(V)$  es una proyección, entonces también lo es el operador  $I - P \in \mathcal{L}(V)$ , donde  $I \in \mathcal{L}(V)$  es el operador identidad definido por  $I(v) = v$  para todo  $v \in V$ .

**Demostración:**

$$(I - P)(I - P) = I - P - P(I - P) = I - P - PI + PP = I - P - P + P = I - P$$



### Lema 2.1

Si  $P \in \mathcal{L}(V)$  es una proyección, entonces

- (i)  $y \in \mathcal{R}(P)$  si y solo si  $Py = y$
- (ii)  $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$



**Demostración:**

- (i)  $\Rightarrow$   $y \in \mathcal{R}(P) \implies \exists x \in V$  tal que  $Px = y$ . Aplicamos  $P$  en ambos lados de la igualdad y se tiene  $PPx = Py$ ; ie,  $Px = Py$ . Así,  $Py = y$ .
- (ii)  $\Leftarrow$   $\mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{R}(I - P)$  pues  $x \in \mathcal{N}(P) \implies Px = 0$ . Entonces  $x = x - Px = (I - P)x$ . Por lo tanto,  $x \in \mathcal{R}(I - P)$ . Finalmente, veamos que  $\mathcal{R}(I - P) \subseteq \mathcal{N}(P)$ :

$x \in \mathcal{R}(I - P) \implies (I - P)y = x$  para algún  $y \in V$ . Por lo tanto,  $y - Py = x$ . Aplicamos  $P$  en ambos lados de la igualdad y se tiene  $Py - PPy = Py - Py = Px$ ; ie,  $Px = 0$ . Así,  $x \in \mathcal{N}(P)$ -

### Definición 2.30 (Proyección Ortogonal)

Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Si  $A^2 = A$ , entonces se dice que  $A$  es una proyección de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathcal{R}(A)$ . Si  $A^2 = A$  (ie,  $A$  es idempotente) y  $A^T = A$  (ie,  $A$  es simétrica), entonces  $A$  es una proyección ortogonal y se denotará por  $P_{\mathcal{R}(A)}$ .

## 2.18 Suma Directa

### Definición 2.31 (Suma Directa)

Sean  $W_1, W_2 \subseteq V$  subespacios del espacio vectorial  $V$ . Se dice que  $V$  es la suma directa de  $W_1$  y  $W_2$ , denotado por  $V = W_1 \oplus W_2$ , si se tienen las dos condiciones siguientes:

- (i)  $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} = V$
- (ii)  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

### Proposición 2.1

Si  $P \in \mathcal{L}(V)$  es una proyección, entonces  $V = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ .

#### Demostración:

Sea  $x \in V$ . Entonces  $Px \in V$ ; por lo tanto,  $\exists y \in V$  tal que  $Px = y$ ; ie,  $Px = Py$ , así  $P(x - y) = 0$ ; por lo tanto,  $(x - y) \in \mathcal{N}(P)$ . Luego,  $x = (x - y) + y$  con  $(x - y) \in \mathcal{N}(P)$  y  $y \in \mathcal{R}(P)$ . Por lo tanto,  $V = \mathcal{R}(P) + \mathcal{N}(P)$ . Por último, sea  $y \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P)$ . Entonces  $P(y) = 0$  y  $\exists x \in V$  tal que  $y = Px$  y como  $P$  es proyección,  $Px = Py$ ; ie,  $Px = 0$  y, por lo tanto,  $y = 0$ . Esto demuestra que  $V = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ .

## 2.19 Proyecciones e Inversa de Moore-Penrose

Definamos  $P = AA^+$  y  $Q = A^+A$  (cf. 4.1 y 4.2). Entonces  $P$  y  $Q$  son proyecciones ortogonales; esto es, son simétricas ( $P = P^T$  y  $Q = Q^T$ ) e idempotentes ( $P^2 = P$  y  $Q^2 = Q$ ). Además, se tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $PA = AQ = A$  y  $A^+P = QA^+ = A^+$
- (ii)  $P$  es la proyección ortogonal sobre el rango de  $A$  (que es igual al complemento ortogonal del kernel de  $A^T$ )
- (iii)  $Q$  es la proyección ortogonal sobre el rango de  $A^T$  (que es igual al complemento ortogonal del kernel de  $A$ )
- (iv)  $I - Q = I - A^+A$  es la proyección ortogonal sobre el kernel de  $A$
- (v)  $I - P = I - AA^+$  es la proyección ortogonal sobre el kernel de  $A^T$

Las últimas dos propiedades implican las siguientes identidades:

- (vi)  $A(I - A^+A) = (I - AA^+)A = 0$
- (vii)  $A^T(I - AA^+) = (I - A^+A)A^T = 0$

# CAPÍTULO 3

## Descomposición en Valores Singulares

### Contenido

- ❑ Teorema de la SVD
- ❑ Valores Singulares
- ❑ Teorema de Eckhart-Young-Mirsky
- ❑ Cómo Funciona la SVD
- ❑ Imágenes Digitales
- ❑ Aplicación a la Compresión

En este y el próximo capítulo nos centraremos en dos aplicaciones concretas con las cuales queremos resaltar la utilidad práctica del álgebra lineal y su papel en el desarrollo de nuevas tecnologías y métodos analíticos.

La descomposición en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés) es una técnica matemática ampliamente utilizada en aplicaciones como el análisis de datos, el procesamiento de imágenes y el reconocimiento facial. En este trabajo se muestra cómo la SVD se puede aplicar en la compresión de imágenes digitales.

### 3.1 Teorema de la Descomposición en Valores Singulares

#### Teorema 3.1 (Teorema de la SVD)

Cualquier matriz  $A$  de orden  $m \times n$  en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  admite una descomposición en valores singulares de la forma:

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T = U \Sigma V^T, \quad (3.1)$$

donde  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices ortogonales, mientras que  $\Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  es

una matriz diagonal rectangular con  $\tilde{\Sigma}$  la matriz diagonal

$$\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r),$$

donde los números  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , denominados valores singulares de  $A$ , son únicos y  $r \leq \min(m, n)$  es el rango de  $A$ . Las primeras  $r$  columnas de  $U$ ,  $\vec{u}_i, i = 1, \dots, r$ , se

llaman *vectores singulares izquierdos* de  $A$ ; mientras que las primeras  $r$  columnas de  $V$ ,  $\vec{v}_i, i = 1, \dots, r$ , se llaman *vectores singulares derechos* de  $A$ . Estos vectores satisfacen

$$A\vec{v}_i = \sigma_i\vec{u}_i, \quad \vec{u}_i^T A = \sigma_i\vec{v}_i, \quad i = 1, \dots, r.$$



**Nota.** Como  $\sigma_i = 0$  para  $i > r$ , entonces

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T \tag{3.2}$$

**Demostración:**

La matriz  $A^T A$  de dimensión  $n \times n$  es real y simétrica. Por el teorema espectral 2.5,  $A^T A$  se puede factorizar en la forma  $A^T A = V \Lambda V^T$  con  $V$  una matriz  $n \times n$  cuyas columnas forman una base ortonormal (ie,  $V^T V = V V^T = I_n$ ) y  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ . Aquí,  $r$  es el rango de  $A^T A$  (si  $r = n$  entonces no hay ceros en la diagonal de  $\Lambda$ ). Como  $A^T A$  es semidefinida positiva, los  $\lambda_j$ 's son no negativos. Así, podemos definir los valores no cero  $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}, j = 1, \dots, r$ .

Observemos que cuando  $j > r$ ,  $A\vec{v}_j = \vec{0}$ , puesto que  $\|A\vec{v}_j\|_2^2 = \vec{v}_j^T A^T A \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j^T \vec{v}_j = 0$ .

Ahora, construyamos una matriz ortogonal  $U$  de dimensión  $m \times m$  como sigue. Tomemos

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i, \quad i = 1, \dots, r$$

Estos vectores  $m$ -dimensionales son de norma uno y mutuamente ortogonales puesto que los  $\vec{v}_j$ 's son eigenvectores de  $A^T A$ . De ser necesario, mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, podemos completar este conjunto de vectores a una base  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_m\}$  para formar una matriz ortogonal  $U = (\vec{u}_1 \mid \dots \mid \vec{u}_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Finalmente, verifiquemos que  $U$  y  $V$  satisfacen las condiciones del teorema. Para ello probaremos que

$$U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$$

Se tiene lo siguiente:

$$(U^T A V)_{ij} = \vec{u}_i^T A \vec{v}_j = \begin{cases} \sigma_j \vec{u}_i^T \vec{u}_j & \text{si } j \leq r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde la segunda línea resulta de que  $A\vec{v}_j = 0$  cuando  $j > r$ . Así,  $U^T A V = \Sigma$ , como se quería. ■

**Definición 3.1 (SVD)**

La factorización de  $A$  como un producto de tres matrices que aparece en el teorema 3.1

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T = U \Sigma V^T$$

se le llama descomposición en valores singulares (SVD) de  $A$ .



## 3.2 Propiedades

- Los valores singulares  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  son únicos; sin embargo, las matrices  $U$  y  $V$  no son únicas.
- Los números  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2$  son los valores propios positivos de  $AA^T$  y  $A^T A$ .
- Las columnas ortogonales  $\hat{u}_i$ 's de  $U$  son los vectores propios de  $AA^T$ . Similarmente, las columnas ortogonales  $\hat{v}_i$ 's de  $V$  son los vectores propios de  $A^T A$ .
- $A\hat{v}_i = \sigma_i \hat{u}_i$  y  $A^T \hat{u}_i = \sigma_i \hat{v}_i$ .

## 3.3 Valores Singulares

**Definición 3.2 (Valores Singulares)**

Si  $A$  es una matriz de dimensión  $m \times n$  y de rango  $r$ , donde  $r \leq \min\{m, n\}$ , los valores singulares de  $A$  son las raíces cuadradas de los valores propios de  $A^T A$ , y se denotan mediante  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ . Es una convención acomodar los valores singulares de modo que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .



### 3.3.1 Cálculo de la SVD de una Matriz

**Ejemplo 3.1** Encontramos una factorización por SVD de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

En primer lugar, formemos la matriz  $B = AA^T$ . Entonces tenemos

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Al realizar el producto, obtenemos

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para hallar los valores propios de  $B$  necesitamos resolver la siguiente ecuación en términos de  $\lambda$ :

$$P(\lambda) = |B - \lambda I| = 0$$

Esto es

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= \left| \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \\ &= 4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \end{aligned}$$

Esto implica que los valores propios de  $B$  son

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1$$

Calculemos un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 3$ .

$$[B - \lambda_1 I]X = 0: \quad \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual nos conduce a la ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz para hallar la solución y dar valores a  $x_1$  y  $x_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Por lo tanto se tiene que } -x_1 + x_2 = 0; \text{ esto es, } x_1 = x_2.$$

Si  $x_2 = 1$ , entonces  $x_1 = 1$  y por lo tanto un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 3$  es:

$$\vec{u}_1 = (1, 1)$$

Ahora encontremos un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_2 = 1$ .

$$[B - \lambda_1 I] X = 0: \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz para hallar valores de  $x_1$  y  $x_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Esto significa que}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = -x_2$$

Por lo tanto, si  $x_2 = 1$ , entonces  $x_1 = -1$ . Así, un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_2 = 1$  es:

$$\vec{v}_2 = (-1, 1)$$

En segundo lugar, consideremos la matriz  $C = A^T A$ . Por lo tanto,

$$C = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Es decir}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar los valores propios de  $C$  necesitamos resolver la siguiente ecuación en términos de  $\lambda$ :

$$P(\lambda) = |C - \lambda I| = 0. \text{ Esto es}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} |C - \lambda I| &= \left| \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

Esto implica que los valores propios de  $C$  son

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_3 = 0$$

Calculemos un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 3$

$$[C - \lambda_1 I]Y = 0: \left[ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual es equivalente a la ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz para hallar la solución del sistema; es decir, hallamos los valores de  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$ .

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que

$$y_2 - y_3 = 0 \iff y_2 = y_3$$

y

$$-y_1 - y_2 - y_3 = 0. \text{ Si } y_3 = -1, y_2 = -1 \text{ y por lo tanto } y_1 = 2$$

Así, un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 3$  es:

$$\vec{v}_1 = (2, -1, -1)$$

Ahora veamos quién es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_2 = 1$ .

$$[C - \lambda_2 I]Y = 0: \left[ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz para hallar valores de  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que

$$-y_2 - y_3 = 0 \iff y_2 = -y_3$$

y

$$y_1 - y_2 - y_3 = 0. \text{ Si } y_3 = -1, y_2 = 1 \text{ y por lo tanto } y_1 = 0.$$

Así, un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_2 = 1$  es:

$$\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$$

Finalmente, calculemos un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_3 = 0$

$$[C - \lambda_1 I]Y = 0: \left[ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual equivale a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz para hallar valores de  $y_1, y_2$  y  $y_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que

$$y_2 - y_3 = 0 \iff y_2 = y_3$$

y

$$-y_1 + y_2 = 0. \text{ Si } y_3 = 1, \text{ entonces } y_2 = 1 \text{ y por lo tanto } y_1 = 1$$

Así, un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_3 = 0$  es:

$$\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$$

Para  $B = AA^T$  tenemos los vectores propios  $\vec{u}_1 = (1, 1)$  y  $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ ; mientras que para  $C = A^T A$ , obtuvimos  $\vec{v}_1 = (2, -1, -1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$  y  $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ .

Al normalizar, obtenemos los vectores unitarios

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Así, con la información anterior, construimos las matrices

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad V^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde los elementos no cero de  $\Sigma$  son las raíces cuadradas de los valores propios positivos de  $A^T A$  (que, por supuesto, coinciden con los de  $AA^T$ ), ordenados de mayor a menor. Así, se tiene que

$$A = U\Sigma V^T$$

Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Aproximación de Rango Bajo por Medio de la SVD

Consideremos una matriz  $A$  cuya factorización mediante SVD esté dada por  $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T$ . Dado  $k \leq r$ , obtenemos una matriz  $A_k$  de rango  $k$  al “truncar” la SVD después del término  $k$ :

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T \quad (3.3)$$

La imagen de  $A_k$  está generada por los primeros  $k$  vectores singulares izquierdos, por lo tanto, tiene rango  $k$ . Por construcción  $A_k$  tiene valores singulares  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ . Además,  $A - A_k = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i u_i v_i^T$ . Entonces

$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 + \dots + \sigma_r^2}$$

### 3.5 Teorema de Eckhart-Young-Mirsky

Una demostración del siguiente teorema y un análisis más detallado puede verse en [15].

#### Teorema 3.2 (Eckhart-Young-Mirsky)

Sea  $A$  una matriz real  $m \times n$ . Entonces para cualquier  $k \in \mathbb{N}$  y cualquier matriz real  $B$  de orden  $m \times n$  de rango a lo más  $k$  se tiene:

$$\|A - A_k\|_F \leq \|A - B\|_F$$



El teorema anterior (3.2) se puede reformular en términos de proyecciones ortogonales: escribamos como  $P_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$  la matriz que representa la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^m$  sobre el subespacio generado por los primeros  $k$  vectores singulares izquierdos de  $A$ . Así, se tiene el siguiente resultado.

#### Teorema 3.3

Sea  $A$  una matriz real  $m \times n$ . Entonces para cualquier  $k \in \mathbb{N}$  y cualquier matriz proyección ortogonal real  $P$  de rango  $k$  se tiene:

$$\|A - P_k A\|_F \leq \|A - PA\|_F$$



## 3.6 Una Idea de Cómo Elegir Eficientemente el Valor de $k$

El teorema de Eckhart-Young-Mirsky (3.2) se puede usar para determinar qué valor de  $k$  tomar con el objetivo de asegurar que  $A_k$  sea una aproximación lo “suficientemente buena” de  $A$ . En concreto, nos permite expresar el **error relativo**  $e_r(k)$  de una aproximación de rango bajo  $A_k$  (o el complemento,  $\mathcal{E}_r(k) = 1 - e_r(k)$ , que llamaremos la **eficacia relativa**) en términos de los valores singulares de  $A$ :

$$e_r(k) = \frac{\|A - A_k\|_F^2}{\|A\|_F^2} = \frac{\sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 + \cdots + \sigma_r^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2} \quad (3.4)$$

o bien,

$$\mathcal{E}_r(k) = \frac{\|A_k\|_F^2}{\|A\|_F^2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2} \quad (3.5)$$

Esencialmente, la fórmula (3.4) mide qué tanta información se pierde en la aproximación; mientras que la ecuación (3.5) mide qué tanta información se retiene. Por lo tanto, si nuestro objetivo es dar una buena aproximación de la información original, debemos usar un valor  $k$  de tal forma que el error relativo  $e_r(k)$  esté cerca de cero (ecuación 3.4) o, equivalentemente, que la eficacia relativa  $\mathcal{E}_r(k)$  se aproxime a uno (ecuación 3.5).

## 3.7 Cómo Funciona la SVD en la Compresión de Datos

Esta sección es una adaptación para este trabajo de la primera parte del texto que aparece en el *blog post: SVD Image Compression, Explained* [3], incluidos los códigos en lenguaje Python para las ilustraciones. Como se vio en la sección 3.1, cualquier matriz  $A$  real de orden  $m \times n$  se puede factorizar como un producto de tres matrices:  $A = U\Sigma V^T$ , donde

- $U$  es una matriz ortogonal de dimensión  $m \times m$
- $\Sigma$  es una matriz diagonal generalizada de dimensión  $m \times n$  cuyos elementos en la diagonal son los valores singulares de  $A$
- $V^T$  es una matriz ortogonal de orden  $n \times n$

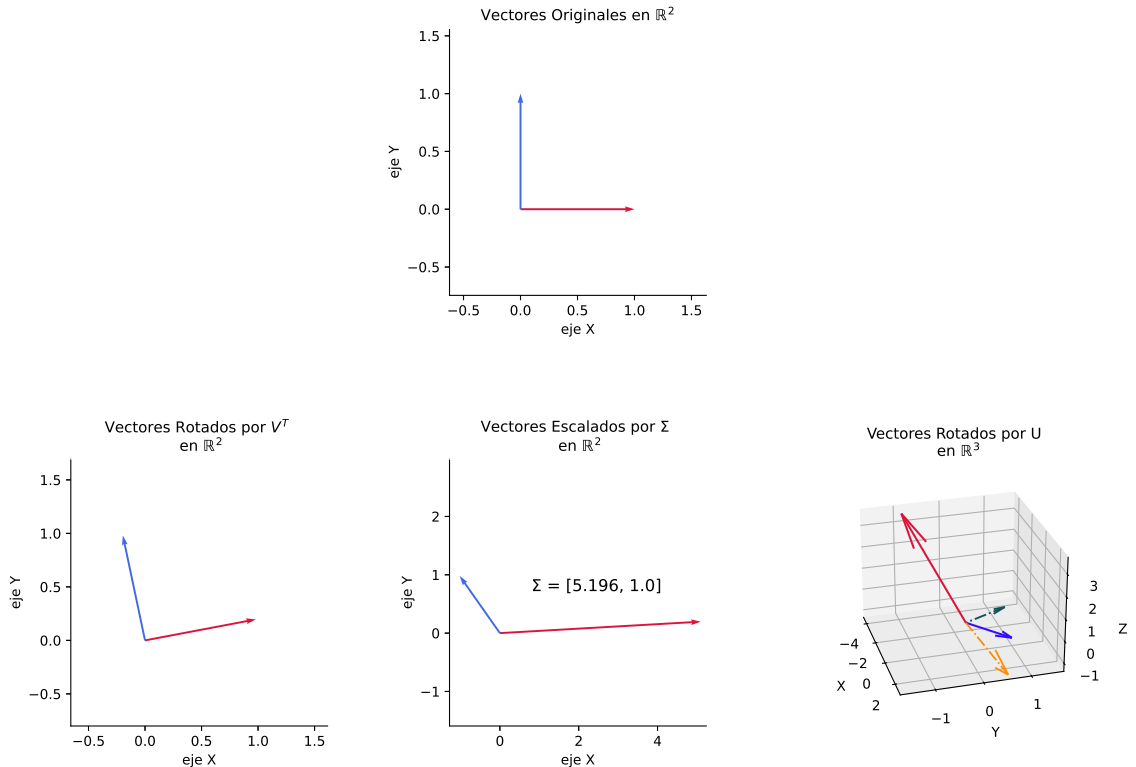
Dicha factorización se puede interpretar como la composición de tres transformaciones lineales:

- Una rotación del sistema de ejes al aplicar  $V^T$
- Un escalamiento o redimensionamiento del sistema de vectores efectuado por  $\Sigma$
- Una segunda rotación del sistema de ejes mediante  $U$

Interpretemos lo anterior con un ejemplo específico. Consideremos la matriz

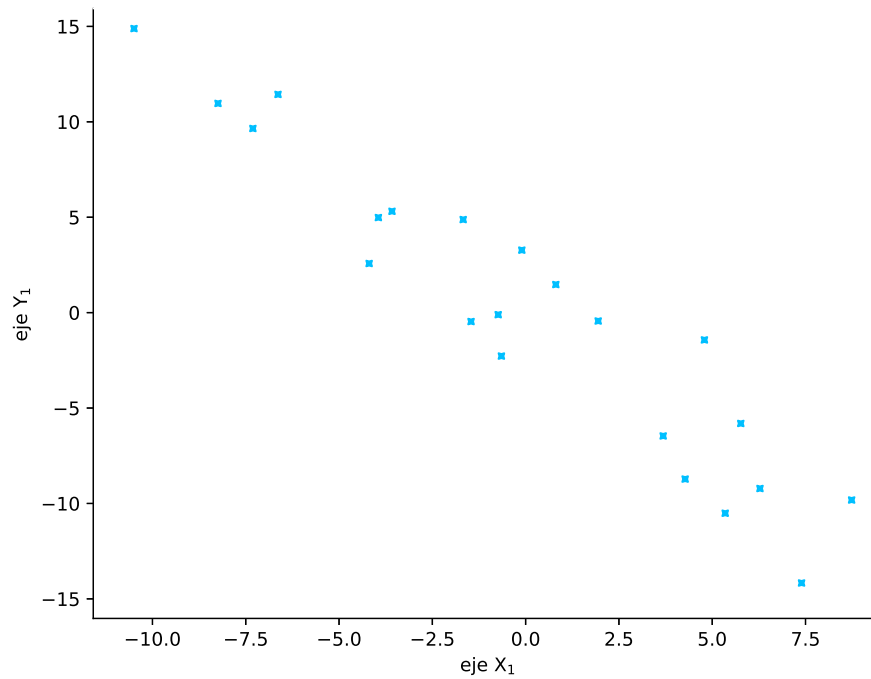
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Después de realizar la factorización *SVD*, observamos el efecto de aplicar cada factor de la descomposición a los vectores canónicos  $\hat{i}, \hat{j} \in \mathbb{R}^2$ :



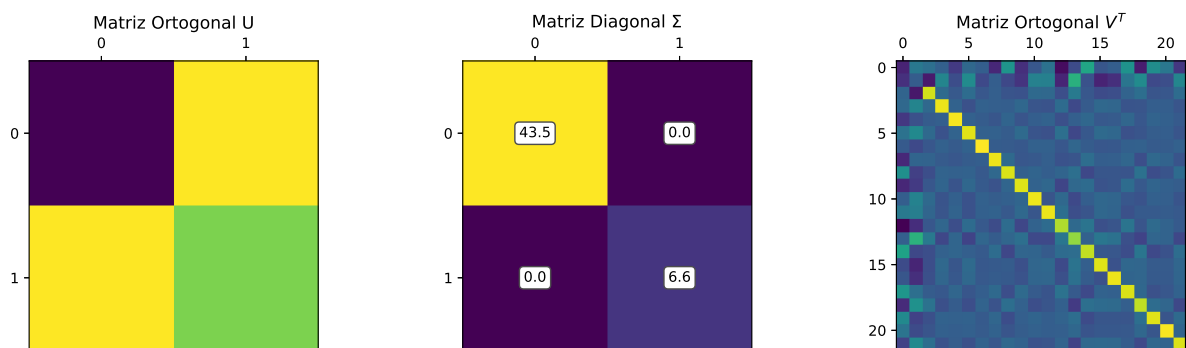
**Figura 3.1:** La matriz  $A$  como la composición de tres transformaciones lineales

Para la compresión de imágenes emplearemos aproximaciones basadas en la descomposición en valores singulares (*SVD*). Veamos cómo simplificar (comprimir) una muestra de datos generados por computadora con una distribución normal, con media 0 y desviación estándar 5. En primer lugar, a estos datos les aplicaremos la función  $y = -\sqrt{2}x + 1$  y, en segundo lugar, les añadiremos un término muestreado con distribución normal (media 0 y desviación estándar 2) para introducir un error en la función lineal  $y$ . Tanto los valores de  $x$  como los de  $y$  están centrados en cero, es decir, la media de los datos es cero. Estos datos ilustran diversas distribuciones encontradas en el mundo real, como son: características morfológicas de personas (peso, estatura, etc.), efectos fisiológicos de un fármaco, niveles de ruido en telecomunicaciones o errores en la medición de ciertas magnitudes.



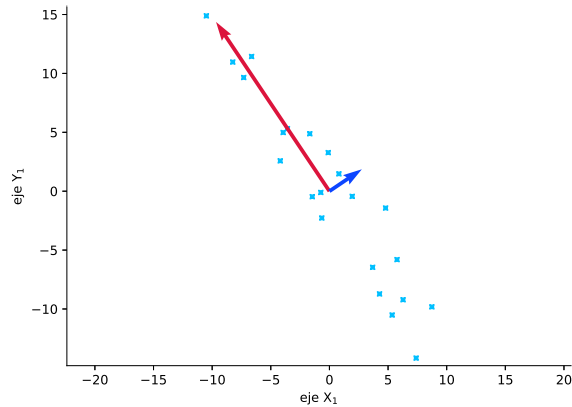
**Figura 3.2:** Gráfica de la muestra de datos con distribución normal

Con los datos generados, construimos la matriz  $A_{2 \times 22}$  y obtenemos su descomposición en valores singulares. La representación gráfica de la matriz  $A = U\Sigma V^T$  se muestra en la siguiente figura:



**Figura 3.3:** Factorización gráfica por SVD de la matriz de datos

En esta representación, los vectores han sido multiplicados por sus respectivos valores singulares, lo que muestra el “impacto” de cada dirección principal en la reconstrucción de los datos.



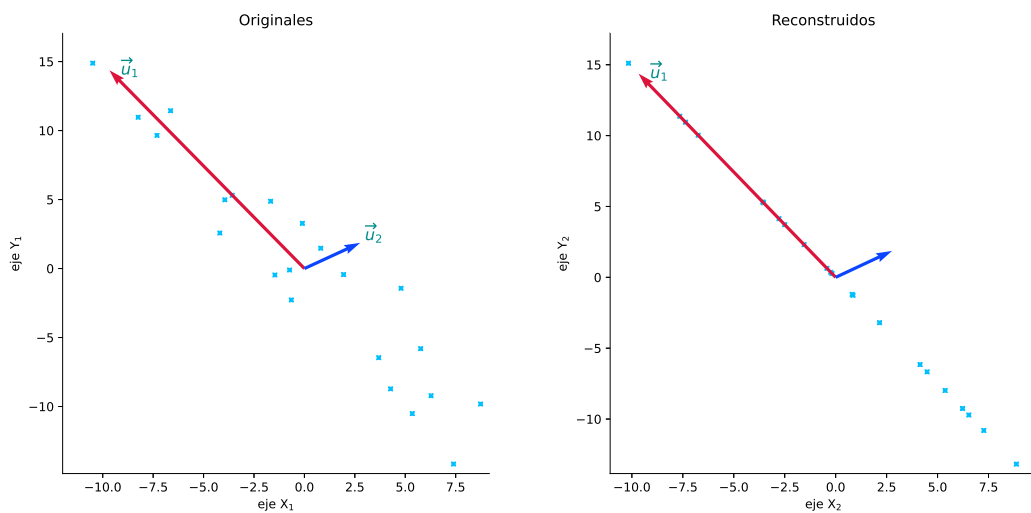
**Figura 3.4:** Componentes principales de la SVD

Se observa que el vector azul, que representa  $\vec{u}_2$  y  $\sigma_2$ , es relativamente más pequeño. Por lo tanto, podemos simplificar los datos al reconstruir la matriz  $A$  sin considerar esta dirección. Como resultado, podemos obtener una aproximación de los datos al proyectarlos sobre el vector principal  $\vec{u}_1$ , lo cual es equivalente a reconstruir los datos mediante la SVD, pero sin los términos menos relevantes:

$$A = A_2 = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T$$

es decir, simplemente tomamos la aproximación

$$A \approx A_1 = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T$$



**Figura 3.5:** Datos proyectados sobre  $\vec{u}_1$  (a la derecha)

## 3.8 Imágenes Digitales

Una imagen digital es una representación visual de un objeto o escena convertida en un formato comprensible para un dispositivo electrónico (una computadora, un teléfono móvil o una cámara digital). Esta conversión se realiza mediante un proceso de digitalización, en el cual la imagen se descompone en una malla o retícula de pequeños elementos llamados píxeles, las unidades de información más pequeñas en una imagen digital. Cada píxel tiene un valor numérico que representa su color y brillo, lo cual permite que la imagen sea almacenada, procesada y visualizada en pantallas electrónicas.

Las imágenes digitales pueden ser en escala de grises, donde cada píxel representa un nivel de intensidad entre blanco y negro, o a color, donde cada píxel está compuesto por valores para los colores primarios (generalmente rojo, verde y azul, conocido como el modelo de color RGB). La calidad de una imagen digital depende de la resolución, que se refiere a la cantidad de píxeles por unidad de área, y de la profundidad de color, que indica el número de colores que cada píxel puede representar.

Una definición más formal de imagen digital es la siguiente:

### Definición 3.3 (Imagen Digital)

Una imagen digital es una función

$$f(x, y)$$

que asigna un valor numérico que representa intensidad o color a cada punto  $(x, y)$ , donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas de un píxel en el espacio bidimensional.



**Nota.** Por convención, el píxel con coordenadas  $(0, 0)$  es el que se encuentra en la esquina superior izquierda de la imagen. La coordenada  $x$  incrementa su valor de izquierda a derecha, mientras que  $y$  lo hace de arriba hacia abajo.

## 3.9 Aplicación a la Compresión de Imágenes Digitales con Ayuda de Matlab

Para alcanzar una buena compresión de imagen, solo se consideran los primeros  $k$  valores de la ecuación (3.1). Por lo tanto la ecuación (3.1) se convierte en

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T \quad (3.7)$$

donde  $k$  es menor que  $r$ . La imagen comprimida mediante la aplicación de la ecuación (3.7) reducirá el espacio de almacenamiento requerido a  $k(m + n + 1)$  bits en comparación con el

espacio de almacenamiento de  $m \cdot n$  bits requerido por la imagen original (no comprimida). Por lo tanto, para obtener una compresión, el espacio requerido para almacenar la imagen procesada debe ser menor que el espacio requerido para almacenar la imagen original; es decir:

$$k(m + n + 1) < m \cdot n \quad (3.8)$$

lo cual implica que el valor de  $k$  debe satisfacer

$$k < \frac{m \cdot n}{m + n + 1} \quad (3.9)$$

que nos da una cota superior para  $k$ .

Para comparar los resultados de diferentes técnicas de compresión y medir el grado de compresión se usan diferentes medidas:

- **Razón de Compresión.** Mide el grado al que una imagen se comprime y se define como la razón entre el tamaño original de la imagen y el tamaño comprimido de la imagen:

$$C_r = \frac{m \cdot n}{k(m + n + 1)} \quad (3.10)$$

Algunas veces, en lugar de la razón de compresión se da el **espacio ahorrado** ( $S_a$ ), que se define como la reducción del tamaño en relación con el tamaño sin comprimir:

$$S_a = 1 - \frac{k(m + n + 1)}{m \cdot n} \quad (3.11)$$

que puede expresarse como un decimal o como un porcentaje (%).

- **Error Cuadrático Medio ( $MSE$ ).** Es una medida de la degradación de la calidad de una imagen comprimida comparada con la original; es decir, compara la calidad de las imágenes comprimidas. El MSE representa el error cuadrático acumulativo entre la imagen comprimida y la original. Se define como

$$MSE = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [f(i, j) - g(i, j)]^2 = \frac{1}{m \cdot n} \|f - g\|_2^2 \quad (3.12)$$

donde  $f$  representa la imagen original y  $g$  la imagen comprimida.

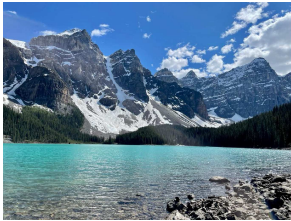
- **Razón de Señal-Ruido Máxima ( $PSNR$ ).** Es la razón entre la potencia máxima posible de una señal y la potencia del ruido que afecta la fidelidad de su representación. Debido a que muchas señales tienen un muy amplio rango dinámico, la PSNR generalmente se expresa en una cantidad logarítmica en la escala de decibeles ( $dB$ ). En la compresión de imágenes, el ruido se refiere a la desviación que hay entre la imagen comprimida y la original; ie, el ruido es el error introducido por la compresión. La  $PSNR$  mide la calidad de las imágenes reconstruidas después de compresión. Un valor más alto de la  $PSNR$

significa mejor calidad. Un mínimo de  $+30 \text{ dB}$  es recomendable.

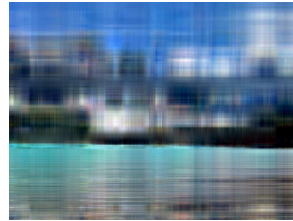
$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \quad (3.13)$$

En los siguientes ejemplos se utiliza la descomposición en valores singulares (*SVD*) para lograr distintos grados de compresión de imágenes digitales. Se evalúan tanto las medidas de compresión como las de calidad de las imágenes resultantes. Este método permite reducir la cantidad de datos necesarios para almacenar una imagen y conservar la mayor parte de su información visual con una disminución mínima en la calidad percibida. La importancia de la *SVD* radica en su capacidad para descomponer una matriz (que representa la imagen) en componentes que capturan las características más relevantes, lo que facilita la reducción del tamaño de los datos sin perder detalles críticos.

### 3.9.1 Ejemplo de una Imagen Comprimida por *SVD* Para Diferentes Valores de $k$



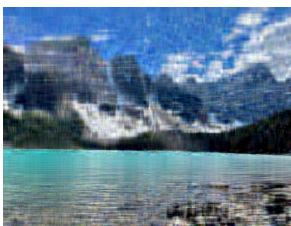
(a) imagen original



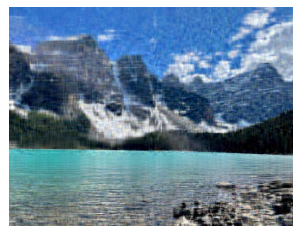
(b)  $k=5$



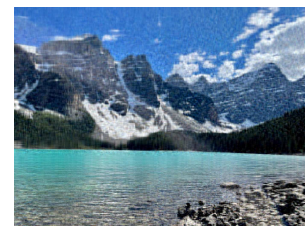
(c)  $k=10$



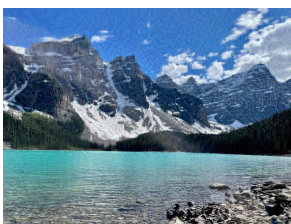
(a)  $k=18$



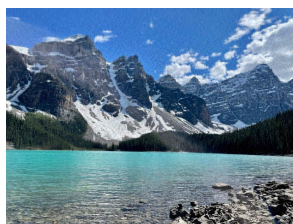
(b)  $k=30$



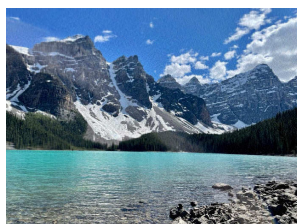
(c)  $k=50$



(a)  $k=80$



(b)  $k=115$



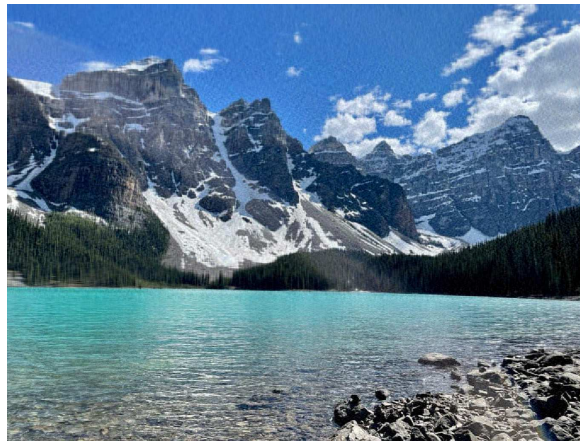
(c)  $k=145$

**Figura 3.8:** Imagen: MRV

### 3.9.2 Comparación Entre la Imagen Original y una Comprimida



(a) imagen original 174.83 kB

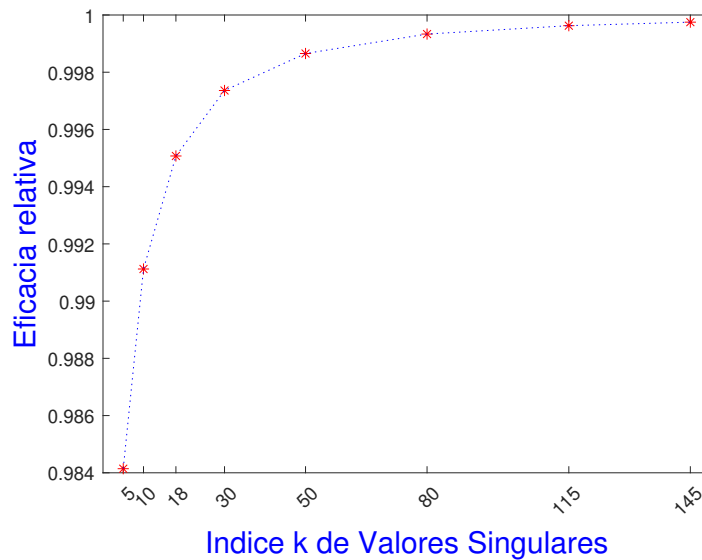


(b) imagen comprimida 163.97 kB

**Figura 3.9:** Comparación: imagen original vs imagen comprimida ( $k = 145$ )

### 3.9 Aplicación a la Compresión de Imágenes Digitales con Ayuda de Matlab

En la siguientes tabla y gráfica se muestra cómo varía el error relativo entre una imagen original y sus versiones comprimidas. Una eficacia relativa cercana o muy próxima a uno sugiere una mejor preservación de la calidad, mientras que un valor alejado de uno indica más distorsión. Es decir, la representación visual demuestra que a mayor compresión, la eficacia relativa se aleja más del uno, lo que ayuda a entender el balance que hay entre la reducción del tamaño del archivo y la calidad de la imagen.



**Figura 3.10:** Eficacia relativa: Imagen original vs comprimidas

Valores Singulares	Eficacia Relativa
5	0.9199
10	0.9378
18	0.9523
30	0.9635
50	0.9737
80	0.9821
115	0.9877
145	0.9909
$r=760$	1

**Cuadro 3.1:** Tabla de valores singulares y eficacia relativa

### 3.9 Aplicación a la Compresión de Imágenes Digitales con Ayuda de Matlab

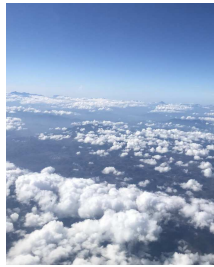
La siguiente tabla muestra cómo el número de valores singulares retenidos en la compresión de una imagen afecta la calidad de la misma. A medida que se retienen más valores singulares, el factor de compresión  $C_r$  disminuye, lo que reduce el Error Cuadrático Medio (MSE) y aumenta la Relación Señal-Ruido Pico (PSNR). Esto indica que una mayor retención de valores singulares mejora la calidad de la imagen comprimida, equilibrando compresión y fidelidad visual. Además, se observa cómo varía el peso en kB con el número de valores singulares.

Imagen Comprimida	Valores Singulares	$C_r$	$S_a$	MSE	PSNR	Peso en kB	Ahorro del Peso en Disco
1	5	87.72	0.991	0.02	65.29	71.25	59.24 %
2	10	43.86	0.983	0.01	66.38	87.44	49.98 %
3	18	24.36	0.970	0.01	67.51	102.15	41.57 %
4	30	14.62	0.951	0.01	68.65	116.69	33.25 %
5	50	8.77	0.918	0.01	70.06	131.70	24.67 %
6	80	5.48	0.869	0.00	71.71	146.04	16.46 %
7	115	3.81	0.812	0.00	73.37	156.96	10.22 %
8	145	3.02	0.763	0.00	74.66	163.97	6.21 %
9	$r=768$	0.5711	-0.250	0.00	267.31	174.83	0.00 %

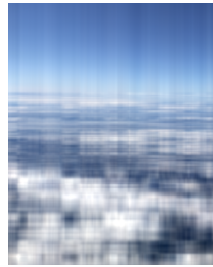
**Cuadro 3.2:** Resultados de la compresión

Veamos un ejemplo donde se observa que el número óptimo de valores singulares para una buena compresión (calidad-peso de la imagen) puede variar dependiendo de las características de la imagen, como colores, luminosidad y textura de los elementos que aparecen en ella.

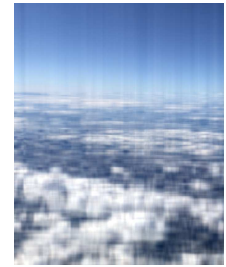
### 3.9.3 Segunda Imagen Comprimida por *SVD* Para Diferentes Valores de $k$



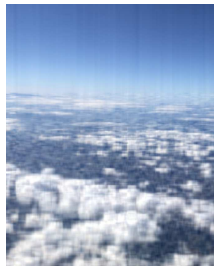
(a) imagen original



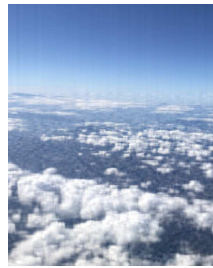
(b)  $k=5$



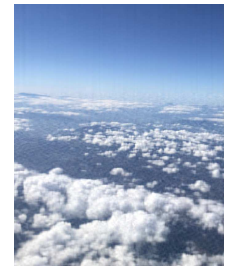
(c)  $k=10$



(a)  $k=18$



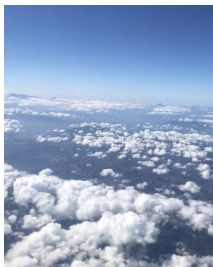
(b)  $k=30$



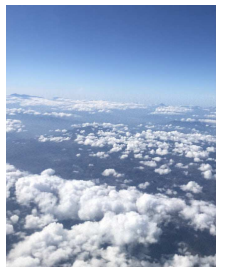
(c)  $k=45$



(a)  $k=60$



(b)  $k=80$



(c)  $k=100$

**Figura 3.13:** Imagen: MRV

### 3.9.4 Comparación Entre la Imagen Original y una Comprimida



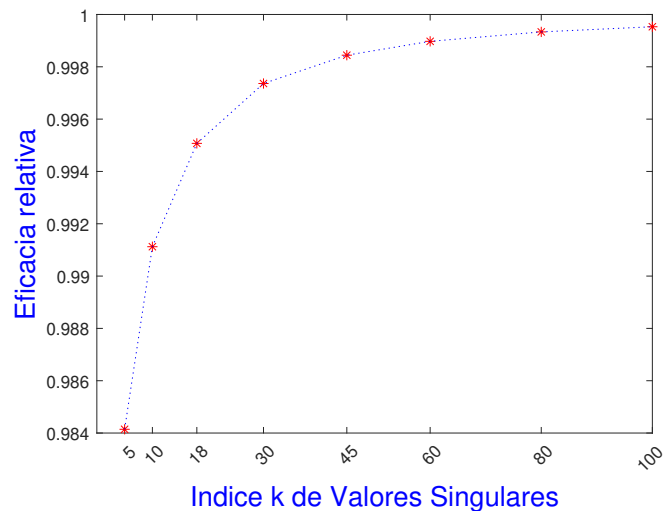
(a) Imagen original 312.55 kB



(b) Imagen comprimida 279.96 kB

**Figura 3.14:** Comparación: Imagen original vs imagen comprimida ( $k = 100$ )

De los dos ejemplos anteriores se deduce que el número óptimo de valores singulares no tiene por qué ser el mismo, ni siquiera parecido, para imágenes diferentes. Esto se debe a las características particulares de cada imagen, como el rango de la matriz que la representa. Sabemos que el rango de una matriz  $A$  determina el número de valores singulares no nulos. Por lo tanto, si el rango de las matrices varía, también lo hará el número de valores singulares, como se muestra en los ejemplos anteriores. También se observa que, a pesar de tener un rango más alto en la segunda imagen (2031 vs 768), se logra una eficacia relativa más cercana a uno con menos valores singulares que en la primera imagen (100 vs 145). Esto nos hace suponer que no es sencillo dar una fórmula para encontrar la solución óptima que funcione en todos los casos, sino que es necesario adaptar la compresión en función de las características específicas de cada imagen.



**Figura 3.15:** Eficacia relativa: Imagen original vs comprimidas

Valores Singulares	Eficacia Relativa
5	0.9841
10	0.9911
18	0.9950
30	0.9973
45	0.9984
60	0.9989
80	0.9993
100	0.9995
$r = 2031$	1

**Cuadro 3.3:** Tabla de valores singulares y eficacia relativa

Puede suceder que una imagen necesite menos valores singulares para lograr una mejor calidad (mayor  $PSNR$  y menor  $MSE$ ) y una mayor compresión (mayor  $C_r$ ) comparada con otra imagen en la que se usen más valores singulares para lograr el mismo resultado.

Imagen Comprimida	Valores Singulares	$C_r$	$S_a$	MSE	PSNR	Peso en kB	Ahorro del Peso en Disco
1	5	225.62	0.997	0.01	69.95	176.55	43.51 %
2	10	112.81	0.994	0.00	72.46	199.80	36.07 %
3	18	62.67	0.989	0.00	75.00	221.86	29.02 %
4	30	37.60	0.983	0.00	77.69	239.52	23.37 %
5	45	25.06	0.974	0.00	79.95	255.14	18.37 %
6	60	18.80	0.966	0.00	81.73	263.77	15.61 %
7	80	14.10	0.955	0.00	83.57	272.95	12.67 %
8	100	11.28	0.944	0.00	85.07	279.96	10.43 %
9	$r=2031$	0.55	-0.133	0.00	348.98	312.55	0.00 %

**Cuadro 3.4:** Resultados de la compresión

Esto indica que menos valores singulares pueden ofrecer una compresión eficiente sin sacrificar la calidad, siempre y cuando esos valores capturen la información clave de la imagen. Por lo tanto, el número de valores singulares no siempre predice directamente la calidad de la imagen, y es necesario ajustar esta cantidad según las características específicas de cada imagen.

## 3.10 Código Para $\mathcal{E}_r(k)$ (ec. 3.5) en MATLAB

A continuación se muestra el código MATLAB utilizado para procesar la imagen:

```

1      tic;
2      X=imread('FOTO.JPG');
3      X_2=double(X);
4
5      [r,m,d1]=size(X);
6
7      rango_R = rank(X_2(:,:,1));
8      rango_G = rank(X_2(:,:,2));
9      rango_B = rank(X_2(:,:,3));
10
11     rango_total = min([rango_R, rango_G, rango_B]);
12
13     rCh=X_2(:,:,1); gCh=X_2(:,:,2); bCh=X_2(:,:,3);
14
15     r1=rank(rCh); r2=rank(gCh); r3=rank(bCh);
16     sigmaR=svds(rCh,r1); sigmaG=svds(gCh,r2); sigmaB=svds(bCh,r3);
17     sigmaR2=sigmaR.*sigmaR; sigmaG2=sigmaG.*sigmaG;
18     sigmaB2=sigmaB.*sigmaB;
19
20     for k = [5 10 18 30 50 80 115 145]
21
22         sigtrdR2=sigmaR2(1:k,:); sigtrdG2=sigmaG2(1:k,:);
23         sigtrdB2=sigmaB2(1:k,:);
24
25         yrR=sum(sigtrdR2)/sum(sigmaR2);
26         yrG=sum(sigtrdG2)/sum(sigmaG2);
27         yrB=sum(sigtrdB2)/sum(sigmaB2);
28         Yr(k)=(yrR+yrG+yrB)/3;
29     end
30     Er=[Yr(5) Yr(10) Yr(18) Yr(30) Yr(50) Yr(80) Yr(115) Yr(145)];
31     q=[5 10 18 30 50 80 115 145];
32
33     plot(q,Er,'r*',q,Er,'b:') %
34
35     xticks([5 10 18 30 50 80 115 145]);
36     yticks([0.97 0.975 0.98 0.985 0.99 0.992 0.994 0.995 0.997

```

```

    0.999 1]);
33 xlabel('Indice k de Valores Singulares','Color','b',
    'FontSize', 16);
34 ylabel('Error relativo','Color','b', 'FontSize', 16);
35 xtickangle(45);

```

## 3.11 Código de MATLAB para la Compresión de Imágenes

```

1   tic;
2   f = imread('Foto.jpg');
3   f = im2double(f);
4   [m, n, ~] = size(f);
5
6   R = f(:, :, 1);
7   G = f(:, :, 2);
8   B = f(:, :, 3);
9
10  rank_R = rank(R);
11  rank_G = rank(G);
12  rank_B = rank(B);
13
14  fprintf('Rango del canal Rojo:
15  fprintf('Rango del canal Verde:
16  fprintf('Rango del canal Azul:
17
18
19  function [U, S, V] = svd(A)
20
21  % A^T * A y A * A^T
22  AtA = A' * A; % (n x n)
23  AAt = A * A'; % (m x m)
24
25  % A^T * A y A * A^T
26  [V, D] = eig(AtA);
27  [U, D_U] = eig(AAt);
28
29
30  [valores_singulares, orden] = sort(sqrt(diag(D)), 'descend');

```

```

31     S = diag(valores_singulares);
32     V = V(:, orden);
33
34
35     U = A * V / S; % U = A * V * inv(S)
36     end
37
38     R = f(:, :, 1);
39     G = f(:, :, 2);
40     B = f(:, :, 3);
41
42     [UR, SR, VR] = svd(R);
43     [UG, SG, VG] = svd(G);
44     [UB, SB, VB] = svd(B);
45
46     DR = UR * SR * VR';
47     DG = UG * SG * VG';
48     DB = UB * SB * VB';
49
50     k = 2031;
51
52     if k < m*n/(m+n+1) % Condicion para k
53         g = zeros(m, n, 3); % Inicializar la imagen comprimida
54         g(:, :, 1) = UR(:, 1:k) * SR(1:k, 1:k) * VR(:, 1:k)';
55         g(:, :, 2) = UG(:, 1:k) * SG(1:k, 1:k) * VG(:, 1:k)';
56         g(:, :, 3) = UB(:, 1:k) * SB(1:k, 1:k) * VB(:, 1:k)';
57     else
58         error('El valor de k no es valido para la compresion.');
```

```

59     end
60
61
62     figure;
63     imshow(f);
64     title('IMAGEN ORIGINAL');
```

```

65
66     figure;
67     imshow(g);
68     title('IMAGEN COMPRIMIDA');
```

```

69
70     %Calcular la razon de Compresion
```

```

71     C_r=m*n/(k*(m+n+1));
72     fprintf('La Razon de Compresion es es: %f\n', C_r);
73     f;
74     g;
75
76     diff_squared = (f - g).^2;
77
78     sum_diff_squared = sum(sum(diff_squared));
79
80     [m, n] = size(f);
81     total_elements = m * n;
82
83     % Calcular el MSE
84     mse = mean((f - g).^2, 'all');
85     fprintf('MSE: %.2f\n', mse);
86     R = 255;
87     % Calcular el PSNR
88     if mse == 0
89         psnr = Inf;
90     else
91         psnr = 10 * log10((R^2) / mse);
92     end
93     fprintf('PSNR: %.2f dB\n', psnr);
94
95     %Calcular el espacio ahorrado
96     Sa = 1 - (k * (m + n + 1) / (m * n));
97     fprintf('El valor de Sa es: %f\n', Sa);
98
99     % Calcular el tamaño del archivo para la imagen original (f)
100    imwrite(f, 'imagen_original_temp.jpg');
101    info_f = dir('imagen_original_temp.jpg');
102    peso_f_kb = info_f.bytes / 1024; % Convertir a KB
103
104    % Calcular el tamaño del archivo para la imagen comprimida (g)
105    imwrite(g, 'imagen_comprimida_temp.jpg');
106    info_g = dir('imagen_comprimida_temp.jpg');
107    peso_g_kb = info_g.bytes / 1024; % Convertir a KB
108
109    % Comparar tamaños
110    fprintf('Peso de la imagen original: %.2f KB\n', peso_f_kb);

```

### 3.11 Código de MATLAB para la Compresión de Imágenes

```
111     fprintf('Peso de la imagen comprimida: %.2f KB\n', peso_g_kb);
112     fprintf('Reduccion de peso: %.2f%%\n', 100 * (peso_f_kb -
        peso_g_kb) / peso_f_kb);
113
114     tiempo_transcurrido = toc;
115     fprintf('El programa tardo %.3f segundos en ejecutarse.\n',
        tiempo_transcurrido);
```

# CAPÍTULO 4

## Inversa de Moore-Penrose

### Contenido

- ❑ *Inversa de Moore*
- ❑ *Inversa de Penrose*
- ❑ *Relación entre SVD y la Inversa de Moore-Penrose*
- ❑ *Inversa de Moore-Penrose Como un Límite*
- ❑ *Aplicación al Proceso de Restauración del Desenfoque*

La inversa de Moore-Penrose es una inversa generalizada de matrices, que puede ser aplicada para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. A partir de la SVD de la matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , fácilmente se puede establecer una fórmula que permite calcular la inversa de Moore-Penrose.

### 4.1 Definición de Moore

En 1935, Moore dio una definición de pseudoinversa o inversa generalizada que se enuncia a continuación.

#### Definición 4.1 (Inversa de Moore)

Si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , entonces la inversa generalizada de  $A$  es la única matriz  $A^+ \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  tal que:

I)  $AA^+ = P_{\mathcal{R}(A)}$

II)  $A^+A = P_{\mathcal{R}(A^+)}$



### 4.2 Definición de Penrose

Años más tarde, en 1955 y de manera independiente, Penrose ofreció una nueva definición de inversa generalizada.

**Definición 4.2 (Inversa de Penrose)**

Si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , entonces su inversa generalizada  $A^+$  es la única matriz en  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  que verifica:

- I)  $AA^+A = A$
- II)  $A^+AA^+ = A^+$
- III)  $(AA^+)^T = AA^+$
- IV)  $(A^+A)^T = A^+A$



Esta última definición es la que se conoce como la inversa de Moore-Penrose y es con la que se trabajará a lo largo de este proyecto. Las definiciones de Moore y de Penrose son equivalentes, además, la inversa generalizada es única, lo que se demuestra en el siguiente teorema tomado del trabajo de fin de grado de Inés Milán Sanz [8].

**Teorema 4.1**

Las definiciones 4.1 y 4.2 dadas por Moore y Penrose, respectivamente, son equivalentes. Además, la inversa generalizada es única.

**Demostración:**

En primer lugar mostraremos que la definición de Moore implica la definición de Penrose.

- I)  $AA^+A = A$  puesto que  $(AA^+)A = P_{\mathcal{R}(A)}A = A$
- II)  $A^+AA^+ = A^+$  porque  $(A^+A)A^+ = P_{\mathcal{R}(A^+)}A^+ = A^+$
- III)  $(AA^+)^T = AA^+$ . Sabemos que  $P_{\mathcal{R}(A)}$  satisface

$$\text{a) } P_{\mathcal{R}(A)}^2 = P_{\mathcal{R}(A)} \quad \text{y} \quad \text{b) } P_{\mathcal{R}(A)}^T = P_{\mathcal{R}(A)}$$

Por lo tanto

$$(AA^+)^T = (P_{\mathcal{R}(A)})^T = P_{\mathcal{R}(A)} = AA^+$$

- IV)  $(A^+A)^T = A^+A$  es inmediato de

$$(A^+A)^T = (P_{\mathcal{R}(A^+)})^T = P_{\mathcal{R}(A^+)} = A^+A$$

Recíprocamente, veamos que la definición de Penrose implica la definición de Moore.

I)  $AA^+ = P_{\mathcal{R}(A)}$

$AA^+ = (AA^+)^T$

PD.  $(AA^+)^2 = AA^+$

$A^+AA^+ = A^+$

$A(A^+AA^+) = AA^+$

$(AA^+)(AA^+) = AA^+; \text{ i.e.}$

$(AA^+)^2 = AA^+$

II)  $A^+A = P_{\mathcal{R}(A^+)}$

$A^+A = (A^+A)^T$

PD.  $(A^+A)^2 = A^+A$

$AA^+A = A$

$A^+AA^+A = A^+A$

$(A^+A)(A^+A) = A^+A; \text{ i.e.}$

$(A^+A)^2 = A^+A$

Ahora, mostremos que  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^+)$ . Sabemos que  $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$ . Entonces se tiene que

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^+A) \subseteq \mathcal{R}(AA^+) \subseteq \mathcal{R}(A)$$

Por lo tanto,  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^+)$ .

Por último, demostremos que la inversa de Moore-Penrose es única. Supongamos que existen dos matrices B y C que satisfacen:

a)  $ABA = A$

b)  $BAB = B$

c)  $(AB)^T = AB$

d)  $(BA)^T = BA$

a)  $ACA = A$

b)  $CAC = C$

c)  $(AC)^T = AC$

d)  $(CA)^T = CA$

Entonces

$$\begin{aligned} B &= BAB = (BA)^T B = A^T B^T B \\ &= (ACA)^T B^T B \\ &= A^T C^T A^T B^T B \\ &= CABAB \\ &= CAB \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} C &= CAC = C(AC)^T = CC^T A^T \\ &= CC^T (ABA)^T \\ &= CC^T A^T B^T A^T \\ &= CACAB \\ &= CAB \end{aligned}$$

Es decir,  $B = C$ . ■

**Nota.** Entre otras aplicaciones, la inversa de Moore-Penrose se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales sobredeterminados y encontrar soluciones aproximadas cuando no hay una solución exacta.

### 4.3 Relación entre SVD y la Inversa de Moore-Penrose

La relación entre la SVD y la inversa de Moore-Penrose se basa en cómo se pueden calcular y utilizar estas dos herramientas juntas.

Sea  $A$  una matriz con su SVD dado por  $A = U\Sigma V^T$ , entonces la inversa de Moore-Penrose de  $A$  se calcula de la siguiente manera:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T, \quad (4.1)$$

donde  $\Sigma^+$  es la matriz diagonal resultante de tomar el recíproco de los valores singulares no nulos de  $\Sigma$  y luego tomando la traspuesta de la matriz resultante.

La inversa de Moore-Penrose es especialmente útil en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales sobredeterminados de la forma  $Ax = b$ , donde  $A$  no tiene una inversa regular (no es cuadrada o es singular). En este caso, puedes usar la inversa generalizada para encontrar una solución aproximada:  $x = A^+b$

### 4.4 Inversa de Moore-Penrose como un límite

Otra caracterización de la inversa de Moore-Penrose,  $A^+$ , está dada en el siguiente teorema tomado de [13] y cuya demostración puede verse en el libro de Arthur E. Albert, *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*, Academic Press, New York, 1972.

#### Definición 4.3

Dada una matriz  $A$  de dimensiones  $m \times n$ , su inversa se denota como  $A^+$  y se define como:

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} A^T (AA^T + \delta^2 I)^{-1} \quad (4.2)$$

donde

- $A^T$  es la traspuesta de la matriz  $A$ .
- $A^{-1}$  es la inversa de la matriz  $A$ .
- $\delta$  es un número positivo muy pequeño (aproximadamente cero).
- $I$  es la matriz identidad de dimensión  $m \times m$ .



En esta definición, estamos calculando la inversa  $A^+$  como el límite cuando  $\delta$  tiende a cero de la expresión  $A^T(AA^T + \delta^2 I)^{-1}$  y se utiliza para calcular una aproximación de la inversa de A cuando A no es cuadrada o no tiene inversa.

**Ejemplo 4.1** Cálculo de la inversa de Moore-Penrose a partir de la SVD de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La SVD de la matriz A es  $A = U\Sigma V^T$ , donde

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(-3-\sqrt{58})^2+(1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3+\sqrt{58}))^2}} & \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(\sqrt{58}-3)^2+(1+\frac{1}{7}(3-\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3-\sqrt{58}))^2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(-3-\sqrt{58})^2+(1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3+\sqrt{58}))^2}} & \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(\sqrt{58}-3)^2+(1+\frac{1}{7}(3-\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3-\sqrt{58}))^2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(-3-\sqrt{58})^2+(1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3+\sqrt{58}))^2}} & \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(\sqrt{58}-3)^2+(1+\frac{1}{7}(3-\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3-\sqrt{58}))^2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{8 + \sqrt{58}} & 0 \\ 0 & \sqrt{8 - \sqrt{58}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{58}}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3+\sqrt{58})^2}} & \frac{3-\sqrt{58}}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3-\sqrt{58})^2}} \\ \frac{1}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3+\sqrt{58})^2}} & \frac{1}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3-\sqrt{58})^2}} \end{pmatrix}$$

y la inversa de Moore-Penrose asociada a la matriz A es

$$A^+ = V\Sigma^+U^T \tag{4.3}$$

donde

$$V = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{58}}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3+\sqrt{58})^2}} & \frac{1}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3+\sqrt{58})^2}} \\ \frac{3-\sqrt{58}}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3-\sqrt{58})^2}} & \frac{1}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}(3-\sqrt{58})^2}} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8+\sqrt{58}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8+\sqrt{58}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^T = \begin{pmatrix} \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(-3-\sqrt{58})^2+(1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3+\sqrt{58}))^2}} & \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(-3-\sqrt{58})^2+(1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3+\sqrt{58}))^2}} & \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{7\sqrt{\frac{1}{49}(-3-\sqrt{58})^2+(1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3+\sqrt{58}))^2}} \\ \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(\sqrt{58}-3)^2+(1+\frac{1}{7}(3-\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3-\sqrt{58}))^2}} & \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{\sqrt{\frac{1}{49}(\sqrt{58}-3)^2+(1+\frac{1}{7}(3-\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3-\sqrt{58}))^2}} & \frac{1+\frac{1}{7}(3+\sqrt{58})}{7\sqrt{\frac{1}{49}(\sqrt{58}-3)^2+(1+\frac{1}{7}(3-\sqrt{58}))^2+(2+\frac{3}{7}(3-\sqrt{58}))^2}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto,

$$A^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 4.2** Ahora, calculemos la inversa de Moore-Penrose de la misma matriz  $A$  del ejemplo 4.1, pero a partir de la definición del límite.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} A^T (AA^T + \delta^2 I)^{-1} \tag{4.5}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 13 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 2 + \delta^2 & 5 & -1 \\ 5 & 13 + \delta^2 & -3 \\ -1 & -3 & 1 + \delta^2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\delta^6 + 16\delta^4 + 6\delta^2} \begin{pmatrix} \delta^4 + 14\delta^2 + 4 & -5\delta^2 - 2 & \delta^2 - 2 \\ -5\delta^2 - 2 & \delta^4 + 3\delta^2 + 1 & 3\delta^2 + 1 \\ \delta^2 - 2 & 3\delta^2 + 1 & \delta^4 + 15\delta^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^6 + 16\delta^4 + 6\delta^2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^4 + 14\delta^2 + 4 & -5\delta^2 - 2 & \delta^2 - 2 \\ -5\delta^2 - 2 & \delta^4 + 3\delta^2 + 1 & 3\delta^2 + 1 \\ \delta^2 - 2 & 3\delta^2 + 1 & \delta^4 + 15\delta^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^6 + 16\delta^4 + 6\delta^2} \begin{pmatrix} \delta^4 - 2\delta^2 & 3\delta^4 + \delta^2 & -\delta^4 - 5\delta^2 \\ \delta^4 + 4\delta^2 & 2\delta^4 + \delta & 7\delta^2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\delta^2(\delta^2-2)}{\delta^2(\delta^4+16\delta^2+6)} & \frac{\delta^2(3\delta^2+1)}{\delta^2(\delta^4+16\delta^2+6)} & \frac{\delta^2(-\delta^2-5)}{\delta^2(\delta^4+16\delta^2+6)} \\ \frac{\delta^2(\delta^2+4)}{\delta^2(\delta^4+16\delta^2+6)} & \frac{\delta^2(2\delta^2+1)}{\delta^2(\delta^4+16\delta^2+6)} & \frac{\delta^2(7)}{\delta^2(\delta^4+16\delta^2+6)} \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 - 2}{\delta^4 + 16\delta^2 + 6} & \frac{3\delta^2 + 1}{\delta^4 + 16\delta^2 + 6} & \frac{-\delta^2 - 5}{\delta^4 + 16\delta^2 + 6} \\ \frac{\delta^2 + 4}{\delta^4 + 16\delta^2 + 6} & \frac{2\delta^2 + 1}{\delta^4 + 16\delta^2 + 6} & \frac{7}{\delta^4 + 16\delta^2 + 6} \end{pmatrix}$$

y al tomar el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

o bien

$$A^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

## 4.5 Aplicación al Proceso de Restauración del Desenfoque Causado por un Movimiento Lineal Uniforme

Modelado matemático para remover el desenfoque de una imagen provocado por un movimiento lineal uniforme: horizontal, vertical o ambos en el caso de que sean independientes.

El proceso de desenfoque de una imagen digital que analizaremos en esta sección, como ilustración de una de las aplicaciones de la inversa de Moore-Penrose, se puede modelar como la convolución:

$$G(x, y) = F(x, y) * H(x, y) + N(x, y) \quad (4.7)$$

donde  $F(x, y)$  representa la imagen original,  $H(x, y)$  la función de dispersión del punto de desenfoque,  $N(x, y)$  el ruido blanco y  $G(x, y)$  la imagen degradada. Sin embargo, en la práctica, es común que el fenómeno de desenfoque no se conozca con precisión, es decir, las funciones  $H(x, y)$  y  $N(x, y)$  son desconocidas. Para resolver esto, es necesario realizar un análisis extra de la propia imagen desenfocada, lo que implica el uso de herramientas adicionales fuera del ámbito del álgebra lineal, como el cepstrum, el filtro gaussiano, la transformada de Radon o la transformada inversa de Fourier (cf. [6]). Estos métodos, de gran importancia en el procesamiento de imágenes digitales, escapan de los objetivos de este trabajo. Por lo tanto, asumiremos dos simplificaciones: primero, que el desenfoque, provocado por un movimiento lineal uniforme

(velocidad constante y dirección fija), es conocido; y segundo, que no hay ruido presente en la imagen.

En lo que resta de esta sección, seguiremos, en buena medida, el procedimiento descrito en ([9]) para remover el desenfoque provocado por un movimiento lineal uniforme, ya sea horizontal, vertical o ambos cuando el desenfoque es separable; es decir, cuando el desenfoque por columnas es independiente del desenfoque por filas.

Supongamos que la matriz  $F \in \mathbb{R}^{r \times m}$  representa la imagen original, mientras que  $G \in \mathbb{R}^{r \times m}$  representa la imagen degradada (borrosa o desenfocada). Denotemos por  $\ell$  el número entero que indica la longitud del movimiento lineal de desenfoque en píxeles y tomemos  $n = m + \ell - 1$ . Como ya se hizo notar, en la práctica, el valor de  $\ell$  es difícil de conocer con precisión, por lo que se debe realizar un análisis detallado de la imagen desenfocada para identificarlo.

Ahora, para no complicar la notación y sin que se preste a confusión, usaremos el mismo símbolo  $F$  para la imagen (o matriz) original aumentada, construida al añadir  $\ell - 1$  columnas (o filas) compuestas por los llamados píxeles de frontera, y que será una matriz de dimensión  $r \times n$ . Para comenzar, supondremos que el desenfoque es **horizontal**. Denotemos por  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matriz de degradación. El objetivo es estimar la imagen original  $F$  a partir de la imagen desenfocada  $G$  y del conocimiento, a priori, de la matriz de degradación  $H$ . Entonces

$$g_i^T = H f_i^T, \quad (4.8)$$

donde  $g_i^t \in \mathbb{R}^m$ ,  $f_i^t \in \mathbb{R}^n$  y  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . En forma matricial

$$G = (H F^T)^T = F H^T, \quad (4.9)$$

donde  $G \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $F \in \mathbb{R}^{r \times n}$ .

Hay una infinidad de soluciones exactas para  $f$  que satisfacen la ecuación (4.8). Pero la solución mediante la inversa de Moore-Penrose resuelve de forma única el problema de norma mínima (cf. [2]); es decir, la solución del problema bajo las condiciones:

$$\text{mín } \|f\|_2 \quad \text{sujeta a} \quad \text{mín } \|Hf - g\|_2 \quad (4.10)$$

El único vector  $\bar{f}$  que satisface (4.10) representa una fila de la imagen restaurada y está definido por

$$\bar{f} = H^+ g \quad (4.11)$$

La forma matricial de la ecuación (4.11) nos proporciona la imagen restaurada  $\bar{F}$  que está dada por

$$\bar{F} = G(H^+)^T \quad (4.12)$$

Para el **movimiento vertical** de desenfoque se tiene

$$G = HF, \quad (4.13)$$

donde  $G \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $n = r + \ell - 1$ .

La correspondiente imagen restaurada está dada por

$$\bar{F} = H^+G \quad (4.14)$$

Para el **movimiento** tanto **horizontal** como **vertical** de desenfoque, cuando son independientes; es decir, cuando el proceso de desenfoque bidimensional es separable, se tiene

$$G = H_C F H_R^T, \quad (4.15)$$

donde  $G \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $H_C \in \mathbb{R}^{r \times p}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $H_R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $H_R^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n = m + \ell_R - 1$  y  $p = r + \ell_C - 1$ .

La correspondiente imagen restaurada está dada por

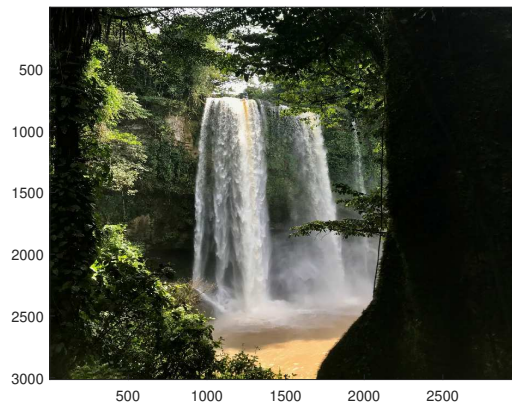
$$\bar{F} = H_C^+ G (H_R^+)^t \quad (4.16)$$

que es la fórmula que usaremos para la elaboración del código en Matlab.

### 4.5.1 El Proceso de Restauración del Desenfoque en la Práctica

A continuación aplicaremos el procedimiento descrito a una imagen digital real. Para ello, tomamos una imagen representada por la matriz  $F_0$ . Asignamos un valor entero mayor que 1 a  $\ell$  y construimos la matriz aumentada  $F$  al agregar al final de la matriz  $F_0$   $\ell - 1$  columnas (o filas en el caso del movimiento vertical) compuestas por los píxeles de frontera. Posteriormente, aplicamos un proceso controlado de desenfoque (horizontal, vertical o combinado) mediante una matriz de Toeplitz  $H$  de la forma 2.19 para obtener la imagen desenfocada  $G = FH^T$ . Finalmente, utilizamos la inversa de Moore-Penrose para restaurar la imagen  $G$ , que denotaremos por  $\bar{F}$ . Este procedimiento se repite con distintos niveles de desenfoque (al variar el valor de  $\ell$ ) y con diferentes tipos de movimiento (horizontal, vertical o combinado).

### 4.5.2 Desenfoque Vertical (k=180)



(a) imagen original



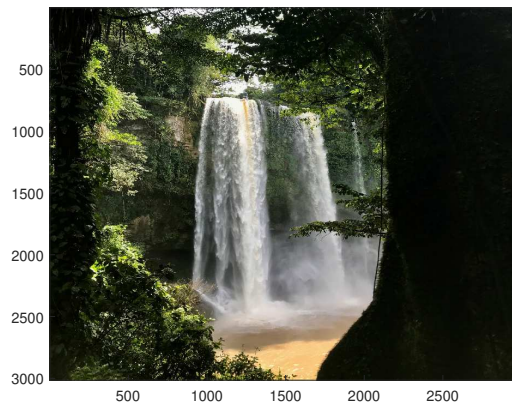
(b) mv  $\ell=1$  y k=180



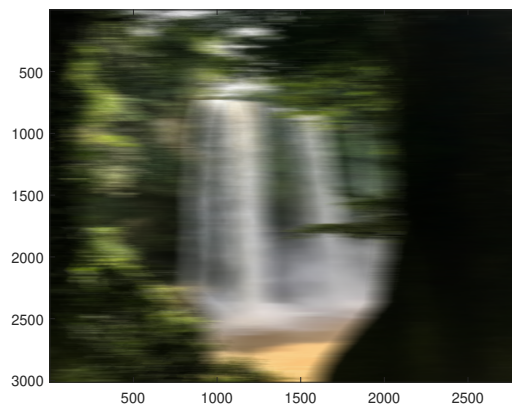
(c) imagen corregida

**Figura 4.1:** Imagen: MRV

### 4.5.3 Desenfoque Horizontal ( $\ell = 180$ )



(a) imagen original



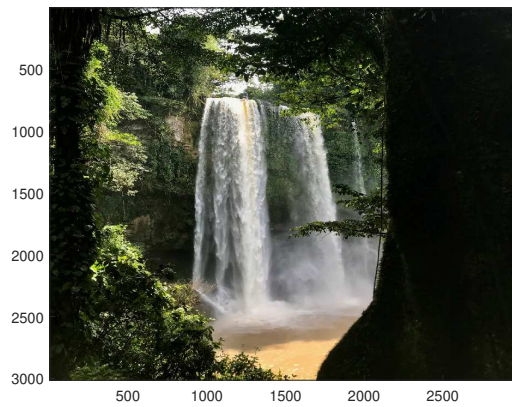
(b) mh  $\ell=180$  y  $k=1$



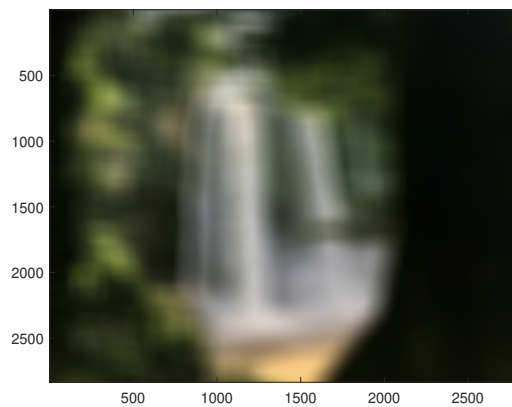
(c) imagen corregida

**Figura 4.2:** Comparación de imágenes: original, desenfocada y restaurada

#### 4.5.4 Desenfoque Combinado ( $k=180$ y $\ell = 180$ )



(a) imagen original



(b) mvh  $\ell=180$  y  $k=180$



(c) imagen corregida

**Figura 4.3:** Comparación con desenfoque mixto: original, desenfocada y restaurada

#### 4.5 Aplicación al Proceso de Restauración del Desenfoque Causado por un Movimiento Lineal Uniforme

---

En los ejemplos anteriores, hemos podido observar los efectos del desenfoque aplicado a las imágenes, ya sea en una única dirección, como en el caso del desenfoque horizontal o vertical, así como en casos más complejos donde se aplicó un desenfoque combinado en ambas direcciones. Cada uno de estos tipos de desenfoque introduce un deterioro específico en la calidad de la imagen, dificultando la percepción de detalles finos y alterando la nitidez original de la misma. No obstante, mediante la aplicación de técnicas avanzadas de restauración, como el uso de la inversa de Moore-Penrose, es posible recuperar gran parte de la información perdida o distorsionada por el desenfoque.

A continuación, se presentan los resultados de MSE y PSNR para las imágenes restauradas. El MSE refleja el error entre la imagen original y la restaurada, con valores menores indicando mejor calidad. El PSNR, que mide la relación señal-ruido, tiene valores más altos en imágenes de mejor calidad visual. Estos parámetros permiten evaluar la efectividad del método de restauración aplicado para recuperar los detalles y mejorar la nitidez de las imágenes, deterioradas por diferentes tipos de desenfoque.

	MSE	PSNR(dB)
Imagen Restaurada (V)	48.85	31.24
Imagen Restaurada (H)	51.42	31.02
Imagen Restaurada (C)	97.94	28.22

**Cuadro 4.1:** Resultados de MSE y PSNR para las imágenes restauradas

## 4.6 Código en MATLAB de la Remoción del Desenfoque Causado por un Movimiento Lineal Uniforme

```
1     X=imread("Foto.jpg");
2     X_2=double(X);
3     [r,m,d1]=size(X);
4     l = 180; % el factor de movimiento horizontal
5     n = m + l - 1;
6     k = 1; % el factor de movimiento vertical
7     p = r + k - 1;
8     rCh=X_2(:, :, 1);
9     gCh=X_2(:, :, 2);
10    bCh=X_2(:, :, 3);
11
12    F1=[rCh, zeros(r, l-1)];
13    F2=[gCh, zeros(r, l-1)];
14    F3=[bCh, zeros(r, l-1)];
15    S1=[F1; zeros(k-1, m+l-1)];
16    S2=[F2; zeros(k-1, m+l-1)];
17    S3=[F3; zeros(k-1, m+l-1)];
18
19    col=[1/l, zeros(1, m-1)];
20    fil=[1/l*ones(1, l), zeros(1, m-1)];
21
22    H = toeplitz(col, fil); % matriz de desenfoque horizontal
23    G = H.';
24    In = pinv(G);
25    col2 = [1/k, zeros(1, r - 1)];
26    fil2 = [1/k * ones(1, k), zeros(1, r - 1)];
27    T = toeplitz(col2, fil2); % matriz de desenfoque vertical
28    In2 = pinv(T);
29
30    M1=T*S1*G;
31    N1=T*S2*G;
32    P1=T*S3*G;
33
34    M=M1(1:r-k, 1:m-1);
35    N=N1(1:r-k, 1:m-1);
36    P=P1(1:r-k, 1:m-1);
```

```
37
38     F1A=In2*M1*In;
39     F=F1A(1:r,1:m);
40
41     F2A=In2*N1*In;
42     E=F2A(1:r,1:m);
43
44     F3A=In2*P1*In;
45     D=F3A(1:r,1:m);
46
47     V= cat(3,M,N,P); % foto desenfocada
48     W= uint8(V);
49     Y= cat(3,F,E,D); % foto restaurada
50     Z=uint8(Y);
51     figure,imagesc(X)
52     figure,imagesc(W)
53     figure,imagesc(Z)
54
55     % Calculo del MSE y PSNR
56     mse = mean((X_2(:) - Y(:)).^2);
57     psnr = 10 * log10((255^2) / mse);
58
59     fprintf('MSE: %.2f\n', mse);
60     fprintf('PSNR: %.2f dB\n', psnr);
```

# CAPÍTULO 5

## Conclusiones

En esta tesis, se ha explorado el impacto del uso de la Descomposición en Valores Singulares (SVD) y la inversa de Moore-Penrose en un par de aplicaciones del procesamiento de imágenes digitales, específicamente en la compresión y en la restauración de imágenes borrosas. Después de un proceso cuidadoso de análisis, investigación y experimentación, se han obtenido las siguientes conclusiones:

- **Efecto de los Valores Singulares en la Compresión:** La cantidad de valores singulares retenidos tiene un papel fundamental en la calidad de la imagen comprimida. Se ha comprobado que mantener un mayor número de valores singulares reduce el Error Cuadrático Medio (MSE) y mejora la Relación Señal-Ruido Pico (PSNR)), lo cual es determinante para mantener la fidelidad visual de la imagen tras la compresión.
- **Incertidumbre del Número Óptimo de Valores Singulares:** La variabilidad inherente a los valores singulares sugiere que no es fácil dar una configuración única y óptima para todos los casos de compresión de imágenes. Es necesario ajustar el número de valores singulares a las características específicas de cada imagen para lograr un balance adecuado entre la calidad de la imagen y el tamaño del archivo resultante.
- **Eficiencia en la Compresión:** En algunas imágenes, se ha observado que es posible alcanzar un error relativo bajo con un número reducido de valores singulares, incluso en comparación con imágenes de menor tamaño de archivo, en las cuales se esperaría necesitar menos valores singulares para lograr una compresión de calidad equivalente. Esto sugiere que la eficiencia de la compresión no depende únicamente de la cantidad de valores singulares retenidos, sino también de las características específicas de cada imagen, tales como el brillo, el color y la composición. Esta observación enfatiza la importancia de considerar las propiedades intrínsecas de cada imagen para conseguir optimizar el proceso de compresión.
- **Aplicación de la Inversa de Moore-Penrose:** La aplicación de la inversa de Moore-Penrose ha demostrado ser eficaz en la restauración de imágenes afectadas por desenfoque. Muestra su versatilidad en la recuperación de información degradada y su capacidad para reconstruir detalles perdidos de una imagen.
- **Evaluación de la Calidad de Restauración del Desenfoque:** Los valores de MSE y PSNR confirman que la restauración ha sido efectiva en reducir el error en las imágenes desenfocadas en una única dirección (vertical u horizontal), con mejores resultados en

---

comparación con el desenfoque combinado. Esto sugiere que el método de restauración aplicado tiene mayor eficacia para corregir desenfoques simples.

- **Limitaciones y Posibilidades de Mejora:** Aunque la inversa de Moore-Penrose ha demostrado ser una herramienta eficaz para restaurar imágenes desenfocadas por un movimiento lineal uniforme, su efectividad disminuye considerablemente en desenfoques causados por movimientos no lineales o, sencillamente, el método resulta inaplicable. Para abordar desenfoques más complejos, es necesario investigar nuevos métodos y usar técnicas más avanzadas que permitan una restauración óptima en una mayor variedad de escenarios.

## Referencias

- [1] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Springer, Third Edition, 2015.
- [2] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized inverses: Theory and Applications*. Springer, New York, Second Edition, 2003.  
<https://doi.org/10.1007/b97366>
- [3] dmicz devblog, *SVD Image Compression, Explained*.  
<https://dmicz.github.io/machine-learning/svd-image-compression/>
- [4] L. El Ghaoui, A. Y. Tsai, *LINEAR ALGEBRA And Applications*. VinUniversity, Hanoi, Vietnam, 2023.
- [5] J. J. Fallas-Monge, J. Chavarría-Molina, P. Soto-Quiros, *DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ: UN REPASO POR LOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y SUS APLICACIONES EN EL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES*. Revista Investigación Operacional **42** (2021), no. 2, 148-173.
- [6] F. Kraemer, Y. Lin, B. McAdoo, K. Ott, J. Wang, D. Widemann, B. Wohlberg, *Blind image deconvolution: Motion blur estimation*. Retrieved from the University Digital Conservancy.  
<https://hdl.handle.net/11299/3685>
- [7] S. J. Leon, *Linear algebra with applications*. Pearson Prentice Hall, 8th edition, 2010.
- [8] I. Milán Sanz, *PSEUDOINVERSA DE MOORE-PENROSE: PROPIEDADES, APLICACIONES Y GENERALIZACIÓN A ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSIÓN INFINITA*. Facultad de Ciencias, Universidad de Salamanca, España, Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas, 2021.
- [9] S. Miljković, M. Miladinović, P. Stanimirović, I. Stojanović, *Application of pseudoinverse computation in reconstruction of blurred images*. Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Serbia, <http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat>, 2011.
- [10] D. Poole, *Álgebra lineal, Una introducción moderna*. Cengage Learning Editores, Tercera Edición, 2011.
- [11] I. Stojanović, Z. Zlatev, P. Stanimirović, M. Miladonović, *Application of the Moore-Penrose Inverse Matrix in Image Deblurring*. Proceedings of the XI International Conference ETAI 2013, 26th -28th of September 2013, Ohrid, Republic of Macedonia.

- 
- [12] G. Strang, *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. Thomson Learning, 4a Ed., 2007.
- [13] University of California at Los Angeles, *The Moore-Penrose Pseudoinverse-Linear Algebra and Applications*. Math 33A, Study notes of Linear Algebra.  
<https://www.math.ucla.edu/laub/33a.2.12s/mppseudoinverse.pdf>
- [14] B. Venkateshaiah, K. N. Roopadevi, M. Stafford, *Image Compression using Singular Value Decomposition*. International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering **5** (2016), no. 12, 208-211. doi: 10.17148/IJARCCCE.2016.51246
- [15] J. Worrell, *Principal Components Analysis*. Machine Learning, Oxford University.  
<https://www.cs.ox.ac.uk/james.worrell/SVD-thin.pdf>