

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

**Un estudio sobre la pregunta de Halphen: ¿Qué combinaciones
de grado y género son posibles en curvas Algebraicas?**

TESIS

PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

ISAAC DE LA CRUZ DOMÍNGUEZ

DIRECTOR

DR. EMIGDIO MARTÍNEZ OJEDA

Ciudad de México, marzo de 2026.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Emigdio Martínez, por su orientación, paciencia y constante apoyo durante el desarrollo de este trabajo. Sus valiosos comentarios, sugerencias y motivación fueron fundamentales para la realización de esta tesis. Asimismo, le agradezco profundamente por haberme introducido y motivado en el estudio de la geometría, área que despertó mi interés y que finalmente dio origen al tema desarrollado en este trabajo.

Agradezco también al profesor Francisco Portillo, cuyas enseñanzas y entusiasmo en materias como álgebra influyeron de manera significativa en mi formación académica y en mi interés por esta área. Asimismo, le agradezco por haber aceptado participar como uno de los lectores de esta tesis, así como por la revisión del trabajo y por sus valiosas observaciones y comentarios, los cuales contribuyeron de manera importante a mejorar este documento.

Agradezco al profesor Fausto Jarquín por sus valiosos puntos de vista y sugerencias que contribuyeron a mejorar este documento, y al profesor Rafael Vega por el tiempo que me brindó para discutir este trabajo y por los momentos de conversación académica que incluso estuvieron acompañados de unos muy buenos churros de maíz.

Asimismo, agradezco a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM), institución que me brindó la oportunidad de formarme académicamente y desarrollar este trabajo de investigación.

De manera muy especial, agradezco a mis padres por su apoyo incondicional, su paciencia y su confianza a lo largo de este camino. En memoria de mi mamá, cuyo amor y apoyo han sido una inspiración constante para alcanzar esta meta.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigos Dulce y Ulises por su amistad y compañía durante esta etapa, especialmente por las largas noches de estudio en el ciclo básico, así como por los momentos compartidos, como las pescadillas y los taquitos en el tianguis de San Juan.

Índice general

Introducción	vi
1. Preliminares	1
1.1. Estructuras algebraicas básicas	1
2. Conceptos básicos del espacio proyectivo	4
2.1. El plano afín	4
2.2. El espacio proyectivo	6
2.2.1. Línea proyectiva real ($\mathbb{RP}^1$)	8
2.2.2. Plano proyectivo real ($\mathbb{RP}^2$)	9
2.2.3. Línea proyectiva compleja ($\mathbb{P}^1$)	12
2.2.4. Plano proyectivo complejo ($\mathbb{P}^2$)	14
2.3. Coordenadas homogéneas	14
2.3.1. Polinomios homogéneos	18
3. Curvas algebraicas planas	20
3.1. Curvas algebraicas planas afines	20
3.1.1. Curvas algebraicas en el plano afín	21
3.2. Curvas algebraicas afines no singulares	29
3.3. Curvas algebraicas afines singulares	31
3.3.1. Número de intersección en el plano afín	31
3.3.2. Multiplicidad de un punto en el plano afín	37
3.3.3. Puntos singulares en el plano afín	41
3.4. Curvas algebraicas en el plano proyectivo	50
3.4.1. Curvas algebraicas proyectivas no singulares	52
3.5. Curvas algebraicas proyectivas singulares	55
3.5.1. Número de intersección	56
3.5.2. Multiplicidad de un punto en una curva	57
3.5.3. Singularidad en el plano proyectivo	59
3.6. El Grado de una Curva Algebraica	61
3.7. El Género de una Curva Algebraica	63

4. La pregunta de Halphen	66
4.1. Introducción a la pregunta de Halphen.	66
4.2. Enunciado de la pregunta de Halphen	66
4.3. La fórmula del género para curvas algebraicas complejas planas	67
4.4. Ejemplos del proceso de suavizado y la fórmula del género	72
4.5. Relación entre grado y género en curvas algebraicas	77
5. Combinaciones de grado y género en curvas algebraicas	79
5.1. Combinaciones posibles en curvas algebraicas suaves en $\mathbb{P}^2$	79
6. Conclusiones	83

Índice de figuras

2.1. Técnica que empleaba Alberto Durero para pintar en un lienzo.	6
2.2. Técnica de proyección.	7
2.3. Espacio Proyectivo Real 1-dimensional.	8
2.4. El modelo de la circunferencia para $R\mathbb{P}^1$	9
2.5. Espacio Proyectivo Real 2-dimensional.	10
2.6. El modelo del hemisferio de $R\mathbb{P}^2$	11
2.7. El modelo del hemisferio de $R\mathbb{P}^2$	11
2.8. Modelo geometrico de $R\mathbb{P}^2$	12
2.9. Espacio Proyectivo Complejo 1-dimensional.	13
2.10. La línea proyectiva compleja como una esfera.	13
2.11. Coordenadas Homogéneas.	15
3.1. El conjunto de ceros V_f es una parábola en el plano afín real.	21
3.2. El conjunto de ceros de la versiera de Agnesi.	22
3.3. El conjunto de ceros $V_f = V_g$	23
3.4. Recta definida por dos polinomios equivalentes.	24
3.5. <i>Intersección de las rectas: $\ell_1 = a_1x + b_1y = -c_1$ y $\ell_2 : a_2x + b_2y = -c_2$.</i> . .	25
3.6. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. <i>Círculo</i>	27
3.7. $f(x, y) = y - ax^2 - bx - c$. <i>Parábola</i>	27
3.8. $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. <i>Elipse</i>	27
3.9. $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. <i>Hipérbola</i>	27
3.10. $f(x, y) = x^3 - y$. <i>Curva elíptica</i>	28
3.11. $f(x, y) = x^3 - y^2$. <i>Cúspide</i>	28
3.12. $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$. <i>Nodo</i>	28
3.13. $f(x, y) = 3ay(x^2 + y^2) - 4ay^3 - y^4 - x^4 = 0$. <i>Trébol de tres hojas</i>	28
3.14. $f(x, y) = ax + by - c$	30
3.15. $f(x, y) = x^2 - 1$	30
3.16. La recta $y = 0$ no intersecta la curva $f(x, y) = xy - 1$	33
3.17. La curva algebraica $y - x^2$ con 2 puntos de intersección de multiplicidad 1. .	34
3.18. La curva algebraica $y - x^2$ con 1 punto de intersección de multiplicidad 2. .	35
3.19. La curva algebraica $y^2 - x^2 + x^4$ presenta tres puntos de intersección: en el origen, con multiplicidad 2, y en $(-1,0), (1,0)$ con multiplicidad 1 cada uno. .	36

3.20. La curva algebraica $y^2 - x^2 + x^4$ presenta un punto de intersección en el origen con multiplicidad 2.	36
3.21. La curva algebraica $y^2 - x^2 + x^4$ intersecta a la recta $y = \pm x$ únicamente en el origen, con multiplicidad 4.	37
3.22. Ejemplo de intersección en un punto con multiplicidad 2: cada recta es tangente a la curva algebraica.	38
3.23. Ejemplos de intersección en un punto con multiplicidad 3: la recta es tangente a la curva algebraica.	38
3.24. Intersección entre una la cúspide y una recta. El origen representa un punto de multiplicidad 2.	40
3.25. La cúspide en el origen con un punto de multiplicidad 3,	40
3.26. Punto singular en la curva del nodo.	42
3.27. Puntos singulares en la curva del Astroide.	45
3.28. Puntos singulares en la curva del Astroide.	45
3.29. La curva del ocho	49
3.30. El trebol de tres hojas	49
3.31. El trebol de cuatro hojas	49
3.32. La cruz de malta	49
3.33. El conjunto de ceros de una curva algebraica proyectiva en $\mathbb{RP}^2$	51
3.34. $f(x, y) = xy - 1$. Hipérbola en el pano afín.	54
3.35. $f(y, z) = y - z^2$. Parábola en el plano afín.	55
3.36. Ejemplos de puntos de multiplicidad 1, 2 y 3.	58
3.37. Curva del ocho.	59
3.38. $f(x, y) = y - x^3$	62
3.39. La Taza y la dona son homeomorfos	63
3.40. La esfera de género 0.	64
3.41. El toro de género 1.	65
3.42. Superficie de género 3.	65
3.43. Superficie de género 3	65
4.1. Una curva algebraica degenerada de grado n consta de n rectas.	68
4.2. El toro: curva algebraica de género 1.	71
4.3. Recta proyectiva compleja.	73
4.4. Proceso de suavizado para $n = 2$	74
4.5. Proceso de suavizado para $n = 3$	75
4.6. Proceso de suavizado para $n = 3$	76
4.7. Proceso de suavizado para $n = 5$	77
5.1. Grafica de combinaciones de grado y género para curvas suaves en $\mathbb{P}^2$	82

Introducción

La geometría algebraica tiene sus raíces en el descubrimiento de las coordenadas cartesianas, y desde sus inicios se ha dedicado al estudio de propiedades geométricas definidas por ecuaciones polinomiales en $\mathbb{R}^n$ [13]. Entre los problemas fundamentales que aborda esta disciplina se encuentran:

- i) La clasificación de curvas algebraicas.
- ii) El estudio de familias de curvas algebraicas y de aquellas contenidas en la intersección de superficies.
- iii) Los problemas de intersección entre curvas y superficies algebraicas.
- iv) La búsqueda de invariantes geométricos a través de transformaciones en el plano y el espacio proyectivo.

Una de las preguntas más importantes dentro de la geometría algebraica se encuentra en el trabajo de 200 páginas realizado por Georges Henri Halphen, titulado *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* [7]. Halphen, quien fue galardonado junto a Max Noether con el Premio Steiner en 1882 por sus contribuciones a la geometría algebraica, planteó varias cuestiones fundamentales en este trabajo [7]. Entre las más destacadas, se encuentra la pregunta que guía esta tesis: *¿Qué combinaciones de grado y género son posibles para una curva algebraica en el espacio proyectivo?*. Esta pregunta, traducida al lenguaje moderno, sigue siendo un desafío relevante para la teoría de curvas algebraicas.

Aunque las curvas algebraicas han sido objeto de estudio durante siglos, la pregunta de Halphen continúa abierta en la actualidad, lo que la hace especialmente desafiante e interesante para la geometría algebraica moderna, particularmente en lo que respecta a la clasificación de curvas mediante invariantes geométricos y topológicos. Halphen sugirió la existencia de una relación entre el grado d y el género g de una curva algebraica (Véase [7][12]), relación que tiene implicaciones tanto en la clasificación como en el comportamiento de las superficies en el espacio proyectivo.

Si bien Halphen propuso una solución parcial para el plano proyectivo de dimensión 3 ($\mathbb{P}^3$), su prueba es incompleta y no queda del todo clara. Hasta ahora, se cuenta con una respuesta más concreta para el plano proyectivo de dimensión 2 ($\mathbb{P}^2$). Sin embargo, en matemáticas nos interesa generalizar los resultados, lo que deja abierto un camino de investigación para extender estos avances a dimensiones superiores.

Mi interés por este tema surgió durante un curso optativo en la licenciatura titulado *Geometría Elemental de Curvas Algebraicas* [5]. Este curso me llevó a investigar temas relacionados con la geometría algebraica como parte del trabajo de tesis en esta área, incluyendo el estudio del plano proyectivo como herramienta clave para comprender propiedades geométricas de curvas algebraicas. Durante esta investigación, descubrí la falta de una respuesta general a la pregunta de Halphen y la relevancia de este problema, lo que motivó el enfoque de esta tesis desde una perspectiva clásica de la geometría y de la topología.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar y analizar la *pregunta de Halphen* en el contexto de curvas algebraicas suaves de grado d en el plano proyectivo de dimensión 2. A lo largo del trabajo, deducimos la fórmula del *género* utilizando el enfoque clásico del *principio italiano* [19]. Este método nos brinda una perspectiva geométrica que resulta útil para el estudio de curvas algebraicas y sus invariantes. Presentamos ejemplos concretos para $\mathbb{P}^2$ y exploramos ideas iniciales para abordar la pregunta en el caso de $\mathbb{P}^3$.

Para abordar este problema, la presente tesis se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se establecen los preliminares y las *estructuras algebraicas* básicas. El Capítulo 2 introduce la geometría del *espacio proyectivo* y el uso de coordenadas homogéneas, herramientas esenciales para el lenguaje de este trabajo. En el Capítulo 3 definimos formalmente las *curvas algebraicas* y sus propiedades en el plano afín.

El Capítulo 4 constituye el núcleo teórico, donde se deduce la *fórmula del género para curvas* en $\mathbb{P}^2$ utilizando el *Principio Italiano* y el suavizado topológico de intersecciones. Finalmente, en el Capítulo 5 se presenta el análisis de las combinaciones posibles de *grado* y *género* en curvas algebraicas suaves dentro de $\mathbb{P}^2$, estableciendo los límites y alcances de estos invariantes geométricos para dar respuesta a la pregunta de Halphen.

Finalmente, espero que este trabajo logre transmitir con claridad los conceptos fundamentales de la geometría de curvas que he estudiado durante este proceso. Más allá de las fórmulas, mi intención ha sido organizar estas ideas de forma coherente para entender un problema tan interesante como el de Halphen. Confío en que el esfuerzo depositado en estas páginas resulte útil para quien, como yo, sienta curiosidad por la relación entre el álgebra y la geometría.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Estructuras algebraicas básicas

«Que nadie entre aquí si no sabe geometría».

Platón.

Las definiciones y conceptos presentados en esta sección son estándar en álgebra conmutativa y pueden encontrarse, en [5, 10]

Definición 1.1.0.1. Un *anillo* es un conjunto A provisto de dos operaciones suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$, tal que:

- i) $(A, +)$ es un grupo abeliano,
- ii) la multiplicación $(\cdot)$ es asociativa,
- iii) se cumplen las leyes distributivas:
 - a) $a \cdot (b + c) = ab + ac$,
 - b) $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Definición 1.1.0.2. Un anillo conmutativo es un *campo* $\mathbb{K}$ si y solo si todo elemento distinto de cero es invertible. Es decir:

- i) $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano,
- ii) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano,
- iii) el producto es distributivo respecto de la suma.

Ejemplo 1.1.0.3. (*Ejemplos de campos*)

- i) $\mathbb{Q}$, el campo de los números racionales, con suma y producto usual.
- ii) $\mathbb{R}$, el campo de los números reales, con suma y producto usual.
- iii) $\mathbb{C}$, el campo de los números complejos.

Observación 1.1.0.4. Los campos son ejemplos de anillos.

A lo largo de esta tesis consideraremos principalmente los campos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.0.5. Sea $\mathbb{K}$ un campo. El *anillo de polinomios en una variable x sobre $\mathbb{K}$* , denotado por $\mathbb{K}[x]$, es el conjunto de todas las expresiones formales de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

donde $n \in \mathbb{N}$, los coeficientes a_i pertenecen a $\mathbb{K}$ y $a_n \neq 0$. Al valor n se le denomina el *grado* del polinomio f y se denota por $\deg(f) = n$. Para $i > n$ hacemos $a_i = 0$. En $\mathbb{K}[x]$ se define lo siguiente:

- i) La igualdad ($=$): Dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes correspondientes son iguales, es decir, si y sólo si $a_i = b_i$, para todo $i \geq 0$.
- ii) La adición ($+$): La suma de dos polinomios se define sumando coeficientes correspondientes.
- iii) La multiplicación ($\cdot$): El producto se determina multiplicando la expresión formalmente, utilizando las leyes distributivas y las reglas de los exponentes y reuniendo términos. De manera más formal:

$$c_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \cdots + a_0b_i$$

para todo $i \geq 0$, donde c_i .

Con estas operaciones, $\mathbb{K}[x]$ es un anillo conmutativo. Véase [10, p. 197].

En esta sección se han introducido las estructuras algebraicas básicas que servirán como fundamento para el desarrollo posterior de la tesis. En particular, los conceptos de campo, anillo y anillo de polinomios permitirán formular de manera rigurosa las ecuaciones que definen curvas algebraicas.

Por simplicidad, a lo largo de esta tesis trabajaremos principalmente sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Dado que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, el uso de números complejos conlleva la consideración de espacios de dimensión real mayor, lo cual resulta natural en el estudio geométrico de soluciones de ecuaciones polinomiales.

Definición 1.1.0.6. *Isomorfismo.* Sean G y $\overline{G}$ dos estructuras algebraicas del mismo tipo. Se dice que G y $\overline{G}$ son *isomorfos* si existe una aplicación

$$\varphi : G \longrightarrow \overline{G}$$

tal que:

- i) φ es una función biyectiva.
- ii) φ preserva las operaciones, es decir, para todo $a, b \in G$ se cumple:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

En este caso, φ se llama un *isomorfismo* y lo denotamos $G \cong \overline{G}$. Véase [10, p. 64].

Definición 1.1.0.7 (*Relación de equivalencia*). Diremos que una relación $\sim$ en un conjunto S es una *relación de equivalencia* si cumple las siguientes propiedades:

- i) *Reflexiva* ($f \sim f$).
- ii) *Simétrica* (si $f \sim g$, entonces $g \sim f$).
- iii) *Transitiva* (si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$).

Véase [5, p. 2].

La *relación de isomorfismo* $\cong$ es una *relación de equivalencia*.

Capítulo 2

Conceptos básicos del espacio proyectivo

«Si fuera posible que él [el buen artista] viviera por siempre, sus ideas interiores... siempre le aportarían algo nuevo para ser expresado a través de sus obras».

Alberto Durero.

2.1. El plano afín

La motivación para estudiar curvas algebraicas en el plano afín dentro del contexto geométrico radica en que preservan ciertas propiedades, conocidas como invariantes afines. Este enfoque deja de lado las transformaciones rígidas y se centra en grupos de transformaciones que conservan la estructura afín, como las transformaciones lineales y las traslaciones. A través de transformaciones y aplicaciones, se identifican invariantes como el grado [5], lo que permite una comprensión más profunda de las características geométricas de las curvas algebraicas en el plano afín.

La geometría afín no ha tenido una historia tan extensa ni reciente como la geometría euclidiana o la proyectiva. Leonhard Euler (1707 - 1783) fue uno de los primeros en introducir el término *afín*, y no fue sino hasta principios del siglo XX, con el primer tratado de Blaschke, que se desarrolló formalmente, siguiendo el programa de Erlangen de Felix Klein (1849 - 1925), donde se establece la relación fundamental entre los conceptos de grupo y geometría [3].

Definición 2.1.0.1. *El plano afín $\mathbb{K}^2$ se define como el conjunto de pares ordenados de elementos de un campo $\mathbb{K}$, es decir:*

$$\mathbb{K}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}.$$

Una recta en $\mathbb{K}^2$ se define como el *subconjunto* de la forma:

$$ax + by + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{K}, \text{ donde } (a, b) \neq (0, 0).$$

Véase [5, p. 25].

Ejemplo 2.1.0.2. (*El plano afín real y sus rectas*).

El plano afín real $\mathbb{R}^2$ se define como el conjunto de puntos dado por:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Las líneas en $\mathbb{R}^2$ están determinadas por la ecuación:

$$ax + by + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{donde } (a, b) \neq (0, 0).$$

Ejemplo 2.1.0.3. (*El plano afín complejo y sus rectas*).

El plano afín complejo $\mathbb{C}^2$ se define como el conjunto de pares ordenados de números complejos:

$$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

La ecuación de la recta en $\mathbb{C}^2$ tiene la forma:

$$az_1 + bz_2 + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{C}, \quad \text{donde } (a, b) \neq (0, 0).$$

Los ejemplos anteriores motivan la siguiente definición, que introduce el *plano afín* de manera más abstracta, ya que está basada en sus propiedades geométricas.

Definición 2.1.0.4. Un *plano afín* es un conjunto X de puntos junto con un conjunto de líneas (subconjuntos de X) que satisface las siguientes propiedades:

- i) Para cualquier par de puntos distintos p y q , existe exactamente una línea que pasa por ambos.
- ii) Si l es una línea y p es un punto que no pertenece a l , existe una única línea que pasa por p y es paralela a l .
- iii) Existen al menos tres puntos que no son colineales (no pertenecen a una misma línea).

Véase [5, p. 26].

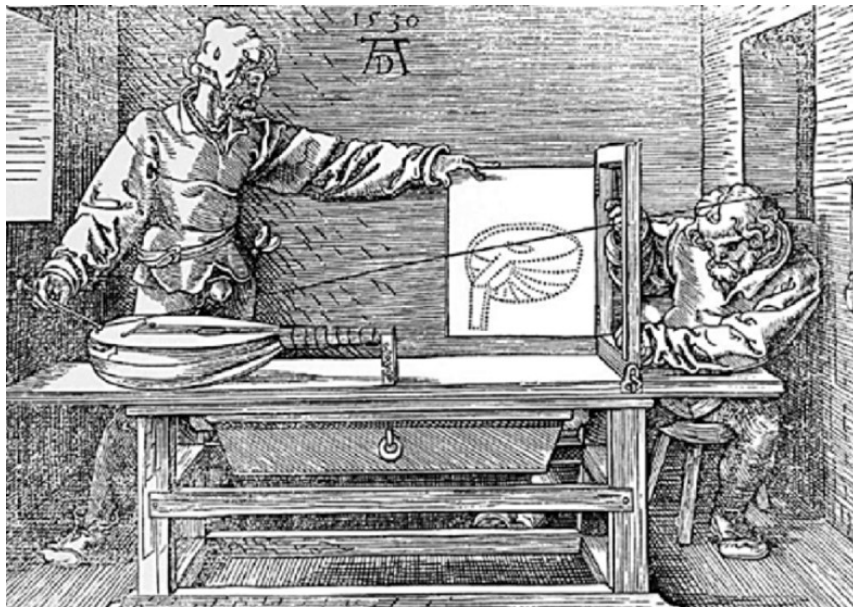
2.2. El espacio proyectivo

La geometría proyectiva tiene sus inicios en la época del Renacimiento (siglo XVI) [3], cuando los pintores renacentistas fundamentaron esta rama de las matemáticas como la conocemos hoy en día. Este desarrollo surge a partir de la *perspectiva* en la pintura, que permitió representar objetos tridimensionales sobre superficies planas con una sensación de profundidad y volumen, a diferencia de las representaciones propias de la Edad Media. Durante el Renacimiento se estudia la visión que tiene el ojo humano al ver un mismo objeto desde diferentes puntos de vista; es aquí donde nace la *perspectiva* y las *proyecciones*.

Podemos nombrar a Alberto Durero (1471 – 1529) como el máximo exponente durante el periodo del Renacimiento [3], ya que al implementar y desarrollar sobre el tema jugó un doble rol: el artístico y el matemático.

Figura 2.1

Técnica que empleaba Alberto Durero para pintar en un lienzo.



Nota. Tomado de [18, p. 108]

El marco podía estar a diferentes distancias del objeto o incluso inclinado, pero cada posición de la cuerda tensa siempre representaba un punto del objeto observado. Este proceso ilustra la idea del *plano proyectivo*, ya que, si observamos desde un único punto, cada dirección alcanza un punto único en los objetos alrededor. Al cortar estas direcciones con un plano, como el marco de la cartulina, obtenemos una representación del objeto basada en su proyección desde el punto de vista del observador. Véase la Figura 2.1.

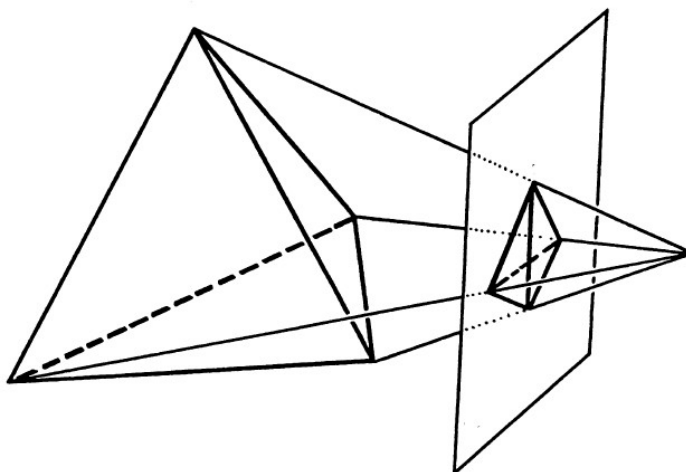
La geometría proyectiva tiene dos conceptos básicos:

- i) Dos puntos definen una recta.
- ii) Toda pareja de rectas se corta en un punto (si dos rectas son paralelas, estas se intersectan en un punto en el infinito).

Con estos conceptos, podemos notar que el *espacio proyectivo* consiste en un espacio afín o euclidiano al que se le han añadido puntos al infinito. Estos puntos representan las direcciones de las rectas en el espacio afín o euclidiano. De esta manera, las rectas paralelas en el espacio afín se intersectan en un punto del infinito dentro del espacio proyectivo. [18]. Véase la Figura 2.2.

Figura 2.2

Técnica de proyección.



Nota. Tomado de [3, p. 4]

Históricamente, entre los matemáticos que sentaron las bases de la geometría proyectiva destacan Gerard Desargues (1591-1661), Blaise Pascal (1623-1662) y Philippe de la Hire (1640-1718). En etapas posteriores, Jean Poncelet (1788-1867) desarrolló el *principio de dualidad*, mientras que August Möbius (1790-1868) *introdujo las coordenadas homogéneas*. Finalmente, Von Staudt (1798-1867) contribuyó en el campo al trabajar en una geometría proyectiva que no dependía de nociones métricas [6].

Para definir el plano proyectivo, vamos a considerar todas las líneas que pasan por el origen en $\mathbb{K}^{n+1}$. Esto corresponde a todas las direcciones que hay en el espacio $\mathbb{K}^{n+1}$ y, como lo hizo Durero, a cada línea le corresponde un punto en el espacio proyectivo de dimensión n . El espacio proyectivo puede interpretarse como el lienzo sobre el cual Durero dibuja su pintura. La definición formal del plano proyectivo es la siguiente:

Definición 2.2.0.1. Consideremos un *campo* $\mathbb{K}$ de característica cero, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El *espacio proyectivo* de dimensión n , denotado como $\mathbb{KP}^n$, es el conjunto cuyos puntos son las rectas (o direcciones) de $\mathbb{K}^{n+1}$, que pasan por el origen:

$$\mathbb{KP}^n \equiv \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim},$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

2.2.1. Línea proyectiva real ($\mathbb{RP}^1$)

Definición 2.2.1.1. La *línea proyectiva real*, que denotaremos por $\mathbb{RP}^1$, es el conjunto cuyos puntos son las rectas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ que pasan por el origen. Véase la Figura 2.3.

Esta definición puede encontrarse en [6, p. 83–84]. De manera equivalente, puede definirse como:

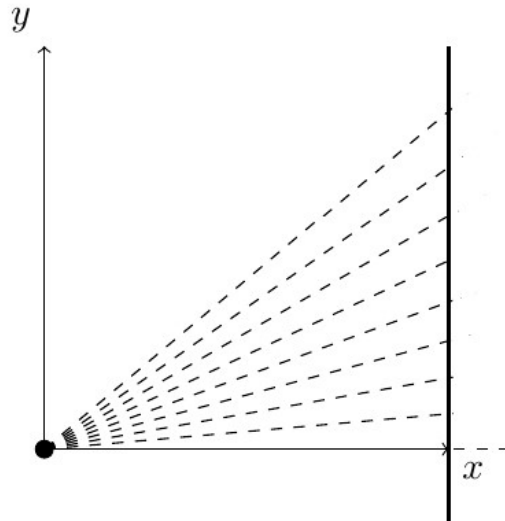
$$\mathbb{RP}^1 \equiv \frac{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } (x', y') = (\lambda x, \lambda y).$$

Figura 2.3

Espacio Proyectivo Real 1-dimensional.



Nota. Elaboración propia (2026)

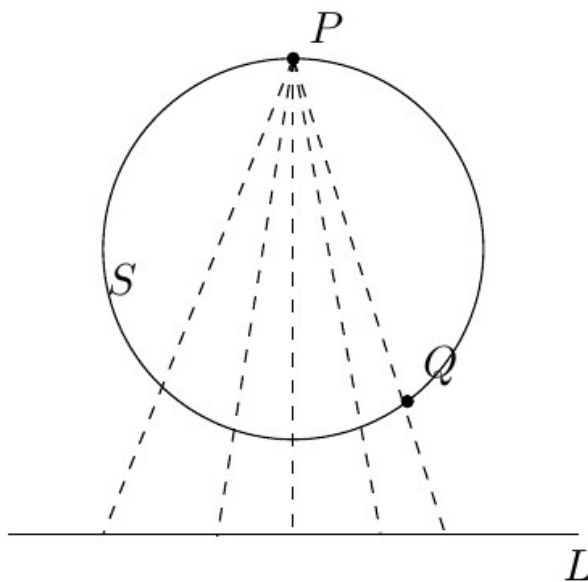
El *modelo de la circunferencia* para $\mathbb{RP}^1$. (Para más detalles, véase [5, p. 113].) se construye tomando una circunferencia unitaria que llamaremos S^1 , vamos a elegir un punto $P \in S^1$ y consideramos una recta L que no pasa por el punto P , a la que podemos ver como una replica de $\mathbb{R}$ sobre la cual aplicaremos la proyección estereográfica. La construcción se ilustra en la Figura 2.4.

Definición 2.2.1.2. La *proyección estereográfica* es la asignación natural de $S^1 \setminus \{P\} \rightarrow L$ donde se toma un punto $Q \neq P$ en S^1 y se le asigna un punto de L , en el que la recta que pasa por los puntos P y Q intersecta a L (véase [5, p. 111]); también puede encontrarse en [2]. Véase la Figura 2.4.

Bajo esta asignación, los puntos de $S^1 \setminus \{P\}$ están en correspondencia uno a uno con los elementos de $\mathbb{R}$. Esta correspondencia puede extenderse a todo S^1 asignando al punto P el elemento infinito. De este modo, podemos interpretar la recta proyectiva real como un círculo unitario.

Figura 2.4

El modelo de la circunferencia para $\mathbb{RP}^1$.



Nota. Elaboración propia (2026)

2.2.2. Plano proyectivo real ($\mathbb{RP}^2$)

Definición 2.2.2.1. El *plano proyectivo real*, que denotaremos por $\mathbb{RP}^2$, cuyos puntos son rectas en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que pasan por el origen. Véase la Figura 2.5.

Esta definición puede encontrarse en [6, p. 105]. De manera equivalente, puede definirse como:

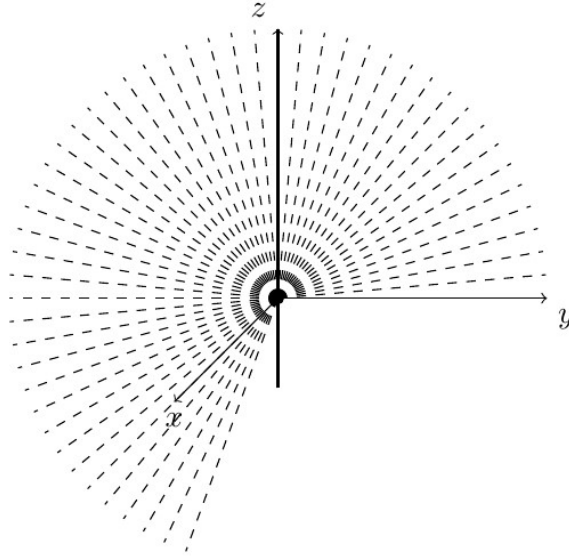
$$\mathbb{RP}^2 \equiv \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } (x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Figura 2.5

Espacio Proyectivo Real 2-dimensional.



Nota. Elaboración propia (2026)

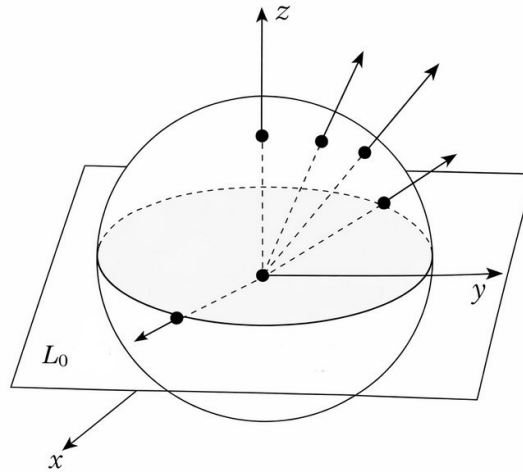
El *modelo del hemisferio* de $\mathbb{RP}^2$ (véase [5, p. 116].) lo construiremos de la siguiente manera.

Supongamos que tenemos un plano L_0 que atraviesa el origen en $\mathbb{R}^3$. Este plano debe entenderse como el plano que pasa por el origen y que divide al espacio en dos semiespacios. Al imponer la condición $L_0 \geq 0$ significa que tomamos únicamente los puntos de la esfera que se encuentran en el semiespacio positivo determinado por este plano. Véase la Figura 4.3.

Según la Definición 2.2.2.1, toda recta que pasa por el origen intersecta la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Al imponer la condición $L_0 \geq 0$, consideramos únicamente los puntos de la esfera que pertenecen al semiespacio positivo determinado por el plano L_0 . De esta manera, cada recta que pasa por el origen intersecta el hemisferio cerrado, cuya frontera está dada por el círculo obtenido como la intersección de la esfera con el plano $L_0 = 0$.

Figura 2.6

El modelo del hemisferio de $\mathbb{RP}^2$.

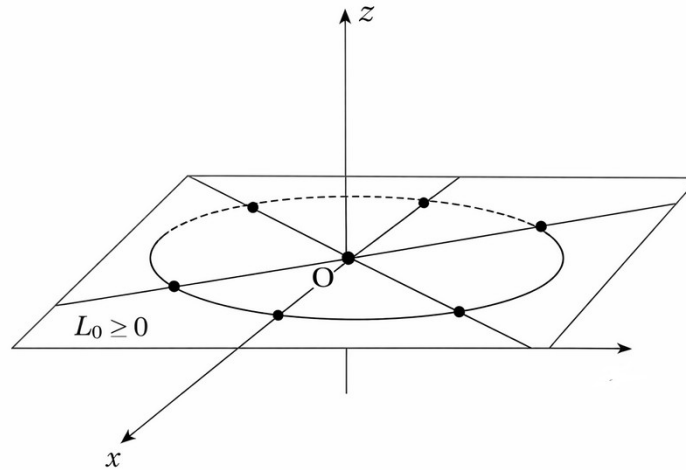


Nota. Elaboración propia (2026)

En estas condiciones, toda recta que pasa por el origen intersecta el hemisferio abierto $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $L_0 > 0$, exactamente en un punto, mientras que las rectas contenidas en el plano $L_0 = 0$ intersectan la frontera del hemisferio en dos puntos diametralmente opuestos. La construcción se ilustra en la Figura 2.7.

Figura 2.7

El modelo del hemisferio de $\mathbb{RP}^2$.



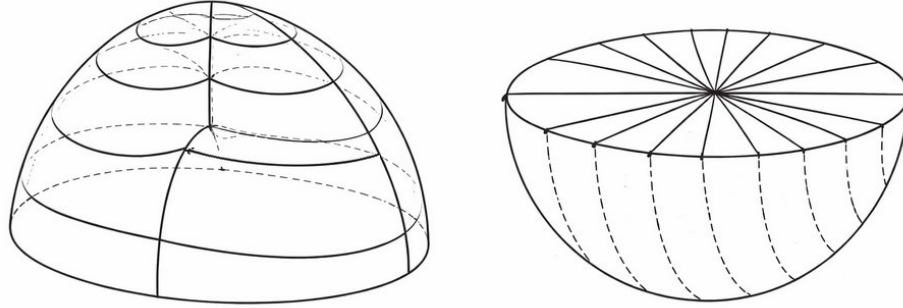
Nota. Elaboración propia (2026)

Finalmente, esta misma construcción puede visualizarse de manera más intuitiva observando el hemisferio desde un punto distante situado sobre la recta perpendicular al plano L_0 . Bajo esta perspectiva, el hemisferio se representa como un disco. En este modelo, los puntos del interior del disco corresponden uno a uno con los puntos del plano afín real $\mathbb{R}^2$, mientras que el círculo de la frontera representa una recta proyectiva, conocida como la

recta al infinito. En esta frontera, los puntos diametralmente opuestos deben identificarse. Esta interpretación geométrica se ilustra en la Figura 2.8.

Figura 2.8

Modelo geométrico de $\mathbb{RP}^2$.



Nota. Elaboración propia (2026)

Este modelo como *disco con identificación antipodal en la frontera* también se describe en [2, p. 60].

Desde el punto de vista topológico, este modelo puede interpretarse como un disco en el que se identifican puntos diametralmente opuestos de la frontera. El espacio obtenido es homeomorfo al plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$. Además, si se elimina un disco de $\mathbb{RP}^2$, el espacio restante es homeomorfo a una banda de Möbius.

2.2.3. Línea proyectiva compleja ($\mathbb{P}^1$)

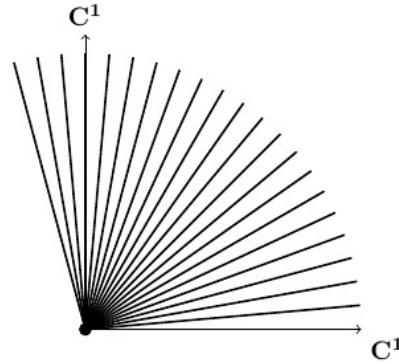
Definición 2.2.3.1. La *línea proyectiva compleja* que denotaremos por $\mathbb{P}^1$, cuyos puntos son rectas en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ que pasan por el origen. véase la Figura 2.9.

Esta definición puede encontrarse en [18, p. 111]. De manera equivalente, puede definirse como:

$$\mathbb{P}^1 \equiv \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por:

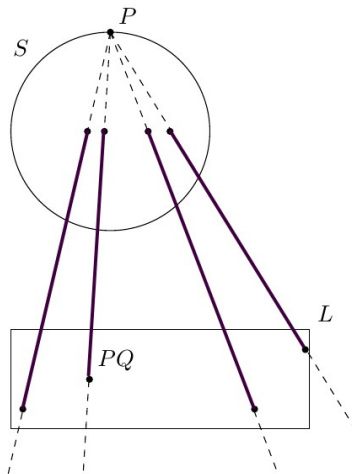
$$(x, y) \sim (x', y') \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } (x', y') = (\lambda x, \lambda y).$$

Figura 2.9*Espacio Proyectivo Complejo 1-dimensional.**Nota.* Elaboración propia (2026)

El *modelo de la esfera* para $\mathbb{P}^1$ (véase [5, p. 113]) se construye de la siguiente manera.

Supongamos que tenemos una esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ que denotaremos como S^2 , sea un punto $P \in S^2$, y sea L un plano que no pasa por el punto P . Véase la Figura 2.9. Vamos a considerar al plano L como una copia del plano complejo $\mathbb{C}$. Aquí también podemos definir la *proyección estereográfica* como la asignación natural $S^2 \setminus \{P\} \rightarrow L$, que lleva un punto $Q \neq P$ de S^2 a un punto en el plano L , el cual se obtiene cuando la recta que pasa por los puntos P y Q intersecta al plano L .

Bajo esta asignación, podemos observar que los puntos de $S^2 \setminus \{P\}$ se identifican de manera biyectiva (uno a uno) con los elementos de $\mathbb{C}$ (véase [5, p. 112]). Esta *biyección* la podemos extender a toda la esfera S^2 al asignar el punto P con el elemento al infinito. La construcción se muestra en la Figura 2.10.

Figura 2.10*La línea proyectiva compleja como una esfera.**Nota.* Elaboración propia (2026)

De este modo, podemos interpretar a la línea proyectiva compleja como $\mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$ (la esfera de Riemann), una descripción similar se puede encontrar en [2, p. 112].

2.2.4. Plano proyectivo complejo ($\mathbb{P}^2$)

Definición 2.2.4.1. El *plano proyectivo complejo* que denotaremos por $\mathbb{P}^2$, cuyos puntos son rectas en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ que pasan por el origen.

Esta definición puede encontrarse en [18, p. 112]. De manera equivalente, puede definirse como:

$$\mathbb{P}^2 \equiv \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } (x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Para el caso de $\mathbb{P}^2$, no podemos hablar de un modelo de visualización tan sencillo como en dimensiones menores, ya que se trata de una variedad real de dimensión 4 y, por lo tanto, no es posible representarla de manera directa.

Por ello, en esta tesis utilizaremos principalmente su descripción mediante coordenadas homogéneas, ya que resulta una forma natural para abordar el estudio de curvas algebraicas proyectivas.

2.3. Coordenadas homogéneas

De manera intuitiva, el uso de *coordenadas homogéneas* puede entenderse como la incorporación de los *puntos en el infinito* al plano. Dichos puntos representan direcciones asociadas a familias de rectas paralelas en el *plano afín*. Esta perspectiva permite considerar de forma unificada tanto los puntos ordinarios como los puntos en el infinito dentro del marco del *espacio proyectivo*.

Las coordenadas homogéneas constituyen una herramienta en geometría algebraica, ya que facilitan la representación y el estudio de curvas algebraicas y de sus intersecciones, incluidas aquellas que ocurren en el infinito. En particular, al trabajar en el *plano proyectivo* mediante coordenadas homogéneas, es posible tratar las curvas algebraicas de manera análoga a como se hace en el plano afín, extendiendo así el análisis geométrico a todo el espacio proyectivo.

Definición 2.3.0.1. Sea $\mathbb{K}$ un campo, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un punto del espacio proyectivo $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ se representa en *coordenadas homogéneas* $[X_0 : \dots : X_n]$, las cuales corresponden a la

recta en $\mathbb{K}^{n+1}$ que pasa por el origen y por el punto

$$(X_0 \dots X_n) \neq (0, \dots, 0).$$

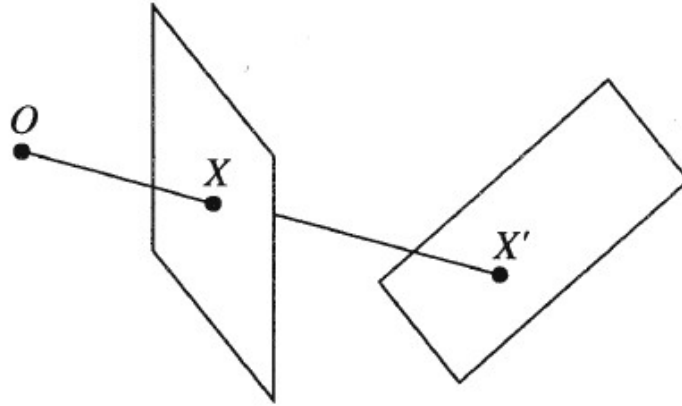
En particular, para todo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, se cumple que

$$[X_0 : \dots : X_n] = [\lambda X_0 : \dots : \lambda X_n], \text{ para toda } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Para más detalles, véase [5, 19, p. 8].

Figura 2.11

Coordenadas Homogéneas.



Nota. Elaboración propia (2026)

Ejemplo 2.3.0.2. (Una recta proyectiva en el plano proyectivo).

Consideremos la recta afín en $\mathbb{R}^2$:

$$ax + by + c = 0, \tag{2.1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y a o $b \neq 0$

Para describir esta recta afín dentro del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, pasamos a coordenadas homogéneas. Observemos que $\mathbb{R}^2$ se identifica con el subconjunto

$$U_Z = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \mid Z \neq 0\}.$$

Como Z es diferente de cero, entonces podemos definir:

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.1), obtenemos

$$a \left(\frac{X}{Z} \right) + b \left(\frac{Y}{Z} \right) + c = 0.$$

Multiplicando toda la ecuación por Z (lo cual es válido en U_Z , pues $Z \neq 0$), se obtiene

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Esta es la ecuación homogénea que define la recta proyectiva asociada a la recta afín $ax + by + c = 0$ en $\mathbb{R}^2$.

Más aún, para hallar el punto al infinito de la recta proyectiva $aX + bY + cZ = 0$, vamos a considerar las coordenadas $[X : Y : 0]$. De este modo sustituyendo $Z = 0$ en la ecuación homogénea se obtiene:

$$aX + bY = 0.$$

Por lo tanto, el punto al infinito se puede representar como cualquier punto de la forma

$$[X : Y : 0] \quad \text{con} \quad aX + bY = 0. \quad \text{y} \quad X, Y \neq 0 \quad (2.2)$$

Para justificar esta afirmación, consideremos la ecuación y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_0 \neq 0$.

$$X = -\frac{b}{a}Y$$

sustituyendo esta en la ecuación (2.2) obtenemos

$$\left[-\frac{b}{a}Y : Y : 0 \right],$$

donde Y no puede ser cero.

Por otro lado, sabemos que en el plano proyectivo siempre se cumple:

$$\frac{Y}{a}[-b, a, 0] = Y \left[-\frac{b}{a} : 1 : 0 \right] = \left[-\frac{b}{a}Y : Y : 0 \right]$$

con Y diferente de cero.

Así, cualquier punto de la forma $[X : Y : 0]$ que satisface la ecuación de la recta proyectiva $aX + bY = 0$ representa el mismo punto proyectivo, y por lo tanto el punto al

infinito de la recta está dado por

$$\left[-\frac{b}{a} : 1 : 0 \right] = [-b : a : 0]$$

Para describir la relación entre el plano afín y el plano proyectivo, definiremos *abierto afín*.

Definición 2.3.0.3. Sea $\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo. Para cada $i = 0, \dots, n$ se define el conjunto:

$$U_i = \{[X_0 : \dots : X_n] \in \mathbb{P}^n \mid X_i \neq 0\}.$$

El conjunto U_i es llamado abierto afín de $\mathbb{P}^n$. La justificación de este nombre es que, mediante el uso de coordenadas, se establece un isomorfismo natural:

$$U_i \cong \mathbb{A}^n.$$

En efecto, para cada i se define la siguiente transformación:

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

dada por:

$$\phi_i([X_0 : \dots : X_n]) = \left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right).$$

Esta transformación está bien definida, ya que si $[Y_0 : \dots : Y_n] = [X_0 : \dots : X_n]$, entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $Y_j = \lambda X_j$ para toda j . Por lo tanto:

$$\frac{Y_j}{Y_i} = \frac{\lambda X_j}{\lambda X_i} = \frac{X_j}{X_i}.$$

Además, ϕ_i es biyectiva, con inversa dada por:

$$\phi_i^{-1}(a_1, \dots, a_n) = [a_1 : a_2 : \dots : a_i : 1 : a_{i+1} : \dots : a_n].$$

Por lo tanto, el abierto afín:

$$U_i = \{[X_0 : \dots : X_n] \in \mathbb{P}^n \mid X_i \neq 0\}$$

se identifica de manera natural con el espacio afín $\mathbb{A}^n$. A este proceso se le llama normalización.

En particular, el complemento de U_n en $\mathbb{P}^n$ es el hiperplano

$$H_\infty = \{[X_0 : \cdots : X_n] \in \mathbb{P}^n \mid X_n = 0\},$$

véase [12, p. 37]. Este hiperplano puede identificarse de manera natural con el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$. Para una discusión más detallada, véase [12, p. 38].

La siguiente descripción permite pensar el espacio proyectivo complejo de forma intuitiva:

- (i) $\mathbb{P}^0$ consiste en un solo punto.
- (ii) $\mathbb{P}^1$ puede pensarse como $\mathbb{C}$ junto con un punto al infinito, y por lo tanto puede identificarse como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (la esfera de Riemann).
- (iii) $\mathbb{P}^2$ puede pensarse como $\mathbb{C}^2$ junto con una línea al infinito, la cual es isomorfa a $\mathbb{P}^1$.
- (iv) $\mathbb{P}^3$ puede pensarse como $\mathbb{C}^3$ junto con un plano al infinito, el cual es isomorfa a $\mathbb{P}^2$.

Así, en general, *el espacio proyectivo* $\mathbb{P}^n$ puede pensarse como $\mathbb{C}^n$ junto a una copia de $\mathbb{P}^{n-1}$ al infinito.

2.3.1. Polinomios homogéneos

En esta sección vamos a introducir el concepto de *polinomio homogéneo*, ya que es una herramienta para definir curvas algebraicas en el *espacio proyectivo*. Como vimos en la sección anterior, en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ los puntos se describen mediante coordenadas homogéneas $[X_0 : \cdots : X_n]$, y al multiplicar todas las coordenadas por un escalar diferente de cero se obtiene el mismo punto.

Definición 2.3.1.1. Sea $\mathbb{K}$ un campo, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un polinomio F de grado d en las variables $X_0, \dots, X_n$ se dice *homogéneo* si todos sus monomios tienen grado total d .

Si un punto $(X_0, \dots, X_n) \neq (0, \dots, 0)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ satisface la ecuación homogénea:

$$F(X_0, \dots, X_n) = 0$$

entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ el punto $(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n)$ también satisface la ecuación anterior. Por lo tanto, podemos decir que el punto proyectivo es:

$$P = [X_0 : \cdots : X_n].$$

Por lo tanto, las soluciones a una *ecuación homogénea* define un subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Véase [5, p. 42].

Ejemplo 2.3.1.2. (*Polinomios homogéneos*).

A continuación se muestran ejemplos de polinomios homogéneos en diferentes variables, indicando su grado.

Monomios homogéneos en una variable (X)

La forma general de grado d es:

$$\blacksquare F(X) = aX^d \quad d \geq 0.$$

Polinomios homogéneos en dos variables (X, Y)

La forma general de grado d es:

$$\blacksquare F(X, Y) = \sum_{i+j=d} a_{i,j} X^i Y^j \quad i, j \geq 0.$$

Polinomios homogéneos en tres variables (X, Y, Z)

La forma general de grado d es:

$$\blacksquare F(X, Y, Z) = \sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k \quad i, j, k \geq 0.$$

Polinomios homogéneos en cuatro variables (X, Y, Z, W)

La forma general de grado d es:

$$\blacksquare F(X, Y, Z, W) = \sum_{i+j+k+l=d} a_{i,j,k,l} X^i Y^j Z^k W^l \quad i, j, k, l \geq 0.$$

Definición 2.3.1.3. Todo polinomio homogéneo se denomina también *forma*. En particular, una forma de grado d es simplemente un polinomio homogéneo de grado d . Compárese con [5, p. 42]

Capítulo 3

Curvas algebraicas planas

«La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal.»

Henri Poincaré.

3.1. Curvas algebraicas planas afines

En este capítulo nos enfocaremos en el estudio de *curvas algebraicas planas* definidas sobre un campo $\mathbb{K}$ de característica cero, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una curva algebraica no es únicamente un objeto geométrico, sino también la manifestación visual de las propiedades algebraicas de un polinomio.

Al trabajar en el campo $\mathbb{K}$, las curvas en el plano pueden abordarse desde dos enfoques fundamentales:

1. **Forma explícita** (paramétrica).

En este caso, la curva se define por medio de una aplicación que asigna a cada valor de un parámetro, un punto en el plano. Es decir:

$$\gamma : (\Omega, \Phi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

2. **Forma implícita** (algebraica).

En este enfoque, consideramos un polinomio de grado d en dos variables con coeficientes en $\mathbb{K}$, es decir:

$$f(x, y) = \sum_{i+j=d} a_{i,j} x^i y^j.$$

donde el grado d es el máximo valor de $i + j$ para el cual $a_{i,j} \neq 0$.

La curva queda determinada por la ecuación:

$$f(x, y) = 0.$$

En esta tesis trabajaremos con las *curvas de manera implícita* (algebraica).

Observación 3.1.0.1. La complejidad de un polinomio $f(x, y)$ puede medirse a través de su grado.

3.1.1. Curvas algebraicas en el plano afín

En el plano afín sobre el campo $\mathbb{K}$, una *curva algebraica* se determina por un polinomio no nulo en dos variables con coeficientes en $\mathbb{K}$, considerado salvo multiplicación por un escalar diferente de cero. Véase[5, p. 2].

Definición 3.1.1.1. Sea $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ un polinomio diferente de cero. Definimos el *conjunto de ceros* como:

$$V_f = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

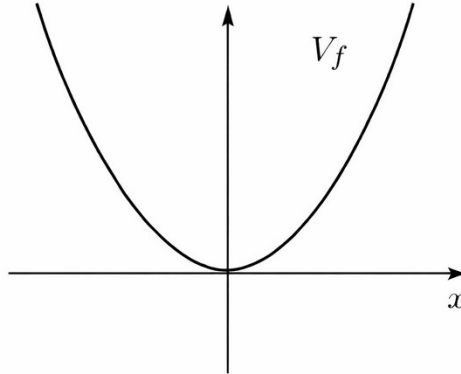
Ejemplo 3.1.1.2. (*Conjunto de ceros de un polinomio*).

Consideremos el polinomio $f(x, y) = y - x^2$ en $\mathbb{R}^2$. Su conjunto de ceros es:

$$V_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}.$$

Figura 3.1

El conjunto de ceros V_f es una parábola en el plano afín real.



Nota. Elaboración propia (2026)

Ejemplo 3.1.1.3. (*El conjunto de ceros de la versiera de Agnesi*).

Consideremos la siguiente curva algebraica en el plano afín real $\mathbb{R}^2$:

$$x^2 y = 4a^2(2a - y), \quad a > 0$$

Esta curva conocida como *versiera de Agnesi*. Despejando y , obtenemos:

$$\begin{aligned}x^2y &= 8a^3 - 4a^2y \\(x^2 + 4a^2)y &= 8a^3\end{aligned}$$

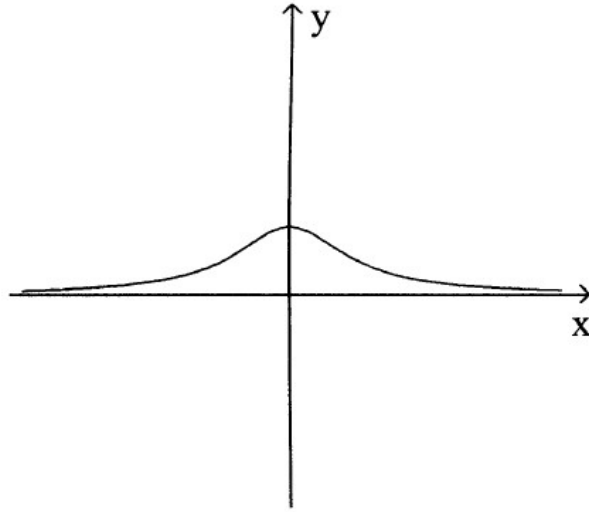
y por lo tanto:

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

Así, el *conjunto de ceros* está formado por los puntos del plano que satisfacen esta ecuación, por lo que puede interpretarse como la gráfica de una función racional, véase la Figura 3.3.

Figura 3.2

El conjunto de ceros de la versiera de Agnesi.



Nota. Elaboración propia (2026)

Hay que tener en cuenta que el conjunto de ceros no necesariamente determina la curva algebraica.

Ejemplo 3.1.1.4. *(El conjunto de ceros no determina la curva algebraica).*

- Las cónicas:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 + 2.$$

En $\mathbb{R}^2$ son polinomios distintos (ninguno es múltiplo escalar del otro), pero tienen el mismo conjunto de ceros, ya que este es el conjunto vacío:

$$V_f = V_g = \emptyset.$$

El fenómeno aquí se debe a que estamos trabajando sobre $\mathbb{R}$. En cambio, sobre $\mathbb{C}$, los conjuntos de ceros son distintos; por ejemplo, el punto $(i, 0)$ pertenece a V_f pero no a V_g .

- Las cúbicas:

$$f(x, y) = x^2y, \quad g(x, y) = xy^2.$$

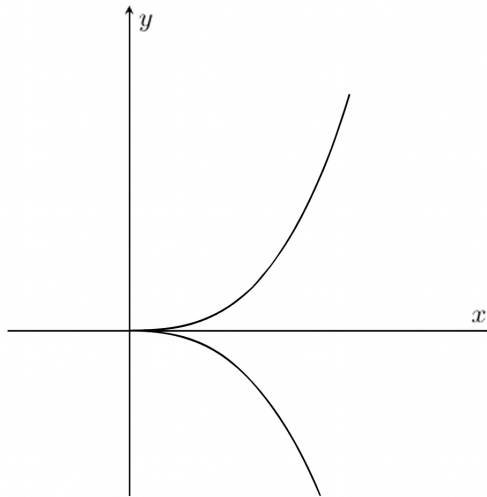
En $\mathbb{R}^2$ son polinomios distintos, pero sus conjuntos de ceros en $\mathbb{R}^2$ coinciden:

$$V_f = V_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ o } y = 0\}.$$

En este caso, la coincidencia se debe a que las ecuaciones se *factorizan* y comparten los mismos factores lineales, aunque con distinta multiplicidad, véase la Figura 3.3

Figura 3.3

El conjunto de ceros $V_f = V_g$.



Nota. Elaboración propia (2026)

Observación 3.1.1.5. El problema es que las curvas algebraicas no son irreducibles; es decir, pueden factorizarse. Por esta razón, distintos polinomios pueden determinar el mismo conjunto de ceros, aunque su estructura algebraica sea diferente.

Definición 3.1.1.6. Decimos que dos polinomios f y g son *equivalentes*, y escribimos $f \sim g$, si existe un escalar λ diferente de cero tal que:

$$g = \lambda f.$$

La definición general de *relación de equivalencia* se presenta en el Capítulo 1.

Definición 3.1.1.7. (*Formal de curva*). Una *curva algebraica plana* es una clase de equivalencia de polinomios en $\mathbb{K}[x, y]$ bajo la relación de equivalencia $\sim$. Es decir, para f ,

$g \in \mathbb{K}[x, y]$ se cumple:

$$f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \text{ con } \lambda \neq 0 \text{ tal que } g = \lambda f$$

Tras haber definido las *curvas algebraicas planas*, una estrategia para estudiarlas es clasificarlas según la complejidad del polinomio que las define. Una forma de clasificación se basa en el grado del polinomio, ya que este influye de manera decisiva en la forma geométrica y en el comportamiento de la curva.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de curvas algebraicas de grados 1, 2 y 3, con el fin de ilustrar cómo el grado determina distintos tipos de figuras en el *plano afín*.

Las *curvas algebraicas afines de grado 1* en $\mathbb{K}^2$ son precisamente las *rectas*. Están determinadas por polinomios lineales de la forma:

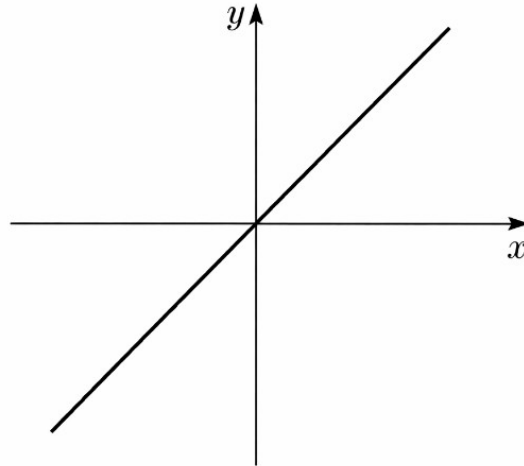
$$f(x, y) = ax + by + c,$$

donde a, b, c pertenecen a $\mathbb{K}$ y no son todos cero.

Además, la ecuación que describe una recta no es única: si λ es un escalar diferente de cero en $\mathbb{K}$, entonces g y λf determinan la misma recta, ya que tienen el mismo conjunto de ceros.

Figura 3.4

Recta definida por dos polinomios equivalentes.



Nota. Elaboración propia (2026)

Ejemplo 3.1.1.8. (Diferentes polinomios que definen la misma recta).

Sea $f(x, y) = x - y$ y sea $g(x, y) = 2x - 2y \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$g(x, y) = 2(x - y) = 2f(x, y).$$

De esta igualdad se observa que existe el escalar $\lambda = 2 \in \mathbb{K}$, con $\lambda \neq 0$, tal que $g = \lambda f$. Por la definición de *equivalencia de polinomios*, se concluye que $f \sim g$. En consecuencia, aunque f y g son polinomios distintos en $\mathbb{K}[x, y]$, sus ecuaciones tienen las mismas soluciones en el plano afín y, por tanto, determinan la misma recta. Véase la Figura 3.4.

Ejemplo 3.1.1.9. (*Intersección de dos rectas*).

Consideremos dos rectas en $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad \ell_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Los puntos de intersección de ℓ_1 y ℓ_2 corresponden a las soluciones del sistema:

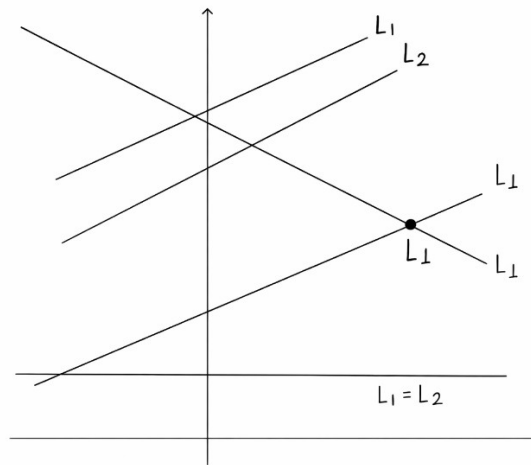
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1, \\ a_2x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

Sea:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Figura 3.5

Intersección de las rectas: $\ell_1 = a_1x + b_1y = -c_1$ y $\ell_2 = a_2x + b_2y = -c_2$.



Nota. Elaboración propia (2026)

De acuerdo con el álgebra lineal, se distinguen los siguientes casos:

- i) Si $\delta \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución. Por lo tanto, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 se intersectan en un único punto.
- ii) Si $\delta = 0$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(a_2, b_2) = \lambda(a_1, b_1).$$

En este caso:

- Si $c_2 = \lambda c_1$, entonces $\ell_1 = \ell_2$, es decir, las rectas son coincidentes y el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $c_2 \neq \lambda c_1$, entonces ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas distintas y el sistema no tiene solución.

Para una mejor comprensión de este resultado, véase la Figura 3.5.

De manera intuitiva, el punto de una curva algebraica se dice no singular cuando la curva es suave en ese punto y posee una única recta tangente bien definida; en caso contrario, el punto se denomina singular.

Observación 3.1.1.10. Dentro de las curvas algebraicas de grado uno se encuentran únicamente curvas no singulares. En este caso, las curvas corresponden a polinomios lineales en 2 variables, las cuales constituyen los ejemplos más simples dentro de la geometría algebraica

Las curvas algebraicas afines de grado 2 en $\mathbb{K}^2$ son conocidas como cónicas. Estas están determinadas por polinomios cuadráticos de la forma:

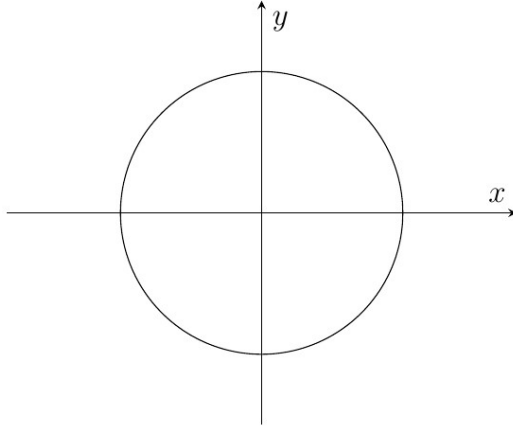
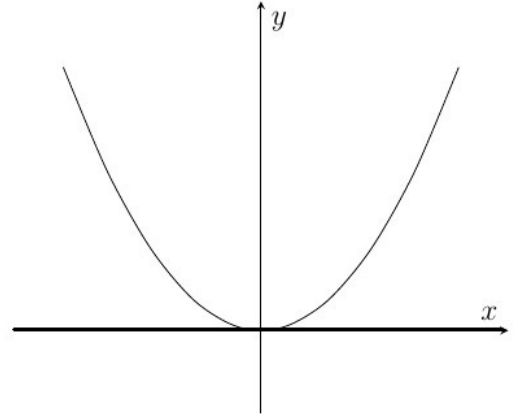
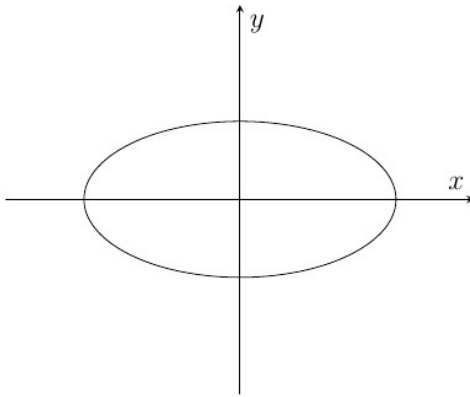
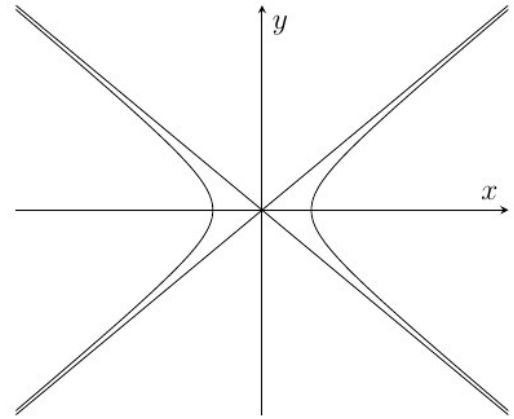
$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$ y al menos uno de los coeficientes a, b, c es distinto de cero. En particular, se consideran los siguientes ejemplos; véanse las Figura 3.6, Figura 3.7, Figura 3.8 y Figura 3.9.

Ejemplo 3.1.1.11. (*Curvas algebraicas afines de grado 2*).

Algunos ejemplos son:

- i) Círculo: $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$, donde $R > 0$ es el radio.
- ii) Parábola: $f(x, y) = y - ax^2 - bx - c$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ con $a \neq 0$.
- iii) Elipse: $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, donde $a, b > 0$.
- iv) Hipérbola: $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$, donde $a, b > 0$.
- v) Una sola recta: $f(x, y) = x^2$. (Representa la recta vertical $x = 0$).

Figura 3.6 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. *Círculo**Nota.* Elaboración propia (2026)**Figura 3.7** $f(x, y) = y - ax^2 - bx - c$. *Parábola**Nota.* Elaboración propia (2026)**Figura 3.8** $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. *Elipse**Nota.* Elaboración propia (2026)**Figura 3.9** $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. *Hipérbola**Nota.* Elaboración propia (2026)

Observación 3.1.1.12. Dentro de las curvas algebraicas de grado dos se encuentran tanto curvas singulares como curvas no singulares. Las primeras incluyen ejemplos como la intersección de dos rectas, mientras que las segundas corresponden a las cónicas, las cuales constituyen un objeto central en la geometría algebraica clásica y poseen importantes aplicaciones en teoría de números.

Las curvas algebraicas afines de grado 3 en $\mathbb{K}^2$ son conocidas como *cúbicas*. Estas están determinadas por polinomios de la forma:

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j,$$

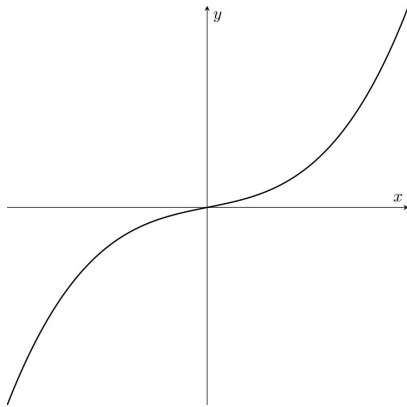
donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ y al menos uno de los coeficientes con $i + j = 3$ es distinto de cero, como se muestra en las Figura 3.10, Figura 3.11, Figura 3.12 y Figura 3.13.

Ejemplo 3.1.1.13. (*Curvas algebraicas afines de grado 3*).

Algunos ejemplos son:

Figura 3.10

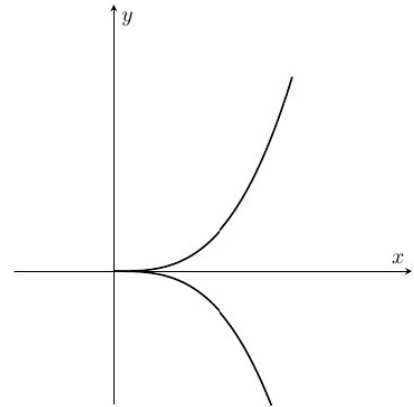
$f(x, y) = x^3 - y$. Curva elíptica.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.11

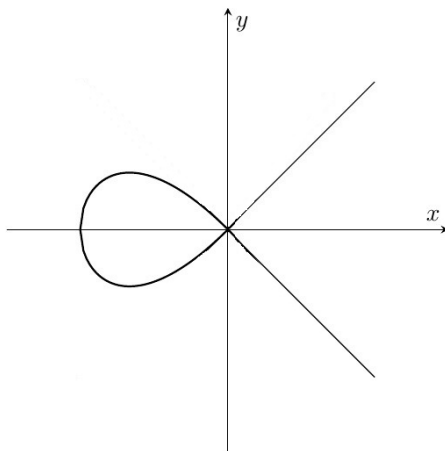
$f(x, y) = x^3 - y^2$. Cúspide.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.12

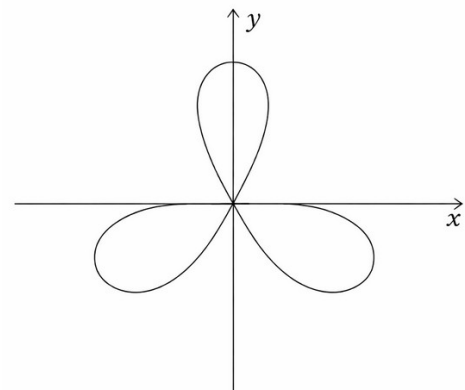
$f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$. Nodo.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.13

$f(x, y) = 3ay(x^2 + y^2) - 4ay^3 - y^4 - x^4 = 0$. Trébol de tres hojas.



Nota. Elaboración propia (2026)

Observación 3.1.1.14. Dentro de las curvas algebraicas cúbicas se encuentran tanto curvas singulares como curvas no singulares. Las primeras incluyen ejemplos como cúspides

o *nodos*, mientras que las segundas corresponden a las *curvas elípticas*, que constituyen un objeto central en geometría algebraica y teoría de números.

Definición 3.1.1.15. Diremos que el conjunto V_f es *irreducible* si f es irreducible en $\mathbb{K}[x, y]$, es decir, si no puede factorizarse como producto $f = g \cdot h$ con $g, h \in \mathbb{K}[x, y]$ no constantes.

La *irreducibilidad* algebraica del polinomio se traduce geoméricamente en que la curva no puede descomponerse como unión propia de subcurvas de menor grado.

Ejemplo 3.1.1.16. (*Polinomios irreducibles en $\mathbb{K}^2$*).

i) Recta (polinomio lineal).

$$f(x, y) = x + y - 1 \quad (\text{irreducible en } \mathbb{R}[x, y] \text{ y } \mathbb{Q}[x, y]).$$

ii) Circunferencia (polinomio cuadrático).

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad (\text{irreducible en } \mathbb{R}[x, y] \text{ y } \mathbb{C}[x, y]).$$

iii) Elíptica (polinomio cúbico).

$$f(x, y) = y^2 - x^3 - x \quad (\text{irreducible en } \mathbb{R}[x, y]).$$

3.2. Curvas algebraicas afines no singulares

En el caso de curvas no singulares, sus propiedades topológicas pueden describirse con mayor precisión. En particular, la relación entre el *grado* y el *género* se establece de manera más clara, lo cual resulta útil para su clasificación y es fundamental para abordar la *pregunta de Halphen*.

Definición 3.2.0.1. Sea $f(x, y)$ un polinomio diferente de cero en dos variables con coeficientes en $\mathbb{K}$, considerado salvo multiplicación por una constante distinta de cero. Definimos la curva algebraica asociada a f como el conjunto:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Definición 3.2.0.2. Un punto $(x, y) \in C$ se llama *punto no singular* (o *regular*) si se cumple al menos una de las condiciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

En caso contrario, el punto se denomina *punto singular*.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, una curva algebraica se comporta como una variedad *diferenciable de dimensión 1*. Es decir, podemos pensar que la curva algebraica se asemeja a una línea suavemente curvada, sin puntos de intersección ni singularidades. Véase [5, p. 71].

Ejemplo 3.2.0.3. (*Curvas algebraicas no singulares*).

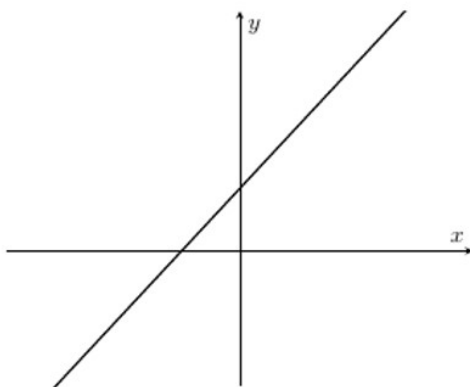
Algunos ejemplos de curvas algebraicas no singulares de grado 1, 2 y 3 son los siguientes:

- i) $f(x, y) = ax + by - c$ Recta (no necesariamente debe estar en el origen).
- ii) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ Circunferencia de radio unitario.
- iii) $f(x, y) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1$ Hipérbola.
- iv) $f(x, y) = y - x^2$ Parábola.
- v) $f(x, y) = x^2 - 1$ donde $x = 1$ o $x = -1$.
- vi) $f(x, y) = x^3 - y$ Cúbica no singular, como una curva elíptica.

La representación geométrica de estos ejemplos puede apreciarse en las , Figura 3.6, Figura 3.7, Figura 3.10, Figura 3.14 y Figura 3.15

Figura 3.14

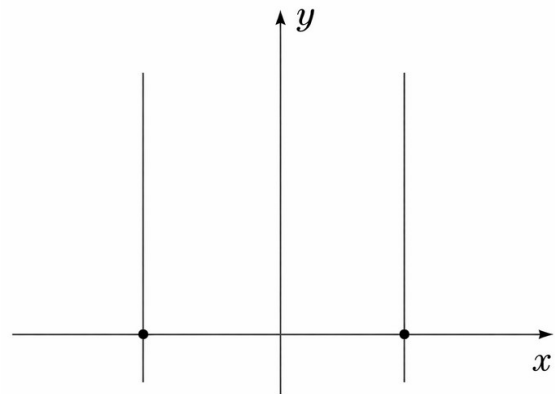
$$f(x, y) = ax + by - c.$$



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.15

$$f(x, y) = x^2 - 1.$$



Nota. Elaboración propia (2026)

3.3. Curvas algebraicas afines singulares

Mientras que las curvas algebraicas no singulares presentan una estructura geométrica regular, el estudio de las curvas singulares en el plano afín requiere herramientas adicionales, tales como el análisis de la multiplicidad. En efecto, la presencia de singularidades introduce fenómenos locales más complejos que no pueden analizarse únicamente mediante el criterio de las derivadas parciales.

Para comprender estas singularidades, resulta necesario definir previamente los conceptos de *número de intersección* y *multiplicidad*. Estas nociones permiten describir con mayor precisión el comportamiento local de una curva en torno a un punto dado.

De manera intuitiva, la multiplicidad de un punto puede interpretarse geométricamente como el número de veces que la curva se intersecta con una recta que pasa por dicho punto, contando intersecciones con multiplicidad. Esta idea se formaliza mediante la noción de número de intersección, la cual desempeña un papel importante en la teoría de curvas algebraicas. Véase [5, p. 71].

Por ejemplo, un punto de una curva se denominará *singular* si su multiplicidad es mayor o igual que dos.

Por lo tanto, antes de definir formalmente qué entendemos por singularidad, comenzaremos estableciendo la noción de número de intersección, seguida de la definición rigurosa de multiplicidad, para finalmente llegar a una caracterización precisa de los puntos singulares.

3.3.1. Número de intersección en el plano afín

El estudio de las singularidades de una curva algebraica requiere analizar el comportamiento local de sus intersecciones con rectas. Para ello introducimos la noción de número de intersección entre una curva y una recta en el plano afín, herramienta que permitirá describir con mayor precisión la multiplicidad de un punto.

Sea $f(x, y)$ un polinomio diferente de cero en dos variables con coeficientes en $\mathbb{K}$, considerado salvo multiplicación por una constante distinta de cero. Sea l una recta que no sea componente de la curva definida por $f(x, y) = 0$.

Si $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ son dos puntos distintos de la recta l , entonces l puede parametrizarse como:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - t)a_1 + tb_1 \\ y(t) &= (1 - t)a_2 + tb_2, \end{aligned}$$

Definición 3.3.1.1. El *polinomio de intersección* entre la curva algebraica f y la recta l

se define como:

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)).$$

Observación 3.3.1.2. Las raíces del polinomio de intersección $\varphi(t)$ determinan los valores del parámetro para los cuales la recta l y la curva algebraica definida por f se intersectan.

Definición 3.3.1.3. Sea p un punto de la recta l correspondiente al parámetro t_0 . Definimos el *número de intersección* de la curva algebraica f y la recta l en el punto p como la multiplicidad de t_0 como raíz de la ecuación polinomial $\varphi(t) = 0$. Denotado por $I(p, f, l)$.

En otras palabras, el número de intersección de la curva algebraica f y la recta l en el punto p , denotado por $I(p, f, l)$, es la mayor potencia de $(t - t_0)$ que divide al polinomio $\varphi(t)$. Véase [5, p. 72].

Ejemplo 3.3.1.4. (*Recta que no intersecta a la curva algebraica*).

Consideremos la siguiente curva algebraica:

$$f(x, y) = xy - 1,$$

la cual corresponde a una hipérbola en $\mathbb{K}^2$.

Sea l la recta dada por el eje x , es decir:

$$y = 0.$$

Una parametrización de esta recta es:

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= 0, \end{aligned}$$

donde $t \in \mathbb{K}$. El polinomio de intersección $\varphi(t)$ es:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= f(t, 0) = t(0) - 1 \\ \phi(t) &= -1 \end{aligned}$$

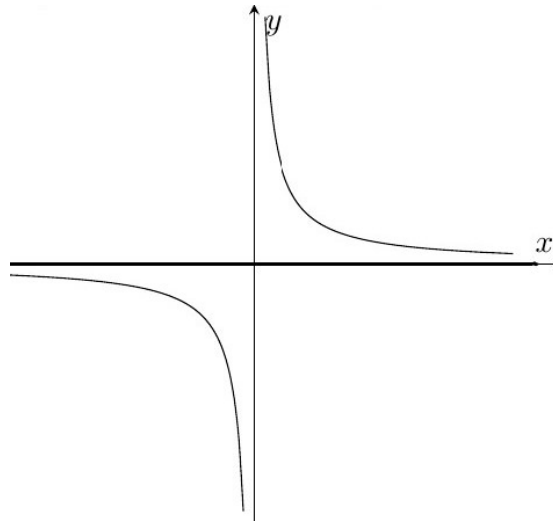
Como el polinomio de intersección $\phi(t)$ no tiene raíces, concluimos que la recta no intersecta la curva $f(x, y) = 0$. Así, se confirma que no existe punto de intersección y el número de intersección es 0. Por lo tanto:

$$I(f, p, l) = 0.$$

Esto se puede observar en la Figura 3.16

Figura 3.16

La recta $y = 0$ no intersecta la curva $f(x, y) = xy - 1$.



Nota. Elaboración propia (2026)

Para estudiar el comportamiento del número de intersección en el origen, consideraremos la familia de rectas l_λ definida por:

$$y = \lambda x, \quad (3.1)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Todas estas rectas pasan por el origen.

Una parametrización de cada recta es:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= \lambda t, \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En los ejemplos siguientes utilizaremos esta familia de rectas para analizar la multiplicidad de intersección en dicho punto.

Ejemplo 3.3.1.5. (*Número de intersección de una parábola con una familia de rectas l_λ*). Consideremos la siguiente curva algebraica:

$$f(x, y) = y - x^2,$$

la cual corresponde a una parábola en $\mathbb{R}^2$.

Consideremos la familia de rectas l_λ definida en (3.1). Sustituyendo la parametrización de l_λ en la ecuación de la curva algebraica obtenemos el polinomio de intersección $\varphi(t)$ que

depende de λ , y está dado por:

$$\varphi(t) = f(t, \lambda t)$$

$$\varphi(t) = \lambda t - t^2$$

$$\varphi(t) = t(\lambda - t).$$

- Si $\lambda \neq 0$, la raíz $t = 0$ tiene multiplicidad uno. Por lo tanto:

$$I(p, f, l) = 1.$$

Esto se puede observar en la Figura 3.17.

- Si $\lambda = 0$, entonces:

$$\varphi(t) = -t^2,$$

y la raíz $t = 0$ tiene multiplicidad dos. Por lo tanto:

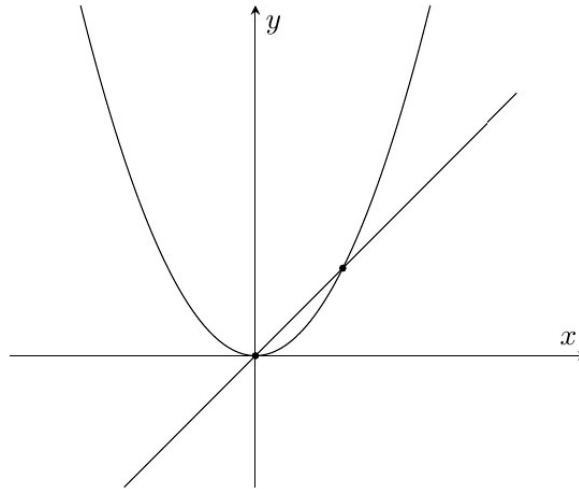
$$I(p, f, l) = 2.$$

Esto se puede observar en la Figura 3.18.

De esta manera, la familia de rectas l_λ muestra que el número de intersección en el origen depende del parámetro λ , permitiendo distinguir entre una intersección simple y una intersección doble.

Figura 3.17

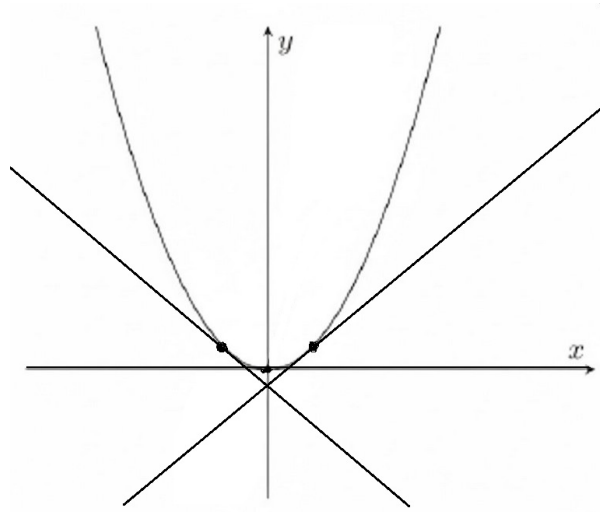
La curva algebraica $y = x^2$ con 2 puntos de intersección de multiplicidad 1.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.18

La curva algebraica $y - x^2$ con 1 punto de intersección de multiplicidad 2.



Nota. Elaboración propia (2026)

Definición 3.3.1.6. El *número total de intersección* de una curva algebraica f con una recta l es la suma de los números de intersección $I(p, f, l)$, donde el punto p recorre todos los puntos de intersección entre la curva algebraica y la recta.

Ejemplo 3.3.1.7. (*Número total de intersección con una recta en la curva del ocho*).

Consideremos la curva algebraica:

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + x^4,$$

la cual corresponde a la curva del ocho (véase la Figura 3.19) en $\mathbb{R}^2$.

Consideremos la familia de rectas l_λ definida en (3.1). Sustituyendo la parametrización de l_λ en la ecuación de la curva algebraica obtenemos el polinomio de intersección $\varphi(t)$ que está dado por:

$$\varphi(t) = f(t, \lambda t)$$

$$\varphi(t) = (\lambda t)^2 - t^2 + t^4$$

$$\varphi(t) = t^2(\lambda^2 - 1 + t^2)$$

El comportamiento de las raíces del polinomio de intersección $\varphi(t)$ dependen del valor de λ , por lo cual, tenemos los siguientes casos:

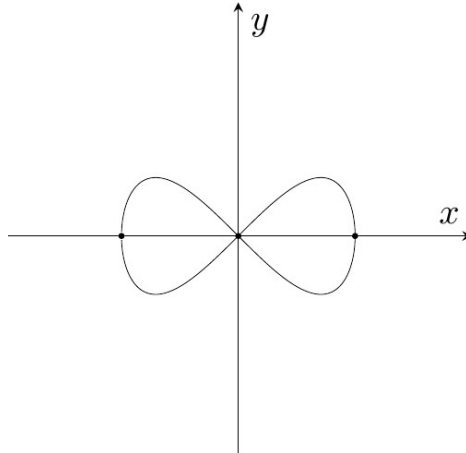
- *Caso 1.* Cuando $-1 < \lambda < 1$, se cumple que $\lambda^2 - 1 < 0$. En este caso, además de la raíz $t = 0$ de multiplicidad 2, el polinomio puede presentar dos raíces reales adicionales de multiplicidad 1.

Por ejemplo, cuando $\lambda = 0$, se obtienen $t = -1, 0, 1$ como raíces. Estas corresponden a los puntos de intersección $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$, con números de intersección 1, 2 y 1, respectivamente. Este comportamiento se observa en la Figura 3.19.

- *Caso 2.* Cuando $\lambda < -1$ o $\lambda > 1$, entonces $\lambda^2 - 1 > 0$. En este caso, la única raíz real es $t = 0$, con multiplicidad 2, por lo que la recta corta a la curva únicamente en el origen. Este comportamiento se observa en la Figura 3.20.
- *Caso 3.* Cuando $\lambda = \pm 1$, entonces $\lambda^2 - 1 = 0$. En este caso, la raíz $t = 0$ tiene multiplicidad 4, por lo que hay solo una intersección en el origen con número de intersección $I(p, f, l) = 4$. Este comportamiento se observa en la Figura 3.21.

Figura 3.19

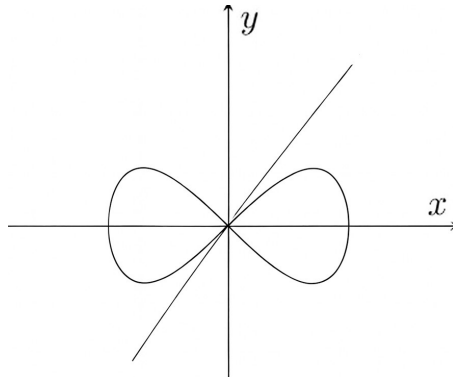
La curva algebraica $y^2 - x^2 + x^4$ presenta tres puntos de intersección: en el origen, con multiplicidad 2, y en $(-1, 0), (1, 0)$ con multiplicidad 1 cada uno.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.20

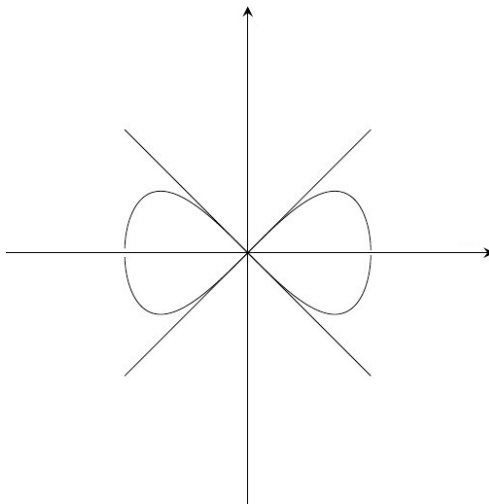
La curva algebraica $y^2 - x^2 + x^4$ presenta un punto de intersección en el origen con multiplicidad 2.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.21

La curva algebraica $y^2 - x^2 + x^4$ intersecta a la recta $y = \pm x$ únicamente en el origen, con multiplicidad 4.



Nota. Elaboración propia (2026)

De los casos anteriores se concluye que, independientemente del valor de λ , la suma de los números de intersección es siempre igual a 4.

En efecto, aunque el número de puntos reales de intersección varía según la dirección de la recta, la suma de sus multiplicidades coincide con el grado del polinomio de intersección.

Por lo tanto, el número total de intersección entre la curva y la recta, contando multiplicidades, es 4.

Esto que observamos sucede de forma general. Sea f una curva algebraica de grado d y sea l una recta que no es componente de f . Entonces, el número total de intersecciones de la curva f con la recta l , contando multiplicidades, es igual a d .

Este resultado puede consultarse con mayor detalle en [5, p. 72].

3.3.2. Multiplicidad de un punto en el plano afín

Definición 3.3.2.1. La *multiplicidad* de un punto p en la curva algebraica f es el valor mínimo de los números de intersección $I(p, f, l)$, al considerar todas las rectas l que pasan por p .

En otras palabras, se dice que el punto p tiene multiplicidad $m \geq 0$ si se cumple que:

$$I(p, f, l) \geq m,$$

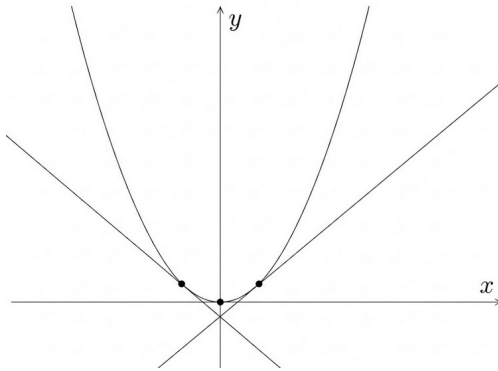
para toda recta l que pasa por p , y existe al menos una recta l que pasa por p tal que:

$$I(p, f, l) = m.$$

La noción de multiplicidad de un punto también puede interpretarse en un contexto más general dentro de la geometría algebraica. Por ejemplo, en la intersección de dos curvas en el plano, la multiplicidad de un punto de intersección describe cuántas veces las curvas se tocan en dicho punto. Este concepto aparece de manera natural en el Teorema de Bézout, el cual relaciona el número de intersecciones de dos curvas algebraicas con el producto de sus grados.

Figura 3.22

Ejemplo de intersección en un punto con multiplicidad 2: cada recta es tangente a la curva algebraica.

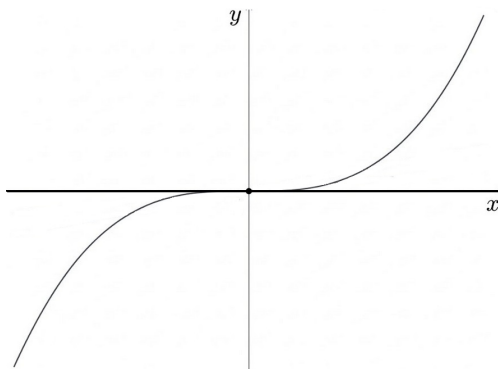


Nota. Elaboración propia (2026)

En la Figura 3.22 se ilustra un ejemplo de intersección con multiplicidad dos. En cada uno de los puntos señalados, la recta interseca a la curva algebraica siendo tangentes a ella.

Figura 3.23

Ejemplos de intersección en un punto con multiplicidad 3: la recta es tangente a la curva algebraica.



Nota. Elaboración propia (2026)

En la Figura 3.23 se ilustra un ejemplo de intersección con multiplicidad tres. En el punto señalado, la recta interseca a la curva algebraica siendo tangentes a ella.

Ejemplo 3.3.2.2. (*Multiplicidad de un punto en una cúspide*).

Consideremos la siguiente curva algebraica:

$$f(x, y) = y^2 - x^3,$$

la cual corresponde a una *cúspide* (véase la Figura 3.25) en $\mathbb{R}^2$.

Consideremos la familia de rectas l_λ definida en (3.1). Sustituyendo la parametrización de l_λ en la ecuación de la curva algebraica obtenemos el polinomio de intersección $\varphi(t)$ que está dado por:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(t, \lambda t) \\ \varphi(t) &= (\lambda t)^2 - t^3 \\ \varphi(t) &= \lambda^2 t^2 - t^3 \\ \varphi(t) &= t^2(\lambda^2 - t)\end{aligned}$$

Analizamos ahora la multiplicidad de la raíz $t = 0$.

- Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda^2 \neq 0$. En este caso, la raíz $t = 0$ tiene multiplicidad 2. Por lo tanto:

$$I(p, f, l) = 2.$$

Este comportamiento se observa en la Figura 3.24.

- Si $\lambda = 0$, tenemos que la recta es $y = 0$, y se obtiene:

$$\varphi(t) = -t^3.$$

En consecuencia, la raíz $t = 0$ tiene multiplicidad 3, y por lo tanto:

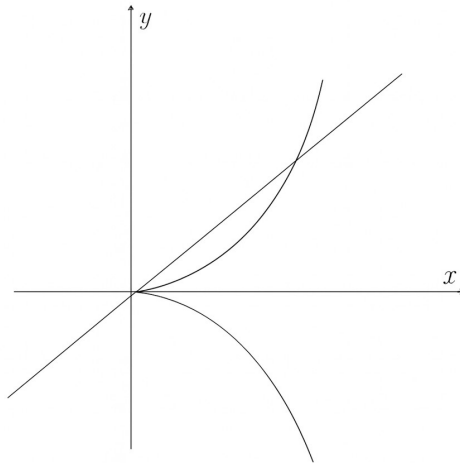
$$I(p, f, l) = 3.$$

Este comportamiento se observa en la Figura 3.25.

En la Figura 3.25 se ilustra un ejemplo de intersección con multiplicidad tres. En el punto señalado, la recta interseca a la curva algebraica siendo tangente a ella.

Figura 3.24

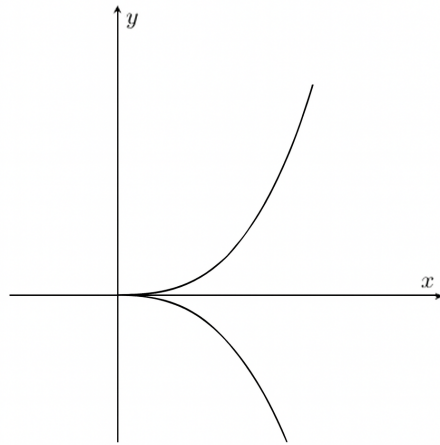
Intersección entre una la cúspide y una recta. El origen representa un punto de multiplicidad 2.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.25

La cúspide en el origen con un punto de multiplicidad 3,



Nota. Elaboración propia (2026)

Como hemos visto, la multiplicidad de un punto es siempre mayor o igual que cero. Todos los ejemplo anteriores tiene un enfoque geométrico, ya que nos permitió comprender el comportamiento de la curva mediante su intersección con rectas que pasan por el punto.

Este punto de vista es muy ilustrativo, pero resulta natural preguntarnos si existe una caracterización alternativa que permita calcular la multiplicidad utilizando herramientas analíticas

3.3.3. Puntos singulares en el plano afín

En el estudio local de las curvas algebraicas resulta fundamental distinguir aquellos puntos en los que la curva presenta un comportamiento regular de aquellos en los que su estructura geométrica se vuelve más compleja.

Para este análisis, daremos prioridad a un enfoque geométrico basado en la intersección de la curva con rectas que pasan por un punto determinado. Esta perspectiva resulta particularmente enriquecedora, pues permite comprender la naturaleza de una singularidad de manera intuitiva mediante los conceptos de multiplicidad y número de intersección.

En el plano afín sobre el campo $\mathbb{K}$ de característica cero, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, una curva algebraica se determina por un polinomio en dos variables distinto de cero con coeficientes en $\mathbb{K}$, considerado salvo multiplicación por un escalar distinto de cero.

Definición 3.3.3.1. Los puntos de la curva algebraica f cuya *multiplicidad* es mayor o igual que 2 se denominan *puntos singulares*.

Definición 3.3.3.2. Una curva algebraica se dice *singular* si posee al menos un punto singular. En caso contrario, se denomina *no singular*.

Observación 3.3.3.3. El concepto de punto singular constituye un *invariante afín*, en el sentido de que se preserva bajo transformaciones afines, dado que la *multiplicidad* de un punto no se altera mediante este tipo de transformaciones.

Geométricamente, en un *punto singular* la curva puede presentar comportamientos característicos tales como *nodos*, *cúspides*, autointersecciones o tangencias múltiples. Véase [5, p. 71].

En el caso de una curva algebraica irreducible, el conjunto de puntos singulares es finito. En efecto, los puntos singulares de una curva definida por $f(x, y) = 0$ se obtienen resolviendo el sistema:

$$f(x, y) = 0, \quad f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.$$

Si la curva es *irreducible*, entonces f no comparte factores comunes con sus derivadas parciales. Por lo tanto, este sistema de ecuaciones algebraicas sólo puede tener un número finito de soluciones, lo que implica que la curva posee únicamente un número finito de puntos singulares.

Ejemplo 3.3.3.4. (*Punto singular en la curva del nodo*).

Consideremos la siguiente curva algebraica:

$$f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2,$$

la cual corresponde a un *nodo* (véase la Figura 3.26) en $\mathbb{R}^2$.

Consideremos la familia de rectas l_λ definida en (3.1). Sustituyendo la parametrización de l_λ en la ecuación de la curva algebraica obtenemos el polinomio de intersección $\varphi(t)$ está dado por:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(t, \lambda t) \\ \varphi(t) &= (\lambda t)^2 - t^3 - t^2 \\ \varphi(t) &= \lambda^2 t^2 - t^3 - t^2 \\ \varphi(t) &= t^2(\lambda^2 - t - 1).\end{aligned}$$

Analizamos ahora la multiplicidad de la raíz $t = 0$.

- Para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, el factor $\lambda^2 - t - 1$ no se anula en $t = 0$, ya que su valor es $\lambda^2 - 1$.

Por lo tanto, la raíz $t = 0$ tiene multiplicidad 2 y se obtiene:

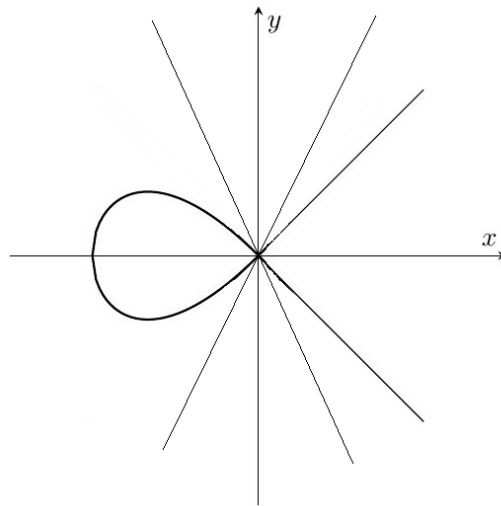
$$I(p, f, l) = 2.$$

De este modo, el cálculo explícito de los números de intersección nos ha permitido determinar geoméricamente la multiplicidad del punto.

Dado que, por definición, un punto es singular cuando su multiplicidad es mayor o igual que 2, y puesto que el origen presenta un número de intersección igual a 2 con las rectas que pasan por él, se concluye que el origen es un punto singular de la curva algebraica. Véase la Figura 3.26.

Figura 3.26

Punto singular en la curva del nodo.



Nota. Elaboración propia (2026)

Ejemplo 3.3.3.5. (*Punto singular en el Astroide*).

Consideremos la curva algebraica:

$$f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2,$$

la cual corresponde al astroide en $\mathbb{R}^2$. Dada de forma paramétrica por:

$$x = \operatorname{sen}^3 t, \quad y = \operatorname{cos}^3 t$$

cuyos valores satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$.

Consideremos la familias de rectas:

$$y = \lambda(x - 1)$$

las cuales pasan por el punto $p = (1, 0)$. Una parametrización de cada recta es:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= \lambda(t - 1), \end{aligned}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

El punto $p = (1, 0)$ corresponde al valor $t_0 = 1$.

Sustituyendo en la ecuación de la curva obtenemos el polinomio de intersección:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t, \lambda(t - 1)) \\ \varphi(t) &= (1 - t^2 - (\lambda(t - 1))^2)^3 - 27t^2\lambda(t - 1)^2. \end{aligned}$$

Con el fin de estudiar la multiplicidad en $t = 1$, realizamos el cambio de variable $u = t - 1$, es decir, $t = u + 1$. Sustituyendo se obtiene:

$$\varphi(t) = (1 - (u + 1)^2 - (\lambda((u + 1) - 1))^2)^3 - 27(u + 1)^2\lambda^2u^2.$$

Desarrollando los términos correspondientes:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (1 - (u + 1)^2 - (\lambda((u + 1) - 1))^2)^3 - 27(u + 1)^2\lambda^2u^2 \\ \varphi(t) &= (1 - (1 + 2u + u^2) - \lambda^2u^2)^3 - 27(1 + 2u + u^2)\lambda^2u^2 \\ \varphi(t) &= (1 - (1 + 2u + u^2) - \lambda^2u^2)^3 - 27(1 + 2u + u^2)\lambda^2u^2 \\ \varphi(t) &= (-2u - u^2 - \lambda^2u^2)^3 - 27(1 + 2u + u^2)\lambda^2u^2 \\ \varphi(t) &= (-2u - (1 + \lambda^2)u^2)^3 - 27(1 + 2u + u^2)\lambda^2u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= [u(-2 - (1 + \lambda^2)u)]^3 - 27(1 + 2u + u^2)\lambda^2 u^2. \\ \varphi(t) &= u^3(-2 - (1 + \lambda^2)u)^3 - 27(1 + 2u + u^2)\lambda^2 u^2.\end{aligned}$$

Por lo que se obtiene la expresión:

$$\varphi(t) = u^3(-2 - (1 + \lambda^2)u)^3 - 27\lambda^2(1 + 2u + u^2)u^2.$$

Observamos que ambos términos contienen el factor u^2 . Por esta razón, es posible factorizar dicho término común. De esta manera, el polinomio de intersección es:

$$\varphi(t) = u^2[u(-2 - (1 + \lambda^2)u)^3 - 27\lambda^2(1 + 2u + u^2)].$$

Para determinar la multiplicidad del punto de intersección, analizamos el comportamiento de la expresión entre corchetes cuando $u = 0$.

- Cuando $\lambda \neq 0$, evaluamos $u = 0$ en la expresión:

$$[u(-2 - (1 + \lambda^2)u)^3 - 27\lambda^2(1 + 2u + u^2)].$$

Obtenemos el valor: $-27\lambda^2$.

Como este valor es distinto de cero cuando $\lambda \neq 0$, se concluye que la expresión entre corchetes no se anula en $u = 0$. Por lo tanto, el polinomio $\varphi(t)$ posee exactamente el factor u^2 .

Recordando que $u = t - 1$ y que el punto $p = (1, 0)$, corresponde al valor $t = 1$, se tiene que $u = 0$. Por lo tanto:

$$I(p, f, l) = 2.$$

Tal como se ilustra en la Figura 3.27.

- Cuando $\lambda = 0$, es un caso especial ya que la recta es:

$$\begin{aligned}y(t) &= 0(t - 1) \\ y &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo directamente en la ecuación de la curva algebraica se obtiene:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2 \\ f(x, y) &= (1 - x^2 - 0)^3 - 27x^2 \cdot 0\end{aligned}$$

$$f(x, y) = (1 - t^2)^3$$

$$f(x, y) = ((t - 1)(t + 1))^3$$

$$f(x, y) = (t - 1)^3(t + 1)^3$$

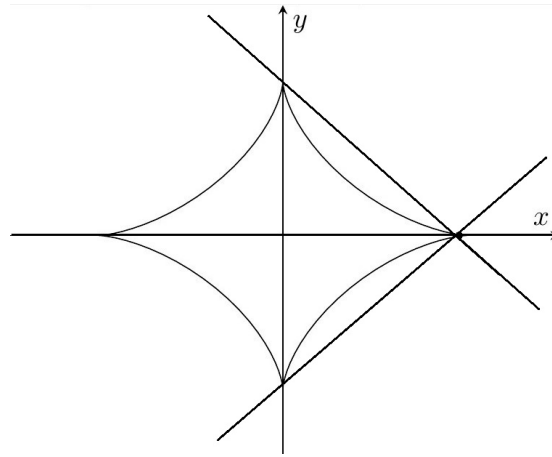
donde $t = 1$ es raíz de multiplicidad tres. Por lo tanto:

$$I((p, f, l) = 3.$$

Tal como se ilustra en la Figura 3.28.

Figura 3.27

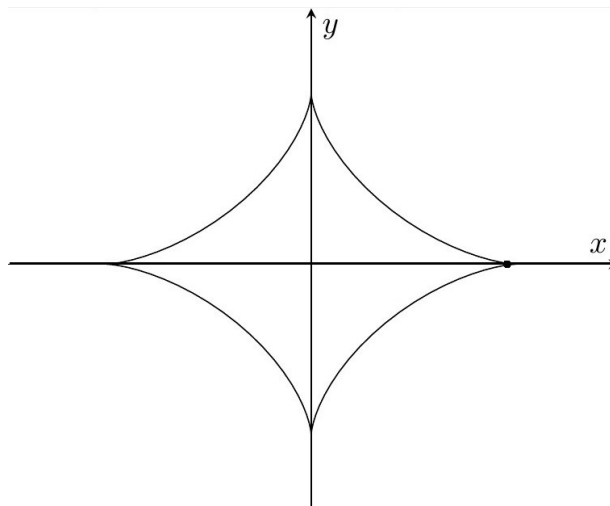
Puntos singulares en la curva del Astroide.



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.28

Puntos singulares en la curva del Astroide.



Nota. Elaboración propia (2026)

En conclusión, para la familia de rectas $y = \lambda(x - 1)$ el número de intersección en el punto $(1, 0)$ es igual a 2 para toda dirección distinta de la horizontal, mientras que la recta horizontal $y = 0$ produce multiplicidad 3. En particular, el orden mínimo de intersección es 2; por lo tanto, el punto $(1, 0)$ es un punto singular de la curva y su multiplicidad es 2.

Esto nos motiva a introducir el uso de derivadas parciales, con la finalidad de obtener una segunda perspectiva para el cálculo de la multiplicidad de un punto y, posteriormente, extender este enfoque al estudio de puntos singulares.

A continuación, retomaremos los mismos ejemplos pero, ahora analizaremos su comportamiento mediante el cálculo de derivadas parciales.

Ejemplo 3.3.3.6. (*Puntos singulares en el nodo*).

Consideremos la curva algebraica:

$$f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2,$$

conocida como *nodo* en $\mathbb{R}$. Determinaremos si el punto en el origen es singular.

Calculamos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -3x^2 - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Evalutando en el origen, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Por lo tanto, el punto p es un *punto singular*.

Calculamos ahora las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6x - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2.$$

Evalutando en el origen, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2 \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2 \neq 0.$$

Como todas las derivadas parciales de primer orden se anulan en el punto p , y existe al menos una derivada parcial de segundo orden que no se anula, concluimos que $p = (0, 0)$ es un punto singular de multiplicidad 2.

Ejemplo 3.3.3.7. (*Multiplicidad de un punto en una cúspide a través de derivadas parciales*).

Consideremos nuevamente la curva algebraica:

$$f(x, y) = y^2 - x^3,$$

la cual corresponde a una cúspide en $\mathbb{R}^2$, en el punto situado en el origen.

Calculamos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Evaluando en el origen, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Por lo tanto, el punto p es un *punto singular*.

Calculamos ahora las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2.$$

Evaluando en el origen, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2 \neq 0.$$

Por lo tanto, como las derivadas parciales de primer orden se anulan en p y existe al menos una derivada parcial de segundo orden no nula, concluimos que el punto $p = (0, 0)$ es un punto singular de multiplicidad 2.

Ejemplo 3.3.3.8. (*Punto singular en la astroide*).

Consideremos la curva algebraica

$$f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2,$$

conocida como la *astroide* en $\mathbb{R}^2$, dada de forma paramétrica por:

$$x = \sin^3 t, \quad y = \cos^3 t.$$

Determinaremos la multiplicidad en el punto $p = (1, 0)$. Calculando las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -6x(1 - x^2 - y^2)^2 - 54xy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6y(1 - x^2 - y^2)^2 - 54x^2y.$$

Evaluando en el punto $p = (1, 0)$ obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

Por lo tanto, el punto p es un *punto singular*.

Ahora calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6(1 - x^2 - y^2)^2 + 24x^2(1 - x^2 - y^2) - 54y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -6(1 - x^2 - y^2)^2 + 12xy(1 - x^2 - y^2) - 108xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6(1 - x^2 - y^2)^2 + 24y^2(1 - x^2 - y^2) - 54x^2.$$

Evaluando en el punto $p = (1, 0)$ se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = -54 \neq 0.$$

Dado que todas las derivadas parciales de primer orden se anulan en p , pero existe al menos una derivada parcial de segundo orden que no se anula, concluimos que el punto p tiene multiplicidad 2.

Observación 3.3.3.9 (*Clasificación de puntos singulares*). Los puntos singulares pueden clasificarse según su multiplicidad de la siguiente manera

- Un punto de multiplicidad 1 se llama *simple*.
- Un punto de multiplicidad 2 se llama *punto doble*.
- Un punto de multiplicidad 3 se llama *punto triple*.
- Un punto de multiplicidad 4 se llama *punto cuádruple*.

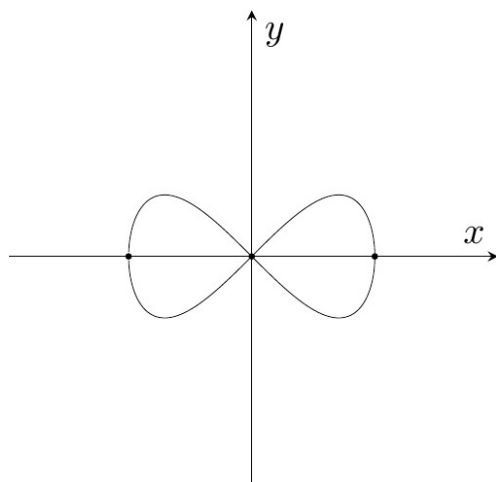
En general, para un punto $m \geq 2$, se suele decir punto múltiple de orden m .

Los ejemplos siguientes ilustran cómo las singularidades pueden manifestarse de diversas formas geométricas, tales como la curva del ocho, trébol de tres y cuatro hojas y la cruz de malta. El estudio de estos puntos resulta fundamental para comprender la estructura local de las curvas algebraicas y su clasificación.

Ejemplo 3.3.3.10. (*Ejemplos de nodos y puntos múltiples*).

Figura 3.29

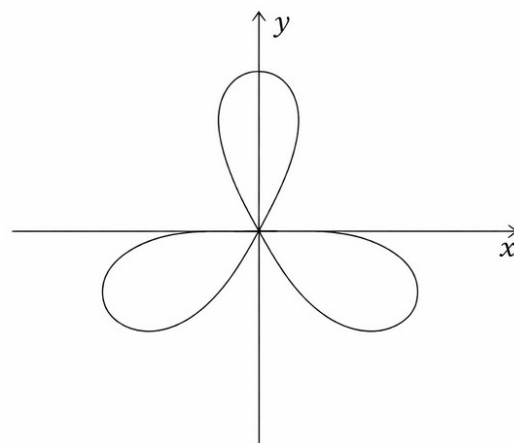
La curva del ocho



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.30

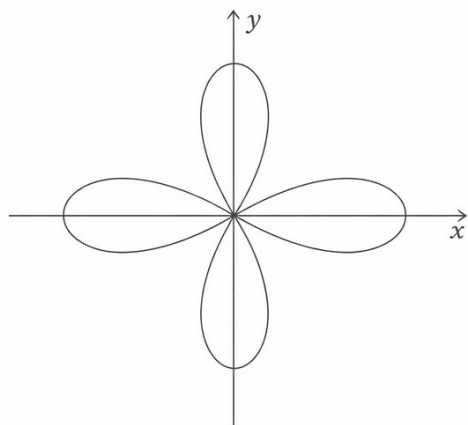
El trebol de tres hojas



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.31

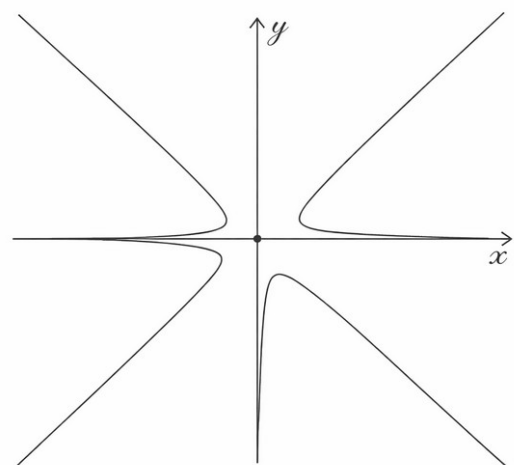
El trebol de cuatro hojas



Nota. Elaboración propia (2026)

Figura 3.32

La cruz de malta



Nota. Elaboración propia (2026)

3.4. Curvas algebraicas en el plano proyectivo

Así como en el plano afín es posible estudiar las curvas algebraicas mediante polinomios en dos variables, en el plano proyectivo las curvas se describen mediante polinomios homogéneos en tres variables. El paso al plano proyectivo permite comprender de manera más completa el comportamiento geométrico de las curvas, en particular sus intersecciones y su comportamiento en el infinito.

El estudio de curvas algebraicas en el plano proyectivo permite incorporar los llamados puntos en el infinito y obtener una teoría más uniforme que en el caso afín. Véase [5, 12, 13].

En esta sección trabajaremos en el plano proyectivo $\mathbb{KP}^2$, con coordenadas homogéneas $(X : Y : Z)$.

Sea $\mathbb{K}$ un campo de característica cero, una *curva algebraica proyectiva* se determina por un polinomio homogéneo diferente de cero $F(X, Y, Z)$ en tres variables con coeficientes en $\mathbb{K}$, considerado salvo multiplicación por un escalar diferente de cero.

Dado un polinomio homogéneo F , podemos asociarle el conjunto:

$$C_F = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{KP}^2 \mid F(X, Y, Z) = 0\}.$$

Este conjunto tiene la propiedad crucial de ser un cono. Si $[X : Y : Z]$ es un punto de C_F , entonces también lo es $[\lambda X : \lambda Y : \lambda Z]$ para cualquier elección del escalar $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, ya que el polinomio F es homogéneo y, por tanto:

$$F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^d F(X, Y, Z).$$

Definición 3.4.0.1. Sea $F \in \mathbb{K}[X, Y, Z]$ un polinomio homogéneo diferente de cero. Definimos su conjunto de ceros proyectivo como:

$$V_F = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{KP}^2 \mid F(X, Y, Z) = 0\}.$$

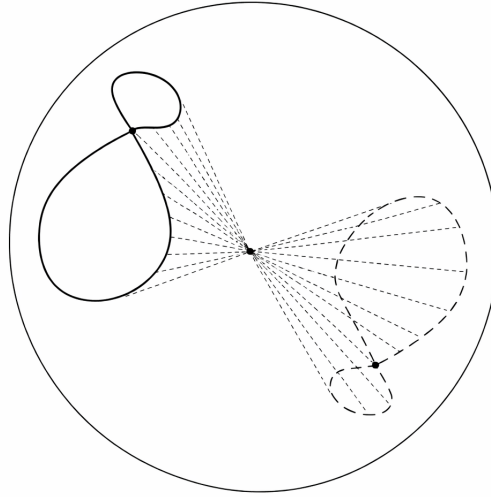
Ejemplo 3.4.0.2. (*Conjunto de ceros de una curva algebraica proyectiva*).

Sea F una curva en el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$. Podemos describir su conjunto de ceros utilizando el modelo esférico del plano proyectivo. Dado que el conjunto C_F es un cono, su intersección con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ produce una curva algebraica sobre la esfera.

Sin embargo, esta curva sobre la esfera no determina directamente el conjunto de ceros de la curva proyectiva, ya que en el modelo esférico los puntos diametralmente opuestos representan el mismo punto del plano proyectivo. Por lo tanto, el conjunto de ceros de F puede interpretarse como una curva sobre la esfera con puntos antipodales identificados. Véase la Figura 3.33.

Figura 3.33

El conjunto de ceros de una curva algebraica proyectiva en $\mathbb{RP}^2$.



Nota. Elaboración propia (2026)

Definición 3.4.0.3. (*Formal de curva proyectiva*). En el plano proyectivo sobre un campo $\mathbb{K}$, una *curva algebraica proyectiva* se define como la clase de equivalencia de polinomios homogéneos en $\mathbb{K}[X, Y, Z]$ bajo la relación:

$$F \sim G \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \text{ tal que } G = \lambda F.$$

Todo polinomio homogéneo F sobre el campo $\mathbb{K}$ admite una factorización única de la forma:

$$F = cF_1^{r_1}F_2^{r_2}\cdots F_s^{r_s},$$

donde $c \neq 0$ es una constante en $\mathbb{K}$ y los F_i son polinomios homogéneos irreducibles tales que F_j no es un factor de F_k para $j \neq k$. Cuando F define una curva proyectiva, nos referimos a $F_1, \dots, F_s$ como las *componentes irreducibles* de la curva.

Las curvas algebraicas proyectivas de grado 1 en $\mathbb{P}^2$ son precisamente rectas proyectivas. Están determinadas por polinomios homogéneos lineales de la forma:

$$F(X, Y, Z) = aX + bY + cZ,$$

donde a, b, c pertenecen a $\mathbb{K}$ y no son todos cero.

Las curvas algebraicas proyectivas de grado 1 en $\mathbb{P}^2$ son precisamente rectas proyectivas. Están determinadas por polinomios homogéneos lineales de la forma:

$$F(X, Y, Z) = aX + bY + cZ,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{K}$ y no son todos cero.

Las curvas algebraicas proyectivas de grado 2 en $\mathbb{P}^2$ son conocidas como cónicas. Estas están determinadas por polinomios homogéneos cuadráticos de la forma:

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2 = 0,$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 3.4.0.4. (*Curvas algebraicas proyectivas de grado 2*).

Algunos ejemplos son:

- i) Círculo: $F(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - RZ^2$, donde $R > 0$.
- ii) Parábola: $F(X, Y, Z) = YZ - aX^2 - bXZ - cZ^2$, con $a, b, c \in \mathbb{K}$ y $a \neq 0$.
- iii) Elipse: $F(X, Y, Z) = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z^2$, donde $a, b > 0$.
- iv) Hipérbola: $F(X, Y, Z) = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - Z^2$, donde $a, b > 0$.

Las curvas algebraicas proyectivas de grado 3 en $\mathbb{P}^2$ son conocidas como cúbricas. Estas están determinadas por polinomios homogéneos cúbicos de la forma:

$$F(X, Y, Z) = \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} X^i Y^j Z^k,$$

donde los coeficientes a_{ijk} pertenecen a $\mathbb{K}$ y no todos son cero.

Ejemplo 3.4.0.5. (*Curvas algebraicas proyectivas de grado 3*).

Algunos ejemplos son:

- i) Cúbica elíptica: $F(X, Y, Z) = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3$.
- ii) Cúspide: $F(X, Y, Z) = Y^2Z - X^3$.
- iii) Nodo: $F(X, Y, Z) = Y^2Z - X^2(X + Z)$.
- iv) Trébol de tres hojas: $F(X, Y, Z) = 3aY(X^2 + Y^2) - Y^4 - X^4$.

3.4.1. Curvas algebraicas proyectivas no singulares

En la sección anterior estudiamos los puntos singulares de curvas algebraicas en el plano afín utilizando números de intersección con rectas que pasan por el punto. Dicho enfoque permite interpretar geoméricamente la multiplicidad de intersección y, a partir de ella, caracterizar los puntos singulares.

Al pasar ahora al plano proyectivo, resulta más conveniente utilizar un criterio algebraico equivalente que se expresa en términos de derivadas parciales del polinomio homogéneo que define la curva. Este criterio permite identificar de manera más directa los puntos singulares sin recurrir al cálculo explícito de multiplicidades o números de intersección.

Una curva algebraica proyectiva se dice no singular si todos sus puntos son regulares; es decir, si no existe ningún punto de la curva en el cual se anulen simultáneamente el polinomio homogéneo que la define y todas sus derivadas parciales.

En otras palabras, un punto de la curva es no singular cuando al menos una de las derivadas parciales del polinomio que la define es distinta de cero en dicho punto.

Las curvas proyectivas no singulares ocupan un papel central en la geometría algebraica, ya que muchas propiedades globales, como el género, se formulan de manera natural en este contexto.

Definición 3.4.1.1. Un punto $P = (X : Y : Z) \in F$ se llama *punto no singular* (o *regular*) si se cumple al menos una de las condiciones:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X, Y, Z) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y, Z) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial Z}(X, Y, Z) \neq 0$$

En caso contrario, el punto se denomina *punto singular*.

Ejemplo 3.4.1.2. (*Cónica proyectiva*).

Consideremos la siguiente curva algebraica proyectiva:

$$G(X, Y, Z) = XY - Z^2.$$

Este polinomio homogéneo de grado 2 define una cónica proyectiva en $\mathbb{P}^2$. Observemos que las derivadas parciales de G :

$$\frac{\partial G}{\partial X} = Y, \quad \frac{\partial G}{\partial Y} = X, \quad \frac{\partial G}{\partial Z} = -2Z.$$

Como podemos ver a través de las derivadas parciales, existe un punto donde alguna de ellas es distinta de cero, lo cual nos indica que la curva algebraica proyectiva es no singular.

Por lo tanto, la curva proyectiva definida por G no posee puntos singulares y es una cónica proyectiva no singular.

Para obtener su representación en el plano afín, consideramos la carta U_Z , definida por:

$$U_Z = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \mid Z \neq 0\},$$

la cual se identifica con el plano afín mediante la normalización respecto a la coordenada Z .

Definimos las coordenadas afines:

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

Sustituyendo en la ecuación homogénea y observando que $Z^2 \neq 0$, podemos dividir entre Z^2 para obtener la ecuación afín:

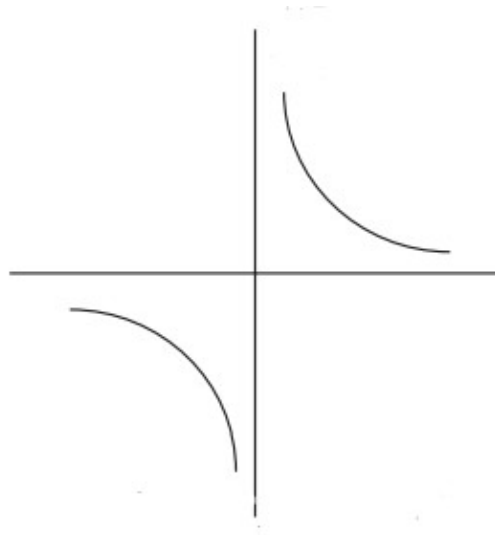
$$f(x, y) = xy - 1 = 0,$$

la cual corresponde a una *hipérbola* en el plano afín (x, y) dentro de la carta U_Z .

Para una mejor comprensión de este resultado, véase la Figura 3.34

Figura 3.34

$f(x, y) = xy - 1$. *Hipérbola en el plano afín.*



Nota. Elaboración propia (2026)

A continuación, trabajamos con el mismo polinomio $G(X, Y, Z) = XY - Z^2$, pero normalizando en una carta afín diferente.

(ii) Consideramos la carta:

$$U_X = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \mid X \neq 0\},$$

que se identifica con el plano afín mediante la normalización respecto a la coordenada X .

Definimos las coordenadas afines:

$$y = \frac{Y}{X}, \quad z = \frac{Z}{X}.$$

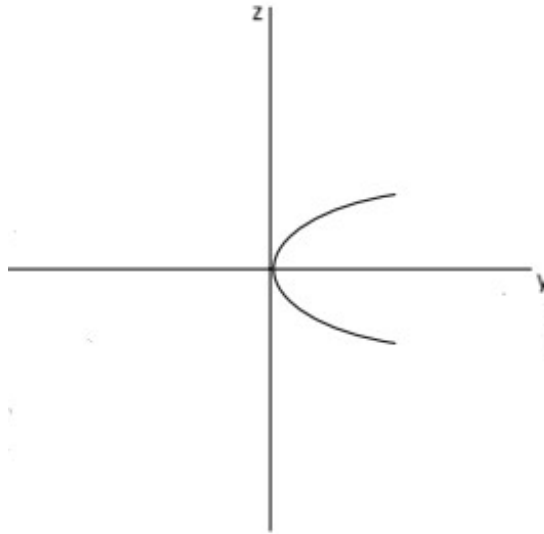
Sustituyendo en la ecuación homogénea y observando que $X^2 \neq 0$, podemos dividir entre X^2 para obtener la ecuación afín:

$$f(y, z) = y - z^2 = 0,$$

que describe una *parábola* en el plano afín (y, z) .

Figura 3.35

$f(y, z) = y - z^2$. Parábola en el plano afín.



Nota. Elaboración propia (2026)

3.5. Curvas algebraicas proyectivas singulares

Mientras que las curvas proyectivas no singulares presentan una estructura geométrica regular, el estudio de las curvas proyectivas singulares requiere analizar con mayor detalle su comportamiento local.

Aunque en el plano proyectivo utilizamos derivadas parciales para identificar puntos singulares, para comprender con mayor precisión la naturaleza de estas singularidades es necesario recurrir a las nociones de número de intersección y multiplicidad.

De manera intuitiva, la multiplicidad de un punto puede interpretarse como el número de veces que la curva intersecta una recta que pasa por dicho punto, contando intersecciones con multiplicidad. En particular, un punto proyectivo se denomina singular cuando su multiplicidad es mayor o igual que dos.

Por lo tanto, antes de caracterizar formalmente las singularidades en el contexto proyectivo, introduciremos la noción de número de intersección y posteriormente la definición rigurosa de multiplicidad.

3.5.1. Número de intersección

Definición 3.5.1.1. Sea $F(X, Y, Z)$ un polinomio homogéneo que define una curva proyectiva y sea L una recta que pasa por dos puntos P y Q en $\mathbb{P}^2$. El *polinomio de intersección* entre la curva y la recta se define como:

$$\Phi(s, t) = F(sP + tQ).$$

Observación 3.5.1.2. Las raíces de $\Phi(s, t)$ determinan los valores del parámetro para los cuales la recta L intersecta la curva algebraica proyectiva definida por F .

Definición 3.5.1.3. Sea P un punto de intersección correspondiente al parámetro $(s_0 : t_0)$. El *número de intersección* de la curva F con la recta L en el punto P se define como la multiplicidad de $(s_0 : t_0)$ como raíz de la ecuación polinomial $\Phi(s, t) = 0$, y se denota por $I(P, F, L)$.

Es decir, si $\Phi(s, t)$ contiene un factor de la forma:

$$(t_0s - s_0t)^m,$$

para algún entero $m \geq 0$, entonces:

$$I(P, F, L) = m.$$

En otras palabras, el número de intersección de la curva algebraica F y la recta L en el punto P , denotado por $I(P, F, L)$, corresponde a la multiplicidad de la raíz asociada en la ecuación $\Phi(s, t) = 0$. Véase [5, p. 125].

Ejemplo 3.5.1.4. (*Número de intersección de una curva y una recta*).

Consideremos la siguiente curva algebraica proyectiva:

$$F(X, Y, Z) = Y^2Z^2 - X^2Z^2 + X^4.$$

Sea la recta L dada por $X = 0$ y el punto $P = [0 : 0 : 1]$ en $\mathbb{RP}^2$.

Tomando la carta afín $Z = 1$, obtenemos la ecuación:

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + x^4.$$

La recta correspondiente es $x = 0$. Parametrizando L como:

$$x = 0, \quad y = t,$$

el polinomio de intersección está dado por:

$$\Phi(t) = f(0, t) = t^2.$$

Por definición, el número de intersección es la multiplicidad de $t = 0$ como raíz de $\Phi(t)$, por lo que:

$$I(P, F, L) = 2.$$

3.5.2. Multiplicidad de un punto en una curva

La noción de multiplicidad de un punto también puede interpretarse en el contexto de curvas proyectivas. Intuitivamente, la multiplicidad describe cuántas veces la curva intersecta una recta que pasa por dicho punto. Este concepto permite caracterizar la naturaleza local de la curva alrededor del punto considerado.

Definición 3.5.2.1. La *multiplicidad* de un punto P en una curva algebraica F en $\mathbb{P}^2$ es el valor mínimo de los números de intersección $I(P, F, L)$, donde L recorre todas las rectas que pasan por P .

En otras palabras, se dice que el punto P tiene multiplicidad $m \geq 0$ si se cumple que

$$I(P, F, L) \geq m$$

para toda recta L que pasa por P , y existe al menos una recta L que pasa por P tal que

$$I(P, F, L) = m.$$

Los puntos con multiplicidad 1, 2, 3, 4 se conocen como:

- Puntos *simples*.
- Puntos *dobles*.
- Puntos *triples*.
- Puntos *cuádruples*.

Geométricamente, un punto de multiplicidad m puede interpretarse como un punto donde la curva presenta varias ramas o direcciones tangentes que se encuentran en dicho punto. Esto puede observarse en la Figura 3.36.

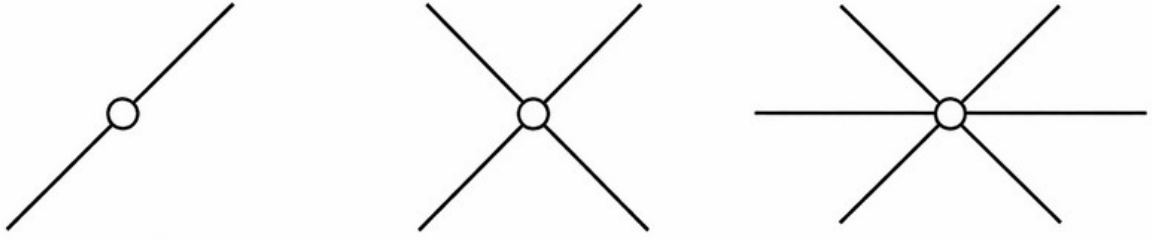
Ejemplo 3.5.2.2. (*Multiplicidad de un punto en la curva algebraica del ocho*).

Sea la curva algebraica proyectiva en $\mathbb{P}^2$:

$$F(X, Y, Z) = Y^2Z^2 - X^2(Z^2 - X^2),$$

Figura 3.36

Ejemplos de puntos de multiplicidad 1, 2 y 3.



Nota. Elaboración propia (2026)

conocida como la *curva del ocho* (véase la Figura 3.37). Esta curva intersecta la recta del infinito $Z = 0$ en el punto $Q = [0 : 1 : 0]$.

Para determinar la multiplicidad del punto Q , consideramos la carta afín $Y \neq 0$ y definimos

$$x = \frac{X}{Y}, \quad z = \frac{Z}{Y}.$$

Sustituyendo en el polinomio homogéneo obtenemos la ecuación

$$f(x, z) = z^2 - x^2 z^2 + x^4.$$

El punto correspondiente en esta carta es $q = (0, 0)$.

Consideramos la recta afín que pasa por q dada por

$$x = 0, \quad z = t.$$

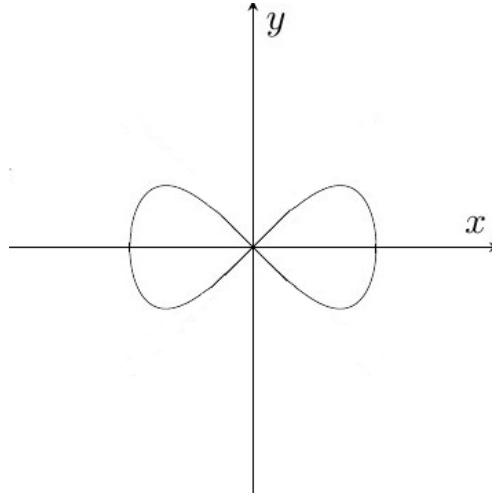
El polinomio de intersección es

$$\Phi(t) = f(0, t) = t^2.$$

Por lo tanto, la multiplicidad de $t = 0$ como raíz de $\Phi(t)$ es 2, y se tiene

$$I(Q, F, L) = 2.$$

En consecuencia, el punto Q es un punto de multiplicidad 2 en la curva. Además, puede verificarse que no existe una recta que pase por Q con menor multiplicidad de intersección.

Figura 3.37*Curva del ocho.**Nota.8* Elaboración propia (2026)

3.5.3. Singularidad en el plano proyectivo

En el estudio local de las curvas algebraicas resulta fundamental distinguir aquellos puntos en los que la curva presenta un comportamiento regular de aquellos en los que su estructura geométrica se vuelve más compleja.

Definición 3.5.3.1. Sea $F(X, Y, Z)$ un polinomio homogéneo que define una curva proyectiva. Un punto $P \in \mathbb{P}^2$ tal que $F(P) = 0$ se dice *punto singular* si:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0.$$

En caso contrario, el punto se denomina *punto no singular* (o *regular*).

Ejemplo 3.5.3.2. (*Puntos singulares de una curva algebraica proyectiva*).

Consideremos la siguiente curva algebraica proyectiva en $\mathbb{P}^2$:

$$F(X, Y, Z) = X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2.$$

Un punto singular debe satisfacer simultáneamente:

$$F(P) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 2X(Y^2 + Z^2), \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y(X^2 + Z^2), \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = 2Z(X^2 + Y^2).$$

De estas expresiones se deduce que, si ninguna de las coordenadas X , Y o Z es cero, entonces las derivadas parciales no pueden anularse simultáneamente. Por lo tanto, al menos una de las coordenadas debe ser igual a cero. Analizamos los siguientes casos:

- i) Si $X = 0$, entonces $F = Y^2Z^2$, por lo que se obtiene $Y = 0$ o $Z = 0$. Esto da lugar a los puntos $[0 : 0 : 1]$ y $[0 : 1 : 0]$.
- ii) Si $Y = 0$, entonces $F = X^2Z^2$, de donde $X = 0$ o $Z = 0$. Se obtienen los puntos $[0 : 0 : 1]$ y $[1 : 0 : 0]$.
- iii) Si $Z = 0$, entonces $F = X^2Y^2$, de donde $X = 0$ o $Y = 0$. Se obtienen los puntos $[0 : 1 : 0]$ y $[1 : 0 : 0]$.

En consecuencia, los únicos puntos singulares de la curva son:

$$[1 : 0 : 0], \quad [0 : 1 : 0], \quad [0 : 0 : 1].$$

Determinamos ahora la multiplicidad de cada uno de ellos.

- i) En la carta $X \neq 0$, con coordenadas $y = \frac{Y}{X}$ y $z = \frac{Z}{X}$, la ecuación se transforma en:

$$f(y, z) = y^2 + z^2 + y^2z^2.$$

Los términos de menor grado son $y^2 + z^2$, de grado 2. Por lo tanto, el punto $[1 : 0 : 0]$ es un punto singular de multiplicidad 2.

- ii) En la carta $Y \neq 0$, con coordenadas $x = \frac{X}{Y}$ y $z = \frac{Z}{Y}$, se obtiene:

$$f(x, z) = x^2 + z^2 + x^2z^2.$$

Los términos de menor grado son $x^2 + z^2$, de grado 2. Por lo tanto, el punto $[0 : 1 : 0]$ es un punto singular de multiplicidad 2.

- iii) En la carta $Z \neq 0$, con coordenadas $x = \frac{X}{Z}$ y $y = \frac{Y}{Z}$, se obtiene

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y^2.$$

Los términos de menor grado son $x^2 + y^2$, de grado 2. Por lo tanto, el punto $[0 : 0 : 1]$ es también un punto singular de multiplicidad 2.

En conclusión, la curva cuártica proyectiva

$$F(X, Y, Z) = X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$$

posee exactamente tres puntos singulares, y cada uno de ellos es un punto doble.

3.6. El Grado de una Curva Algebraica

El *grado de una curva algebraica* es un concepto fundamental que no solo permite clasificar curvas algebraicas, sino que también ayuda a comprender sus características geométricas. De acuerdo con lo que Halphen indica [7], es posible clasificar familias de curvas y examinar su comportamiento de forma sistemática mediante el grado. Intuitivamente, la complejidad de una curva algebraica se mide a través de su grado.

Definición 3.6.0.1. *El grado de una curva algebraica f se define como el máximo grado total de los monomios $x^i y^j$ que aparecen en el polinomio $f(x, y)$ con coeficientes diferentes de cero [9]. Es decir:*

$$d = \max\{i + j : a_{i,j} \neq 0\}$$

donde $i + j$ es el grado del monomio $x^i y^j$, que se obtiene sumando los exponentes de x y y . En particular, el polinomio $f(x, y)$ puede escribirse como:

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$$

donde los coeficientes $a_{i,j}$ son diferentes de cero solo para ciertos valores de i y j .

En el contexto proyectivo,, cuando la curva $f \subset \mathbb{P}^2$ está definida por un polinomio homogéneo $F(X, Y, Z)$, el grado de homogeneidad de este polinomio coincide con el grado de la curva. Así, la idea de grado es compatible con los contextos afín y proyectivo, y sigue siendo un invariante esencial de la curva.

Geométricamente, el *grado de una curva algebraica* puede interpretarse como una medida de cuántas veces una línea intersecta a una curva algebraica. En términos más sencillos, el grado nos indica cuántos puntos máximos de intersección pueden existir entre una línea y la curva algebraica.

Ejemplo 3.6.0.2. *(Intersección de una cúbica con una recta).*

Consideremos la curva algebraica cúbica $f \subset \mathbb{K}^2$ definida por la ecuación:

$$f(x, y) = y - x^3,$$

la cual pasa por el punto $p = (0, 0)$. Sea la familia de rectas que pasan por el origen:

$$l_t : y = tx \quad t \in \mathbb{K}$$

Para determinar los puntos de intersección entre la curva algebraica C y la recta l_t , sustituimos la ecuación de la recta en la ecuación de la curva algebraica. Así, obtenemos el polinomio de intersección:

$$f(x, tx) = tx - x^3 = x(t - x^2).$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{t}$$

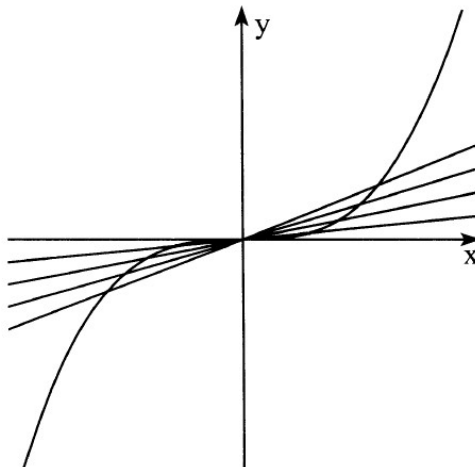
Para $t > 0$, la recta l_t intersecta a la curva algebraica en tres puntos distintos. Cuando el parámetro t tiende a cero, estos tres puntos de intersección se aproximan al origen. En el límite $t = 0$, la recta correspondiente es $y = 0$ y el polinomio de intersección se reduce a:

$$x^3 = 0$$

lo que indica que la intersección en el punto $p = (0, 0)$ ocurre con multiplicidad tres.

Figura 3.38

$$f(x, y) = y - x^3$$



Nota. Elaboración propia (2026)

Este ejemplo muestra que una recta puede intersectar a una curva algebraica cúbica en tres puntos, contados con multiplicidad, ilustrando la relación entre el grado de una curva y su complejidad geométrica.

3.7. El Género de una Curva Algebraica

Intuitivamente la topología es la rama de las matemáticas que se dedica entre otras cosas al estudio de las propiedades de los cuerpos geométricos que no presentan alteraciones por transformaciones continuas. En topología, decimos que dos cuerpos son equivalentes cuando tienen el mismo número de componentes, huecos e intersecciones. En este contexto, podemos estirar, doblar, encoger y deformar los objetos, siempre y cuando se haga sin romper ni separar lo que está unido ni pegar lo que está separado.

Un ejemplo muy conocido en topología consiste en transformar una taza de café con asa en una dona (*toro*), ya que este ejemplo ilustra la idea de la *equivalencia topológica*, que es proyectar el proceso de deformación de una figura en otra, véase la Figura 3.39.

Imaginemos, por un momento, una taza de cerámica con asa. Vamos a realizar una deformación: engrosaremos poco a poco el asa de la taza para hacerla más amplia, luego tomaremos la parte principal de la taza (el recipiente). La cual deformaremos para que se vuelva más plana y alargada. Para esto, hay que imaginar que estamos estirando la parte inferior hacia los lados y, posteriormente, pasar a deformar la parte inferior, donde transformaremos la base abierta de la taza en la estructura cerrada.

De esta manera, podemos estirar y doblar la taza de cerámica hacia adentro para unir los bordes del agujero. Mientras hacemos esto, notemos que el agujero central que queda al cerrar la base de la taza está conectado al asa que se ha engrosado.

Figura 3.39

La Taza y la dona son homeomorfos



Nota. Elaboración propia (2026)

Finalmente, ajustaremos de manera que el asa y el agujero se combinen suavemente para formar una estructura continua, sin bordes, ni cortes ni uniones visibles. Al final, obtendremos como resultado una dona (*toro o toroide*), que es una superficie.

Definición 3.7.0.1. El *género* de una superficie (o de una curva algebraica compleja) es un número entero no negativo que clasifica topológicamente superficies compactas y orientables, representando intuitivamente el número de asas o agujeros que posee. Véase [14, 15]

De manera equivalente, el *género* puede expresarse en términos de la *característica de Euler*. Si S es una superficie cerrada, entonces se cumple la relación:

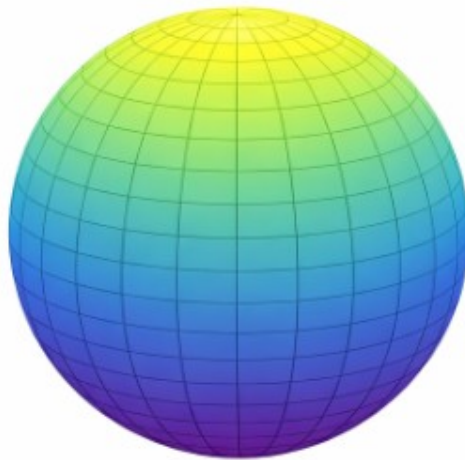
$$\chi = 2 - 2g,$$

donde χ es la característica de Euler de la superficie y g es su género. Véase [8].

Por ejemplo, una esfera tiene género 0 (véase la Figura ??), un toro tiene género 1 (véase la Figura ??) y una superficie con dos asas tiene género 2 (véase la Figura ??). En general, el género corresponde al número de agujeros que posee la superficie.

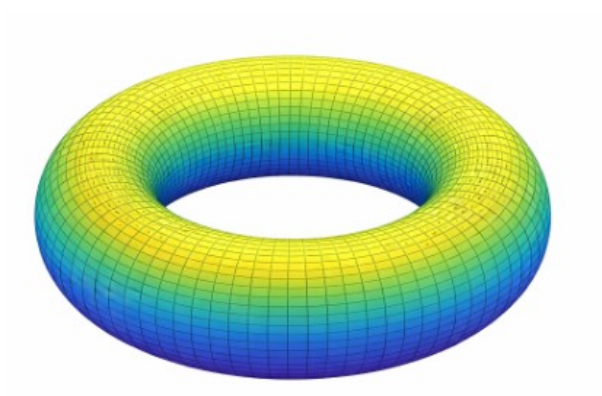
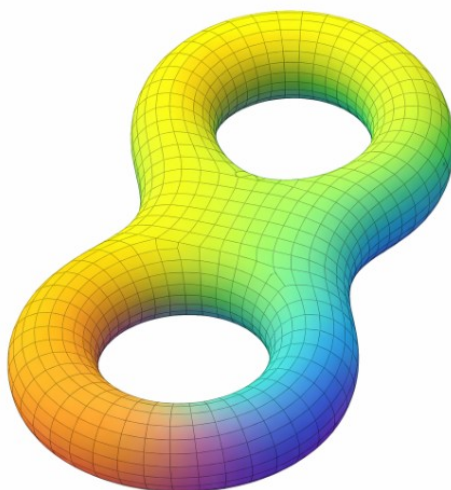
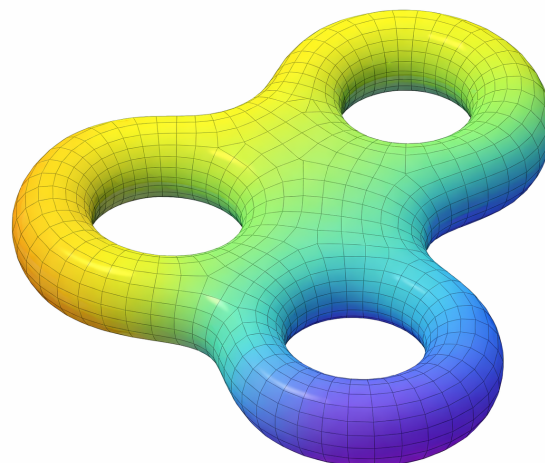
Figura 3.40

La esfera de género 0.



Nota. Elaboración propia (2026)

En el contexto de las *curvas algebraicas complejas no singulares*, cada curva puede interpretarse como una superficie de Riemann compacta. En este caso, el género de la curva coincide con el género topológico de dicha superficie.

Figura 3.41*El toro de género 1.**Nota.* Elaboración propia (2026)**Figura 3.42***Superficie de género 3.**Nota.* Elaboración propia (2026)**Figura 3.43***Superficie de género 3**Nota.* Elaboración propia (2026)

Este concepto será fundamental, ya que en el caso de curvas algebraicas proyectivas no singulares, el género puede calcularse en términos del grado de la curva, estableciendo una profunda relación entre propiedades algebraicas y topológicas.

Capítulo 4

La pregunta de Halphen

*«Comprender una curva no es solo conocer su ecuación,
sino entender el lugar que ocupa entre todas las demás.*

Georges Halphen.

4.1. Introducción a la pregunta de Halphen.

El estudio de las *curvas algebraicas* fue una de las áreas más sobresalientes dentro del desarrollo de la *geometría algebraica* durante el siglo XIX. Uno de los matemáticos que contribuyó de manera significativa a este campo fue Georges Henri Halphen (1844–1889). Halphen trabajó en diversas áreas de las matemáticas, entre ellas la *geometría enumerativa*, la *teoría de invariantes*, la *geometría proyectiva* y, de manera destacada, la *geometría algebraica*.

En esta última disciplina, Halphen fue reconocido, junto con Max Noether, con el Premio Steiner en 1882, otorgado por la Universidad Politécnica de Berlín, por sus investigaciones sobre la clasificación de *curvas algebraicas*. En uno de sus tratados, de más de 200 páginas, Halphen aborda el problema de la existencia y clasificación de curvas algebraicas en el espacio proyectivo de dimensión tres. Este problema continúa siendo relevante hasta la actualidad y constituye parte de la motivación del presente trabajo de tesis.

4.2. Enunciado de la pregunta de Halphen

En sus investigaciones, Halphen desarrolló un estudio profundo sobre las curvas algebraicas en el *espacio proyectivo* $\mathbb{P}^3$.

En este contexto, Halphen formuló la siguiente pregunta:

“Ces deux nombres, h et le degré d , suffisent-ils également à caractériser une famille de courbes?”[7]

Esta frase puede traducirse al español como:

¿Son suficientes estos dos números, h y el grado d , para caracterizar una familia de curvas?

Con esta formulación, Halphen no se limita únicamente a determinar qué pares (d, g) pueden realizarse como invariantes de curvas algebraicas en $\mathbb{P}^3$, sino que también se pregunta si el conocimiento de estos invariantes el grado d y el género g (denotado por Halphen como h en su memoria de 1882) permite identificar la familia geométrica a la que pertenece una curva dada. [7].

En el lenguaje moderno, la pregunta puede expresarse del siguiente modo:

¿Qué combinaciones de grado y género son posibles en curvas Algebraicas?

Actualmente, no se tiene una clasificación completa de todos los pares de enteros (d, g) que pueden ser realizados por curvas algebraicas en $\mathbb{P}^3$. Sin embargo, Halphen propuso una respuesta parcial en su trabajo. Esta propuesta, aunque notable, no fue del todo rigurosa según los estándares contemporáneos.

Posteriormente, una demostración rigurosa fue desarrollada por Gruson y Peskine, quienes emplearon herramientas modernas como las variedades de Hilbert y los espacios de módulos, las cuales permiten estudiar cómo varían las curvas algebraicas dentro de familias parametrizadas por invariantes fijos.

Una respuesta parcial a esta pregunta aparece en el caso de curvas algebraicas planas proyectivas, donde el género está dado por la fórmula:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

para curvas algebraicas planas proyectivas no singulares. Véase [19, p. 149].

4.3. La fórmula del género para curvas algebraicas complejas planas

A una *curva algebraica compleja no singular* en el plano proyectivo complejo se le puede asociar una superficie real compacta de dimensión 2.

En esta sección vamos a deducir el *género* de una *curva algebraica* en el plano proyectivo complejo desde la perspectiva del *principio italiano*. Hemos optado por esta metodología entre las diversas formas de calcular el género porque ofrece una perspectiva clásica y geométrica, especialmente útil para el estudio de *curvas algebraicas complejas*.

Definición 4.3.0.1. *Principio Italiano:* Para elecciones genéricas, la topología de la situación no depende de dichas elecciones. [19]

Por elección *genérica* entendemos una elección que evita configuraciones especiales o degeneradas, de modo que los objetos geométricos se intersectan de la manera más simple posible, por ejemplo, en puntos distintos y sin coincidencias especiales.

El principio italiano nos indica que basta con estudiar el ejemplo más simple y representativo para entender el problema y encontrar una solución, ya que la topología no depende de elecciones particulares.

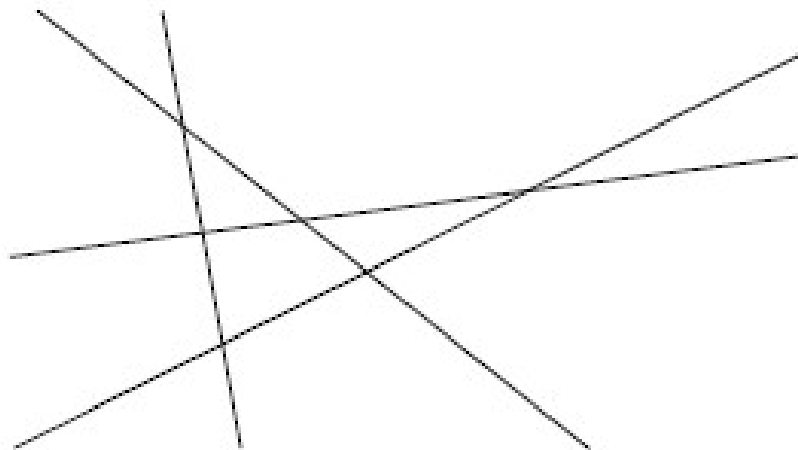
Como primer paso, usaremos *el principio italiano*, donde tomaremos una curva algebraica degenerada que consiste en la unión de n rectas genéricas que se intersectan entre sí. Posteriormente, esta curva será suavizada mediante una pequeña perturbación de su ecuación, lo que permitirá obtener una curva algebraica no singular de grado n .

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ puntos.} \quad (4.1)$$

Cada una de estas líneas proyectivas complejas es difeomorfa a S^2 (es decir, $S^2 = \mathbb{C}P^1$). La unión de estas n esferas no será suave, ya que contiene $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos de intersección, uno por cada par de esferas.

Figura 4.1

Una curva algebraica degenerada de grado n consta de n rectas.



Nota. Elaboración propia (2026)

Definición 4.3.0.2. Un *difeomorfismo* entre variedades diferenciables es un *isomorfismo* en la categoría de variedades diferenciables; es decir, es una función z entre dos variedades diferenciables que tiene una inversa diferenciable. [4]

La definición y ejemplos de variedad diferenciable se pueden consultar en [4].

Ejemplo 4.3.0.3. (*Difeomorfismos entre variedades diferenciables*).

- i) La *recta real* $\mathbb{R}$ es una variedad diferenciable de dimensión 1. Un ejemplo de un *difeomorfismo* en $\mathbb{R}$ es la función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x + 1. \end{aligned}$$

En general, cualquier función diferenciable en todo $\mathbb{R}$ que tenga una inversa también diferenciable es un *difeomorfismo*.

- ii) La *circunferencia unitaria* en $\mathbb{R}^2$, denotada como S^1 , es una variedad diferenciable. Un ejemplo de un *difeomorfismo* en S^1 es la función:

$$\begin{aligned} f : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ f_\alpha(re^{i\theta}) &= re^{i(\theta+\alpha)} \end{aligned}$$

- iii) El *toro* es una variedad diferenciable, obtenida al tomar el producto de dos circunferencias $S^1 \times S^1$. La parametrización puede expresarse como:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(\theta, \phi) &= ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta) \end{aligned}$$

donde:

- θ y ϕ son parámetros angulares que recorren la circunferencia en S^1 .
- R es el radio mayor del toro.
- r es el menor radio del toro. y $R > r$.

Ahora bien, si consideramos la ecuación de nuestra curva algebraica degenerada:

$$f(x, y) = \ell_1(x, y) \cdot \ell_2(x, y) \cdot \dots \cdot \ell_n(x, y) = 0,$$

donde cada recta $\ell_i(x, y)$ tiene la forma:

$$\ell_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i,$$

y f es el producto de n polinomios de grado 1 que definen las n rectas.

Al introducir una pequeña perturbación $\epsilon > 0$ en la ecuación:

$$f(x, y) = \ell_1(x, y) \cdot \ell_2(x, y) \cdot \dots \cdot \ell_n(x, y) = \epsilon.$$

Esta perturbación produce una deformación de la curva degenerada original. En particular, las intersecciones entre las rectas se suavizan, obteniéndose así una curva algebraica no singular de grado n .

Esta ecuación puede escribirse en coordenadas afines. Escogiendo adecuadamente las coordenadas, todos los puntos de intersección de nuestras líneas serán finitos y no paralelos. Cada línea proyectiva compleja es difeomorfa a S^2 (es decir, $S^2 = \mathbb{CP}^1$), y la unión de estas n esferas contiene $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos de intersección.

Aplicaremos el *suavizado topológico* de un punto de intersección (una deformación topológica). Para esto, eliminaremos un pequeño disco centrado en el punto de intersección de cada esfera que se intersecta. Posteriormente, uniremos dos de las esferas mediante un cilindro que conectará los bordes de los agujeros creados.

Para entender el efecto topológico de esta operación, seguiremos los siguientes pasos:

- i) Agregar cilindros en los puntos de intersección: Identificamos que hay $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos de intersección entre las esferas. Cada uno de estos puntos corresponde a un par de esferas intersectándose, y a partir de ellos debemos agregar un total de $\frac{n(n-1)}{2}$ cilindros para suavizar estas intersecciones.
- ii) Eliminar los discos en las intersecciones: En cada punto de intersección, eliminamos $n(n-1)$ pequeños discos, creando agujeros en las esferas involucradas en las intersecciones. Esto genera $n(n-1)$ agujeros en total.
- iii) Conectar una esfera inicial con las demás: Elegimos una de las esferas como la *esfera inicial* y la conectamos con las otras $n-1$ esferas mediante cilindros. Cada cilindro se adhiere a los bordes de dos agujeros: uno en la esfera inicial y otro en la esfera con la que se conecta. Por lo tanto, cada cilindro elimina dos agujeros. Como se utilizan $n-1$ cilindros para realizar estas conexiones, se eliminan en total $2(n-1)$ agujeros. Recordando que inicialmente se habían eliminado $n(n-1)$ discos al considerar todas las intersecciones, después de este paso quedan: $n(n-1) - 2(n-1) = (n-1)(n-2)$ agujeros en la superficie.
- iv) Agregar cilindros para completar el suavizado: Finalmente, conectamos los agujeros restantes (que corresponden a las intersecciones entre las demás esferas) por pares mediante cilindros adicionales. Como en este punto permanecen $(n-1)(n-2)$ agujeros y cada cilindro conecta dos de ellos, el número de cilindros necesarios es $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Este paso completa el proceso de suavizado de todas las intersecciones y cada uno de estos cilindros introduce un túnel en la superficie resultante.

v) Como resultado: Vamos a obtener una superficie con

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ asas} \quad (4.2)$$

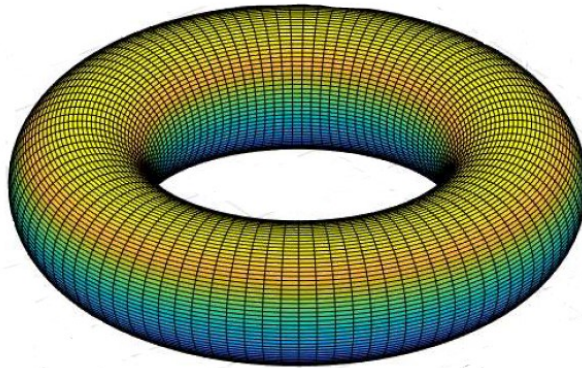
una por cada tubo agregado en el último paso de la operación.

En topología, una asa puede entenderse como un túnel o tubo que atraviesa una superficie. Para superficies compactas y orientables, el número de asas coincide con el género de la superficie. Por ejemplo, la esfera tiene género 0, el toro tiene género 1, y una superficie con dos túneles tiene género 2. En la construcción anterior, cada cilindro agregado en el último paso genera una asa en la superficie resultante.

Esta fórmula es conocida como la *fórmula del género* para curvas planas suaves [9, 17, 19], que nos proporciona la descripción topológica de una curva algebraica no singular de grado n en el espacio proyectivo complejo.

Figura 4.2

El toro: curva algebraica de género 1.



Nota. Elaboración propia (2026)

Observación 4.3.0.4. La fórmula del género nos indica que no todas las superficies compactas pueden ser representadas como una *curva algebraica no singular* en el plano proyectivo complejo.

4.4. Ejemplos del proceso de suavizado y la fórmula del género

Para ilustrar el procedimiento de suavizado descrito anteriormente, analizaremos algunos casos particulares correspondientes a valores pequeños del grado n . Partimos de una unión de n rectas en posición general y estudiamos cómo el suavizado de sus intersecciones produce una curva algebraica proyectiva suave. Estos ejemplos permiten observar cómo la complejidad topológica de la curva aumenta conforme crece el grado.

Recordemos que una unión de n rectas en posición general tiene:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

puntos de intersección. En cada uno de estos puntos se eliminan pequeños discos alrededor de la singularidad y posteriormente se conectan los bordes mediante cilindros. Este proceso elimina las singularidades y produce una superficie suave.

Desde el punto de vista topológico, cada cilindro adicional introduce un túnel en la superficie. Estos túneles corresponden exactamente a las *asas* de la superficie, y su número coincide con el género de la curva.

Observación 4.4.0.1. En los ejemplos anteriores denotamos por n el número de rectas en posición general cuya unión forma una curva algebraica degenerada. Es importante notar que dicha curva tiene grado n , ya que cada recta es de grado 1 y el grado de la unión es la suma de los grados.

Por lo tanto, en este contexto podemos identificar $d = n$ en la fórmula del género

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

lo que justifica el uso de n en lugar de d en los cálculos realizados.

Ejemplo 4.4.0.2. (*Ejemplo de suavizado topológico para $n = 1$*).

Consideremos primero el caso $n = 1$. En esta situación la curva algebraica degenerada consiste simplemente en una única recta. Como no existen otras rectas con las cuales intersectarse, no aparecen puntos de intersección.

Por lo tanto, no es necesario realizar ningún proceso de suavizado. La curva resultante es simplemente la recta proyectiva compleja. Este comportamiento se observa en la Figura 4.3.

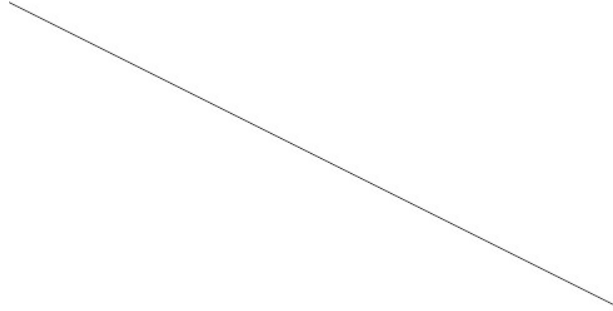
Aplicando la fórmula del género, podemos confirmar que, efectivamente, que la curva algebraica es 0.

$$g = \frac{(1-2)(1-1)}{2} = 0$$

Esto indica que la curva no posee agujeros por lo que tenemos una recta proyectiva

Figura 4.3

Recta proyectiva compleja.



Nota. Elaboración propia (2026)

Ejemplo 4.4.0.3. (*Ejemplo de suavizado topológico para $n = 2$*).

Consideremos ahora el caso $n = 2$. La curva algebraica degenerada está formada por dos rectas que se intersectan en un único punto. Esto lo podemos corroborar con la formula que nos dice cuantos puntos de interseccion hay. Sustituyendo, tenemos:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(2-1)}{2} = 1$$

punto de intersección.

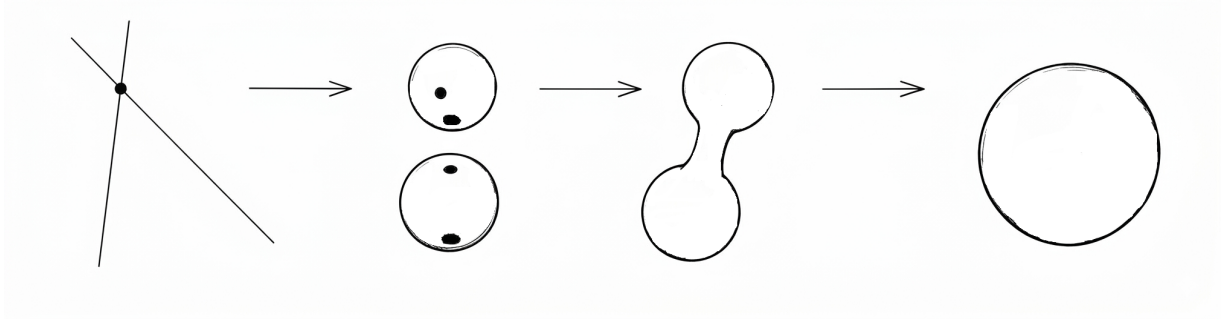
Para realizar el suavizado de esta intersección, eliminamos un pequeño disco alrededor del punto de intersección en cada una de las dos esferas que representan las rectas proyectivas complejas (recordemos que las rectas proyectivas complejas son difeomorfos a S^2). Esto produce dos agujeros en la superficie.

Posteriormente, conectamos los bordes de estos agujeros mediante un cilindro. Esta operación elimina la singularidad correspondiente a la intersección de las rectas y produce una superficie suave.

En este caso, la conexión de las dos esferas queda a través del cilindro y como resultado es una superficie topológicamente equivalente a una esfera. Este comportamiento se observa en la Figura 4.4.

Aplicando la fórmula del género, podemos confirmar que, efectivamente que la curva algebraica es 0.

$$g = \frac{(2-2)(1-2)}{2} = 0$$

Figura 4.4*Proceso de suavizado para $n = 2$* *Nota.* Elaboración propia (2026)**Ejemplo 4.4.0.4.** (*Ejemplo de suavizado topológico para $n = 3$*).

Consideremos ahora el caso $n = 3$. La curva algebraica degenerada está formada por tres rectas que se intersectan en tres puntos. Esto puede corroborarse mediante la fórmula que determina el número de puntos de intersección. Sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3,$$

puntos de intersección.

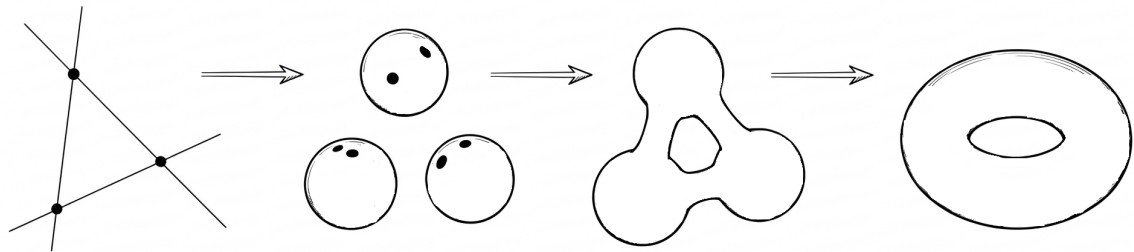
Para realizar el suavizado, eliminamos pequeños discos alrededor de cada punto de intersección en las esferas que representan a las rectas proyectivas complejas. Posteriormente, conectamos los bordes de estos discos mediante cilindros. Cada cilindro elimina una singularidad y genera un túnel en la superficie, reflejando la estructura topológica de la curva suavizada.

Como resultado, obtenemos una cúbica suave y no singular, cuya superficie proyectiva es homeomorfa a una esfera con un solo “asa” o túnel. Este comportamiento se ilustra en la Figura 4.5.

Aplicando la fórmula del género:

$$g = \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1.$$

Esto significa que la superficie resultante tiene exactamente un agujero. Por lo tanto, desde el punto de vista topológico, la curva algebraica es equivalente a un toro.

Figura 4.5*Proceso de suavizado para $n = 3$* *Nota.* Elaboración propia (2026)**Ejemplo 4.4.0.5.** (*Ejemplo de suavizado topológico para $n = 4$*).

Consideremos ahora el caso $n = 4$. La curva algebraica degenerada está formada por cuatro rectas, las cuales se intersectan en seis puntos. Esto puede corroborarse mediante la fórmula que determina el número de puntos de intersección. Sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6,$$

puntos de intersección.

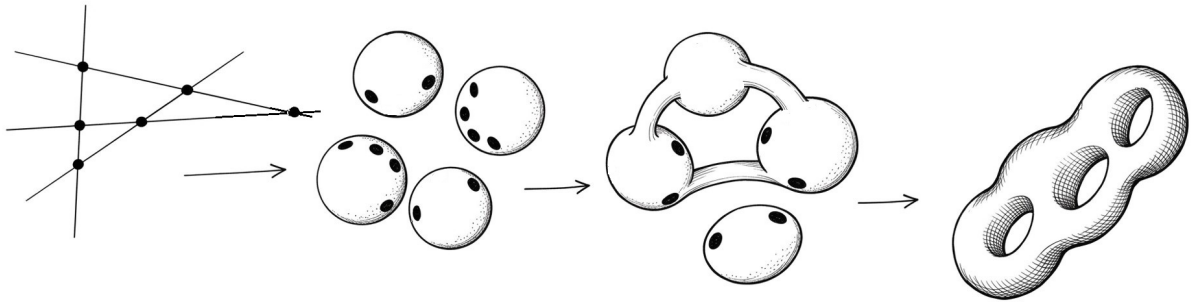
Para realizar el suavizado, eliminamos pequeños discos alrededor de cada punto de intersección en las esferas que representan a las rectas proyectivas complejas. Posteriormente, conectamos los bordes de estos discos mediante cilindros. Cada cilindro elimina una singularidad y genera un túnel en la superficie, reflejando la estructura topológica de la curva suavizada.

Como resultado, obtenemos una curva de grado cuatro suave y no singular, cuya superficie proyectiva es homeomorfa a una esfera con varios “asas” o túneles. Este comportamiento se ilustra en la Figura 4.6.

Aplicando la fórmula del género:

$$g = \frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3.$$

Esto significa que la superficie resultante tiene exactamente tres agujeros. Por lo tanto, desde el punto de vista topológico, la curva algebraica es equivalente a una superficie de género 3.

Figura 4.6*Proceso de suavizado para $n = 3$* *Nota.* Elaboración propia (2026)**Ejemplo 4.4.0.6.** (*Ejemplo de suavizado topológico para $n = 5$*).

Consideremos ahora el caso $n = 5$. La curva algebraica degenerada está formada por cinco rectas, las cuales se intersectan en varios puntos. Esto puede corroborarse mediante la fórmula que determina el número de puntos de intersección. Sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10,$$

puntos de intersección.

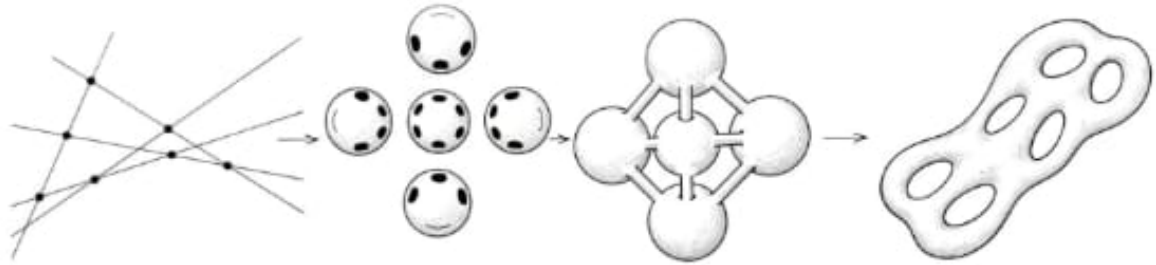
Para realizar el suavizado, eliminamos pequeños discos alrededor de cada punto de intersección en las esferas que representan a las rectas proyectivas complejas. Posteriormente, conectamos los bordes de estos discos mediante cilindros. Cada cilindro elimina una singularidad y genera un túnel en la superficie, reflejando la estructura topológica de la curva suavizada.

Como resultado, obtenemos una curva de grado cinco suave y no singular, cuya superficie proyectiva es homeomorfa a una esfera con varios “asas” o túneles. Este comportamiento se ilustra en la Figura 4.7.

Aplicando la fórmula del género:

$$g = \frac{(5-1)(5-2)}{2} = 6.$$

Esto significa que la superficie resultante tiene exactamente seis agujeros. Por lo tanto, desde el punto de vista topológico, la curva algebraica es equivalente a una superficie de género 6.

Figura 4.7*Proceso de suavizado para $n = 5$* *Nota. Elaboración propia (2026)*

4.5. Relación entre grado y género en curvas algebraicas

Una de las relaciones fundamentales en matemáticas, y en particular en el estudio de curvas algebraicas, es la que existe entre el grado y el género. Esta relación nos ayuda a entender cómo el número de intersecciones presentes en una curva algebraica puede afectar la topología de la misma.

La fórmula del género para curvas algebraicas complejas y planas está dada por la fórmula (4.2), donde d representa el grado de la curva algebraica y g su género. La fórmula que dedujimos mediante el principio italiano coincide con la expresión del género topológico, geométrico y aritmético.

No obstante, debemos considerar los casos en que la curva algebraica posee puntos singulares, ya que estos afectan directamente su topología. Para estas situaciones, partimos de nuestra fórmula del género y restamos las contribuciones de los puntos singulares.

Cuando la curva presenta singularidades, la fórmula debe corregirse. En este contexto, definimos el género geométrico como el género de la curva suave obtenida al normalizar f , obteniendo:

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in \text{Sing}(f)} \delta_P,$$

donde el número δ_P mide qué tan compleja es la singularidad en P [13, 16].

Ahora que comprendemos la relación entre el grado y el género de una curva algebraica, podemos ver cómo esto se conecta directamente con la Pregunta de Halphen, al menos en el caso del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$.

En $\mathbb{P}^2$, una curva algebraica no singular de grado d tiene un género dado por la fórmula:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Esta expresión nos indica que, para curvas planas suaves, el género está completamente determinado por el grado. En otras palabras, el par (d, g) describe de manera única la topología de la curva en el plano proyectivo complejo.

Por lo tanto, en el contexto de $\mathbb{P}^2$, la Pregunta de Halphen sobre si el grado y el género son suficientes para caracterizar una familia de curvas recibe una respuesta clara: sí, al menos para curvas planas no singulares. Cada par (d, g) posible corresponde a una familia de curvas algebraicas complejas de grado d y género g .

Por lo tanto, en el contexto de $\mathbb{P}^2$, la Pregunta de Halphen sobre si el grado y el género son suficientes para caracterizar una familia de curvas recibe una respuesta clara en el caso de curvas planas no singulares. En efecto, el género de una curva plana suave de grado d está completamente determinado por la fórmula

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Esto implica que, para curvas planas no singulares, el género no constituye un parámetro independiente: queda determinado únicamente por el grado. En consecuencia, todas las curvas planas suaves de grado d tienen el mismo género.

De esta manera, una familia de curvas planas no singulares queda esencialmente determinada por el grado del polinomio homogéneo que define la curva, mientras que el género describe su complejidad topológica y se obtiene directamente a partir de dicho grado.

Esta observación también nos sirve como motivación para estudiar curvas en $\mathbb{P}^3$, donde la situación es más compleja: el conocimiento del grado y del género ya no garantiza, en general, la identificación de la familia geométrica de la curva. La simplicidad del plano proyectivo nos permite visualizar de manera clara la relación fundamental entre grado y género, preparando el terreno para explorar los casos más generales en el espacio proyectivo de dimensión tres.

La relación entre el grado y el género es primordial para la geometría algebraica, ya que nos permite realizar una clasificación mediante un invariante que describe tanto su estructura topológica, geométrica y algebraica. Asimismo, esta relación nos ayuda a orientar la comprensión de la Pregunta de Halphen, que constituye la motivación principal de esta tesis.

Capítulo 5

Combinaciones de grado y género en curvas algebraicas

«La verdadera esencia de las matemáticas radica en su capacidad de hablar de lo invisible a partir de lo visible».

A. Grothendieck

El estudio del género de una superficie algebraica tiene raíces en el trabajo de Riemann, quien introdujo las superficies que hoy en día llevan su nombre para tratar de comprender las funciones complejas multivaluadas [1, 14]. Este enfoque permitió clasificar superficies compactas orientables según su género: esfera (género 0), toro (género 1), y así sucesivamente [14].

En el contexto de la geometría algebraica, el género reaparece como un invariante fundamental en la clasificación de curvas proyectivas suaves. La Pregunta de Halphen se centra precisamente en entender qué combinaciones de grado y género pueden ocurrir en este tipo de curvas. Este capítulo explora esa relación y analiza los casos posibles a partir de la fórmula del género [9, 6, 11].

5.1. Combinaciones posibles en curvas algebraicas suaves en $\mathbb{P}^2$

En geometría algebraica, el *género* aparece como un invariante fundamental para la clasificación de curvas algebraicas proyectivas planas [9]. *La pregunta de Halphen*, que constituye la motivación para esta tesis, se centra en tratar de entender qué combinaciones de *grado* y de *género* pueden ocurrir para este tipo de curvas algebraicas [7, 9].

Para estudiar la relación entre estos invariantes utilizaremos la *fórmula del género*:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Esta fórmula la hemos deducido utilizando la idea clásica de la escuela italiana de

geometría algebraica [19]. El argumento consiste en comenzar con un caso degenerado formado por la unión de d rectas, el cual presenta:

$$\frac{d(d-1)}{2}$$

puntos de intersección.

Posteriormente se introduce una pequeña perturbación en la ecuación que define este conjunto de rectas. Esta perturbación suaviza las intersecciones entre las rectas y produce una curva algebraica proyectiva no singular de grado d .

Desde el punto de vista topológico, el proceso de suavizado transforma las singularidades de intersección en túneles de la superficie resultante. Como consecuencia, la superficie resultante posee

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

asas, que corresponden precisamente al género de la curva.

Este procedimiento ilustra la idea fundamental del enfoque italiano: estudiar el caso general de una curva algebraica a partir de un caso degenerado más simple mediante pequeñas deformaciones.

En la siguiente tabla, se puede observar que, para curvas algebraicas suaves en $\mathbb{P}^2$, los grados pequeños corresponden a géneros igualmente pequeños, mientras que, a medida que el grado aumenta, el género crece rápidamente.

Para grados pequeños, el género puede calcularse directamente mediante argumentos geométricos explícitos. En particular

Grado d	Género g	Grado d	Género g
1	0	11	45
2	0	12	55
3	1	13	66
4	3	14	78
5	6	15	91
6	10	16	105
7	15	17	120
8	21	18	136
9	28	19	153
10	36	20	171

Cuadro 5.1: Combinaciones de grado y género para curvas algebraicas suaves en $\mathbb{P}^2$.

- Para $d = 1$ y $d = 2$ se obtiene género $g = 0$,
- Para $d = 3$ se obtiene género $g = 1$, como ya se mostró anteriormente.

Los casos de grados mayores pueden analizarse de manera similar mediante el proceso de suavizado. En esta tesis se estudiaron también los casos $d = 4$ y $d = 5$, donde el análisis topológico obtenido al suavizar las intersecciones permite contar el número de asas de la superficie resultante.

Estos ejemplos muestran de manera concreta que, al fijar el grado d , el género de la curva queda determinado por la expresión:

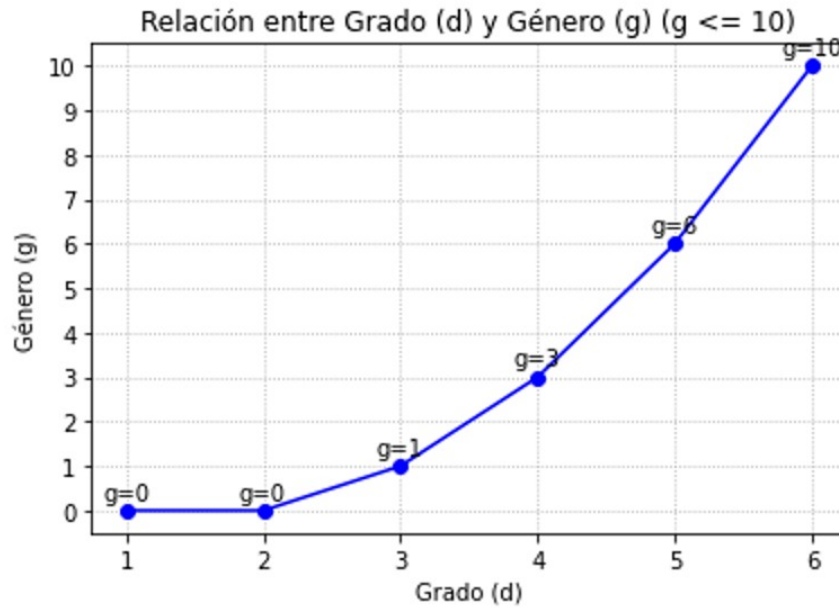
$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

En particular, se observa que la complejidad topológica de la curva aumenta conforme crece el grado, ya que cada incremento en d introduce nuevas asas en la superficie asociada a la curva.

Para curvas algebraicas suaves en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, la fórmula del género determina de manera *exhaustiva* la relación entre el grado d y el género g . En este contexto, no existe ambigüedad respecto a qué pares (d, g) pueden aparecer como grado y género de una curva algebraica plana suave.

Figura 5.1

Grafica de combinaciones de grado y género para curvas suaves en $\mathbb{P}^2$.



Nota. Elaboración propia (2026)

Por lo tanto, en el caso de curvas planas no singulares en $\mathbb{P}^2$, la cuestión planteada por Halphen admite una respuesta completa: el género queda completamente determinado por el grado mediante la fórmula del género.

Capítulo 6

Conclusiones

«En matemáticas, comprender una estructura es descubrir las conexiones que la hacen posible.»

Anónimo

En este trabajo se estudió la relación entre el *grado* y el *género* de curvas algebraicas proyectivas en el plano proyectivo de dimensión 2, tomando como punto de partida la pregunta planteada por *Georges Halphen*, la cual busca entender qué combinaciones de estos invariantes pueden presentarse en familias de curvas algebraicas.

Para abordar este problema, se desarrollaron los fundamentos necesarios sobre curvas algebraicas y su planteamiento en el plano proyectivo, así como el estudio de intersecciones y singularidades. Estos elementos permitieron comprender la estructura geométrica de las curvas y establecer el contexto adecuado para analizar la relación entre grado y género.

El resultado central del trabajo fue la deducción e interpretación de la fórmula del género:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

válida para curvas algebraicas proyectivas no singulares. Esta deducción se realizó a partir de una unión de rectas y mediante un proceso de suavizado, siguiendo ideas clásicas de la geometría algebraica inspiradas en la escuela italiana. Desde el punto de vista topológico, este procedimiento permite transformar los puntos de intersección en túneles o asas de la superficie asociada a la curva, lo que da lugar al valor del género.

El análisis de ejemplos concretos para grados pequeños, en particular los casos $d = 1, 2, 3, 4$ y 5, permitió ilustrar de manera explícita este proceso. En dichos casos, el suavizado de las intersecciones hace posible visualizar cómo la complejidad topológica de la curva aumenta con el grado, reflejada en el número de asas de la superficie.

A partir de estos resultados, se concluye que, para curvas algebraicas suaves en el plano proyectivo, el género queda completamente determinado por el grado. En consecuencia, las posibles combinaciones (d, g) no son arbitrarias, sino que están dadas por la fórmula del género. De esta manera, en este contexto, la pregunta de Halphen admite una respuesta clara y completa.

Sin embargo, este panorama cambia al considerar contextos más generales. En el caso de curvas con singularidades o curvas en espacios proyectivos de mayor dimensión, el grado y el género ya no son suficientes para describir completamente una familia de curvas, lo que da lugar a problemas más complejos de clasificación.

En este sentido, la pregunta de Halphen se relaciona con desarrollos más profundos en geometría algebraica. Entre las contribuciones más relevantes se encuentran los trabajos de *Guido Castelnuovo*, quien estableció resultados fundamentales en la clasificación de curvas, así como el enfoque moderno presentado por *Robin Hartshorne*, que formaliza estas ideas dentro de la teoría contemporánea.

Asimismo, resultados más recientes, como los de *Laurent Gruson* y *Christian Peskine*, así como los de *Johann Rathmann*, estudian restricciones más finas sobre las posibles curvas en espacios proyectivos. En estos trabajos, el enfoque es principalmente algebraico y se apoya en herramientas avanzadas que permiten obtener resultados generales en contextos más amplios.

En contraste, en esta tesis se adoptó un enfoque de carácter más *geométrico* y *topológico*, basado en el estudio de curvas degeneradas y su posterior suavizado. Este punto de vista permite interpretar el género como el número de asas de la superficie asociada, proporcionando una comprensión más intuitiva de la relación entre grado y género.

Ambos enfoques resultan complementarios: mientras que el enfoque algebraico permite establecer resultados generales con gran nivel de abstracción, el enfoque geométrico facilita la comprensión del fenómeno en casos concretos y constituye una vía accesible para introducirse en problemas más profundos de la geometría algebraica.

Finalmente, este trabajo no solo permite comprender de manera completa el caso de curvas planas no singulares, sino que también sirve como punto de partida para el estudio de problemas abiertos y actuales en la clasificación de curvas algebraicas, donde la interacción entre métodos algebraicos, geométricos y topológicos continúa siendo un área activa de investigación.

Bibliografía

- [1] Lars Valerian Ahlfors and Lars V Ahlfors. *Complex analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1979.
- [2] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane Algebraic Curves: Translated by John Stillwell*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Magaly Corredor de Porras and Carlos Arturo Londoño Ramos. El arte y la historia de la construcción en la geometría proyectiva. *Saber, Ciencia y Libertad*, 14(2):295–311, 2019.
- [4] Manfredo Perdigão Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superficies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [5] Christopher G Gibson. *Elementary geometry of algebraic curves: an undergraduate introduction*. Cambridge University Press, 1998.
- [6] Vinicio Gomez Gutierrez. *Una introducción a la geometria Proyectiva*. Las prensas de ciencias, 2020.
- [7] G.H. Halphen. *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques ...* Extrait du Journal de l'École Polytechnique. Gauthier, 1882.
- [8] Joe Harris. *Algebraic geometry: a first course*, volume 133. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] Israel Nathan Herstein, Federico Velasco Coba, et al. Algebra moderna: grupos, anillos, campos, teoría de galois. 1970.
- [11] César Lozano Huerta. Curvas algebraicas y la pregunta de halphen. *arXiv preprint arXiv:1610.00618*, 2016.
- [12] Frances Clare Kirwan. *Complex algebraic curves*. Number 23. Cambridge University Press, 1992.

-
- [13] Hidalgo Solis Laura. *Una introducción a las curvas algebraicas*. Universidad Autónoma Metropolitana, 2019.
 - [14] Motivos Matemáticos. Artículos panorámicos, 2023. Consultado el 4 de mayo de 2025.
 - [15] David Mumford. *Algebraic geometry I: complex projective varieties*, volume 221. Springer, 1976.
 - [16] Makoto Nanba. *Geometry of projective algebraic curves*, volume 88. M. Dekker, 1984.
 - [17] Daniel Perrin et al. *Algebraic geometry: an introduction*. Springer, 2008.
 - [18] Ana Irene Ramírez-Galarza and J Seade-Kuri. *Introducción a la geometría avanzada*. Las prensas de ciencias, 2002.
 - [19] R.Uribe-Vargas Vladimir.I.Arnold and. *Geometry*. Springer, 2014.