

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Comportamientos caóticos en un modelo financiero de dimensión infinita

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

JESÚS SALINAS GUTIÉRREZ

DIRECTOR: DR. MARCOS ÁNGEL GONZÁLEZ OLVERA

CODIRECTORA: DRA. ANAHÍ FLORES PÉREZ

Ciudad de México, marzo de 2026.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

AGRADECIMIENTOS

A mi alma mater, la *Universidad Autónoma de la Ciudad de México*, por abrirme sus puertas y proporcionarme las herramientas y el conocimiento necesario para desarrollarme como profesionista. Al plantel *Casa Libertad*, donde di mis primeros pasos en esta travesía universitaria, gracias por ser el punto de partida y por brindarme mis primeros acercamientos al modelado matemático. Al plantel *San Lorenzo Tezonco* por acogerme y ayudarme a crecer no solo académicamente sino también como persona, gracias por ser parte fundamental para el cierre de esta etapa.

A mi director, el *Dr. Marcos Ángel González Olvera*, por su invaluable orientación, apoyo y confianza. Le agradezco profundamente por compartir conmigo parte de su conocimiento y por introducirme al fascinante mundo de los sistemas dinámicos y la teoría del caos.

A mi codirectora, la *Dra. Anahí Flores Pérez*, le expreso mi más sincero agradecimiento por su constante apoyo. A pesar de la distancia, siempre estuvo atenta a mis avances y mostró la mejor disposición para resolver dudas y orientar el desarrollo de este trabajo.

Las observaciones, comentarios y sugerencias contribuyen a perfeccionar un trabajo académico. Por ello, expreso mi agradecimiento a la *Dra. Rosa Margarita Álvarez González*, a la *Dra. Lucía Ivonne Hernández Martínez* y al *Dr. Maurilio Velasco Fuentes*, lectores de esta tesis, cuyas aportaciones contribuyeron a mejorar la calidad del presente trabajo.

A todos y cada uno de mis profesores a lo largo de mi vida académica, mi más sincero agradecimiento por compartir su conocimiento conmigo y por moldear la persona académica y profesional que soy. No hay palabras que expliquen la importancia que tiene cada uno de ustedes en mi vida, y siempre estaré eternamente agradecido por su dedicación y apoyo.

A la *Fam. Gutiérrez Francia* y a la *Fam. Salinas Santiago*. Empezando por las personas que ya no están terrenalmente conmigo, pero que su recuerdo, enseñanzas y amor, me siguen acompañando día con día. Gracias, porque su luz sigue guiando mis pasos. También me gustaría agradecer a mi abuelita, mis tíos y tías, a mis primos, primas y sobrinos, desde el mas pequeño hasta el más grande de todos, por ser parte fundamental en mi vida y por brindarme siempre su cariño y apoyo incondicional.

A mi persona verde, ***Guadalupe Martínez (LUU)***, por enseñarme que la verdadera amistad no se mide por la cantidad de momentos compartidos, sino por la calidad del amor y el apoyo incondicional que se brinda. Eres un ejemplo vivo de lo que significa ser un amiga de corazón.

A mis compañeros y amigos de carrera, en especial a ***Ariadna Sandoval, Merari Rubalcava y Miguel A. Peguero***; Chicos, gracias por todas las experiencias, los buenos momentos, las risas, esas horas de estudio y sobre todo por estar siempre ahí, cuando más los necesitaba. Su apoyo y amistad han sido fundamentales para mí durante esta etapa.

Agradezco a los integrantes del ***Grupo Juvenil de Danza Folclórica ITZCOATL***, bajo la dirección del maestro Oscar Crisanto, y a todos los amigos y amigas que la danza folclórica me ha regalado. Chicos, su pasión y dedicación al folclore mexicano me recordaron la importancia de preservar y conservar nuestro legado cultural. Los ensayos, presentaciones y los escenarios que compartimos se convirtieron en mi refugio durante los momentos más intensos de mi investigación, y por eso, les estaré eternamente agradecido.

Finalmente pero no por eso menos importante, agradezco al proyecto de servicio social ***Apoyo al Laboratorio de Control e Instrumentación*** con clave de registro UACM/SS/049/INT, al proyecto de investigación ***UACM CCYT-2023-IMP-05*** y al proyecto de investigación de la Facultad de Ingeniería-UNAM ***Capital Semilla de Apoyo para Proyectos de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CAPSEM I+DT)*** por la colaboración y el apoyo brindado para que esta investigación se lograra presentar en diversos congresos nacionales.

DEDICATORIAS

“En ocasiones la vida puede estar llena de incertidumbre, y podemos estar pasando por situaciones caóticas. Sin embargo, la familia es ese orden silencioso que da sentido y armonía, y nuevamente la vida vuelve a estabilizarse. A mi familia”.

*A mi madre, **Irma Gutiérrez Francia**, porque a pesar de todas las dificultades siempre encontraste una alternativa para sacarnos adelante.*

*A mi padre, **Marco Antonio Salinas Santiago**, por enseñarme que cada día es una nueva oportunidad para reivindicarse, crecer y cambiar.*

*A mis hermanos, **Armado y José Alberto**, por todo el apoyo incondicional que me han brindado y por ser el motor para superarme día con día.*

Los amo.

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Justificación	3
1.4. Estructura de la tesis	4
1.5. Contribuciones	5
2. Antecedentes	7
2.1. Sistemas dinámicos	7
2.1.1. Definición y clasificación de sistemas dinámicos	7
2.1.2. Espacio fase	8
2.1.3. Puntos de equilibrio y estabilidad	9
2.1.4. Ciclos límite	11
2.2. Sistemas dinámicos con retardos	12
2.2.1. Solución de un sistema dinámico con retardos	13
2.2.2. Puntos de equilibrio y análisis de estabilidad	13
2.3. Bifurcaciones	16
2.3.1. Tipos de bifurcaciones	16
2.3.2. Herramientas para la detección de cambios cualitativos en sistemas dinámicos	18
2.4. Caos	23
2.4.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales	23
2.4.2. Atractores extraños	24
2.5. Modelos matemáticos en finanzas	25
2.5.1. Modelo de Van Der Pol (VDP)	25
2.5.2. Modelo Kaldor-Kalecki	26
2.5.3. Modelo financiero caótico	27
3. Modelo financiero de dimensión infinita	31
3.1. Descripción del modelo	31
3.2. Análisis de puntos de equilibrio y estabilidad	32
3.2.1. Para $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 = 0$	33
3.2.2. Para $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 > 0$	38

4. Análisis numérico	39
4.1. Acción cíclica del modelo financiero con un retardo	40
4.1.1. $K > 0$ fijo y variación de τ_1	40
4.1.2. τ_1 fijo y variación de $K > 0$	46
4.2. Acción anti-cíclica del modelo financiero con un retardo	51
4.2.1. $K < 0$ fijo y variación de τ_1	51
4.2.2. τ_1 fijo y variación de $K < 0$	56
4.3. Acción cíclica y anti-cíclica con dos retardos	61
4.3.1. Variación de τ_2 , con τ_1 y $K > 0$ fijos	62
4.3.2. Variación de τ_2 , con τ_1 y $K < 0$ fijos	69
4.4. Discusión e interpretación	74
5. Conclusiones y trabajo futuro	77
Bibliografía	81

1.3.1.Ciclo económico	4
2.1.1.Espacio fase	8
2.1.2.Clasificación de los puntos de equilibrio	10
2.1.3.Tipos de ciclos límite	11
2.2.1.Valores de ω para los cuales se cumple la ec. 2.12.	15
2.2.2.Ejemplo de un sistema con retardos	16
2.3.1.Tipos de bifurcaciones	18
2.3.2.Sección de Poincaré	19
2.3.3.Mapeo de Poincaré	20
2.3.4.Diagrama de bifurcación y soluciones de la ecuación logística al variar r	22
2.3.5.Análisis de Fourier de la ecuación logística	23
2.4.1.Exponente de Lyapunov	24
2.4.2.Atractor de Lorenz	25
2.4.3.Atractor de Rössler	25
2.5.1.Atractor extraño en el modelo financiero 2.21	28
3.2.1.Valores de K , para los cuales la ec. 3.7 se cumple para el punto $(0, 10, 0)$	35
3.2.2.Valores de K , para los cuales la ec. 3.7 se cumple para los puntos $(\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{5})$ y $(-\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5})$	37
4.1.1.Diagrama de bifurcación para $K = 0.1$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$	40
4.1.2.Resultados para $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (A).	41
4.1.3.Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1, con $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y $\tau_1 = 1.85$	42
4.1.4.Resultados para $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (B).	43
4.1.5.Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1, con $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y $\tau_1 = 7.02$	44
4.1.6.Resultados para $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (C).	45
4.1.7.Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 6.40$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$	46
4.1.8.Resultados para $\tau_1 = 6.4$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K > 0$ (A).	47
4.1.9.Resultados para $\tau_1 = 6.4$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K > 0$ (B).	48
4.1.10Resultados para $\tau_1 = 6.4$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K > 0$ (C).	49

4.1.1Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $\tau_2 = 0$ y $K = 0.50$	50
4.2.1.Diagrama de bifurcación para $K = -0.1$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$	51
4.2.2.Resultados para $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (A).	52
4.2.3.Resultados para $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (B).	53
4.2.4.Resultados para $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (C).	54
4.2.5.Atractores extraños en la dinámica anti-cíclica del modelo 3.1 con $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1	55
4.2.6.Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 1.85$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$	57
4.2.7.Resultados para $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K < 0$ (A).	58
4.2.8.Resultados para $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K < 0$ (B).	59
4.2.9.Resultados para $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K < 0$ (C).	60
4.2.10Atractor extraño en la dinámica anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y $K = -0.085$	61
4.3.1.Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 6.40$ y $K = 0.35$ en la sección de Poincaré $z = 0$	62
4.3.2.Resultados para $K = 0.35$, $\tau_1 = 6.40$ y distintos valores de τ_2 (A).	63
4.3.3.Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $K = 0.35$ y $\tau_2 = 1.00$	64
4.3.4.Resultados para $K = 0.35$, $\tau_1 = 6.40$ y distintos valores de τ_2 (B).	65
4.3.5.Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $K = 0.35$ y $\tau_2 = 1.06$	66
4.3.6.Resultados para $K = 0.35$, $\tau_1 = 6.40$ y distintos valores de τ_2 (C).	67
4.3.7.Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $K = 0.35$ y $\tau_2 = 1.116$	68
4.3.8.Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 1.85$ y $K = -0.098$ en la sección de Poincaré $z = 0$	69
4.3.9.Resultados para $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y variación τ_2 (A).	70
4.3.10Resultados para $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y variación τ_2 (B).	71
4.3.11Atractores extraños en la dinámica anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y distintos valores de τ_2	72
4.3.12Resultados para $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y variación τ_2 (C).	73

2.1. Valores de τ para $\omega = \pm 6.00$	15
3.1. Acción cíclica y anti-cíclica.	32
3.2. Análisis de estabilidad del punto $(0, 10, 0)$	35
3.3. Análisis de estabilidad del punto $(0, 10, 0)$ y $K \in [-3.50, -3.00]$	36
3.4. Análisis de estabilidad de los puntos $(\pm \frac{\sqrt{15}}{5}, 4, \mp \frac{\sqrt{15}}{5})$	37
4.1. Acción cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando τ_1	46
4.2. Acción cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando $K > 0$	50
4.3. Acción anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando τ_1	56
4.4. Acción anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando $K < 0$	61
4.5. Acción cíclica del modelo financiero 3.1 con dos retardos, variando τ_2	68
4.6. Acción anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con dos retardos, variando τ_2	74

Los sistemas dinámicos, siempre han estado presentes a lo largo de la historia, desde que el ser humano comenzó a observar y tratar de predecir los fenómenos de su entorno. Las leyes de Newton, expuestas a finales del siglo XVII, fueron la primer estructura que ayudó a modelar dichos fenómenos, ya que implicaba conocer la trayectoria que seguiría una partícula al aplicarle una fuerza conocida. Sin embargo, estas leyes contienen una condición: conocer la posición y velocidad de la partícula en el instante inicial (condiciones iniciales) [1]. Basado en estos hechos, en 1776 el matemático francés Pierre Simon de Laplace afirmaba que, si se conociera la velocidad y la posición de todas la partículas del universo en un instante dado, entonces se podría predecir su pasado y futuro para el resto de los siglos, siendo esta afirmación un pilar crucial para el análisis del determinismo de los sistemas dinámicos. Sin embargo, en la actualidad sabemos que existen fenómenos que cuentan con un grado de impredecibilidad y desorden, lo que hoy se conoce como *teoría del caos*.

Sin embargo, llegar a la conclusión de que en nuestro entorno existen fenómenos impredecibles no fue una tarea fácil. Un gran avance se produjo con el trabajo de Poincaré a finales del siglo XIX quien incorporó un nuevo punto de vista que enfatizaba lo cualitativo más que lo cuantitativo al cuestionarse si el sistema solar era estable para todo tiempo t , desarrollando con esta incógnita un poderoso enfoque geométrico para analizar estas cuestiones [18]. Poincaré fue también la primera persona en vislumbrar la posibilidad del caos. En 1903 escribió lo siguiente:

*... nosotros solamente podemos conocer la situación inicial de manera **aproximada**. Si esto nos permitiera predecir la situación que sigue en el tiempo con **la misma aproximación**, es todo lo que necesitaríamos, y podríamos decir que el fenómeno ha sido predicho, que está regido por leyes. Pero esto no es siempre así; puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan condiciones muy diferentes en los fenómenos finales. Si un pequeño error en las condiciones iniciales produce un enorme error en las condiciones finales, la predicción se vuelve imposible y tenemos un fenómeno fortuito [1].*

A pesar de sus aportaciones, las ideas de Poincaré fueron ignoradas durante mucho tiempo. Si su trabajo hubiera sido retomado con mayor interés, la teoría del caos podría haberse

desarrollado mucho antes [1]. No fue sino hasta 1963 cuando Lorenz descubrió por primera vez el movimiento caótico en un atractor extraño, mientras estudiaba un sistema simplificado diseñado para modelar el clima.

Lorenz encontró que las soluciones a sus ecuaciones nunca se estabilizaban en un equilibrio ni en un estado periódico, sino que continuaban oscilando de manera irregular y aperiódica. Además, al iniciar sus simulaciones con condiciones iniciales apenas distintas, observó que los comportamientos resultantes divergían rápidamente, volviéndose completamente diferentes. A pesar de esta aparente aleatoriedad, también identificó una estructura en el caos, cuando las soluciones de sus ecuaciones se representaban en tres dimensiones, se organizaban en un conjunto de puntos con forma de mariposa [18]. Este descubrimiento marcó el nacimiento formal de la teoría del caos, que hoy se aplica en numerosos campos como la biología, la economía y la física.

En el ámbito de las finanzas y los ciclos económicos, la presencia de caos determinista implica que pequeñas variaciones en parámetros estructurales o en las condiciones iniciales pueden generar fluctuaciones abruptas y no lineales, dificultando la predicción a largo plazo. Esta perspectiva ha dado origen a una línea de investigación que utiliza la teoría del caos y de las bifurcaciones para modelar fenómenos como las crisis financieras, los ciclos de inversión y las dinámicas de mercado [11].

Diversos modelos matemáticos han evidenciado la presencia de distintos comportamientos, como ciclos límite e incluso dinámicas caóticas en el ámbito financiero, entre los que se encuentran el modelo de Van der Pol (VDP), el modelo Kaldor-Kalecki y el modelo financiero con retardos de Chen, por mencionar solo algunos.

Estos ejemplos ilustran que el caos financiero no es sinónimo de desorden absoluto, sino el resultado de estructuras deterministas complejas que producen patrones aparentemente aleatorios. Reconocer este tipo de dinámicas permite enriquecer la comprensión de fenómenos como las crisis financieras, la volatilidad de los mercados y la persistencia de los ciclos económicos, ofreciendo una visión alternativa a la estabilidad.

1.1. Motivación

Actualmente, modelar la dinámica financiera conlleva un gran desafío, ya que predecir y analizar datos económicos centrales es cada vez más complejo. Los mercados financieros exhiben una amplia variedad de fenómenos impredecibles, como tasas de interés extremadamente bajas o negativas, fluctuaciones en los precios de las materias primas, acumulación de capital y cambios en la inversión, así como riesgos y crisis económicas, entre otros [11]. Por otra parte, la interacción entre los ofertantes de crédito y los clientes se desarrolla en un entorno altamente dinámico e incierto, donde con frecuencia surgen imprevistos. Además, los mercados financieros no se pueden eliminar, aun cuando estén plagados de distorsiones, por lo tanto, es mejor conocerlos, entenderlos y regularlos en caso de que no se esté llegando a la solución óptima para la humanidad [8].

Si bien la teoría del caos ha aportado una estructura sólida para el estudio de fenómenos

impredecibles, hasta el día de hoy no se ha aplicado de manera suficiente en la teoría y en la práctica financiera. No obstante, investigaciones como las de Klioutchnikov [11] argumentan lo siguiente:

1. La teoría del caos es competitiva y podría convertirse en un enfoque conveniente para el estudio del mercado financiero.
2. Las finanzas tradicionales no consideran la dinámica, mientras que la teoría del caos se basa precisamente en la evolución dinámica de los sistemas, lo que permite que su aplicación se acerque más a la realidad.
3. La inestabilidad no está ligada exclusivamente a las crisis financieras.

Por ello la elección de estudiar la dinámica del mercado financiero, para tratar de comprender y analizar con mayor precisión la complejidad inherente de este sistema. Además, al considerar una retroalimentación, $u(t)$, la cual conlleva a introducir un peso K para la toma de decisiones y retardos temporales τ , pueden inducir a dinámicas aún más complejas dentro del sistema, las cuales son de interés estudiar para analizar su comportamiento.

1.2. Objetivos

■ Generales

- Analizar y explorar el efecto del cambio en los retardos τ_1 , τ_2 y el peso K de la retroalimentación $u(t) = K[x(t) - x(t - \tau_1)]$, en el comportamiento del sistema financiero de Chen [2], debido a la obtención retrasada de información financiera.

■ Específicos

- Describir y comprender las características fundamentales del modelo financiero y cómo sus componentes permiten describir fenómenos económicos.
- Implementar una retroalimentación en el modelo financiero con el objetivo de describir con mayor precisión la dinámica financiera, al incluir retardos temporales.
- Realizar y analizar el diagrama de bifurcación para la toma de decisiones K y los retardos τ_1 y τ_2 .
- Identificar si existen parámetros de bifurcación que impliquen un cambio en la dinámica del modelo financiero.

1.3. Justificación

Los órganos reguladores y los ofertantes de crédito toman decisiones sobre ajustes en la tasa de interés con base en información financiera que, en muchos casos, se encuentra diferida en el tiempo. Dicha información puede generar efectos no triviales en la dinámica del sistema financiero, introduciendo comportamientos complejos que pueden manifestarse en forma de ciclos límite e incluso dinámicas caóticas.

El estudio de estos fenómenos resulta fundamental, ya que una comprensión detallada de los efectos del retardo en la evolución de los mercados financieros permite no solo describir mejor sus fluctuaciones, sino también evaluar posibles estrategias de regulación que mitiguen riesgos sistémicos. En este contexto, el análisis de bifurcaciones en modelos financieros con retardos se vuelve una herramienta poderosa para identificar transiciones críticas en la dinámica del sistema y sus implicaciones en la estabilización.

Además, la incorporación de una retroalimentación no lineal, basada en la diferencia ponderada de la tasa de interés entre valores presentes y pasados, y regulada por una constante de proporcionalidad K , permite analizar y distinguir entre comportamientos cíclicos ($K > 0$) y anticíclicos ($K < 0$). Dichos comportamientos contribuyen o contrarrestan las fluctuaciones inherentes al ciclo económico, generando fases de auge y depresión (véase Fig. 1.3.1).

Esta investigación busca contribuir al entendimiento de estos procesos mediante el estudio de un modelo financiero con retardos, proporcionando una perspectiva matemática que permita caracterizar su comportamiento y aportar elementos útiles para la toma de decisiones en el ámbito financiero.

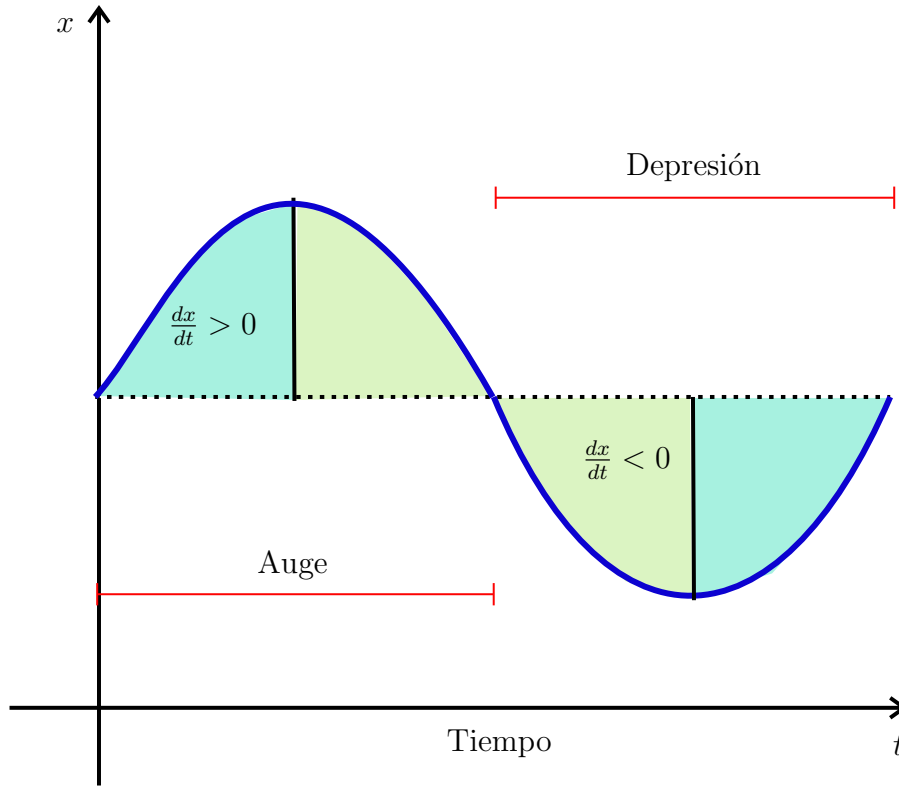


Figura 1.3.1: Ciclo económico

1.4. Estructura de la tesis

El presente trabajo está dividido en 5 capítulos que son descritos a continuación:

- **Capítulo 1.** Presenta una visión general sobre la historia de la dinámica y la teoría del caos. Además, expone los motivos y objetivos de esta investigación, así como su

justificación, proporcionando un contexto amplio del problema abordado.

- **Capítulo 2.** Introduce los conceptos y teorías fundamentales que sustentan esta investigación. Se abordan temas relacionados con sistemas dinámicos, sistemas con retardos y las condiciones bajo las cuales estos pueden presentar dinámicas caóticas. Además, se describen herramientas esenciales para el análisis del caos, como los diagramas de bifurcación y las secciones de Poincaré. Finalmente, se mencionan algunos modelos que han sido empleados para estudiar la dinámica financiera.
- **Capítulo 3.** Se presenta de manera detallada el modelo financiero de dimensión infinita estudiado en este trabajo. Se obtienen y analizan los puntos de equilibrio, así como su estabilidad.
- **Capítulo 4.** Contiene el análisis computacional realizado, en el que se identifican y discuten distintos comportamientos dinámicos que emergen en el modelo financiero bajo ciertas configuraciones de parámetros.
- **Capítulo 5.** Expone las conclusiones de la investigación y señala posibles brechas de trabajo a futuro.

1.5. Contribuciones

Durante el desarrollo de este trabajo se realizaron diversas presentaciones en congresos y escuelas nacionales, las cuales permitieron compartir los avances de la investigación y obtener retroalimentación académica. Entre ellas se incluyen:

- Salinas-Gutiérrez, Jesús; González-Olvera, Marcos Ángel; Flores-Peréz, Anahí. ***Modelo financiero con análisis de retardo y su comportamiento caótico***. XXXI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico (ENOAN) 2023. Cuernavaca, Morelos. Modalidad: ***Cartel***, el cual fue galardonado con el reconocimiento a mejor cartel nivel licenciatura.
- Salinas-Gutiérrez, Jesús; González-Olvera, Marcos Ángel; Flores-Peréz, Anahí. ***Modelo financiero con análisis de retardo y su comportamiento caótico***. 56° Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (SSM) 2023. San Luis Potosí, S.L.P. Modalidad: ***Cartel***.
- Salinas-Gutiérrez, Jesús; González-Olvera, Marcos Ángel; Flores-Peréz, Anahí. ***Análisis de bifurcación de un modelo financiero caótico con retardos***. XXXII Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico (ENOAN) 2024. Durango, Dgo. Modalidad: ***Ponencia por solicitud***.
- Salinas-Gutiérrez, Jesús; González-Olvera, Marcos Ángel; Flores-Peréz, Anahí. ***Comportamientos caóticos en un modelo financiero de dimensión infinita***. XVIII Jornadas de modelación matemática 2025. San Lorenzo Tezonco, CDMX. Modalidad: ***Cartel***.

2.1. Sistemas dinámicos

2.1.1. Definición y clasificación de sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones matemáticas que modelan la evolución en el tiempo de ciertas variables, estas ecuaciones pueden representar distintos fenómenos de nuestra vida cotidiana, tales como procesos físicos, biológicos e incluso situaciones relacionadas con el mercado financiero. Un sistema dinámico se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde, el punto sobre la variable x denota diferenciación con respecto a t (tiempo), es decir $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Las x_i representan las variables que dependen del contexto del problema. Por ejemplo, podrían ser las tasas de crecimiento de una población celular, la presión arterial en distintas fases del ciclo cardíaco, las tasas de interés en diferentes periodos, etcétera. Las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ describen cómo varían estas variables y están definidas según las características específicas del sistema en estudio. En este marco, cada x_i recibe el nombre de variable de estado, ya que en conjunto determinan el estado del sistema en un instante dado. El estado resume toda la información necesaria del pasado para predecir la evolución futura mediante las ecuaciones del sistema. De esta manera, conocer el vector de estado $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ en un tiempo inicial es suficiente para describir la trayectoria temporal del sistema.

A lo largo de la historia, los sistemas dinámicos se han clasificado de distintas maneras. Dependiendo la forma en que está formulado, los sistemas pueden ser:

- **Continuos o discretos:**

Si el tiempo evoluciona de manera continua ($t \in \mathbb{R}$) se dice que el sistema es **Continuo**;

Si el tiempo evoluciona de manera discreta ($t \in \mathbb{N}$) se dice que el sistema es **Discreto**, además, este tipo de sistemas están modelados generalmente mediante una función de recurrencia.

■ **Lineales o no lineales:**

Esta clasificación dependerá de las funciones que describen el sistema en estudio, es decir, si son **lineales** en sus variables y sus derivadas o presentan términos **no lineales**.

■ **Deterministas o estocásticos:**

Si la evolución está completamente definida por las ecuaciones se le nombra sistema **Determinista**, si llegara a incluir algún término aleatorio, el sistema se nombrará **Estocástico**.

■ **Regulares o caóticos:**

Esta clasificación dependerá si el sistema presenta trayectorias predecibles (**Regulares**) o una dependencia extrema a las condiciones iniciales (**Caótico**).

2.1.2. Espacio fase

El sistema 2.1 se puede escribir de forma más compacta en notación vectorial, de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. En esta notación $\mathbf{x}$ representará un punto en el plano de fase y $\dot{\mathbf{x}}$ será el vector de velocidad en este punto. En este contexto, espacio fase se definirá como:

Espacio fase

El espacio fase es el conjunto de todos los estados posibles de un sistema dinámico y el cual define la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ del sistema dinámico [12], (Véase Fig. 2.1.1).

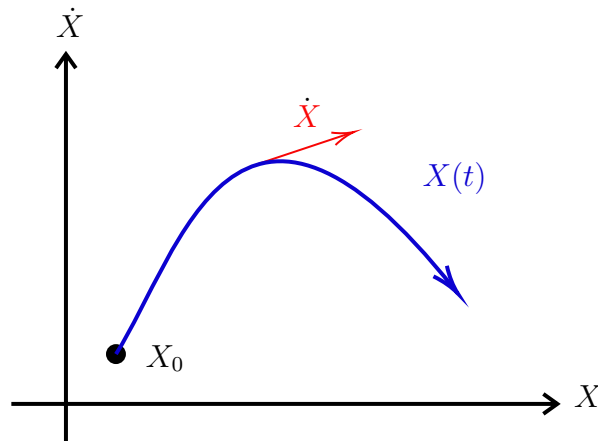


Figura 2.1.1: Espacio fase

En pocas palabras, el espacio fase es una herramienta que nos permite visualizar la solución o trayectoria del sistema dinámico. Además, todo el espacio fase está lleno de un sinfín

de trayectorias, ya que cualquier punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dentro del espacio fase puede desempeñarse como condición inicial $\mathbf{x}_0$.

Dentro de los principales objetivos de las investigaciones sobre los sistemas dinámicos se encuentra la caracterización de las trayectorias en el espacio fase cuando se les sigue durante un tiempo muy largo, por no decir infinito [14].

2.1.3. Puntos de equilibrio y estabilidad

Los puntos de equilibrio o puntos fijos, los cuales se representaran como $\mathbf{x}^*$, son puntos en el espacio de fase, que cumplen:

$$F(\mathbf{x}^*) = (f_1(\mathbf{x}^*), f_2(\mathbf{x}^*), \dots, f(\mathbf{x}^*)) = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Es decir, son soluciones estacionarias, constantes o en reposo, ya que si $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^*$, entonces $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ para cualquier periodo de tiempo t .

Para determinar los puntos de equilibrio del un sistema dinámico, es necesario resolver el conjunto de ecuaciones obtenidas al igualar a cero las funciones que describen el sistema, esto es:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Al resolver el sistema 2.4, se obtienen los puntos de equilibrio del modelo 2.1. Una vez identificadas estas soluciones estacionarias, el siguiente paso es analizar su estabilidad. Para ello se emplea una linealización en torno al punto de equilibrio, utilizando una expansión en series de Taylor y despreciando los términos de orden superior a uno. De este modo el sistema no lineal se aproxima localmente por un sistema lineal, lo que permite aprovechar las herramientas de estabilidad desarrolladas para sistemas lineales. En este contexto, se introduce la matriz jacobiana $J(\mathbf{x})$, compuesta por las derivadas parciales de las funciones del sistema con respecto a cada una de las variables:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ es posible estudiar la estabilidad local mediante el análisis de los valores propios λ de $J(\mathbf{x}^*)$. Si todos los valores λ tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Si al menos un valor λ tiene parte real positiva, el equilibrio es inestable.

Los puntos de equilibrio pueden clasificarse, en términos generales, de acuerdo con la naturaleza de los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio. Esta clasificación proporciona información sobre el comportamiento cualitativo del sistema

cerca de dichos puntos. A continuación, se describen los tipos más comunes para sistemas de dimensión dos [15], aunque las ideas pueden extenderse a sistemas de mayor dimensión.

- **Nodo estable:** Todos los valores propios λ de la matriz jacobiana $J(\mathbf{x}^*)$ son reales y negativos. En este caso el punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ resulta ser un atractor, y todas las trayectorias cercanas tienden a él.
- **Nodo inestable:** Todos los valores propios λ de la matriz jacobiana $J(\mathbf{x}^*)$ son reales y positivos. En este caso el punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ resulta ser un repulsor, es decir, todas las trayectorias se alejan de él.
- **Silla:** Uno de los valores propios λ de la matriz jacobiana $J(\mathbf{x}^*)$ es real positivo y otro real negativo. Inicialmente pareciera que las trayectorias tienden a él, pero después divergen.
- **Centro:** Todos los valores propios λ de la matriz jacobiana $J(\mathbf{x}^*)$ son imaginarios puros. Las trayectorias no se acercan ni se alejan, y el comportamiento es típicamente oscilatorio.

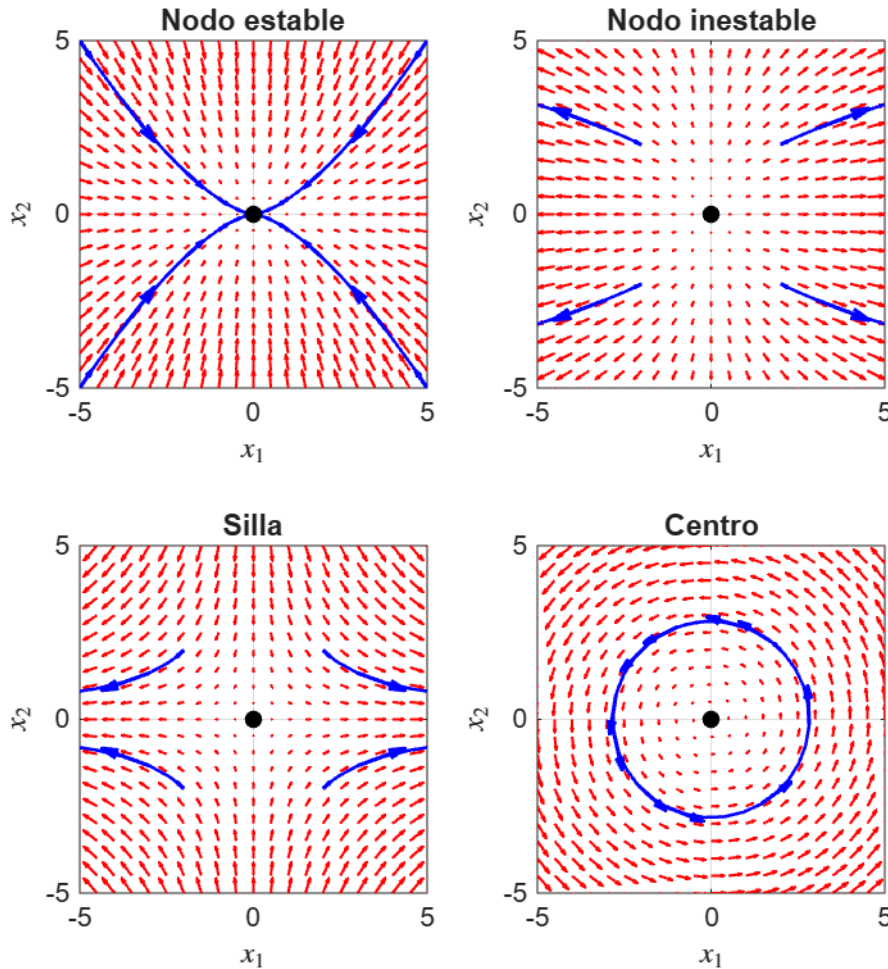


Figura 2.1.2: Clasificación de los puntos de equilibrio

2.1.4. Ciclos límite

Las soluciones periódicas en los sistemas dinámicos son trayectorias que se repiten en intervalos regulares de tiempo. En el espacio fase, se observan como curvas cerradas alrededor de un punto fijo $\mathbf{x}^*$ llamado centro, además la trayectoria regresará a un estado previo y se convierte en un patrón que se repite una y otra vez, reproduciendo con ello la misma solución infinitamente.

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}_1) = \mathbf{x}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{T}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}_1 + 2\mathbf{T}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}_1 + 3\mathbf{T}) = \dots = \mathbf{x}(\mathbf{t}_1 + n\mathbf{T}) \quad \mathbf{T} > 0 \quad (2.5)$$

Por otro lado, se definirá ciclo límite como:

Ciclo límite

Un **ciclo límite** es una trayectoria (solución) cerrada y aislada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en su vecindad. Las trayectorias cercanas a esta se mueven en espiral, acercándose o alejándose del ciclo límite [15].

Dependiendo del comportamiento de las trayectorias vecinas, los ciclos límite pueden clasificarse en tres tipos (Véase Fig. 2.1.3).

- **Estables:** Todas las trayectorias cercanas convergen hacia el ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$.
- **Inestables:** Todas las trayectorias cercanas se alejan del ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$.
- **Semiestable:** Algunas trayectorias cercanas convergen hacia el ciclo límite, mientras otras se alejan de él cuando $t \rightarrow \infty$.

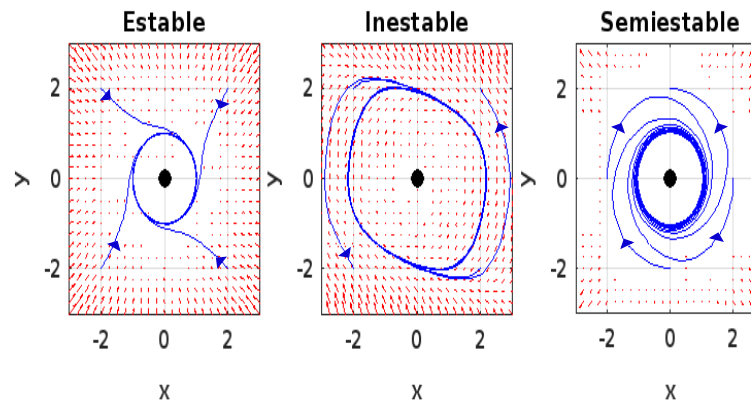


Figura 2.1.3: Tipos de ciclos límite

Los ciclos límite son comportamientos que suelen ocurrir en sistemas dinámicos no lineales de dos o más dimensiones. En contraste, en un sistema lineal, una órbita cerrada corresponde a una dinámica provocada por un punto fijo y en ese caso, la dinámica no es aislada.

Para un sistema de dimensión dos existen teoremas fundamentales que justifican la existencia de los ciclos límite, como el teorema de Poincaré-Bendixson y el teorema de Liénard.

Aunque estas herramientas no son directamente aplicables a sistemas de mayor dimensión, es importante mencionarlos como antecedentes importantes en la teoría de los sistemas dinámicos.

Teorema Poincaré-Bendixson

Sea

- R un subconjunto cerrado y acotado del plano que no contiene puntos fijos;
- $\frac{dx}{dt} = f(x)$ un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto contenido en R ;
- C una trayectoria confinada en R ;

Entonces C es una órbita cerrada, o gira en espiral hacia una órbita cerrada o a un punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$. En cualquier caso, R contiene una órbita cerrada [15].

Teorema Liénard

Sea $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen:

- $f(x)$ y $g(x)$ son continuamente diferenciables para toda x .
- $g(x)$ es una función impar.
- $g(x) > 0$ para toda $x > 0$.
- $f(x)$ es una función par.
- La función impar $F(x) = \int_0^x f(u)du$:
 - Tiene exactamente una raíz positiva en $x = a$.
 - Es negativa para $0 < x < a$.
 - Es positiva y no decreciente para $x > a$.
 - $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$

Entonces el sistema tiene un único ciclo límite estable entorno al origen del plano fase [15].

2.2. Sistemas dinámicos con retardos

En los últimos años el uso de retardos, τ , en los sistemas dinámicos han tomado relevancia, ya que aportan una nueva perspectiva al modelar procesos en los que el tiempo de reacción no es inmediato. En otras palabras, este tipo de sistemas tienen la característica de que el cambio de las variables de estado en un instante dado depende no solo del estado actual, sino también de valores pasados [4].

El crecimiento poblacional, la dinámica de infecciones y los mercados financieros, por nombrar algunos fenómenos, suelen modelarse mediante sistemas con retardo temporal, dado que

en ellos suelen manifestarse efectos de memoria o retraso en la transmisión de información.

Un modelo con retardos se puede representar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1(t - \tau_1), x_2(t - \tau_2), \dots, x_m(t - \tau_m)) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1(t - \tau_1), x_2(t - \tau_2), \dots, x_m(t - \tau_m)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1(t - \tau_1), x_2(t - \tau_2), \dots, x_m(t - \tau_m))\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, es la variable de estado en el tiempo t y $0 < \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ representan retardos en el tiempo. Cabe añadir que, los sistemas con retardo requieren conocer una función historia $\phi : [-\tau_{max}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\tau_{max} = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$. Por consiguiente, el estado actual dependerá de toda la trayectoria pasada en el intervalo $[t - \tau_{max}, t]$.

Cabe destacar que los sistemas dinámicos con retardos son considerados modelos de dimensión infinita, pues su espacio de estados ya no es $\mathbb{R}^n$, sino un espacio funcional $C([- \tau_{max}, 0], \mathbb{R}^n)$, un conjunto de funciones continuas en dicho intervalo. Esta característica conlleva a nuevos desafíos en la teoría de los sistemas dinámicos, por ejemplo: la estabilidad y la dinámica cualitativa del sistema pueden ser más complejos que en el caso de dimensión finita.

2.2.1. Solución de un sistema dinámico con retardos

Obtener la solución de un sistema dinámico con retardos no es una tarea sencilla; existen diferentes técnicas conocidas para resolverlos. A continuación se presentan y explican algunas de las más utilizadas en la literatura [4].

- **Método de los pasos:** Este método consiste en resolver el sistema de forma iterativa dividiendo el dominio temporal en subintervalos de tamaño no mayor a $\tau_{min} = \min(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$, siendo el primer intervalo de integración $t \in [0, \tau_{min}]$. En cada subintervalo el sistema se resuelve como si no existiera retardo alguno en el modelo, sin embargo, utiliza valores de los retardos que ya fueron calculados posteriormente o se encuentran definidos en la función historia. El procedimiento se continúa hasta encontrar la solución en el dominio temporal deseado o, en algunos casos, hasta encontrar un patrón que permita construir la solución en los otros subintervalos.
- **Transformada de Laplace:** El proceso es similar al caso clásico: aplicar la transformada a la ecuación diferencial, agrupar términos y posteriormente determinar la transformada inversa, lo que dará lugar a la solución del sistema.
- **Solución numérica:** También se puede recurrir a métodos implementados en herramientas computacionales. La función `dd23` de Matlab resuelve ecuaciones diferenciales con retardos positivos y constantes mediante un esquema adaptativo basado en Runge-kutta.

2.2.2. Puntos de equilibrio y análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad de un sistema dinámico con retardos, se seguirá un procedimiento similar al de un sistema sin retardos, es decir, se estudiará la estabilidad local de los

puntos de equilibrio. Sin embargo, en este caso el análisis se llevará a cabo en un espacio de fases de dimensión infinita debido a la presencia del retardo.

En la sección anterior se definió un punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ como una solución estacionaria. En consecuencia, un punto de equilibrio en un sistema con retardos se define como una solución en reposo, donde $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t - \tau) = \mathbf{x}^*$ y cumple que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, obtener los puntos de equilibrio del sistema 2.6, se reduce a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para analizar la estabilidad de cada punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ del modelo 2.6 se estudia la ocurrencia de cualquier posible cambio de estabilidad resultante del aumento de los retardos $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$. Para ello se analiza el pseudo-polinomio característico correspondiente al sistema [6, 13], el cual está dado por

$$\det \left(\lambda I - J_0 - \sum_{k=1}^m J_{\tau_k} e^{-\lambda \tau_k} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Donde λ serán los valores propios del pseudo-polinomio característico, además

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (J_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (J_{\tau_k})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j(t - \tau_k)}.$$

Al evaluar cada punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ en el pseudo-polinomio característico es posible estudiar la estabilidad local mediante el análisis de los valores propios λ , los cuales resultan ser números complejos [13].

- I) Si todos sus valores propios λ tienen parte real negativa, es decir, si $\text{Re}(\lambda) < 0$ para todas las soluciones de la ec. (2.8), el sistema (2.6) es asintóticamente estable.
- II) Si algún valor propio tiene parte real positiva, $\text{Re}(\lambda) > 0$ el sistema se vuelve inestable.
- III) Si $\lambda = i\omega$ el valor propio cruza el eje imaginario, es decir, cambia de $\text{Re}(\lambda) < 0$ a $\text{Re}(\lambda) > 0$. Esto significa que el sistema pasa de un estado de equilibrio estable a un régimen oscilatorio estable o inestable.

Ejemplo 1 Consideremos el sistema con retardo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t - \tau_1) \\ x_2(t - \tau_1) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

en el cual $a = 8$, $b = -2$, $c = -10$ y $\mathbf{x}^* = (0, 0)$. Para analizar la estabilidad de este punto de equilibrio, se debe estudiar las raíces del polinomio característico asociado al sistema y la estabilidad dependerá del valor de τ_1 y los parámetros a , b y c .

El pseudo-polinomio característico asociado al sistema 2.9 se obtiene resolviendo:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-\lambda\tau_1} \right) = 0,$$

y del cual se obtiene

$$e^{-\lambda\tau_1} = -\frac{\lambda^2 + 7\lambda - 8}{10 - 10\lambda}. \quad (2.10)$$

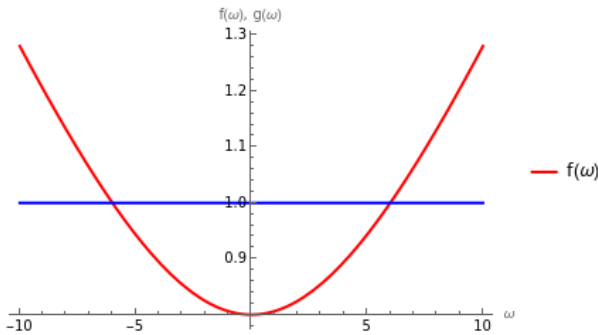
Para determinar el retardo τ_1 que produce soluciones oscilatorias, se hacen las sustituciones $\lambda = i\omega$, $e^{-i\omega\tau_1} = \cos(\omega\tau_1) + i\sin(\omega\tau_1)$, $q_1(i\omega) = (i\omega)^2 + 7(i\omega) - 8$ y $q_2(i\omega) = -10 + 10(i\omega)$, las cuales convierten la ec. 2.10 en

$$\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau) = \operatorname{Re} \left(\frac{q_1(i\omega)}{q_2(i\omega)} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{q_1(i\omega)}{q_2(i\omega)} \right), \quad (2.11)$$

y por lo tanto la ec. 2.10 queda simplificada de la siguiente manera

$$\sqrt{\operatorname{Re} \left(\frac{q_1(i\omega)}{q_2(i\omega)} \right)^2 + \operatorname{Im} \left(\frac{q_1(i\omega)}{q_2(i\omega)} \right)^2} = 1. \quad (2.12)$$

En la Fig. 2.2.1 se muestra, en color rojo, la función $f(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re} \left(\frac{q_1(i\omega)}{q_2(i\omega)} \right)^2 + \operatorname{Im} \left(\frac{q_1(i\omega)}{q_2(i\omega)} \right)^2}$ y, en color azul, la función $f(\omega) = 1$. Los valores de ω correspondientes a los puntos de intersección entre ambas funciones ($\omega = \pm 6.00$) son aquellos que permiten soluciones del tipo $\lambda = i\omega$, las cuales garantizan la existencia de un cambio cualitativo en el comportamiento dinámico del sistema. Por lo tanto se pudieron obtener los valores τ_1 para los cuales el sistema 2.9 tiene cambios en su estabilidad, al sustituir $\lambda = \pm 6.00i$ y despejar τ_1 en la ecuación 2.10 (Véase tabla 2.1).



Valor de ω	Valor de τ
$\omega = \pm 6.00$	$\tau_1 = 1.9815$
	$\tau_1 = 4.0815$
	$\tau_1 = 7.2231$
	$\tau_1 = 10.3647$
	$\tau_1 = 14.5535$

Figura 2.2.1: Valores de ω para los cuales se cumple la ec. 2.12.

Tabla 2.1: Valores de τ para $\omega = \pm 6.00$

Por otro lado, la Fig. 2.2.2, muestra las soluciones (trayectorias) obtenidas al variar el retardo τ_1 en el sistema 2.9. Además, observe que el punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = (0, 0)$, es un punto estable, pues para cada τ_1 elegido y la condición inician $\mathbf{x}_0 = (0.5, 0.5)$, la trayectoria converge hacia dicho punto de equilibrio.

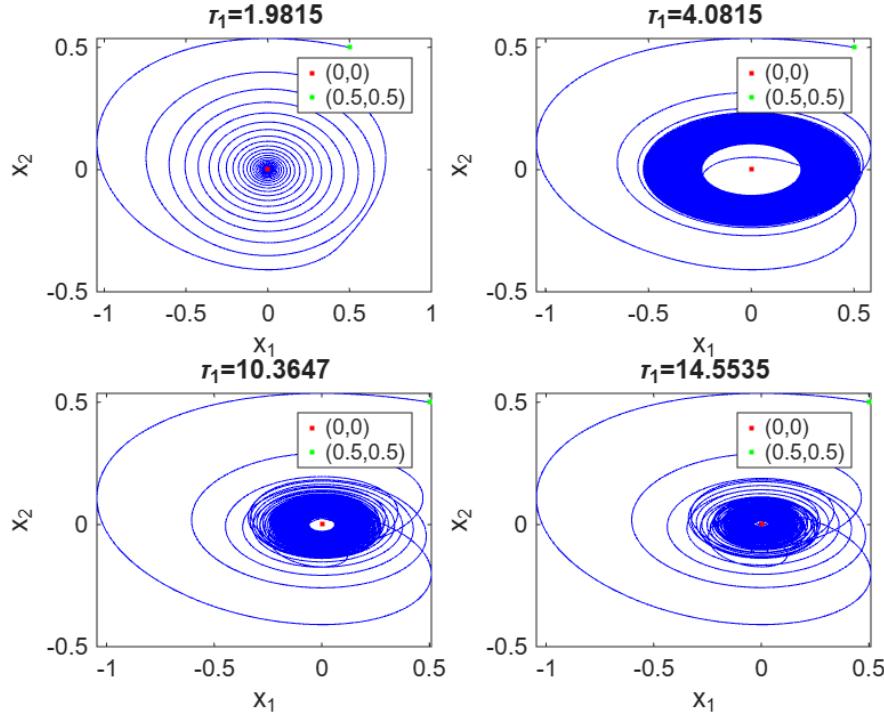


Figura 2.2.2: Ejemplo de un sistema con retardos

2.3. Bifurcaciones

La mayoría de los modelos matemáticos dependen en gran medida de sus parámetros, lo cual implica que una pequeña variación en estos puede alterar significativamente la dinámica del sistema. Es decir, un pequeño ajuste en los parámetros puede transformar puntos de equilibrio, o bien modificar la estabilidad del sistema. Por lo tanto:

Bifurcación

Una **bifurcación** ocurre en un modelo no lineal, cuando un pequeño cambio en un parámetro da como resultado un cambio **cualitativo** en la solución a largo plazo [18].

El estudio y análisis de las bifurcaciones ha sido un descubrimiento importante para la teoría de sistemas dinámicos no lineales, pues al incluir este concepto se tiene una estructura más sólida sobre la dinámica del sistema y gracias a ello poder clasificar y predecir transiciones dinámicas complejas de forma más rigurosa [18].

2.3.1. Tipos de bifurcaciones

- **Bifurcación silla-nodo:** Cuando un parámetro es modificado en un sistema y esa variación hace que dos puntos de equilibrio se atraigan, colisionen y se aniquilen entre sí, se dice que ocurre una bifurcación silla-nodo.

Para ejemplificar este tipo de bifurcación consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = r + \mathbf{x}^2 \quad r \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Como se puede observar en la Fig. 2.3.1 (a), cuando $r < 0$ el sistema presenta dos puntos de equilibrio: uno estable, representado con color negro, y otro inestable, repre-

sentado en color blanco. Para $r = 0$, existe un único punto de equilibrio semiestable. Finalmente cuando $r > 0$, no existen puntos de equilibrio reales. Entonces, se dice que $r = 0$, es un parámetro de bifurcación, pues las dinámicas para $r < 0$ y $r > 0$ difieren cualitativamente.

- **Bifurcación transcítica:** Algunos sistemas tienen la peculiaridad de presentar al menos un punto de equilibrio para todos los valores que pueda tomar un parámetro. No obstante, dicho punto puede cambiar su estabilidad a medida que el parámetro se modifica. Por ejemplo en el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = r\mathbf{x} - \mathbf{x}^2 \quad r \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

el punto $\mathbf{x} = 0$, siempre será un punto de equilibrio para todo valor de r . Sin embargo, la estabilidad de este punto cambia a medida que se modifica el parámetro r . Como se observa en la Fig. 2.3.1 (b), para $r < 0$ el punto $\mathbf{x}^* = 0$ es estable, cuando $r = 0$ es semiestable y finalmente para $r > 0$ se convierte en inestable. También se puede observar el punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = r$, cuya estabilidad de igual manera cambia conforme varía r . Este intercambio de estabilidad entre dos puntos de equilibrio es característico de la bifurcación transcítica. Por lo tanto, al igual que en el caso anterior, $r = 0$ es considerado como un parámetro de bifurcación.

- **Bifurcación de tenedor:** Este tipo de bifurcaciones son muy comunes en sistemas simétricos y su característica principal, es que un punto de equilibrio da lugar a otros dos, o viceversa, dependiendo el valor del parámetro. Si el punto de equilibrio central resulta ser inestable y los dos puntos de equilibrio de los extremos simétricos son estables, al variar el parámetro, se trata de una bifurcación supercrítica. Por el contrario, si al modificar el parámetro, el punto de equilibrio central es estable y emergen dos puntos de equilibrio simétricos inestables, se trata de una bifurcación subcrítica, que suele dar lugar a comportamientos más complejos.

Con el fin de ilustrar esta bifurcación, consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = r\mathbf{x} + \mathbf{x}^3 \quad r \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

donde la solución $\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}(t)$. Como se puede observar en la Fig. 2.3.1 (c), el origen es siempre un punto de equilibrio. Sin embargo su estabilidad varía según sea modificado el parámetro r . Para $r < 0$ se tiene un único punto de equilibrio y además es estable, cuando $r = 0$ se sigue teniendo un único punto de equilibrio estable, pero mucho más débil y si $r > 0$, el origen se convierte en un punto de equilibrio inestable y emergen dos nuevos puntos de equilibrio estables de la forma $-\mathbf{x} = \pm\sqrt{r}$, nuevamente como en los casos anteriores $r = 0$ es un parámetro de bifurcación.

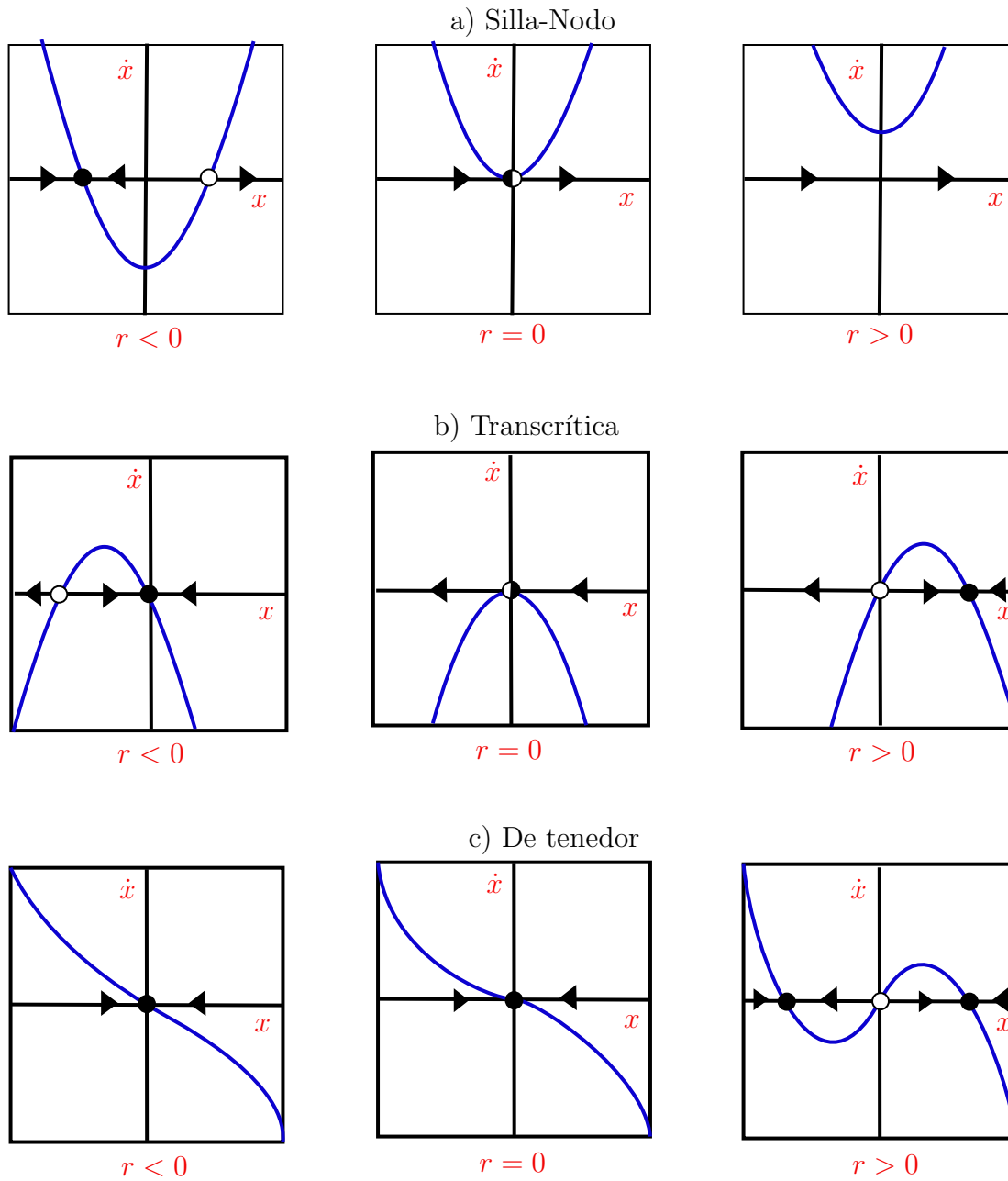


Figura 2.3.1: Tipos de bifurcaciones

2.3.2. Herramientas para la detección de cambios cualitativos en sistemas dinámicos

El análisis de los sistemas dinámicos no lineales se centra, en gran medida, en la identificación de cambios cualitativos en su comportamiento cuando se modifican parámetros. Dichos cambios pueden manifestarse a través de fenómenos como la pérdida de estabilidad, la aparición o desaparición de soluciones periódicas, la coexistencia de atractores o la transición hacia comportamientos caóticos. El estudio sistemático de estas transiciones resulta fundamental para comprender la estructura global de la dinámica del sistema.

Con el propósito de facilitar este análisis, se emplean herramientas que permiten reducir la complejidad del sistema continuo sin perder la información esencial de su comportamiento cualitativo. Entre estas herramientas destacan las secciones de Poincaré, el mapeo de Poincaré, los diagramas de bifurcación y el análisis de Fourier, los cuales, utilizados de manera adecuada, permiten detectar y caracterizar los cambios dinámicos inducidos por la variación de parámetros del modelo.

A continuación, se introducen dichas herramientas, distinguiendo claramente entre el objeto geométrico que actúa como superficie de corte, la dinámica discreta inducida por el flujo y las representaciones gráficas empleadas para visualizar los cambios cualitativos del sistema.

Sección de Poincaré

Consideremos un sistema n -dimensional

$$\dot{x} = f(x)$$

*Una **sección de Poincaré** S es una superficie de sección de dimensión $n - 1$ que es transversal al flujo; esto significa que todas las trayectorias que comienzan en S la atraviesan y no son paralelas a la superficie [18] (véase Fig.2.3.2).*

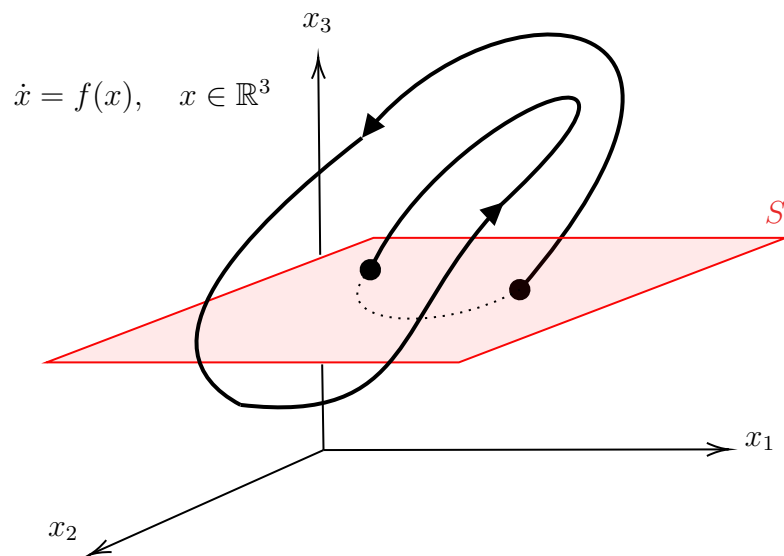


Figura 2.3.2: Sección de Poincaré

La introducción de una sección de Poincaré permite reducir el estudio del flujo continuo a la observación de intersecciones sucesivas de las trayectorias con una variedad de menor dimensión, lo cual simplifica el análisis cualitativo del sistema.

Mapeo de Poincaré

Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema n -dimensional y S una superficie de sección transversal al flujo de dimensión $n - 1$. Definamos P como una transformación de S en sí misma. Si $x_k \in S$ denota la K -ésima intersección, entonces el **mapeo de Poincaré** se define por:

$$x_{k+1} = P(x_k)$$

[18].

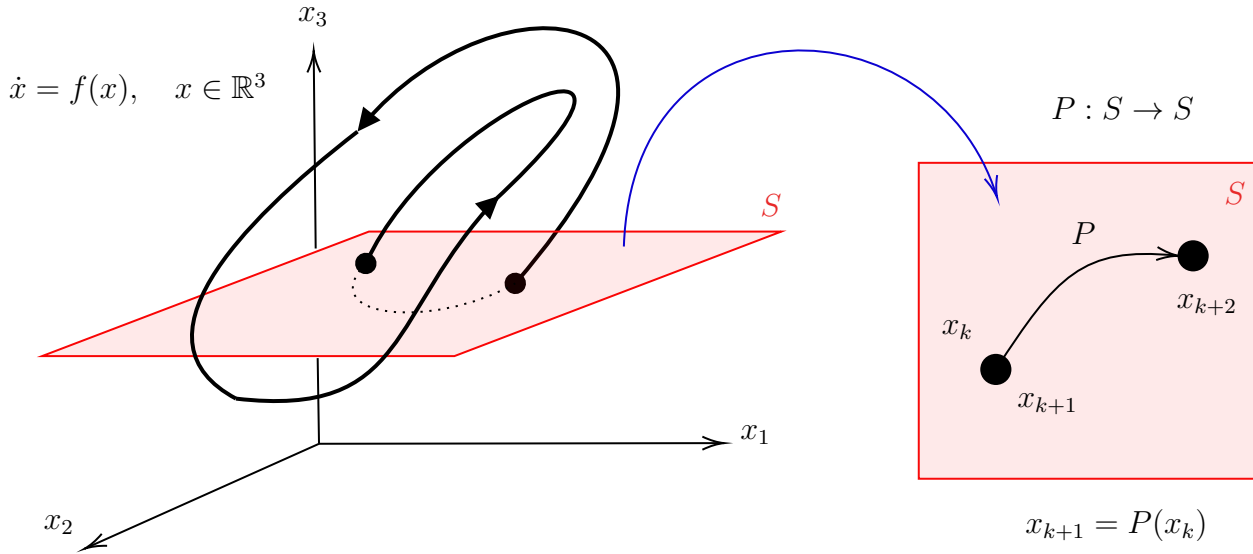


Figura 2.3.3: Mapeo de Poincaré

En este marco, las órbitas periódicas del sistema continuo se corresponden con puntos fijos del mapeo de Poincaré, mientras que la estabilidad de dichas órbitas puede analizarse a partir de la dinámica inducida sobre la sección. De este modo, el estudio del mapeo de Poincaré permite detectar bifurcaciones asociadas a cambios en la estabilidad de soluciones periódicas.

A partir del sistema original, oscilatorio o no, y del mapeo de Poincaré cuando éste resulta aplicable, los cambios cualitativos en la dinámica pueden visualizarse mediante diagramas de bifurcación.

Diagrama de bifurcación

Un **diagrama de bifurcación** es una representación gráfica que muestra cómo cambia el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico al variar un parámetro [18].

En sistemas no oscilatorios, los diagramas de bifurcación representan directamente los puntos de equilibrio del sistema continuo. En cambio, cuando el sistema presenta oscilaciones, es común construir diagramas de bifurcación a partir del mapeo de Poincaré. En este caso, para cada valor del parámetro se consideran las intersecciones de las trayectorias

con la sección de Poincaré y se representan los puntos fijos o conjuntos invariantes del mapeo.

De este modo, ambos tipos de diagramas describen la variación de las soluciones invariantes del sistema en función de un parámetro de control, permitiendo identificar fenómenos como la pérdida de estabilidad, la aparición de nuevas soluciones o la transición hacia comportamientos dinámicos más complejos.

Adicionalmente, el análisis de Fourier desempeña un papel esencial como herramienta de diagnóstico. A través de la descomposición espectral, es posible identificar la presencia de frecuencias dominantes en oscilaciones y con ello distinguir entre dinámicas periódicas o caóticas. Esta perspectiva complementa los diagramas de bifurcación y las representaciones de la trayectoria en el espacio fase, proporcionando una visión cualitativa y del comportamiento del sistema en distintos regímenes.

Análisi de Fourier

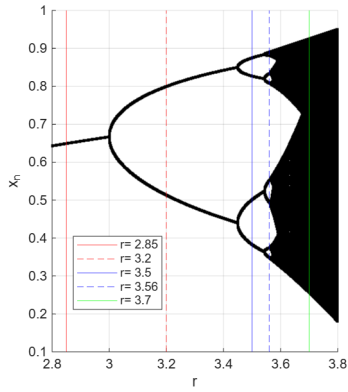
*El **análisis de Fourier** en frecuencia descompone una señal en sus componentes armónicos, permitiendo identificar las frecuencias dominantes y distinguir entre comportamientos periódicos, cuasi-periódicos y caóticos en u sistema dinámico [14].*

De manera equivalente, se transforma una función que depende del tiempo en una representación equivalente en términos de sus frecuencias fundamentales y armónicas. Es decir, el análisis de Fourier convierte una función $f(t)$, en su representación espectral $F(\omega)$, mostrando qué frecuencias están presentes y con qué intensidad.

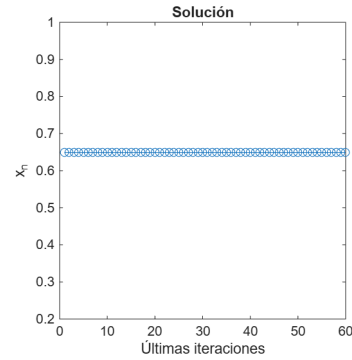
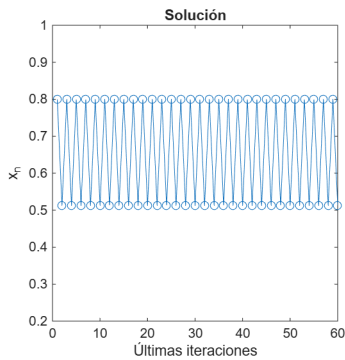
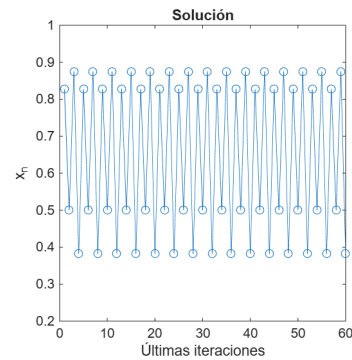
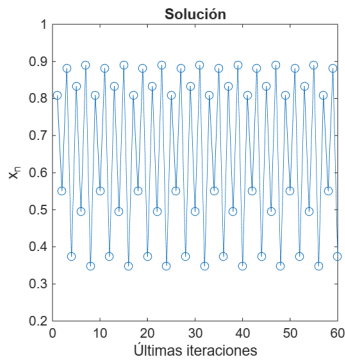
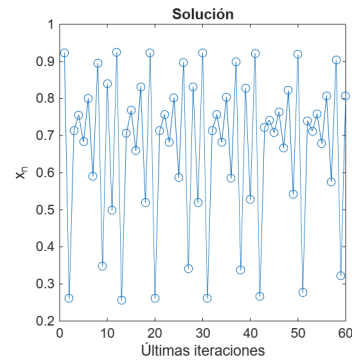
A continuación se describen e ilustran estas herramientas, empleando la ecuación logística

$$x_{sig} = r(1 - x)x.$$

La Fig. 2.3.5a, evidencia los cruces que hace la trayectoria de la ecuación logística en la sección de Poincaré, al variar el parámetro r . Observe como puede visualizarse los parámetros de bifurcación, para los cuales existen cambios cualitativos en su dinámica. Además, las Figs. 2.3.4b-2.3.4f evidencian la solución a largo plazo de la ecuación logística para distintos valores de r .



(a) Diagrama de bifurcación

(b) $r = 2.85$ (c) $r = 3.2$ (d) $r = 3.5$ (e) $r = 3.56$ (f) $r = 3.7$ Figura 2.3.4: Diagrama de bifurcación y soluciones de la ecuación logística al variar r .

Por otro lado, la Fig. 2.3.5 muestra el análisis de Fourier para la ecuación logística, donde la Fig. 2.3.5a muestra únicamente una frecuencia dominante para $r = 2.85$, lo cual contrasta con el comportamiento evidenciado en el diagrama de bifurcación y las solución correspondiente para este valor específico de r . Por otro lado, cuando $r = 3.7$, la Fig. 2.3.5b evidencia una mayor riqueza de frecuencias para la ecuación logística, lo que conlleva a dinámicas complejas para esta selección del valor r .



Figura 2.3.5: Análisis de Fourier de la ecuación logística

2.4. Caos

El estudio del caos en sistemas dinámicos ha permitido comprender que muchos fenómenos económicos y financieros, aunque deterministas en su formulación, pueden exhibir un comportamiento altamente impredecible y sensible a las condiciones iniciales. A diferencia de las oscilaciones periódicas o de los estados de equilibrio estables, la dinámica caótica se caracteriza por trayectorias irregulares, complejas y aparentemente aleatorias, que sin embargo obedecen a leyes matemáticas bien definidas.

Si bien no se tiene una definición formal para caos, existe consenso en emplear tres condiciones suficientes para detectarlo en los sistemas dinámicos [18]:

- El sistema tiene un comportamiento aperiódico a largo plazo.
- El sistema es determinista.
- El sistema también debe mostrar dependencia sensible a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales.

2.4.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Una de las propiedades peculiares del caos es que la mínima incertidumbre en la definición de las condiciones iniciales se amplifica exponencialmente, alcanzando proporciones macroscópicas que impiden conocer lo que sucederá a largo plazo [17].

Exponente de Lyapunov

Dada una condición inicial x_0 , considere un punto cercano $x_0 + \delta_0$, donde la separación inicial δ_0 es extremadamente pequeña. Sea δ_n la separación después de n iteraciones. Si $||\delta_n|| \approx ||\delta_0||e^{n\lambda_L}$, entonces λ_L es llamado exponente de Lyapunov. Si el exponente de Lyapunov es positivo, entonces el sistema podría tener dinámica caótica [18].

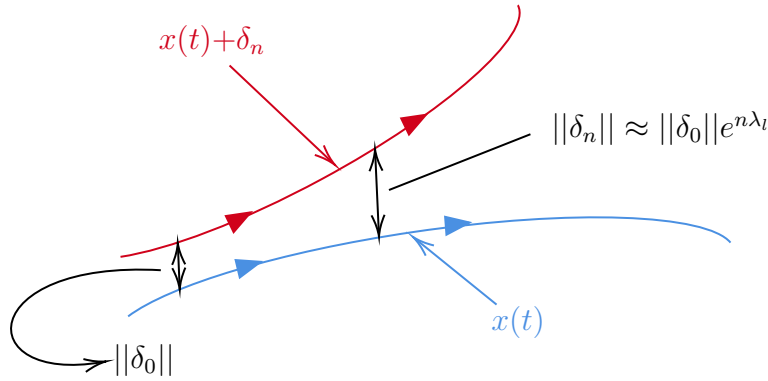


Figura 2.4.1: Exponente de Lyapunov

En palabras simples, el exponente de Lyapunov, λ_L , indica qué tan rápido dos trayectorias muy cercanas en el espacio fase tienden a separarse (o acercarse) con el paso del tiempo (véase Fig. 2.4.1). Es decir:

- Sí $\lambda_L > 0$, las trayectorias cercanas divergen de manera exponencial, lo cual es un rasgo característico del caos: el sistema resulta ser impredecible a largo plazo, aunque sus ecuaciones sean deterministas.
- Sí $\lambda_L < 0$, las trayectorias cercanas tienden a converger, lo que implica que el sistema se vuelva estable.
- Sí $\lambda_L = 0$, las trayectorias no divergen ni convergen de forma exponencial. Eso significa que se mantienen a una distancia casi constante en el tiempo y el sistema suele tener en este caso, dinámicas periódicas.

Aunque en muchos casos un exponente de Lyapunov positivo no necesariamente indica caos en un sistema dinámico, es importante realizar este análisis, ya que constituye un antecedente fundamental para el estudio del comportamiento del sistema.

2.4.2. Atractores extraños

Uno de los fenómenos más relevantes en el estudio de los sistemas dinámicos no lineales es la aparición de atractores extraños. Su descubrimiento revolucionó la comprensión del comportamiento caótico y abrió nuevas perspectivas en el análisis de modelos con sensibilidad a las condiciones iniciales. El término **atractor extraño** se utiliza para referirse a la trayectoria de un sistema que posee una estructura geométrica compleja, generalmente de naturaleza fractal.

La complejidad de estos atractores provoca que las trayectorias cercanas a los puntos de equilibrio del sistema presenten un movimiento aperiódico y altamente sensible a las condiciones iniciales. En otras palabras, el atractor extraño surge cuando la trayectoria del sistema se desplaza de un repulsor a otro sin tender al infinito, generando una órbita caótica y no periódica. Un ejemplo es el **atractor de Lorenz**, introducido en 1963 por Edward Lorenz al estudiar un modelo simplificado diseñado para modelar el clima. Edward mostró cómo un sistema determinista podía presentar una dinámica impredecible en el largo plazo, lo que dio

lugar al famoso concepto del “efecto mariposa” [18], (véase Fig. 2.4.2).

Posteriormente, en 1976, Otto Rössler propuso otro sistema dinámico que también dio lugar a un atractor extraño, conocido como **atractor de Rössler**. A diferencia del de Lorenz, su estructura presenta órbitas en espiral que se deforman de manera progresiva (véase Fig. 2.4.3), lo cual facilita su análisis y lo convierte en un modelo de referencia en el estudio de la transición hacia el caos [18].

Estos atractores extraños permiten identificar y describir el comportamiento dinámico de largo plazo del sistema, incluso cuando este parece impredecible a simple vista. Su estudio ha sido fundamental para comprender fenómenos caóticos en física, biología, economía y otras áreas del conocimiento.

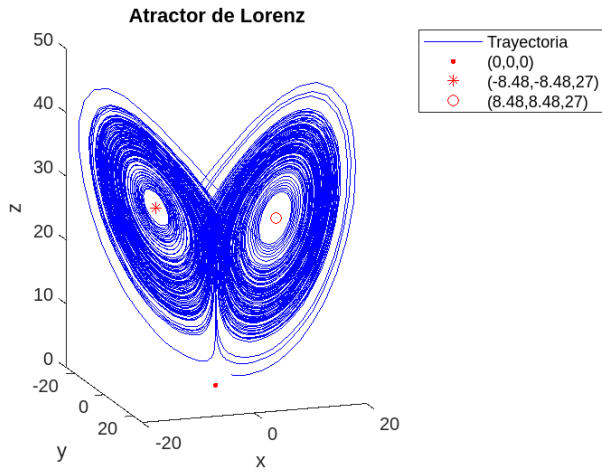


Figura 2.4.2: Atractor de Lorenz

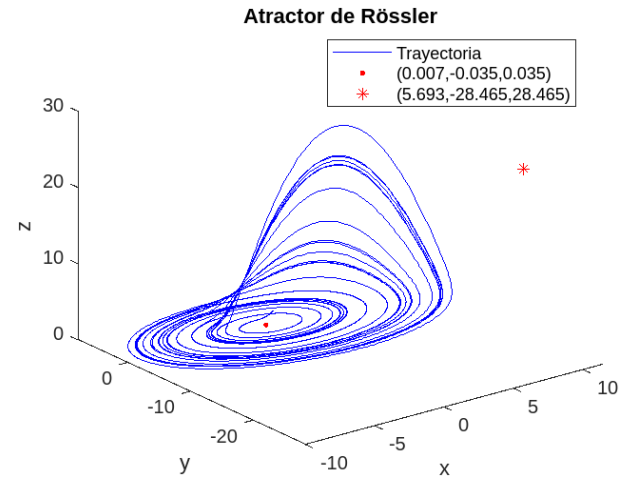


Figura 2.4.3: Atractor de Rössler

2.5. Modelos matemáticos en finanzas

La dinámica del mercado financiero es un fenómeno complejo que influye en nuestra vida diaria, modelar este fenómeno implica analizar diversos comportamientos como: la evolución de los precios de los activos, el manejo de los mercados y las decisiones de los agentes económicos, por nombrar solo algunos.

En este trabajo se abordan diferentes dinámicas presentes en un modelo financiero con dos retardos temporales. Sin embargo, a lo largo de los años, han existido diversos modelos matemáticos que describen a un nivel macroscópico algunos comportamientos existentes en el mercado financiero. En esta sección se expondrán algunos de los modelos relevantes propuestos en la literatura.

2.5.1. Modelo de Van Der Pol (VDP)

La ecuación diferencial VDP se adaptó a un modelo de oscilador forzado de ciclos económicos no lineales, el cual mejora la capacidad para prever cambios repentinos y significativos en sistemas económicos [3]. Este modelo se describe de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = a \sin(\omega t) \quad (2.16)$$

En donde:

x = Variable económica, por ejemplo la producción

μ = Parámetro de amortiguamiento

a = Amplitud del conductor

ω = Frecuencia del conductor y

$\sin(\omega t)$ es una fuerza exógena periódica que modela la compleja interdependencia entre una economía individual y la economía internacional.

Mediante diagramas de bifurcación, se observa cómo dos atractores caóticos coexisten y luego se fusionan al variar ligeramente un parámetro. Esta transición es mediada por órbitas periódicas inestables, que determinan la colisión de los atractores. Después de la crisis, el nuevo atractor caótico resultante es más grande y genera fluctuaciones económicas de mayor amplitud, es decir, ciclos más intensos.

El estudio demuestra que las crisis de fusión de atractores son un rasgo fundamental de los ciclos económicos no lineales. El análisis matemático de estos fenómenos permite anticipar transiciones abruptas en la economía, lo cual es clave para la teoría y la política económica.

2.5.2. Modelo Kaldor-Kalecki

El modelo Kaldor-Kalecki con retardos temporales representa un avance significativo en la formalización de los ciclos económicos bajo un enfoque de dinámica no lineal [19]. El cual es representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \alpha \left[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t)) \right] \\ \frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t-T), K(t)) - \delta K(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Donde:

$I(Y, K)$ = Inversión.

$S(Y, K)$ = Ahorro.

Y = Ingreso de capital.

K = Stock de capital.

α = Velocidad de ajuste de bienes.

δ = Tasa de depresión del capital.

T = Retardo temporal en la inversión.

Este modelo intenta describir la interacción entre no linealidades en las funciones de inversión y ahorro con la presencia de retardos temporales y se lograron identificar diversos comportamientos dinámicos en el sistema, como: ciclos límite, oscilaciones cuasi-periódicas y ciclos asimétricos.

Además, plantea cómo la dinámica económica puede describirse mediante ecuaciones diferenciales con retardo, lo que genera un sistema de dimensión infinita, donde el estado actual depende no solo de las condiciones presentes, sino también de información diferida en el tiempo.

Finalmente, la inclusión de retardos en la inversión transforma un modelo clásico de ciclos económicos en un sistema capaz de reproducir comportamientos complejos, constituyéndose en un antecedente clave para los estudios modernos de dinámica financiera.

2.5.3. Modelo financiero caótico

Diversas investigaciones reportadas en la literatura [20, 16] presentan un modelo matemático que consta de tres ecuaciones diferenciales, las cuales, intentan describir a un nivel macroscópico la dinámica financiera. Dicho modelo, describe el cambio de tres variables económicas relevantes, la tasa de interés (x), la demanda de inversión (y) y el índice de precios (z). El cual está descrito de la siguiente manera:

- El cambio en la tasa de interés se debe principalmente a esta lucha constante entre la oferta y demanda de inversión, es decir, la diferencia entre inversión y ahorro. Asimismo, este cambio es proporcional al ajuste estructural de los precios de los bienes de consumo.

$$\dot{x} = f_1[y - SV]x + f_2z \quad (2.18)$$

Donde f_1 y f_2 son constantes y SV es la cantidad de ahorro.

Es decir, si el ahorro es mayor que la inversión, la tasa de interés tiende a disminuir, ya que existen más fondos disponibles en relación con la demanda existente. En contraste, cuando la inversión supera al ahorro, la tasa de interés aumenta debido a que la demanda es mayor que el fondo disponible. Finalmente, las variaciones en el índice de precios también influyen a este cambio en la tasa de interés, cuando el índice de precios aumenta los ofertantes de crédito tienden a incrementarla para compensar el riesgo en la inflación, mientras que si disminuye, suelen reducirla con el objetivo de mantener el equilibrio en el mercado financiero.

- El cambio en la demanda de inversión se verá afectada principalmente por tres factores; la tasa de inversiones BEN , la misma demanda de inversión y la tasa de interés. Donde la variación de la demanda de inversión es proporcional a la tasa de inversiones e inversamente proporcional al costo de inversión y el tipo de interés.

$$\dot{y} = f_3[BEN - \alpha y - \beta x^2] \quad (2.19)$$

Donde f_3 , α y β son constantes.

En otras palabras, BEN impulsará la demanda de inversión y aumentará los incentivos para seguir invirtiendo. Por el contrario, la propia demanda de inversión limita su crecimiento, si el nivel de inversión es elevado, resulta más complicado que siga expandiéndose al mismo ritmo. Finalmente, la tasa de interés frena el cambio en la demanda de inversión, si existen tasas de interés muy altas, a los ofertantes de crédito les cuesta financiar proyectos de inversión, mientras que cuando existen tasas de interés bajas, el incentivo de invertir es mayor.

- El cambio en el índice de precios está influenciado principalmente por él mismo y por la tasa de interés. El índice de precios refleja el valor de los bienes y servicios en la economía, los cuales siempre se ven afectados por la oferta y la demanda de los mercados financieros.

$$\dot{z} = -f_4 z - f_5 x \quad (2.20)$$

Donde f_4 y f_5 , son constantes.

Dicho de otro modo, el propio índice de precios frena su variación, lo que significa que si el nivel de los precios ya es muy alto, existe una tendencia natural para que dicho crecimiento se modere. Por otro lado, si existen tasas de interés muy altas, el decaimiento del índice de precios es muy rápido, mientras que tasas bajas amenazan más este cambio .

Posteriormente, diversas investigaciones [9, 10] proponen un re-escalamiento de las ecuaciones mostradas anteriormente, con el objetivo de simplificar el modelo financiero de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) + [y(t) - a]x(t) \\ \dot{y}(t) = 1 - by(t) - x(t)^2 \\ \dot{z}(t) = -x(t) - cz(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

Donde $x(t)$ representara la tasa de interés, $y(t)$ la demanda de inversión y $z(t)$ el índice de precios. Además, a será la cantidad de ahorro, b el costo por inversión y c la demanda de los mercados comerciales, y el cual ha sido demostrado que bajo los parámetros $a = 3$, $b = 0.1$ y $c = 1$, resulta ser un sistema caótico (véase Fig. 2.5.1 [9]).

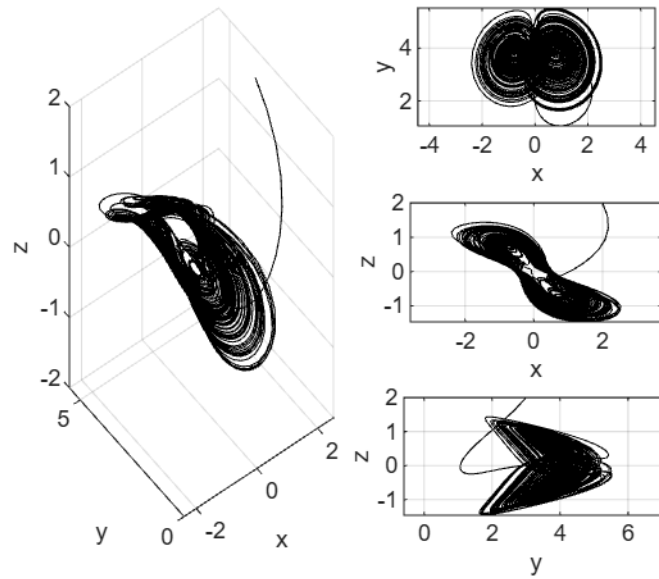


Figura 2.5.1: Atractor extraño en el modelo financiero 2.21

Los modelos matemáticos siempre están en constante cambio, y el modelo financiero 2.21 no es la excepción. En octubre del 2006, Wei-Ching Chen [2] propone un nuevo modelo

financiero con tres retroalimentaciones $K_1[x - x(t - \tau_1)]$, $K_2[x - x(t - \tau_2)]$, $K_3[x - x(t - \tau_3)]$, las cuales incluyen retardos temporales en la toma de decisiones de las variables económicas y el cual está representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) + [y(t) - a]x(t) + K_1[x - x(t - \tau_1)] \\ \dot{y}(t) = 1 - by(t) - x(t)^2 + K_2[x - x(t - \tau_2)] \\ \dot{z}(t) = -x(t) - cz(t) + K_3[x - x(t - \tau_3)] \end{cases} \quad (2.22)$$

donde K_1 , K_2 y K_3 , indican el peso de la retroalimentación en la toma de decisiones [2].

Si bien este artículo únicamente analiza valores positivos para el peso K , en todos los casos se fija uno de los pesos con $K = 0.1$, mientras que los otros dos se mantienen en cero, se lograron obtener dinámicas complejas, como comportamientos periódicos, cuasi-periódicos y caóticos, además de encontrarse transiciones de duplicación de período y de duplicación de periodo inverso.

En esta tesis se explorará una modificación del modelo propuesto por Wei-Ching Chen. En particular, se considerará únicamente la primera retroalimentación, correspondiente a la tasa de interés, bajo el supuesto de que los ofertantes de crédito toman sus decisiones principales en función de la variación de esta variable.

Además, se introduce un segundo retardo en la ecuación del índice de precios, con el objetivo de reflejar el desfase temporal que existe entre el ajuste en la tasa de interés y su impacto en el nivel de precios.

Asimismo, a diferencia del trabajo original, en el presente estudio se analizan tanto valores positivos como negativos de los pesos de la retroalimentación (K), lo cual permite ampliar el rango de dinámicas a investigar, incluyendo las cíclicas y anti-cíclicas del ciclo económico.

CAPÍTULO 3

MODELO FINANCIERO DE DIMENSIÓN INFINITA

Como se analizó en el capítulo anterior, aunque existen diversos modelos financieros capaces de describir la evolución temporal de ciertas variables económicas, estos modelos presentan limitaciones al intentar capturar la compleja dinámica de los mercados financieros. Por ello, se considera necesario explorar enfoques más integrales que permitan representar con mayor precisión su comportamiento.

Este capítulo tiene como objetivo presentar un nuevo modelo en el que se incorpora de manera explícita la presencia de dos retardos temporales. La inclusión de estos retardos obedece a la necesidad de considerar que, en la realidad, las decisiones económicas y financieras no tienen un efecto inmediato, sino que suelen manifestarse tras cierto intervalo de tiempo.

En las secciones siguientes se presentará el planteamiento formal del modelo con retardos, se discutirán las implicaciones de los parámetros introducidos y se analizará el impacto que estos tienen sobre la dinámica global del modelo. De esta manera, se sientan las bases para examinar cómo los retardos temporales pueden modificar la estabilidad del sistema.

3.1. Descripción del modelo

El modelo matemático analizado en esta investigación está conformado por tres ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la evolución temporal de tres variables económicas: la **tasa de interés** $x(t)$, la **demanda de inversión** $y(t)$ y el **índice de precios** $z(t)$. Dicho modelo se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) + [y(t) - a]x(t) + K[x(t) - x(t - \tau_1)], \\ \dot{y}(t) = 1 - by(t) - x(t)^2, \\ \dot{z}(t) = -x(t - \tau_2) - cz(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde: a es cantidad de ahorro, b costo por inversión, c demanda de los mercados comerciales.

Además, el término $K[x(t) - x(t - \tau_1)]$ corresponde a una retroalimentación, donde la diferencia $x(t) - x(t - \tau_1)$ representa la comparación realizada a partir de reportes separados

en el tiempo, con el objetivo de evaluar el crecimiento ($x(t) - x(t - \tau_1) > 0$) o la disminución ($x(t) - x(t - \tau_1) < 0$) de la tasa de interés. El parámetro K determina el peso asignado a dicha diferencia dentro del proceso de toma de decisiones.

Por otra parte, τ_1 modela el retraso en el tiempo con el que se ve reflejada la decisión de los ofertantes de crédito al modificar la tasa de interés. De manera análoga, τ_2 representa el tiempo que tarda en observarse el impacto de dichas decisiones en los precios de los bienes y servicios.

Finalmente, es importante señalar que, para valores de $K > 0$, el sistema presenta una acción cíclica en el ciclo económico de la tasa de interés, mientras que para $K < 0$ se manifiesta una acción anti-cíclica.

Valor de K	Tasa de interés	Acción
$K > 0$	$x(t) - x(t - \tau_1) > 0$	Cíclica
	$x(t) - x(t - \tau_1) < 0$	
$K < 0$	$x(t) - x(t - \tau_1) > 0$	Anti-cíclica
	$x(t) - x(t - \tau_1) < 0$	

Tabla 3.1: Acción cíclica y anti-cíclica.

Es decir, como se puede observar en la tabla 3.1, la acción cíclica de la tasa de interés ocurre cuando sus variaciones siguen al ciclo económico, amplificando sus subidas y bajadas. Por el contrario, la acción anti-cíclica se manifiesta cuando dichas variaciones se ajustan en sentido contrario al ciclo económico, moderando sus aumentos o disminuciones. Esta distinción permite comprender mejor cómo los distintos valores del parámetro afectan la dinámica del modelo y en las respuestas de los ofertantes de crédito frente a los cambios económicos.

3.2. Análisis de puntos de equilibrio y estabilidad

Como se observó en el capítulo anterior, los puntos de equilibrio del sistema 3.1 se obtienen resolviendo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t) + [y(t) - a]x(t) + K[x(t) - x(t - \tau_1)] & = 0 \\ \dot{y}(t) = 1 - by(t) - x(t)^2 & = 0 \\ \dot{z}(t) = -x(t - \tau_2) - cz(t) & = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Además, un punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ es una solución en reposo que cumple $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \quad \forall t \geq 0$. Entonces, el sistema 3.2 se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$z + (y - a)x = 0 \quad (3.3)$$

$$1 - by - x^2 = 0 \quad (3.4)$$

$$-x - cz = 0 \quad (3.5)$$

Despejando y de la ecuación 3.4 y sustituyéndola en la ecuación 3.3, se obtiene que $x = 0$ y $(y, z) = \pm \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}$, entonces:

i) Sí $c - b - abc \leq 0$ el sistema tiene un único punto de equilibrio

$$P = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right).$$

ii) Sí $c - b - abc > 0$ el sistema tiene tres puntos de equilibrio

$$P_1 = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right) \text{ y } P_{2,3} = \left(\pm \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{1 + ac}{c}, \mp \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}\right).$$

Esta investigación se centró en estudiar la estabilidad local de los puntos de equilibrio del inciso *II*), utilizando los parámetros $a = 3$, $b = 0.1$ y $c = 1$, parámetros bajo los cuales ya se ha demostrado que el modelo financiero sin retardos 2.21 presenta una dinámica caótica [2]. Teniendo como caso de estudio los puntos de equilibrio

$$P_1 = (0, 10, 0) \text{ y } P_{2,3} = \left(\pm \frac{\sqrt{15}}{5}, 4, \mp \frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

Las matrices jacobianas con derivadas parciales respecto a las variables retardadas ($J_{\tau_{1,2}}$) y no retardadas (J_0) del modelo 3.1 necesarias para la determinación del pseudo-polinomio característico, fueron calculadas y se obtuvieron los siguientes resultados.

3.2.1. Para $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 = 0$

Las matrices obtenidas para esta caso, donde solo existe un retardo en el sistema financiero, fueron:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - a + k & x & 1 \\ -2x & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$J_{\tau_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_1}{\partial y(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_1}{\partial z(t-\tau_1)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_2}{\partial y(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_2}{\partial z(t-\tau_1)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_3}{\partial y(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_3}{\partial z(t-\tau_1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con estos resultados se obtuvo el pseudo-polinomio característico asociado al modelo 3.1 de la siguiente manera:

$$\det(\lambda I - J_0 - J_{\tau_1} e^{-\lambda \tau_1}) = 0,$$

donde se obtuvo que

$$e^{-\lambda \tau_1} = -\frac{\lambda^3 + (4.1 - K - y)\lambda^2 + (4.4 - 1.1K + 2x^2 - 1.1y)\lambda + 0.4 - 0.1K + 2x^2 - 0.1y}{0.1K + 1.1K\lambda + K\lambda^2}. \quad (3.6)$$

Como se analizó en el capítulo anterior, el cambio de estabilidad de un sistema dependerá de forma continua de la manera, como las raíces λ se trasladan de izquierda a derecha o viceversa en el plano complejo en función de un parámetro, en este caso el retardo τ_1 y el peso K . En otras palabras, cualquier cambio en la estabilidad del modelo 3.1 estará marcado

por un cruce de λ con el eje imaginario.

Haciendo la sustitución $\lambda = i\omega$, con $\omega > 0$, en 3.6, se obtiene una condición necesaria para la existencia de raíces puramente imaginarias, dada por:

$$Re(f(\omega, K))^2 + Im(f(\omega, K))^2 = 1, \quad (3.7)$$

donde

$$f(\omega, K) = -\frac{(i\omega)^3 + (4.1 - K - y)(i\omega)^2 + (4.4 - 1.1K + 2x^2 - 1.1y)i\omega + 0.4 - 0.1K + 2x^2 - 0.1y}{0.1K + 1.1Ki\omega + K(i\omega)^2}, \quad (3.8)$$

y dicha condición deberá cumplirse para los tres puntos de equilibrio antes mencionados. Cabe destacar que el análisis de estabilidad se realizó utilizando la plataforma Wolfram Mathematica, ya que esta herramienta es particularmente adecuada para este tipo de estudio.

Para el primer punto de equilibrio $P_1 = (0, 10, 0)$ se analizó el siguiente pseudo-polinomio característico

$$e^{-\lambda\tau_1} = -\frac{-0.6 - 0.1K - 6.6\lambda - 1.1K\lambda - 5.9\lambda^2 - K\lambda^2 + \lambda^3}{0.1K + 1.1K\lambda + K\lambda^2}, \quad (3.9)$$

el cual implica que

$$f(\omega, K) = -\frac{-0.6 + 0.1K - 6.6(i\omega) - 1.1K(i\omega) - 5.9(i\omega)^2 - K(i\omega)^2 + (i\omega)^3}{0.1K + 1.1K(i\omega) + K(i\omega)^2}. \quad (3.10)$$

En la Fig. 3.2.1 se representa gráficamente la condición necesaria para la existencia de raíces imaginarias puras del pseudo-polinomio característico asociado al modelo. La superficie mostrada en color naranja corresponde a los valores de la función $f(\omega, K)$ obtenida al sustituir $\lambda = i\omega$ en la ecuación 3.9. En contraste, la superficie azul corresponde al plano constante $f(\omega, K) = 1$. La intersección entre ambas superficies determina, por lo tanto, los valores de ω y K para los cuales la ecuación característica admite soluciones de la forma $\lambda = i\omega$.

De igual manera, la figura 3.2.1 muestra la proyección del plano $f(\omega, K) = 1$. En este gráfico únicamente aparece la curva correspondiente a los puntos donde la superficie naranja intersecta dicho plano. Esta curva, mostrada en color rojo, contiene todos los pares (ω, K) que satisfacen la condición 3.7. Cada uno de estos puntos corresponde a valores de los parámetros para los cuales la ecuación característica posee raíces imaginarias puras; en consecuencia, indican la presencia de un cambio cualitativo en la dinámica del sistema. La línea azul vertical situada en $K = -3.0$ señala que, para valores de K mayores que -3 , no se observan intersecciones adicionales dentro del rango considerado, por lo que no se presentan variaciones en la estabilidad.

Finalmente, es importante mencionar que todo el análisis numérico se realizó en el dominio acotado $-10 \leq K \leq 10$ y $-10 \leq \omega \leq 10$; así, las intersecciones mostradas corresponden únicamente a los puntos ubicados dentro de dicho intervalo de exploración.

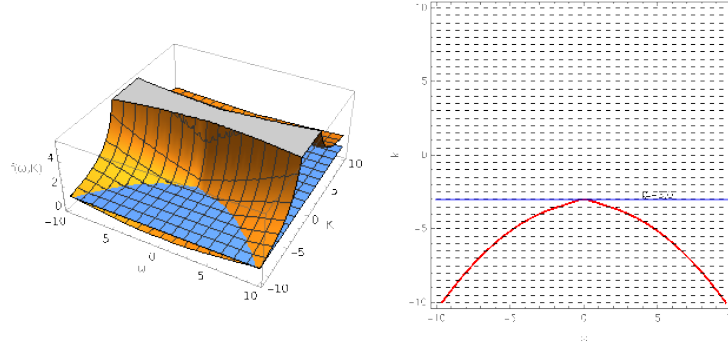


Figura 3.2.1: Valores de K , para los cuales la ec. 3.7 se cumple para el punto $(0, 10, 0)$

Por otro lado, en la tabla 3.2 se pueden observar algunos valores de K para los cuales existe un ω que asegura la existencia de los cruces de las raíces λ del pseudo-polinomio característico 3.9 y el valor τ_1 obtenido al despejarlo de la ecuación 3.9 al sustituir cada valor ω y K seleccionado. Como se puede observar en esta tabla de resultados, se obtuvieron retardos $\tau_1 < 0$ o en su defecto imaginarios, lo cuales no tienen algún significado o relevancia en el mercado financiero. Sin embargo, haciendo un refinamiento para K en el intervalo $[-3.5, -3.0]$ se obtuvieron los resultados de la tabla 3.3, en la cual se puede apreciar la existencia de dos retardos $\tau_1 > 0$ para $K = -3.45$ y $K = -3.40$ respectivamente.

Es importante destacar que, para el análisis de este primer punto de equilibrio, los gráficos de la Fig. 3.2.1 muestran cambios en la estabilidad únicamente para valores de $K \leq -3$. Sin embargo, esta observación no es del todo precisa y los resultados de un análisis más detallado se presentarán en el próximo capítulo.

Valor de K	Valor de ω	Valor de τ_1
$K = -10.0$	$\omega = 9.63868$	$\tau_1 = -0.131241$
$K = -9.5$	$\omega = 9.26865$	$\tau_1 = -0.140608$
$K = -9.0$	$\omega = 8.88327$	$\tau_1 = -0.151439$
$K = -8.5$	$\omega = 8.48043$	$\tau_1 = -0.164114$
$K = -8.0$	$\omega = 8.05755$	$\tau_1 = -0.179156$
$K = -7.5$	$\omega = 7.61132$	$\tau_1 = -0.197313$
$K = -7.0$	$\omega = 7.13738$	$\tau_1 = -0.219695$
$K = -6.5$	$\omega = 6.6299$	$\tau_1 = -0.248023$
$K = -6.0$	$\omega = 6.0806$	$\tau_1 = -0.285136$
$K = -5.5$	$\omega = 5.47723$	$\tau_1 = -0.336107$
$K = -5.0$	$\omega = 4.80017$	$\tau_1 = -0.41108$
$K = -4.5$	$\omega = 4.01458$	$\tau_1 = -0.534127$
$K = -4.0$	$\omega = 3.04820$	$\tau_1 = -13.1494$
$K = -3.5$	$\omega = 1.73205$	$\tau_1 = 44.8578 - 47.8571i$
$K = -3.0$	$\omega = 3.06475 \times 10^{-8}$	$\tau_1 = 0$

Tabla 3.2: Análisis de estabilidad del punto $(0, 10, 0)$

Valor de K	Valor de ω	Valor de τ_1
$K = -3.50$	$\omega = 1.732005$	$\tau_1 = 44.8578 - 47.8571i$
$K = -3.45$	$\omega = 1.55885$	$\tau_1 = 10.1877$
$K = -3.40$	$\omega = 1.38564$	$\tau_1 = 2.42012$
$K = -3.35$	$\omega = 1.21244$	$\tau_1 = -7.33315$
$K = -3.30$	$\omega = 1.03923$	$\tau_1 = -2.70166$
$K = -3.25$	$\omega = 0.866025$	$\tau_1 = -9.86777$
$K = -3.20$	$\omega = 0.69282$	$\tau_1 = -19.7152$
$K = -3.15$	$\omega = 0.519615$	$\tau_1 = -19.5001 - 27.3429i$
$K = -3.10$	$\omega = 0.34641$	$\tau_1 = -28.8239 - 67.903i$
$K = -3.05$	$\omega = 0.173205$	$\tau_1 = -15.1501 - 110.341i$
$K = -3.00$	$\omega = 3.06475 \times 10^{-8}$	$\tau_1 = 0$

Tabla 3.3: Análisis de estabilidad del punto $(0, 10, 0)$ y $K \in [-3.50, -3.00]$

Para los puntos de equilibrio $P_2 = (\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{5})$ y $P_3(-\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5})$ se analizó el siguiente pseudo-polinomio característico, ya que resulta ser el mismo para ambos casos

$$e^{-\lambda\tau_1} = -\frac{1.2 - 0.1K + 1.2\lambda - 1.1K\lambda + 0.1\lambda^2 - k\lambda^2 + \lambda^3}{0.1K + 1.1K\lambda + K\lambda^2}, \quad (3.11)$$

dando como consecuencia que

$$f(\omega, K) = -\frac{1.2 - 0.1K + 1.2(i\omega) - 1.1K(i\omega) + 0.1(i\omega)^2 - K(i\omega)^2 + (i\omega)^3}{0.1K + 1.1K(i\omega) + K(i\omega)^2}. \quad (3.12)$$

Los valores de K para los cuales la ec. 3.12 cumple la condición 3.7, están visibles en la Fig. 3.2.2, en donde se puede observar que para valores de $K \in (-0.3, 6)$ aproximadamente, dicha condición no se satisface.

De igual manera que en el caso anterior, la superficie mostrada en color naranja de la Fig: 3.2.2 corresponde a los valores de la función $f(\omega, K)$ obtenida al sustituir $\lambda = i\omega$ en la ecuación 3.7. En contraste, la superficie azul corresponde al plano constante $f(\omega, K) = 1$. La intersección entre ambas superficies determina, por lo tanto, los valores de ω y K para los cuales la ecuación característica admite soluciones de la forma $\lambda = i\omega$ y el análisis numérico se realizó en el dominio acotado $-10 \leq K \leq 10$ y $-10 \leq \omega \leq 10$.

Nuevamente se muestra la proyección del plano $f(\omega, K) = 1$. Donde se observa únicamente la curva correspondiente a los puntos donde la superficie naranja intersecta dicho plano. Esta curva, mostrada en color rojo, contiene todos los pares (ω, K) que satisfacen la condición 3.7.

Por otro lado en la tabla 3.4 se pueden observar valores de K para los cuales existe un ω que asegura la existencia de los cruces de las raíces λ del pseudo-polinomio característico 3.11 y el valor τ_1 correspondiente a cada ω dado el valor K . Como se puede observar en esta tabla de resultados, se obtuvieron más retardos $\tau_1 > 0$. Además, observe que para valores de $K \leq -0.5$ este análisis sugiere cambios cualitativos en el sistema, sin embargo, esta observación no es del todo precisa.

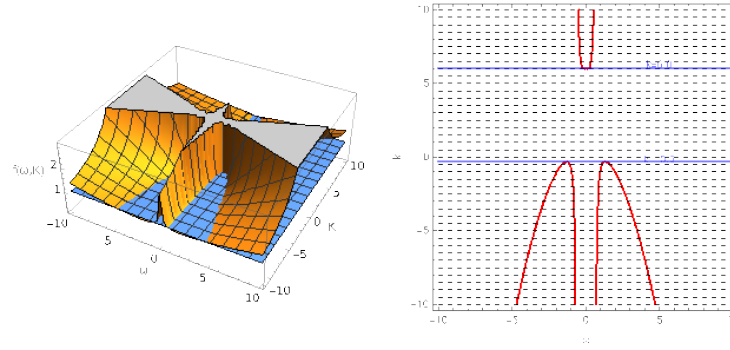


Figura 3.2.2: Valores de K , para los cuales la ec. 3.7 se cumple para los puntos $(\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{5})$ y $(-\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5})$

Valor de K	Valor de ω	Valor de τ_1
$K = -10$	$\omega = 0.709708$	$\tau_1 = 0.200788$
$K = -9.5$	$\omega = 0.712838$	$\tau_1 = 0.209095$
$K = -9.0$	$\omega = 0.716254$	$\tau_1 = 0.218142$
$K = -8.5$	$\omega = 0.719998$	$\tau_1 = 0.228036$
$K = -8.0$	$\omega = 0.724122$	$\tau_1 = 0.238905$
$K = -7.5$	$\omega = 0.728687$	$\tau_1 = 0.250909$
$K = -7.0$	$\omega = 0.733769$	$\tau_1 = 0.264243$
$K = -6.5$	$\omega = 0.739465$	$\tau_1 = 0.279152$
$K = -6.0$	$\omega = 0.745896$	$\tau_1 = 0.29595$
$K = -5.5$	$\omega = 0.75322$	$\tau_1 = 0.315043$
$K = -5.0$	$\omega = 0.761644$	$\tau_1 = 0.336972$
$K = -4.5$	$\omega = 0.771447$	$\tau_1 = 0.362472$
$K = -4.0$	$\omega = 0.78302$	$\tau_1 = 0.392581$
$K = -3.5$	$\omega = 0.79692$	$\tau_1 = 0.428818$
$K = -3.0$	$\omega = 0.813988$	$\tau_1 = 0.473526$
$K = -2.5$	$\omega = 0.835559$	$\tau_1 = 0.530572$
$K = -2.0$	$\omega = 0.863942$	$\tau_1 = 0.606978$
$K = -1.5$	$\omega = 0.903627$	$\tau_1 = 0.717427$
$K = -1.0$	$\omega = 0.965369$	$\tau_1 = 0.900958$
$K = -0.5$	$\omega = 1.09151$	$\tau_1 = 1.33588$
$K = 6.0$	$\omega = 0.111673$	$\tau_1 = -13.0609$
$K = 6.5$	$\omega = 0.342096$	$\tau_1 = -1.5025$
$K = 7.0$	$\omega = 0.397471$	$\tau_1 = -1.02951$
$K = 7.5$	$\omega = 0.431546$	$\tau_1 = -0.810876$
$K = 8.0$	$\omega = 0.455789$	$\tau_1 = -0.678129$
$K = 8.5$	$\omega = 0.474294$	$\tau_1 = -0.586807$
$K = 9.0$	$\omega = 0.489042$	$\tau_1 = -0.519245$
$K = 9.5$	$\omega = 0.501147$	$\tau_1 = -0.466811$
$K = 10.0$	$\omega = 0.511302$	$\tau_1 = -0.424709$

Tabla 3.4: Análisis de estabilidad de los puntos $(\pm\frac{\sqrt{15}}{5}, 4, \mp\frac{\sqrt{15}}{5})$

3.2.2. Para $\tau_1 > 0$ y $\tau_2 > 0$

Las matrices obtenidas para esta caso, donde existen dos retardos en el sistema financiero, fueron:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - a + K & x & 1 \\ -2x & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix},$$

$$J_{\tau_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_1}{\partial y(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_1}{\partial z(t-\tau_1)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_2}{\partial y(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_2}{\partial z(t-\tau_1)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_3}{\partial y(t-\tau_1)} & \frac{\partial f_3}{\partial z(t-\tau_1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y$$

$$J_{\tau_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x(t-\tau_2)} & \frac{\partial f_1}{\partial y(t-\tau_2)} & \frac{\partial f_1}{\partial z(t-\tau_2)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x(t-\tau_2)} & \frac{\partial f_2}{\partial y(t-\tau_2)} & \frac{\partial f_2}{\partial z(t-\tau_2)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x(t-\tau_2)} & \frac{\partial f_3}{\partial y(t-\tau_2)} & \frac{\partial f_3}{\partial z(t-\tau_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con estos resultados se obtuvo el pseudo-polinomio característico asociado al modelo 3.1 de la siguiente manera:

$$\det(\lambda I - J_0 - J_{\tau_1}e^{-\lambda\tau_1} - J_{\tau_2}e^{-\lambda\tau_2}) = 0,$$

donde el pseudo-polinomio característico asociado al modelo 3.1 resulta ser

$$[\lambda - (y - a + K) + Ke^{-\lambda\tau_1}](\lambda + b)(\lambda + c) + 2x^2(\lambda + c) + (e^{-\lambda\tau_2})(\lambda + b) = 0. \quad (3.13)$$

Es importante señalar que el análisis de estabilidad en sistemas con dos retardos resulta considerablemente más complejo que en el caso de un único retardo, ya que la dificultad del problema aumenta y la obtención de condiciones analíticas se dificulta. Por esta razón, en el presente trabajo no se desarrolla dicho análisis de manera explícita; sin embargo, en el siguiente capítulo se lleva a cabo un estudio cualitativo que permite explorar el comportamiento del sistema y sus posibles dinámicas sin la necesidad de resolver de forma exacta las ecuaciones de estabilidad.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS NUMÉRICO DE LAS DINÁMICAS CÍCLICAS Y ANTI-CÍCLICAS DE UN MODELO FINANCIERO DE DIMENSIÓN INFINITA

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al estudiar el efecto de variar el parámetro K y los retardos τ en el modelo financiero 3.1. Se han considerado dos escenarios relevantes: con un retardo y con dos retardos. Estos estudios son fundamentales, ya que permiten comprender cómo la introducción de retardos en las ecuaciones diferenciales y en las entradas exógenas influye en la dinámica del modelo y en el comportamiento de variables clave como la tasa de interés, la demanda de inversión y el índice de precios.

Todas las simulaciones presentadas en este trabajo se realizaron con los parámetros $a = 3$, $b = 0.1$ y $c = 1$, y con la condición inicial $[x_0, y_0, z_0] = [0.548091; 3.6497; 0.232718]$. Bajo estas configuraciones, se ha demostrado que el modelo sin retardos 2.21 exhibe comportamiento caótico [2]. Para resolver el modelo 3.1 con retardos constantes se utilizó la función `dd23` de **MATLAB**, que emplea el método *Runge-Kutta (2,3)* y es capaz de detectar discontinuidades, lo que la convierte en una herramienta adecuada para analizar sistemas no lineales y con comportamientos complejos.

Además, cabe destacar que el parámetro K determina la naturaleza cíclica o anti-cíclica del sistema: para $K > 0$, el sistema presenta una acción cíclica en la tasa de interés, mientras que para $K < 0$ se manifiesta una acción anti-cíclica. Esta distinción es importante, ya que refleja cómo la retroalimentación en la toma de decisiones puede interferir en el comportamiento del sistema financiero.

Por otra parte, el análisis cualitativo resulta esencial en sistemas dinámicos con retardos, ya que la presencia de retardos múltiples hacen que un análisis puramente analítico de estabilidad sea extremadamente complejo. Tal como se señaló en el capítulo anterior, en este trabajo no se desarrolla un estudio analítico completo para el caso de dos retardos, en cambio, se recurre a estudios cualitativos y simulaciones numéricas que permiten explorar el comportamiento del sistema y sus posibles comportamientos dinámicos, incluyendo bifurcaciones y cambios en la estabilidad.

4.1. Acción cíclica del modelo financiero con un retardo

En esta sección se presentan los resultados obtenidos ante el efecto de variar el parámetro $K > 0$ y los retardos τ positivos y constantes en el modelo financiero (3.1). Se han considerado dos escenarios importantes:

1. Cuando se mantiene fijo el peso $K > 0$ en la toma de decisiones frente al incremento o la disminución en la tasa de interés, mientras se modifica el valor del retardo τ_1 .
2. Cuando se mantiene constante el retardo τ_1 , variando el peso $K > 0$ en el proceso de la decisión.

Estos escenarios son fundamentales, pues con ellos se entenderá cómo la introducción de la entrada exógena $u(t) = K[x(t) - x(t - \tau_1)]$ afectan la dinámica cíclica del modelo financiero.

4.1.1. $K > 0$ fijo y variación de τ_1

Para estudiar la dinámica cíclica y el comportamiento del sistema financiero con un retardo, se realizó y discutió el diagrama de bifurcación del modelo 3.1, donde se estableció que $K = 0.1$, $\tau_1 \in [1, 8]$ y $\tau_2 = 0$. Los parámetros de bifurcación en función de τ_1 se visualizan en la Fig. 4.1.1, haciendo uso de la sección de Poincaré $z = 0$. En esta figura se pueden observar los distintos cruces que hacen las trayectorias en la sección conforme varía el retardo, y a su vez, se distinguen dos intervalos donde se perciben cambios cualitativos en el modelo. En el intervalo $\tau_1 \in [1.5, 2]$ se visualiza un cambio abrupto en la dinámica, mientras tanto en el intervalo $\tau_1 \in [4, 8]$ se observa una transición hacia el caos (véase Fig. 4.1.1).

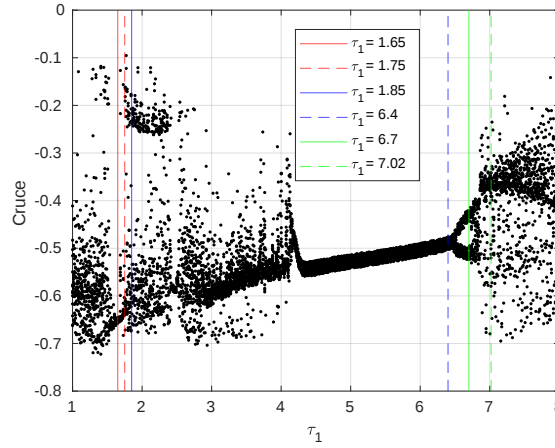
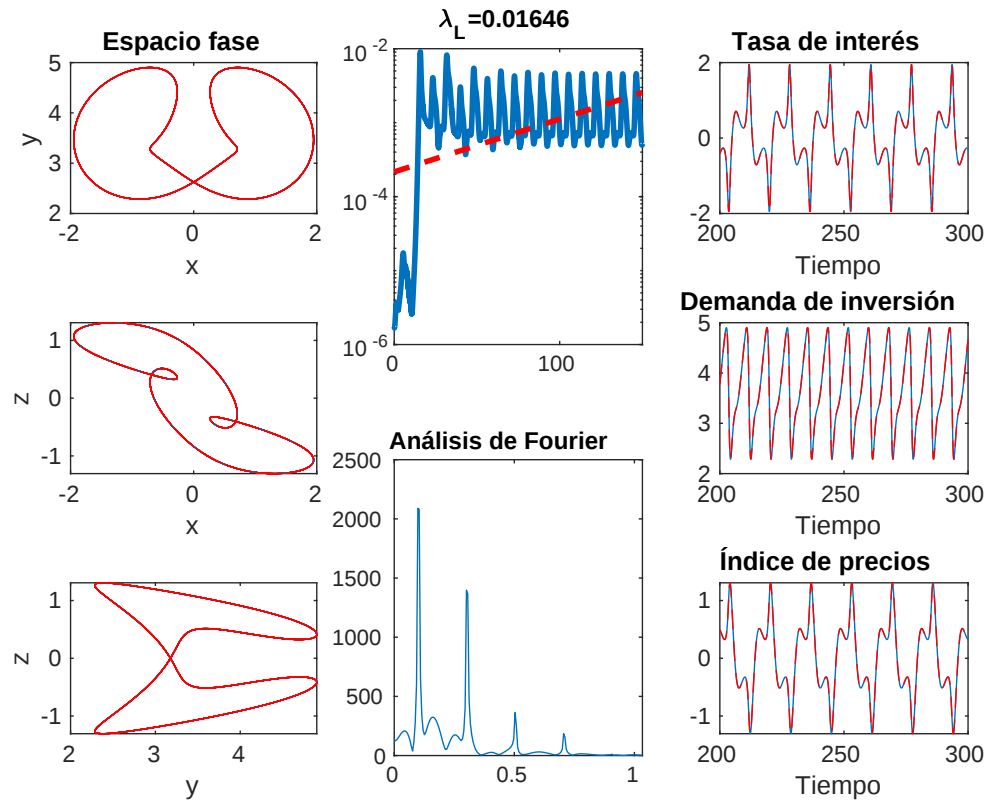
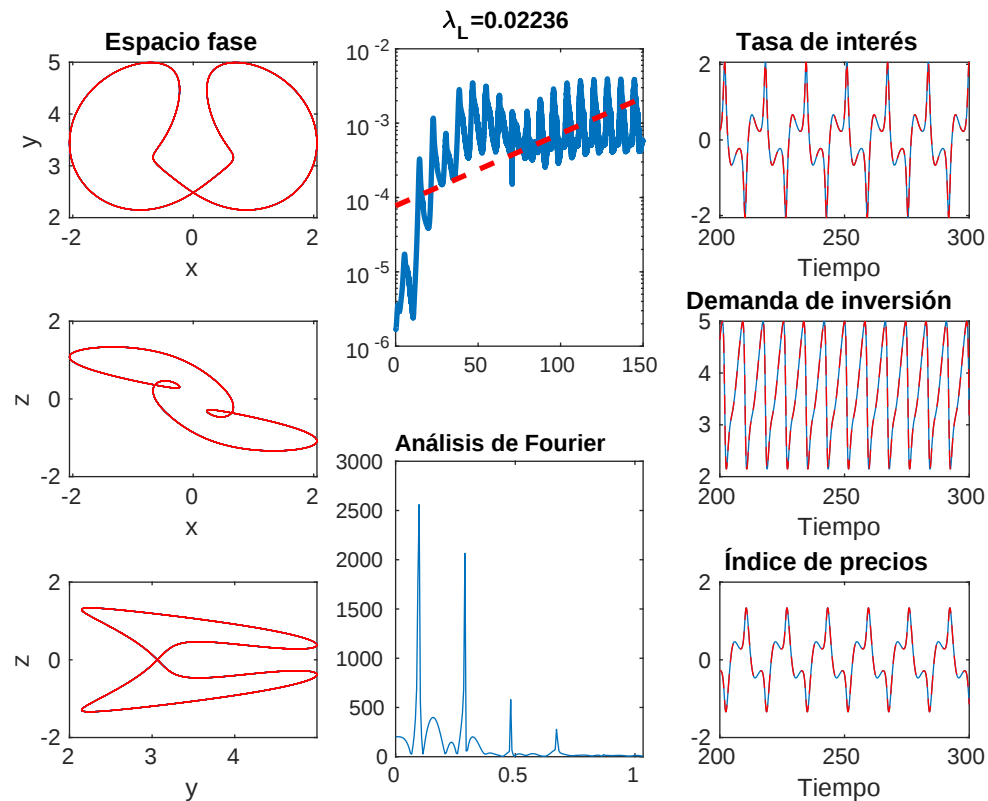


Figura 4.1.1: Diagrama de bifurcación para $K = 0.1$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$.

Observe que en el primer intervalo, para $\tau_1 = 1.65$ y $\tau_1 = 1.75$, se perciben dinámicas de periodo-1, las cuales se visualizan como trayectorias cerradas en el espacio fase de las Figs. 4.1.2a y 4.1.2b respectivamente (véase Fig. 4.1.2). En ambas simulaciones se realizó el estudio del exponente de Lyapunov, en el cual se obtuvieron exponentes $\lambda_L > 0$ para ambos casos, lo cual, de principio indicaría caos en el modelo financiero para esta selección de parámetros.

(a) $\tau_1 = 1.65$ (b) $\tau_1 = 1.75$ Figura 4.1.2: Resultados para $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (A).

Sin embargo, al analizar el gráfico de Fourier para ambas simulaciones, se aprecia una frecuencia dominante en el sistema, lo cual contrasta con la variación en tiempo de las variables económicas, pues se pueden distinguir oscilaciones periódicas. Por lo tanto, para la selección de parámetros $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$, $\tau_1 \in [1.65, 1.75]$, no se tienen dinámicas caóticas para el modelo 3.1, lo que implica que el exponente de Lyapunov es una condición necesaria, pero no suficiente, para detectar caos en sistemas dinámicos.

Por otro lado, cuando $\tau_1 = 1.85$, se observa un cambio en la dinámica del sistema. Tal como se puede apreciar en el espacio fase de la Fig. 4.1.4a, existe una dependencia sensible a las condiciones iniciales. Además, el gráfico del exponente de Lyapunov muestra cómo dos trayectorias cercanas se separan exponencialmente, con $\lambda_L = 0.08817$ conforme el tiempo va evolucionando. Asimismo, en la evolución temporal de las variables económicas se distinguen soluciones distintas y aperiódicas, resultado que se ve respaldado con el análisis de Fourier, donde en el espectro se aprecia una mayor riqueza en frecuencias dominantes del sistema.

Para la selección de parámetros $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y $K = 0.1$, el modelo 3.1 presenta un comportamiento caótico, ya que cumple con las condiciones mencionadas en el capítulo anterior. Además, en la Fig. 4.1.3 se puede visualizar el atractor extraño que se manifiesta bajo esta selección de parámetros.

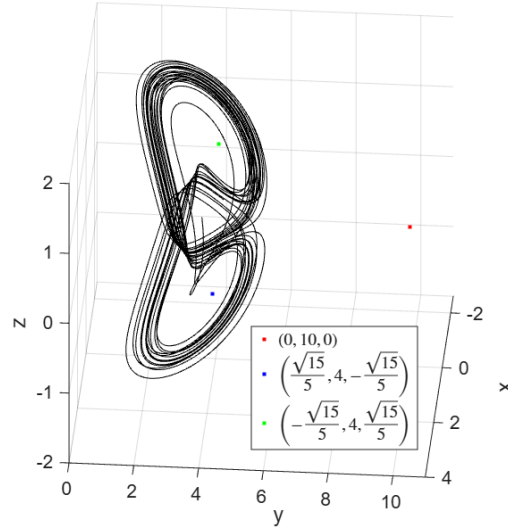
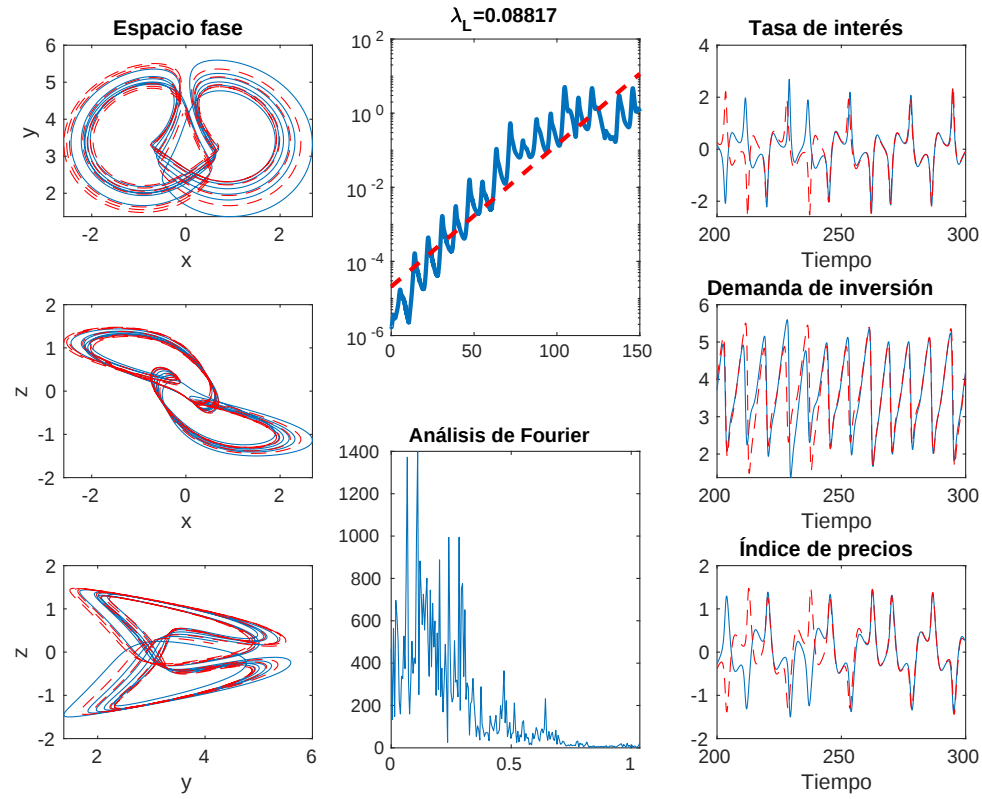
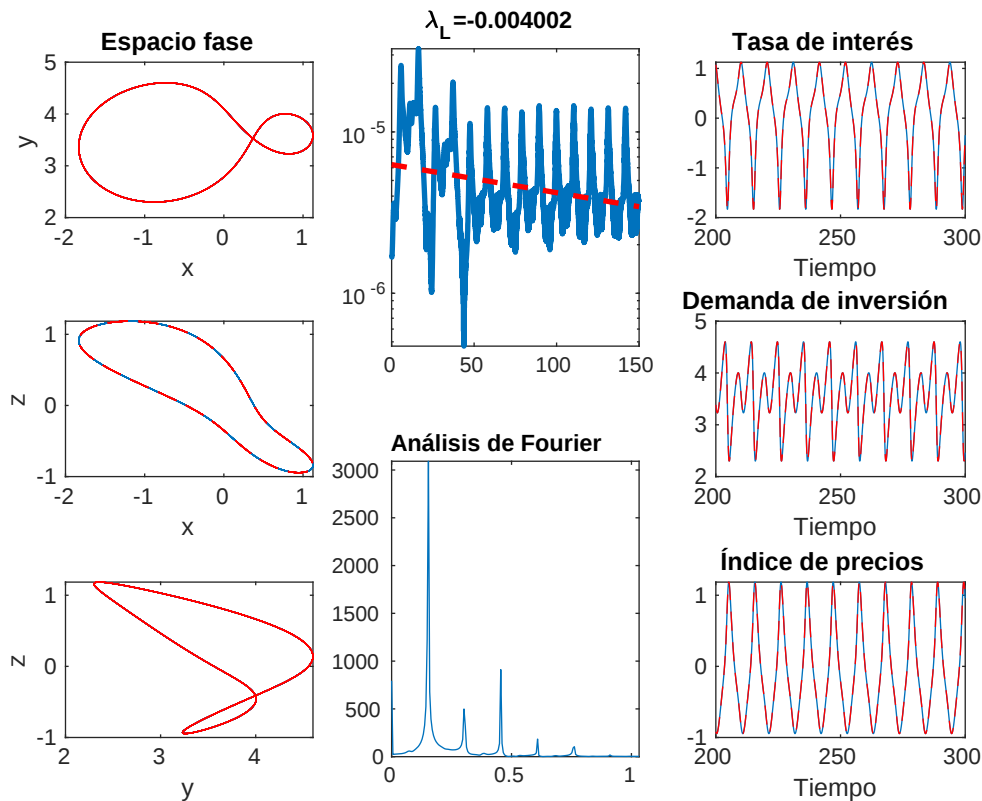


Figura 4.1.3: Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1, con $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y $\tau_1 = 1.85$.

Para el segundo intervalo, cuando $\tau_1 \in [4, 8]$, nuevamente se observa un cambio en la dinámica del sistema. En primera instancia, cuando τ_1 toma el valor de 6.40, el análisis de Fourier revela la presencia de una frecuencia dominante en el sistema, lo que indica un comportamiento periódico y el cual se ve reflejado en el espacio fase como una trayectoria cerrada de periodo-1 (Véase Fig. 4.1.4b). En este caso particular, se obtuvo un exponente de Lyapunov $\lambda_L < 0$, lo que indica la ausencia de dependencia sensible a las condiciones iniciales.

(a) $\tau_1 = 1.85$ (b) $\tau_1 = 6.40$ Figura 4.1.4: Resultados para $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (B).

Este resultado se ve reflejado tanto en el espacio fase como en las soluciones temporales de las variables económicas, ya que la dinámica correspondiente a la solución original y la obtenida al momento de perturbar la condición inicial, presentan comportamientos prácticamente idénticos.

Posteriormente, cuando $\tau_1 = 6.70$, el sistema muestra nuevamente un comportamiento estable. Sin embargo, en este caso, la trayectoria que se obtuvo y que es visible en el espacio fase de la Fig. 4.1.6a muestra un doblamiento de periodo con respecto a la dinámica obtenida en el caso anterior cuando $\tau_1 = 6.40$. Además, al observar el diagrama de bifurcación (Fig. 4.1.1) se aprecia precisamente este suceso, pues para $6.5 \leq \tau \leq 6.9$ aproximadamente, se logra visualizar este comportamiento, dinámicas de periodo-2. Mientras tanto, el gráfico de Fourier nos muestra dos frecuencias dominantes en el sistema, lo cual es indicio de soluciones periódicas, y las cuales son visibles en las soluciones a largo plazo de las variables económicas de la Fig. 4.1.6a.

Para finalizar el análisis de este segundo intervalo, se procedió a tomar el retardo $\tau_1 = 7.02$, valor para el cual, el sistema nuevamente muestra un comportamiento caótico, pues como se puede observar en la Fig. 4.1.6b, se obtuvo dependencia sensible a las condiciones iniciales, un exponente de Lyapunov $\lambda_L > 0$, soluciones aperiódicas a largo plazo y un espectro con diversas frecuencias dominantes, condiciones bajo las cuales avalan la existencia de dinámicas caóticas. Además, la Fig. 4.1.5 muestra el atractor extraño que se obtiene al elegir esta selección de parámetros, $\tau_1 = 7.02$, $\tau_2 = 0$ y $K = 0.1$.

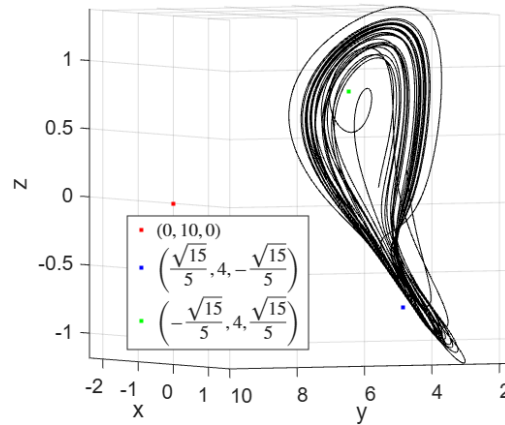
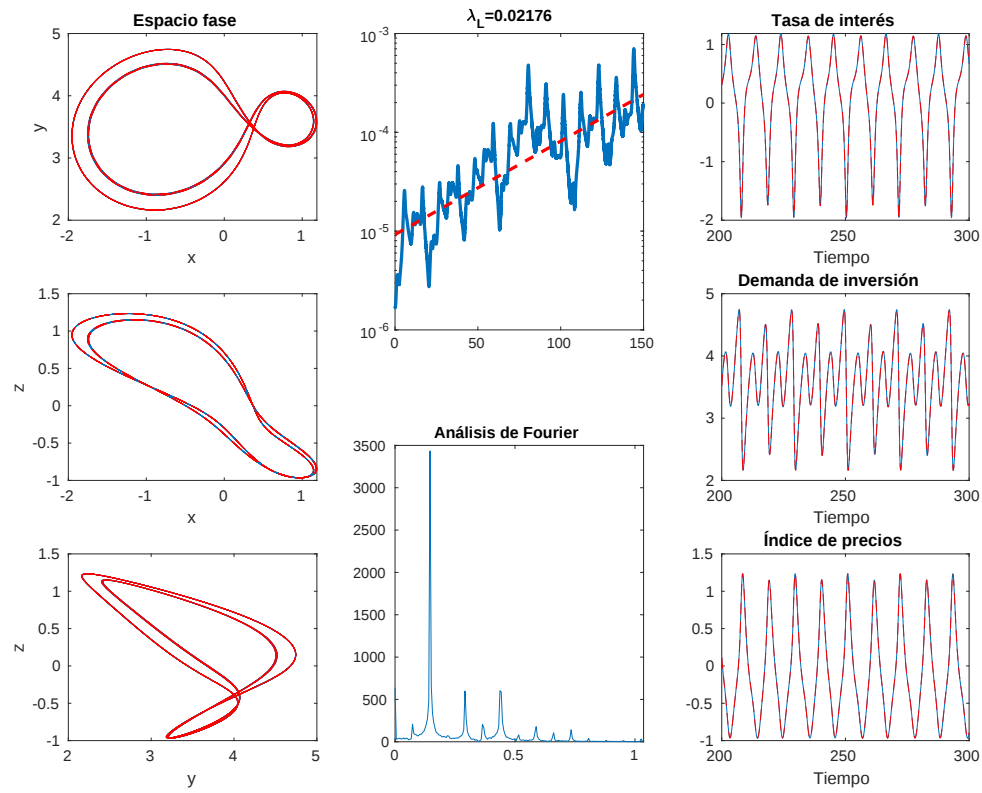
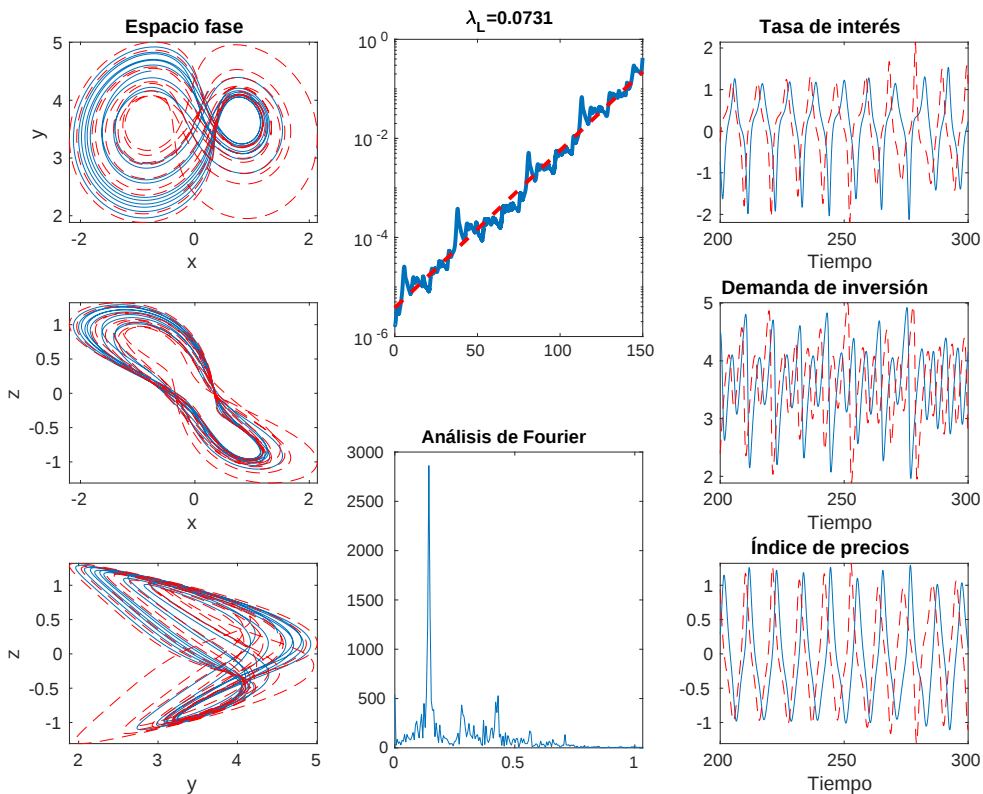


Figura 4.1.5: Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1, con $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y $\tau_1 = 7.02$.

De igual manera, observe que dentro del primer intervalo $\tau_1 \in [1.5, 2]$, se evidencia un cambio abrupto en la dinámica del sistema, al pasar de un estado estable de periodo-1 a un régimen caótico. Mientras que en el segundo intervalo para $\tau_1 \in [4, 8]$ se evidencia una transición hacia el caos, al pasar por dinámicas estables de periodo-1, periodo-2 y posteriormente terminar con dinámicas caóticas (véase tabla 4.1).

(a) $\tau_1 = 6.70$ (b) $\tau_1 = 7.02$ Figura 4.1.6: Resultados para $K = 0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (C).

Modelo	Parámetro fijo	Parámetro variado	Dinámica obtenida	Análisis
$\dot{x} = x + (y - a)x + u(t)$ $\dot{y} = 1 - by - x^2$ $\dot{z} = -x(t - \tau_2) - cz$ $u(t) = K[x - x(t - \tau_1)]$	$K = 0.1$ $\tau_2 = 0$	$\tau_1 = 1.65$	Periodo-1	Cambio abrupto en la dinámica
		$\tau_1 = 1.75$	Periodo-1	
		$\tau_1 = 1.85$	Caos	
		$\tau_1 = 6.40$	Periodo-1	Transición hacia el caos
		$\tau_1 = 6.70$	Periodo-2	
		$\tau_1 = 7.02$	Caos	

Tabla 4.1: Acción cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando τ_1 .

4.1.2. τ_1 fijo y variación de $K > 0$

Como se pudo observar en la Fig. 4.1.4b con los parámetros $K = 0.1$, $\tau_1 = 6.40$ y $\tau_2 = 0$, el modelo presenta una dinámica de periodo-1. Ahora bien, en esta sección se pretende exponer para qué valores de $K > 0$ se tiene un cambio cualitativo en el sistema 3.1, dejando a $\tau_2 = 0$, fijando el retardo $\tau_1 = 6.4$ y variando ahora el peso K en la toma de decisiones.

La Fig. 4.1.7 muestra los distintos parámetros de bifurcación para este caso de estudio, y en la cual se pueden visualizar cambios cualitativos en la dinámica del sistema para distintos pesos K dentro de la sección de Poincaré $z = 0$, y en la cual se aprecian los diferentes cruces que hacen las trayectorias al momento de variar dicho parámetro. De igual manera, esta figura proyecta una transición hacia al caos que pasa por dinámicas de periodos no conmensurables para posteriormente entrar a un régimen caótico.

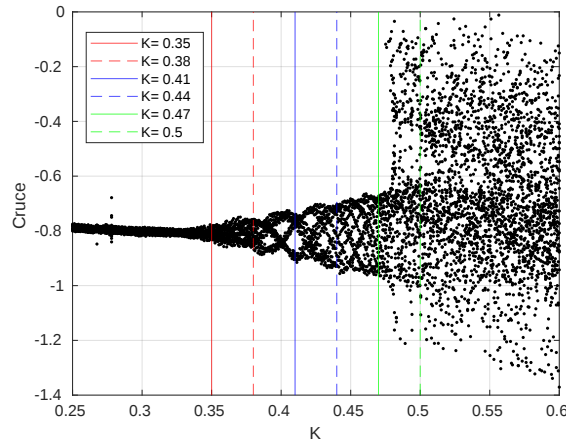
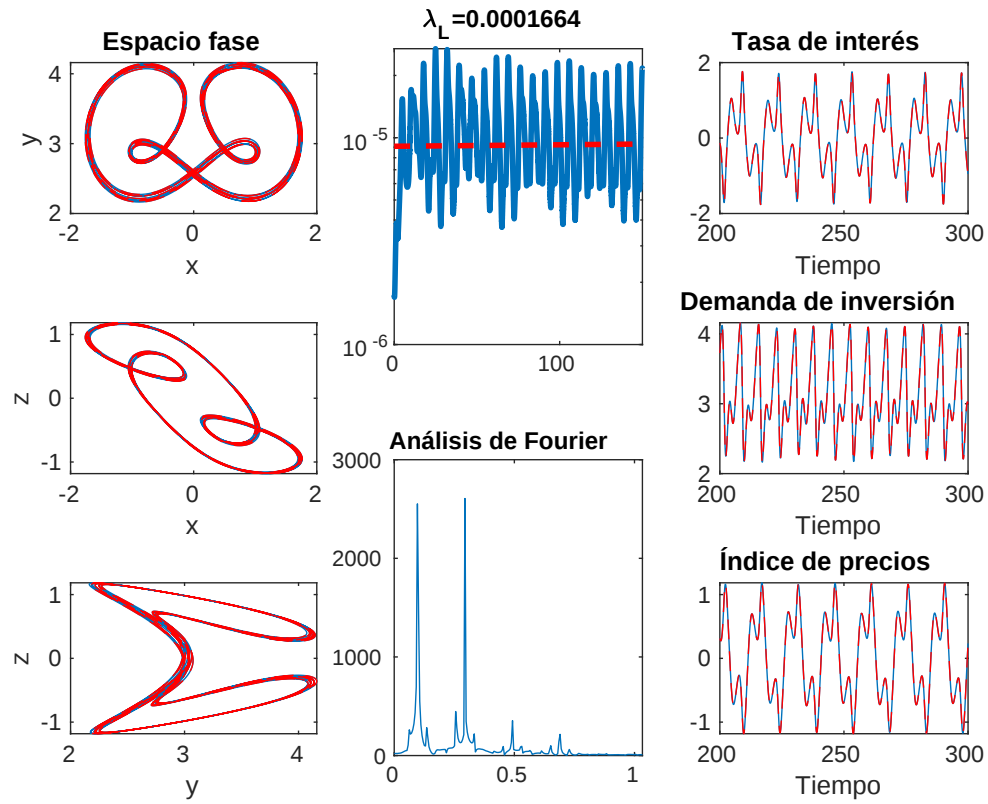
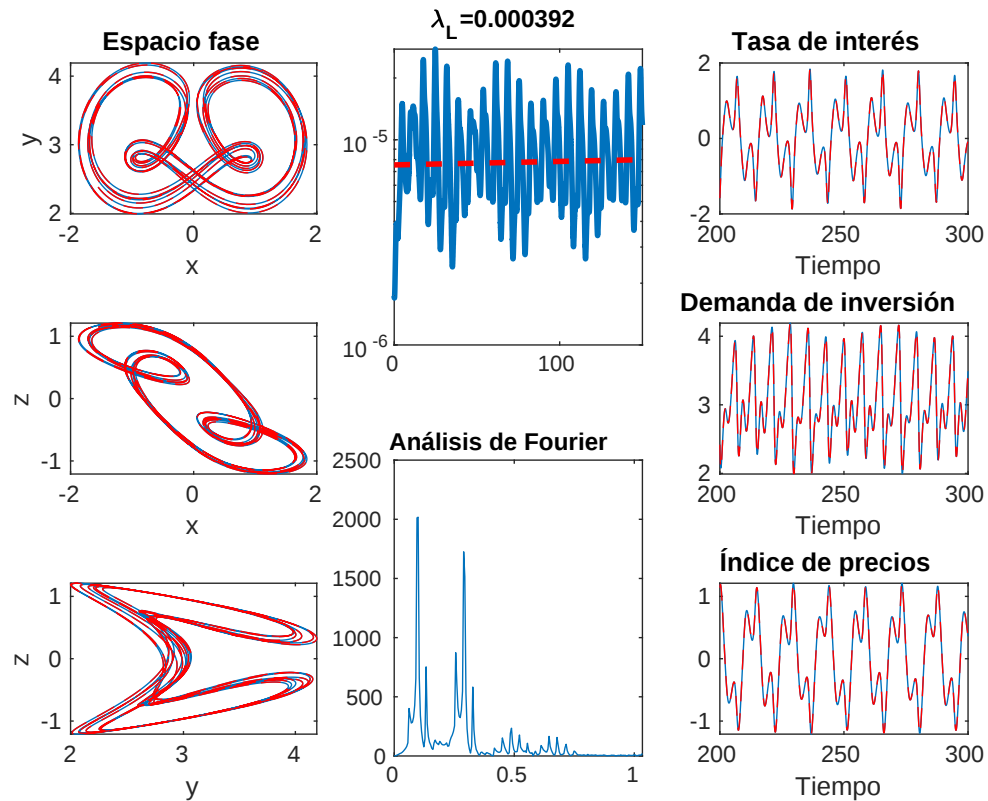


Figura 4.1.7: Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 6.40$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$.

Los espacios fase visibles en las Figs. 4.1.8, 4.1.9 y 4.1.10a ilustran la evolución de periodos no conmensurables que experimenta la dinámica del sistema financiero al momento de variar el peso K en el intervalo $[0.25, 0.47]$. En cada gráfico, las trayectorias se perciben como orbitas cerradas con formas muy similares entre sí para cambios pequeños en el valor del peso K . No obstante, el periodo asociado a cada una de ellas aumenta de manera gradual a lo largo de la variación de K . Cabe señalar, que no es posible determinar con precisión el valor exacto del

(a) $K = 0.35$ (b) $K = 0.38$ Figura 4.1.8: Resultados para $\tau_1 = 6.4$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K > 0$ (A).

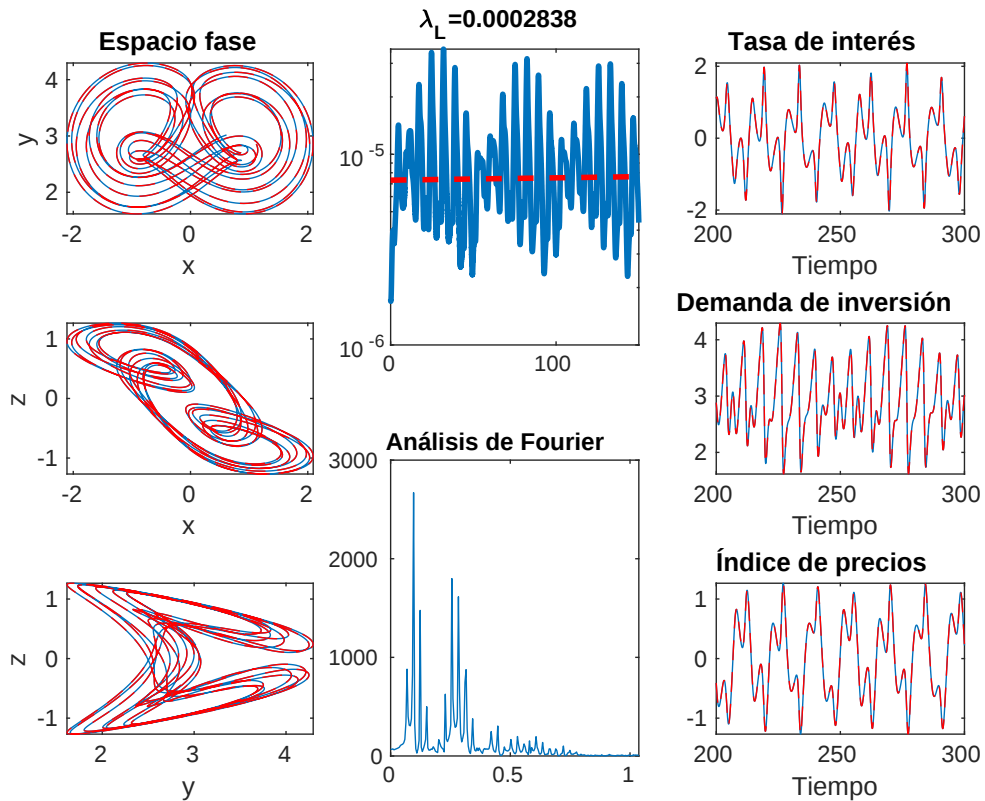
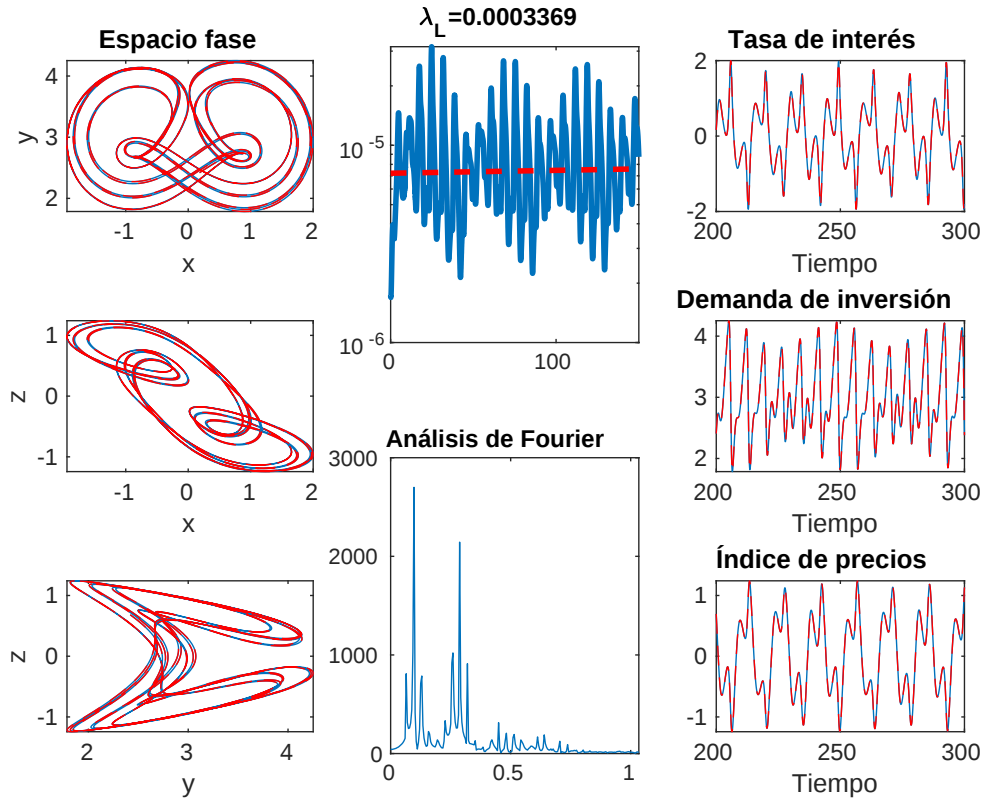


Figura 4.1.9: Resultados para $\tau_1 = 6.4$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K > 0$ (B).

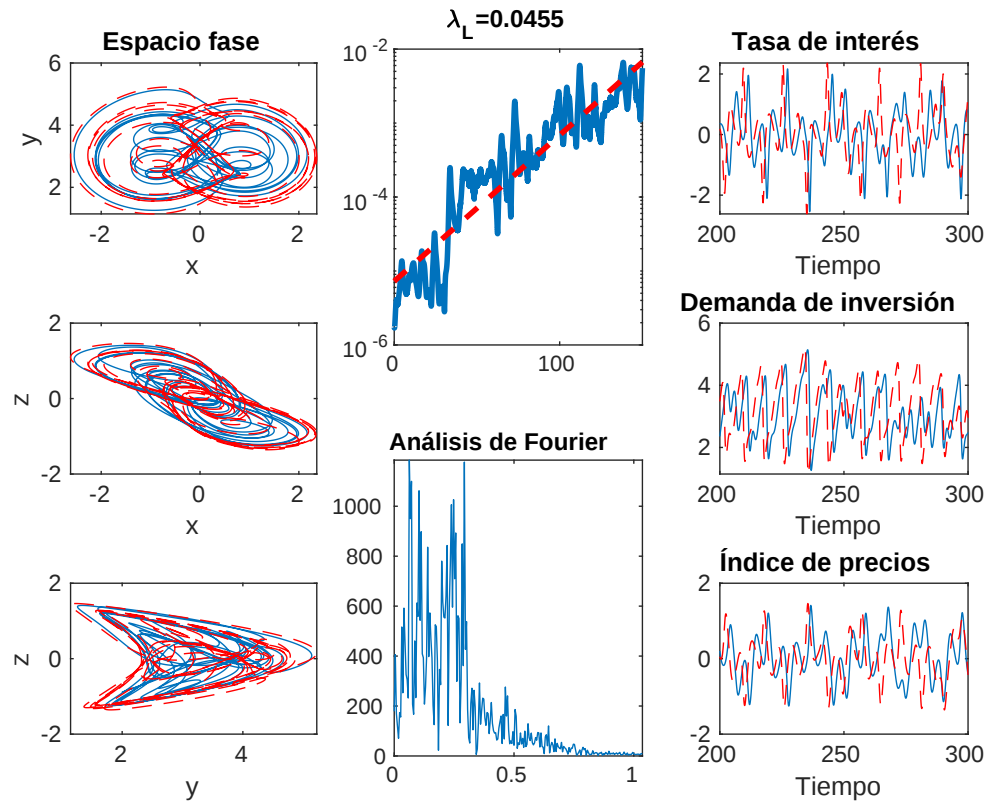
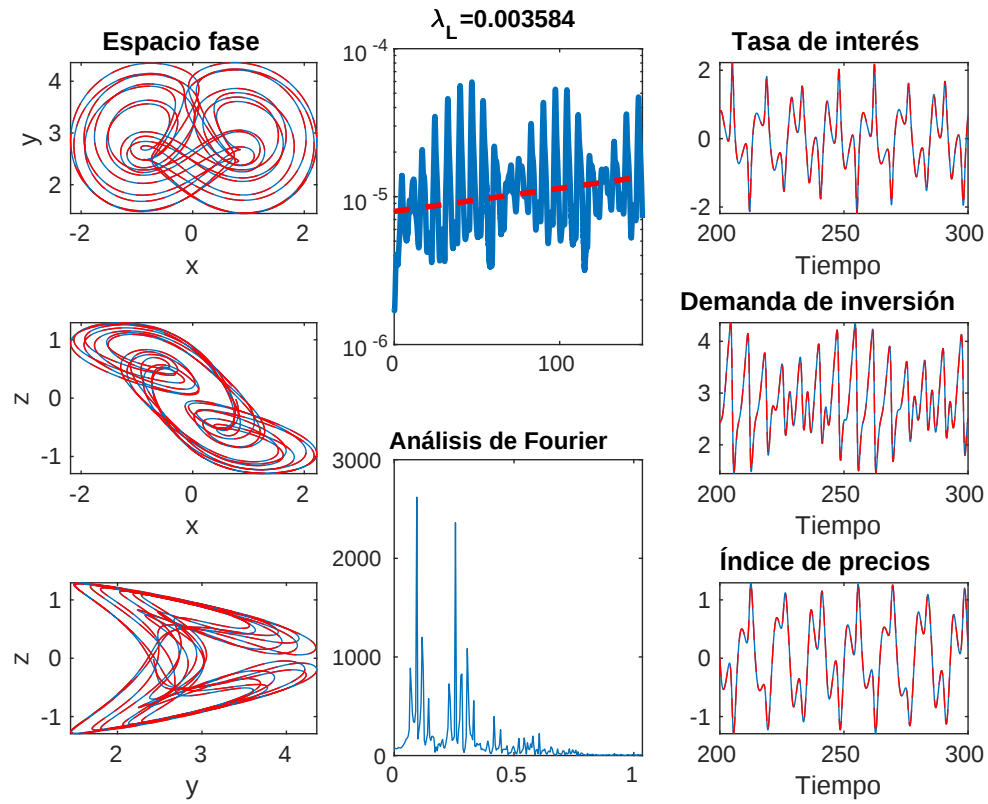


Figura 4.1.10: Resultados para $\tau_1 = 6.4$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K > 0$ (C).

periodo para cada una de estas trayectorias. Sin embargo, el análisis de Fourier realizado para cada valor distinto de K , revela un espectro con una notable presencia de múltiples frecuencias dominantes, esta multiplicidad de picos significativos en él, es indicio de dinámicas complejas, coherente con una transición hacia el caos dentro de este rango de valores para K (véase tabla 4.2), tal como también se evidencia en el diagrama de bifurcación correspondiente (véase Fig. 4.1.7).

Modelo	Parámetro fijo	Parámetro variado	Dinámica obtenida	Análisis
$\dot{x} = x + (y - a)x + u(t)$ $\dot{y} = 1 - by - x^2$ $\dot{z} = -x(t - \tau_2) - cz$ $u(t) = K[x - x(t - \tau_1)]$	$\tau_1 = 6.40$ $\tau_2 = 0$	$K = 0.35$	Periodo no conmensurable	Transición hacia el caos
		$K = 0.38$	Periodo no conmensurable	
		$K = 0.41$	Periodo no conmensurable	
		$K = 0.44$	Periodo no conmensurable	
		$K = 0.47$	Periodo no conmensurable	
		$K = 0.50$	Caos	

Tabla 4.2: Acción cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando $K > 0$.

Es importante destacar que para estos primeros cinco análisis, expuestos en la Figs. 4.1.8, 4.1.9 y 4.1.10a, el exponente de Lyapunov λ_L es muy cercano a cero para cada peso K seleccionado, lo cual nos indica la ausencia de dependencia sensible a la condición inicial. El resultado se ve reflejado tanto en el espacio fase como en las soluciones temporales de las variables económicas, ya que la dinámica correspondiente a la solución original y la obtenida al momento de perturbar la condición inicial presentan comportamientos prácticamente idénticos.

Por otro lado, un régimen caótico se visualiza en la Fig. 4.1.10b para $\tau_1 = 0.50$, ya que cumple con las condiciones para caos mencionadas en el capítulo anterior. De igual manera, en la Fig. 4.1.11 se muestra el atractor extraño que se obtuvo para la selección de parámetros $\tau_1 = 6.40$, $\tau_2 = 0$ y $K = 0.50$.

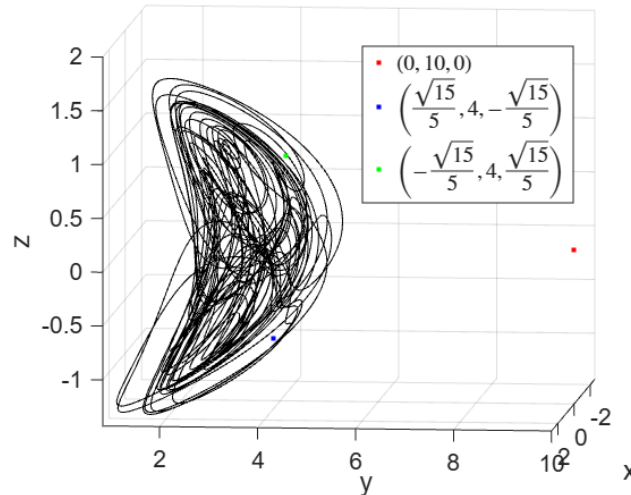


Figura 4.1.11: Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $\tau_2 = 0$ y $K = 0.50$.

4.2. Acción anti-cíclica del modelo financiero con un retardo

En esta sección se presentan los resultados obtenidos ante el efecto de variar el parámetro $K < 0$ y los retardos τ positivos y constantes en el modelo financiero 3.1. Se han considerado dos escenarios importantes:

1. Cuando se mantiene fijo el peso $K < 0$ en la toma de decisiones frente al incremento o la disminución en la tasa de interés, mientras se modifica el valor del retardo τ_1 .
2. Cuando se mantiene constante el retardo τ_1 , variando el peso $K < 0$ en el proceso de la decisión.

4.2.1. $K < 0$ fijo y variación de τ_1

Para analizar el efecto anti-cíclico del modelo 3.1 con $K = -0.1$, $\tau_1 \in [1.5, 4]$ y $\tau_2 = 0$, se procedió a realizar y analizar el diagrama de bifurcación para el parámetro τ_1 y el cual se expone en la Fig. 4.2.1.

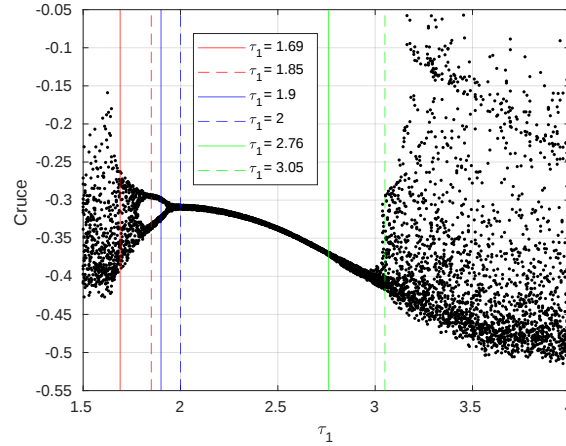


Figura 4.2.1: Diagrama de bifurcación para $K = -0.1$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$.

En dicha figura se pueden observar los distintos cruces que hacen las trayectorias en la sección de Poincaré $z = 0$ conforme varía el retardo τ_1 , y se logra apreciar que la dinámica del modelo sale de un régimen caótico a través de una transición inversa, pasando por dinámicas de periodo-2 y periodo-1, para finalmente entrar nuevamente a un régimen caótico, esta transición es visible en la Figs. 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4.

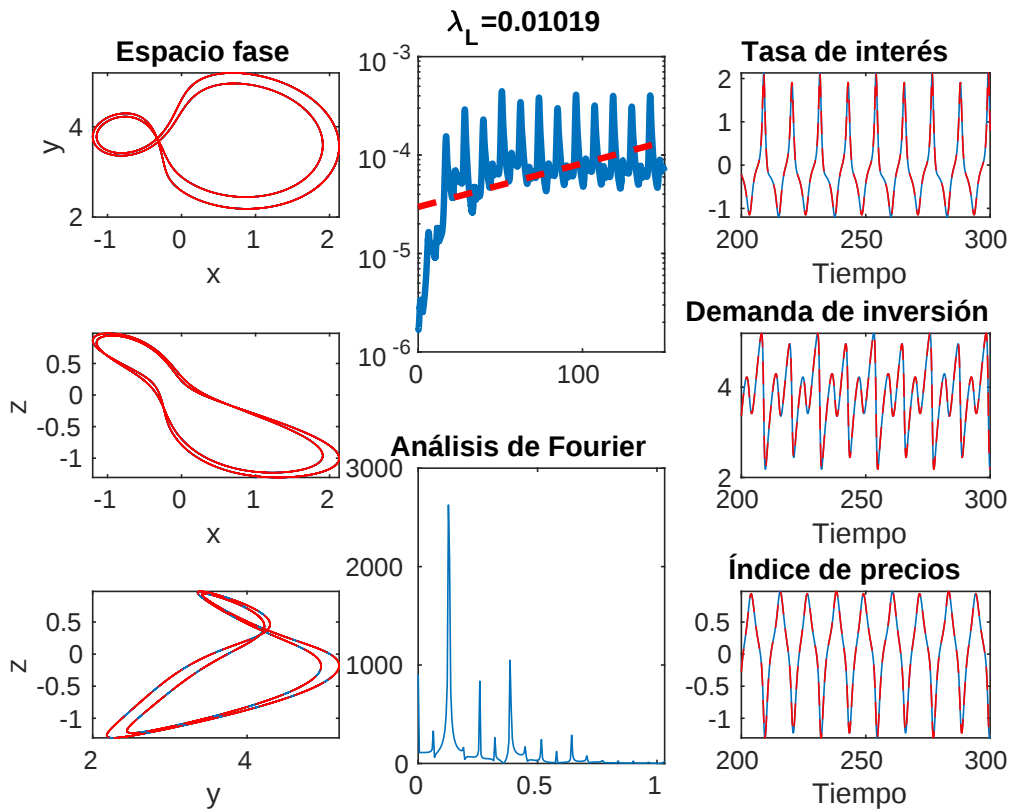
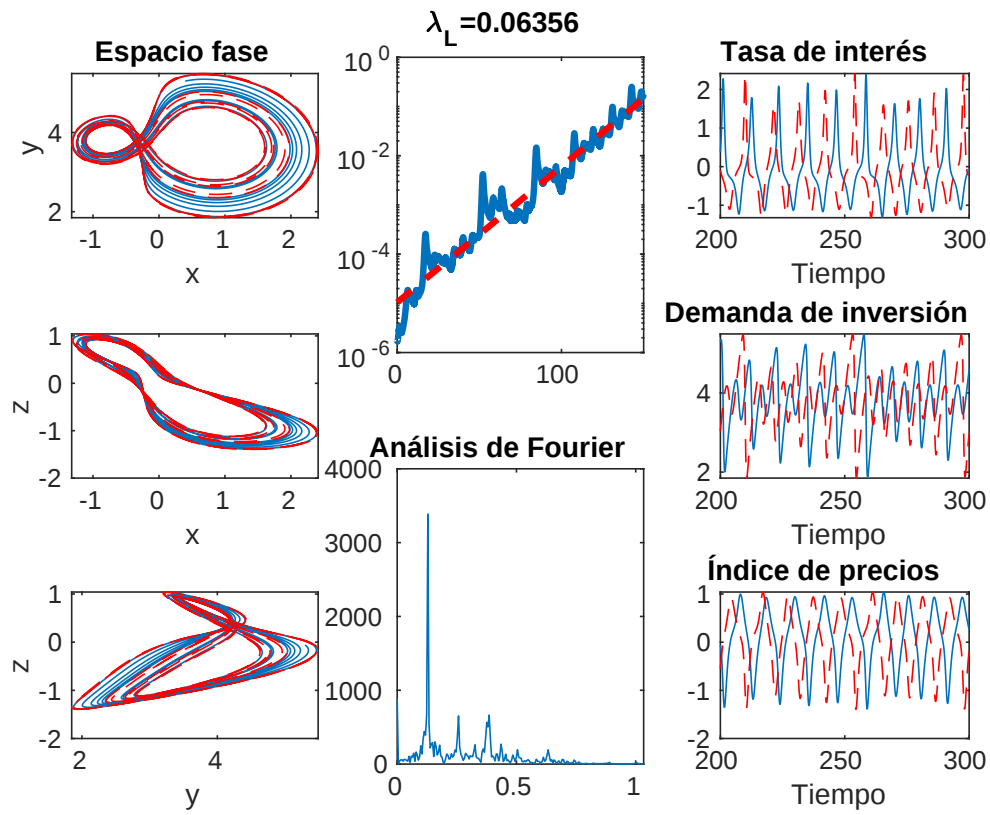
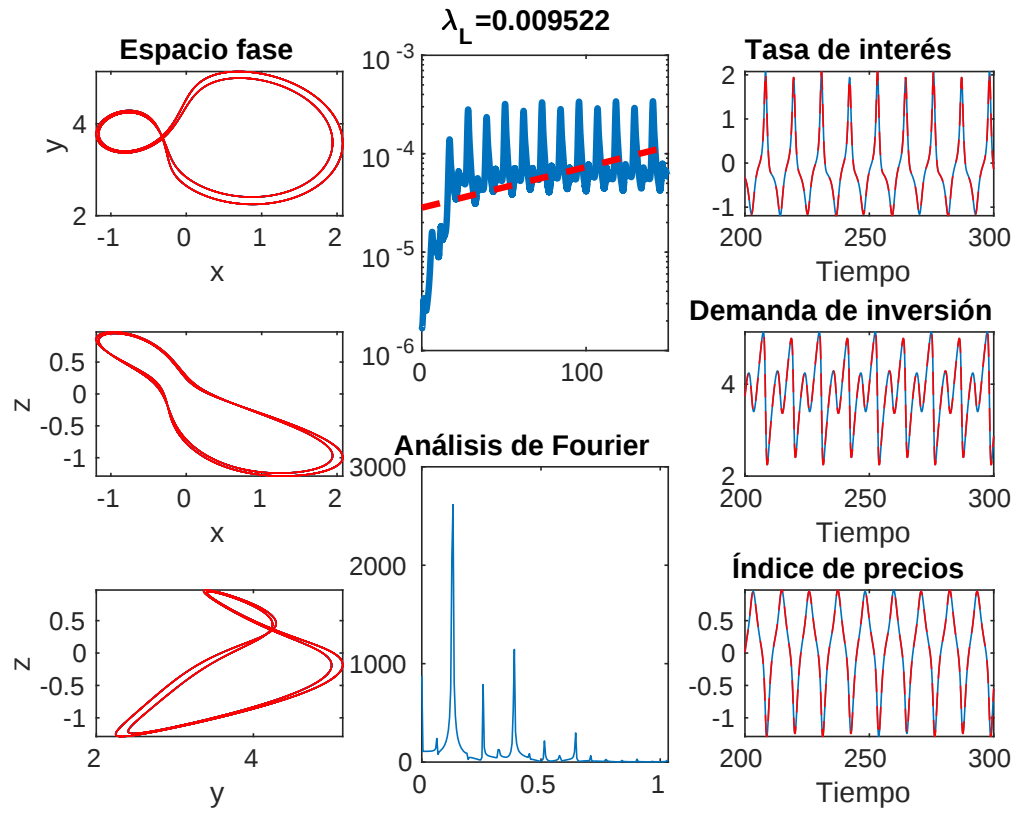
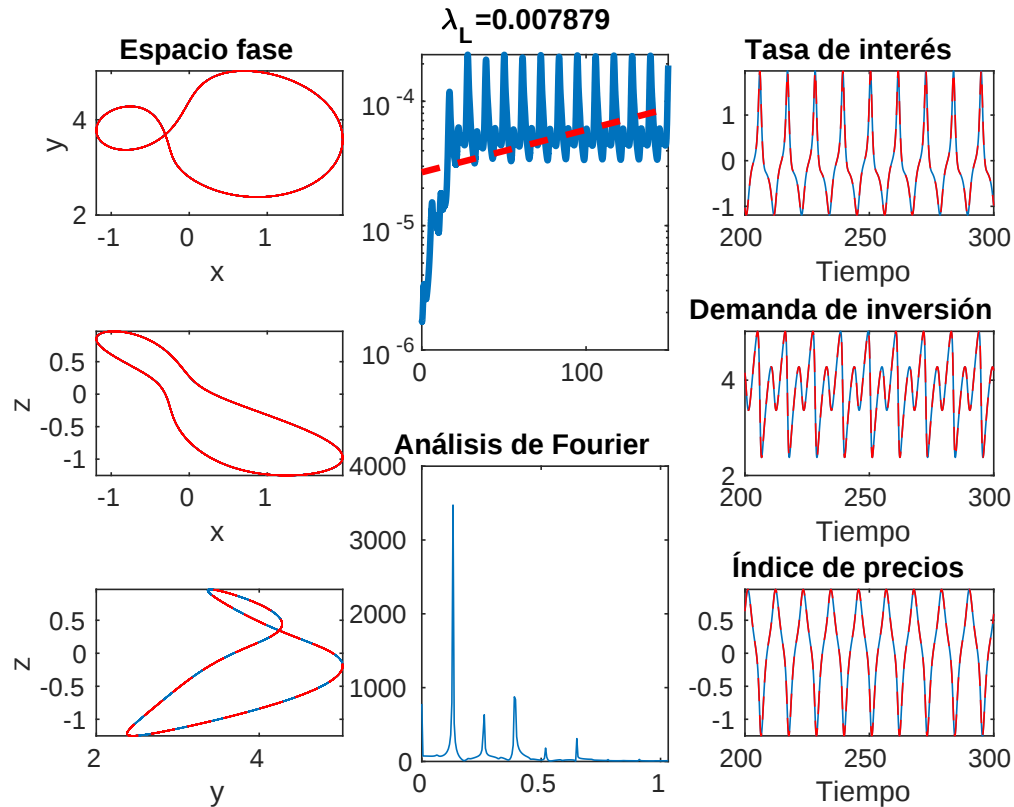


Figura 4.2.2: Resultados para $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (A).

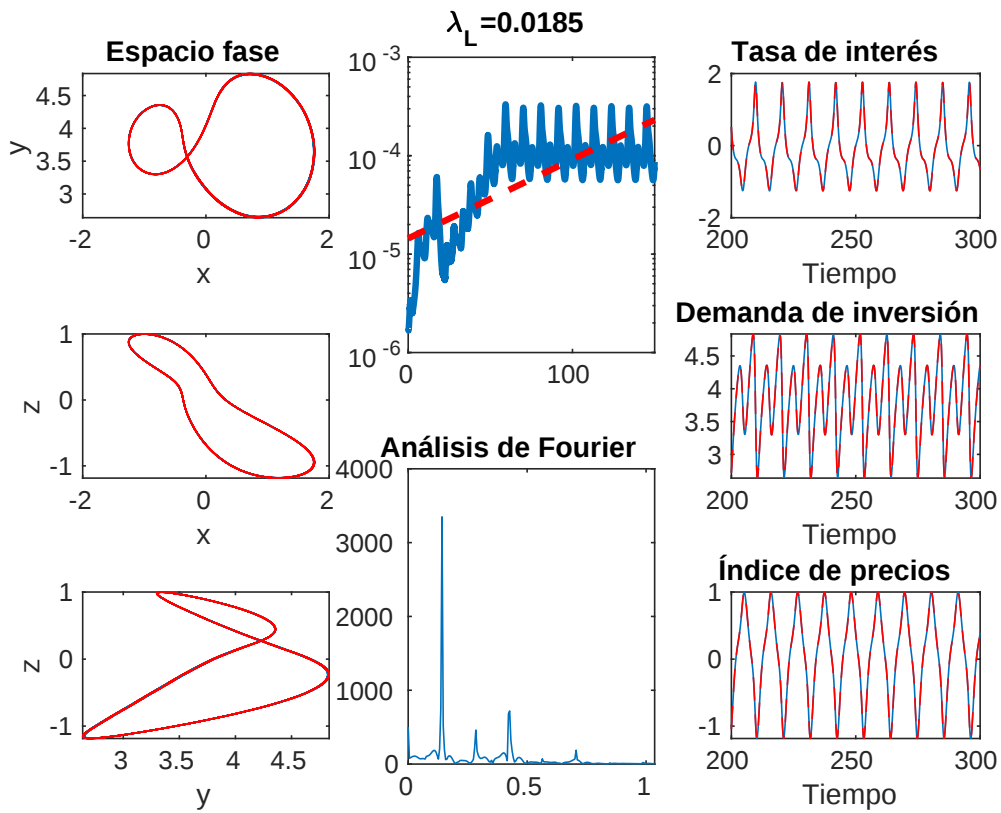
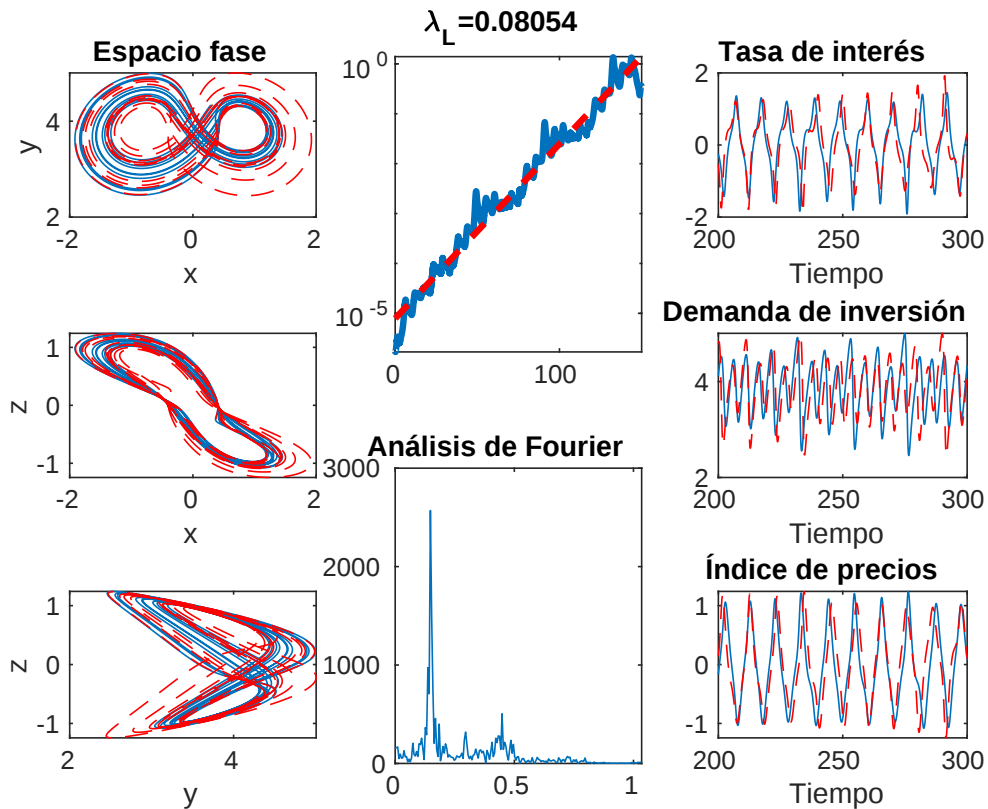


(a) $\tau_1 = 1.90$

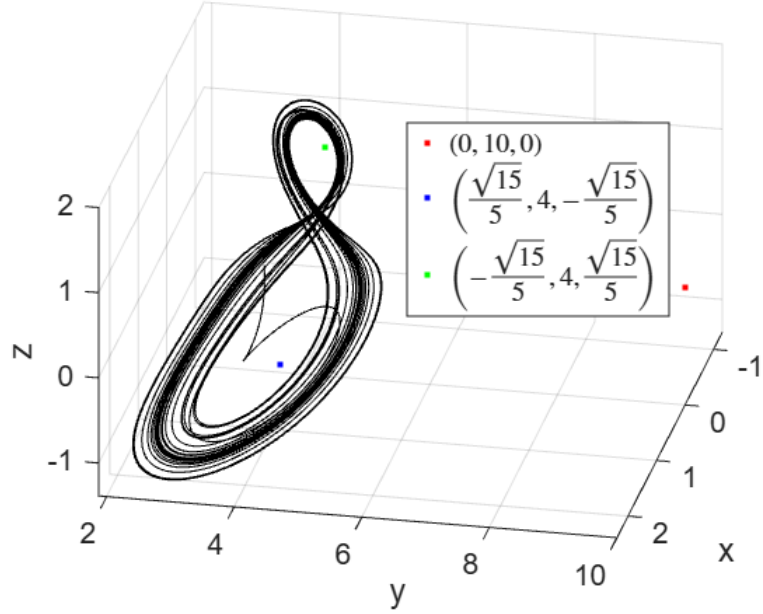


(b) $\tau_1 = 2.00$

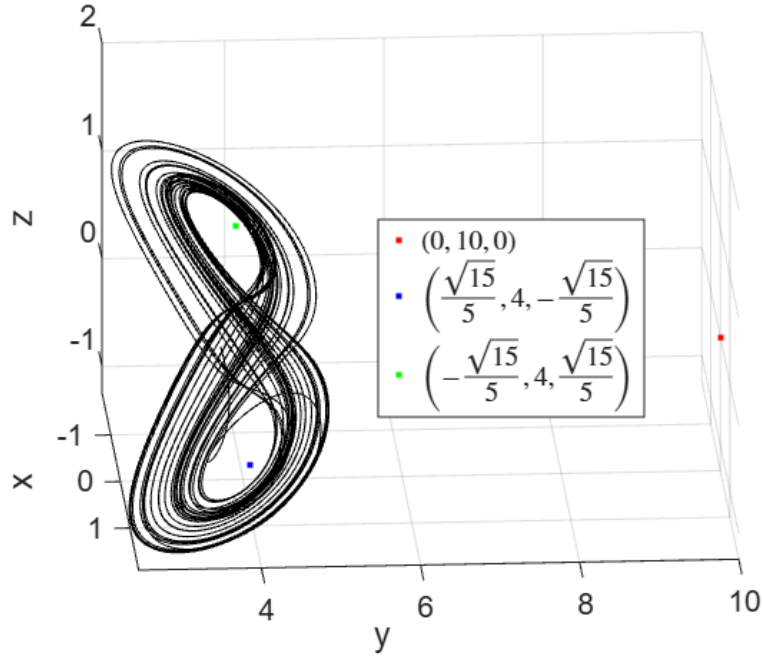
Figura 4.2.3: Resultados para $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (B).

(a) $\tau_1 = 2.76$ (b) $\tau_1 = 3.05$ Figura 4.2.4: Resultados para $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 (C).

Los comportamientos caóticos se pueden visualizar en las Figs. 4.2.2a y 4.2.4b, observe que ambas imágenes cumplen las condiciones para detectar caos en sistemas dinámicos; dependencia sensible a condiciones iniciales, exponente de lyapunov mayor a cero, soluciones aperiódicas a largo plazo, y además el espectro del diagrama de Fourier muestra múltiples frecuencias dominantes, lo cual implica dinámicas complejas. Por otro lado, los atractores extraños para esta selección de parámetros se visualizan en la Fig. 4.2.5.



(a) $\tau_1 = 1.69$



(b) $\tau_1 = 3.05$

Figura 4.2.5: Atractores extraños en la dinámica anti-cíclica del modelo 3.1 con $K = -0.1$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de τ_1 .

Por otro lado, la transición inversa hacia el caos se muestra en las Figs. 4.2.2b, 4.2.3 y 4.2.4. Como se puede observar en el diagrama de bifurcación correspondiente (Fig. 4.2.1) para valores de τ_1 en el intervalo $1.80 < \tau_1 < 1.95$, la dinámica del sistema entra en un estado estable de periodo-2. Las Figs. 4.2.2b y 4.2.3a ejemplifican esta dinámica, ya que en el espacio fase de ambas se observa una trayectoria cerrada que requiere dos periodos para regresar a su punto inicial. Además, el grafico de Fourier muestra la presencia de dos frecuencias dominantes en el sistema para esta selección de parámetros, lo que indica la existencia de soluciones periódicas. Dichas soluciones se reflejan claramente en la solución temporal de las variables económicas analizadas.

En cambio, para τ_1 en el intervalo $1.95 \leq \tau_1 \leq 3$, la dinámica del sistema también entra en un estado estable. Sin embargo, en este caso, las trayectorias obtenidas corresponden a dinámicas de periodo-1. Observe que en el espacio fase de las Figs. 4.2.3b y 4.2.4a, se aprecia que la forma de la trayectoria es prácticamente la misma que en el caso de periodo-2, la diferencia es que ahora la trayectoria, completa todo el recorrido en un solo periodo.

Finalmente, observe que para valores de $\tau > 3$, el sistema entra a un régimen caótico (véase Fig. 4.2.4b).

El análisis general de este caso, puede visualizarse en la tabla 4.3.

Modelo	Parámetro fijo	Parámetro variado	Dinámica obtenida	Análisis
$\dot{x} = x + (y - a)x + u(t)$ $\dot{y} = 1 - by - x^2$ $\dot{z} = -x(t - \tau_2) - cz$ $u(t) = K[x - x(t - \tau_1)]$	$K = -0.1$ $\tau_2 = 0$	$\tau_1 = 1.69$	Caos	Cambio abrupto en la dinámica
		$\tau_1 = 1.85$	Periodo-2	
		$\tau_1 = 1.90$	Periodo-2	Transición inversa hacia el caos
		$\tau_1 = 2.00$	Periodo-1	
		$\tau_1 = 2.76$	Periodo-1	
		$\tau_1 = 3.05$	Caos	

Tabla 4.3: Acción anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando τ_1 .

4.2.2. τ_1 fijo y variación de $K < 0$

En la sección anterior se analizó la dinámica que sufre el modelo financiero cuando el retardo τ_1 es modificado, fijando el peso $K = -0.1$, y se logro identificar que para $\tau_1 = 1.85$, el sistema resulta ser estable, evidenciando una dinámica de periodo-2. Lo que ahora se intenta explorar son cambios en la dinámica del modelo financiero cuando se intenta variar el peso $K < 0$ en la toma de decisiones de la retroalimentación $u(t) = K[x(t) - x(t - \tau_1)]$, pero esta vez fijando el parámetro $\tau_1 = 1.85$.

En la Fig. 4.2.6 se tiene el diagrama de bifurcación en la sección de Poincaré $z = 0$ del modelo financiero 3.1, en el cual se propusieron los valores de $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y $K \in [-0.11, -0.08]$. En esta figura claramente se puede observar una transición hacia el caos, que inicia con dinámicas de periodo-1, continua con dinámicas de periodo-2, posteriormente evoluciona hacia dinámicas de periodo-4 y, finalmente, culmina en un régimen caótico. Esta transición se observa de forma detallada en las Figs. 4.2.7, 4.2.8 y 4.2.9.

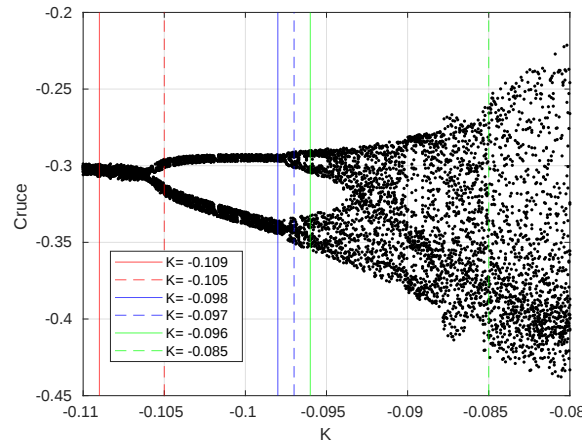


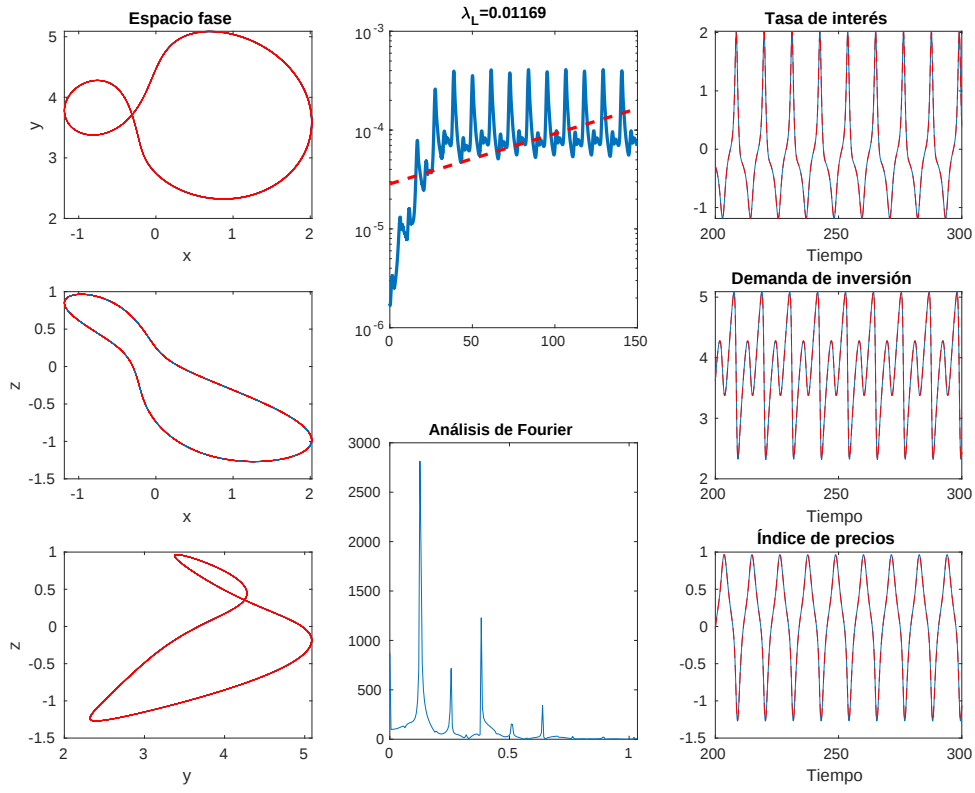
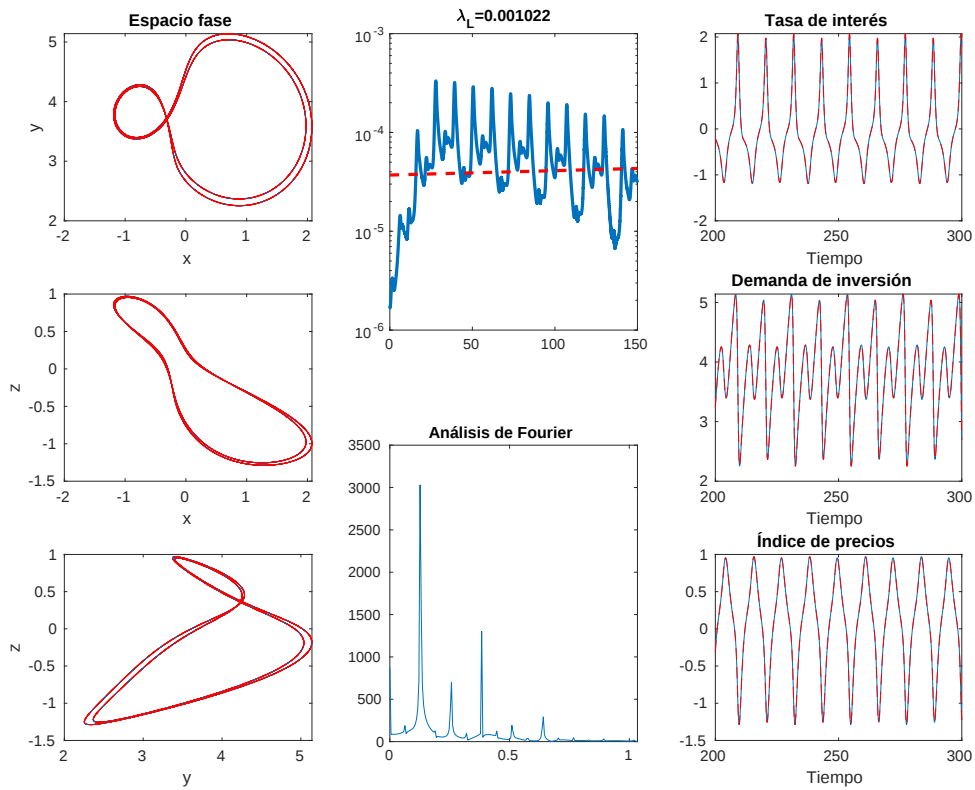
Figura 4.2.6: Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 1.85$ y $\tau_2 = 0$ en la sección de Poincaré $z = 0$.

Esta transición inicia con valores $-0.11 \leq K < -0.10$, donde el sistema entra en un periodo estable, en dinámicas de periodo-1. La Fig. 4.2.7a muestra en su espacio fase una trayectoria cerrada que ocupa un solo periodo para regresar a su punto de partida. Además, el grafico de Fourier, muestra una frecuencia dominante en el sistema lo que da indicio a soluciones periódicas a largo plazo, y las cuales son visibles en las series temporales de las variables económicas analizadas.

Posteriormente, cuando el peso K toma valores entre $[-0.10, -0.985]$ el sistema muestra nuevamente un comportamiento estable. Sin embargo, en este caso, las trayectorias que se obtuvieron y que están visibles en el espacio fase de la Figs. 4.2.7b y 4.2.8a muestra un doblamiento de periodo-2 con respecto a la dinámica obtenida en el caso anterior cuando $-0.11 \leq K < -0.10$. Mientras tanto, el gráfico de Fourier para ambas imágenes, nos muestra dos frecuencias dominantes en el sistema, lo cual es indicio de soluciones periódicas.

Mientras tanto, cuando $-0.985 \leq K < -0.09$ el sistema sigue teniendo un comportamiento estable. No obstante, para valores de K , dentro de este intervalo, las trayectorias que se manifiestan y que están visibles en el espacio fase de la Figs. 4.2.8b y 4.2.9a muestra un doblamiento de periodo-4 con respecto a la dinámica obtenida en el caso anterior cuando K toma valores en $[-0.10, -0.985]$. Por otro lado, el gráfico de Fourier para ambas imágenes, muestra picos de señales dominantes bien definidas en el sistema y lo cual contrasta con las series temporales de las variables económicas en cuestión, pues se obtuvieron soluciones periódicas al pasar el tiempo.

Cabe resaltar que en estos cinco análisis mostrados en las Figs. 4.2.7, 4.2.8 y 4.2.9a se obtuvieron exponentes de Lyapunov mayores a cero ($\lambda_L > 0$), lo cual, de principio indicaría comportamiento caótico en el sistema, sin embargo, se observa que para todos los casos no existe dependencia sensible en las condiciones iniciales y además se obtuvieron soluciones periódicas para cada valor de K seleccionado. Siendo este caso de estudio nuevamente una prueba más de que el obtener exponentes de Lyapunov positivos no es una condición suficiente para detectar caos en sistemas dinámicos.

(a) $K = -0.109$ (b) $K = -0.105$ Figura 4.2.7: Resultados para $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K < 0$ (A).

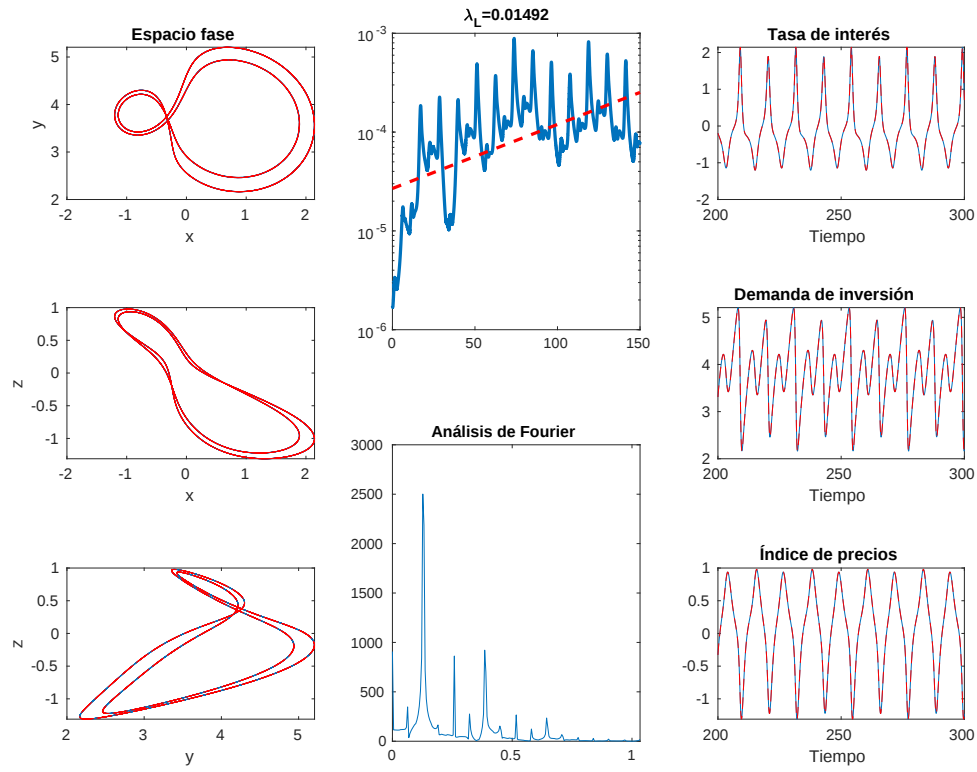
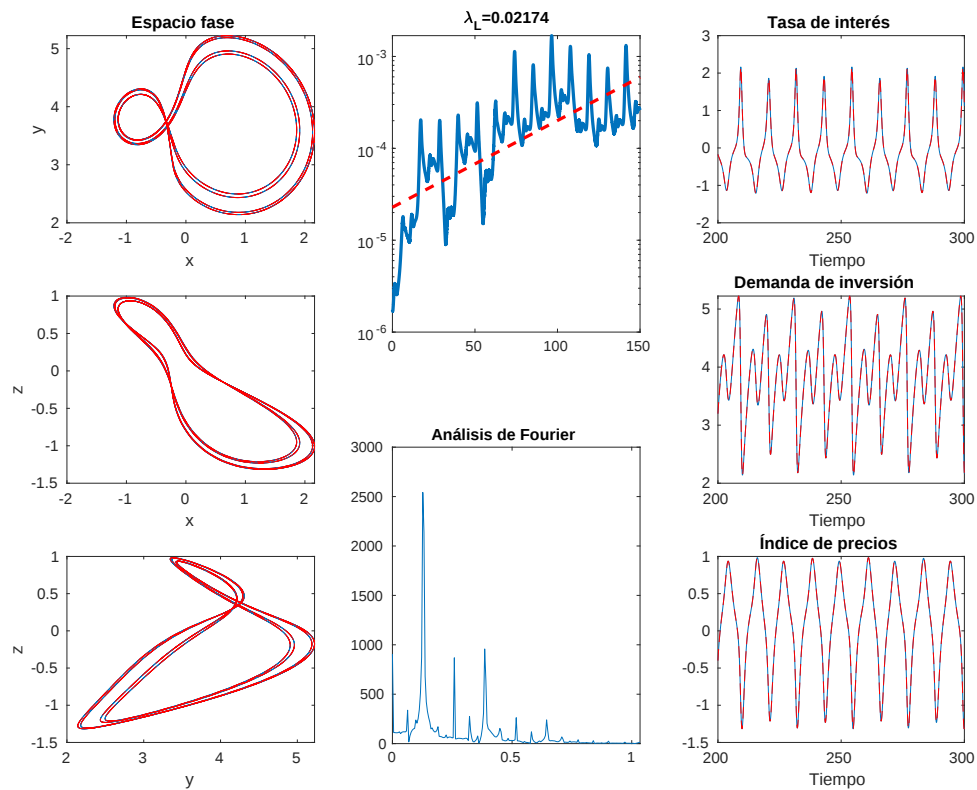
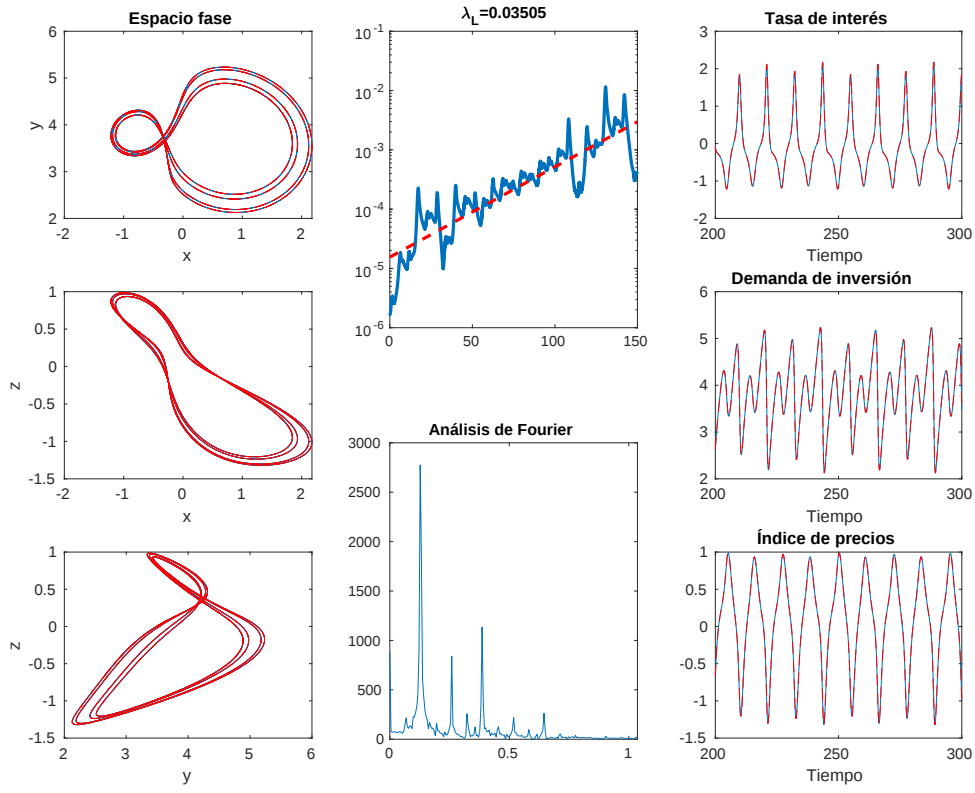
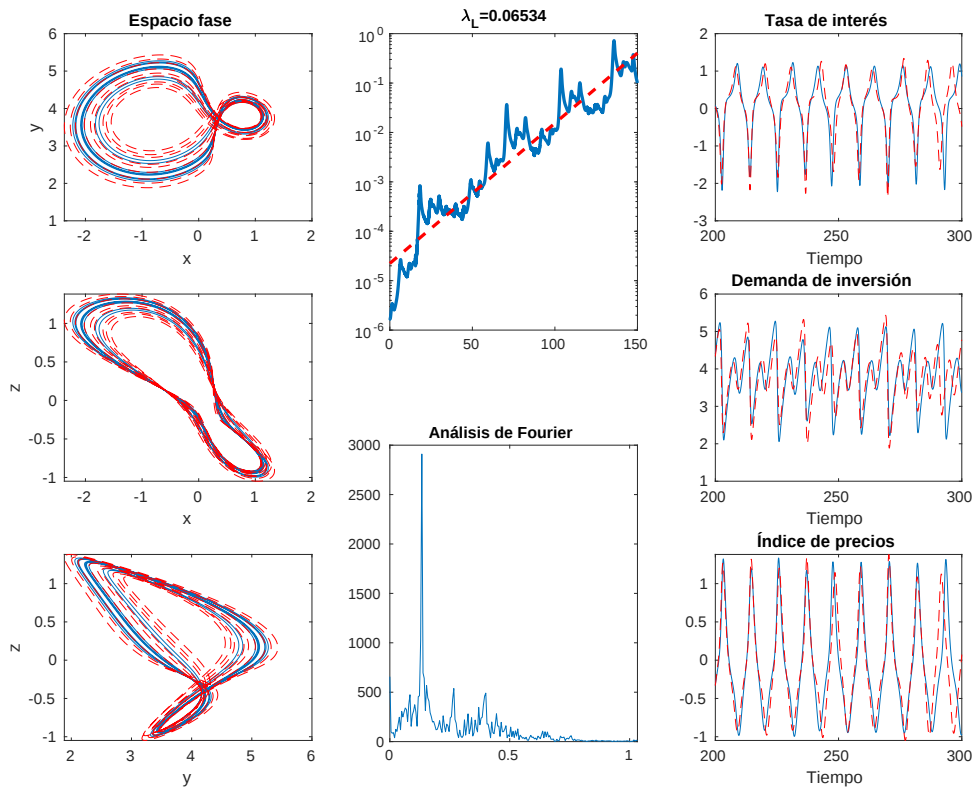

 (a) $K = -0.098$

 (b) $K = -0.097$

 Figura 4.2.8: Resultados para $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K < 0$ (B).

(a) $K = -0.096$ (b) $K = -0.085$ Figura 4.2.9: Resultados para $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y distintos valores de $K < 0$ (C).

Para finalizar el análisis del comportamiento anti-cíclico del sistema financiero con un retardo, fijando $\tau_1 = 1.85$ y variando el peso $K < 0$, se procedió a tomar el peso $K = -0.085$, valor para el cual, el sistema muestra un comportamiento caótico, pues como se puede observar en la Fig. 4.2.9b, se obtuvo dependencia sensible a las condiciones iniciales, un exponente de Lyapunov $\lambda_L > 0$, soluciones aperiódicas a largo plazo y un espectro con diversas frecuencias dominantes, condiciones que avalan la existencia de dinámicas caóticas. Además, la Fig. 4.2.10 muestra el atractor extraño que se obtiene al elegir la selección de parámetros $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y $K = -0.085$.

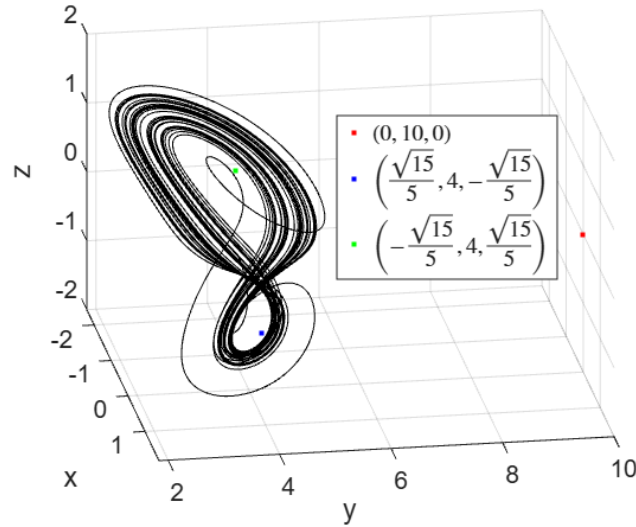


Figura 4.2.10: Atractor extraño en la dinámica anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y $K = -0.085$.

Modelo	Parámetro fijo	Parámetro variado	Dinámica obtenida	Análisis
$\dot{x} = x + (y - a)x + u(t)$ $\dot{y} = 1 - by - x^2$ $\dot{z} = -x(t - \tau_2) - cz$ $u(t) = K[x - x(t - \tau_1)]$	$\tau_1 = 1.85$ $\tau_2 = 0$	$K = -0.109$	Periodo-1	Transición hacia el caos
		$K = -0.105$	Periodo-2	
		$K = -0.098$	Periodo-2	
		$K = -0.097$	Periodo-4	
		$K = -0.96$	Periodo-4	
		$K = -0.085$	Caos	

Tabla 4.4: Acción anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con un retardo, variando $K < 0$.

4.3. Acción cíclica y anti-cíclica del modelo financiero con dos retardos

En esta segunda parte del análisis se considera el modelo financiero 3.1, pero ahora incorporando en segundo retardo temporal, τ_2 , en la dinámica del sistema. A diferencia de lo realizado en las secciones 4.1 y 4.2, donde únicamente se analizó la influencia de un solo retardo τ_1 en las dinámicas cíclicas y anti-cíclicas del modelo financiero, en esta sección se estudia la interacción simultánea de τ_1 y τ_2 sobre el comportamiento del ciclo económico.

De igual manera, en esta sección abordaremos dos escenarios importantes:

- La dinámica cíclica del modelo financiero 3.1, cuando se fija el retardo τ_1 y el peso $K > 0$, analizando el efecto de la variación del retardo τ_2 .
- La dinámica anti-cíclica del modelo financiero 3.1, cuando se fija el retardo τ_1 y el peso $K < 0$, analizando el efecto de la variación del retardo τ_2 .

4.3.1. Variación de τ_2 , con τ_1 y $K > 0$ fijos

Como se pudo observar en la sección 4.1.2, bajo las configuraciones $\tau_1 = 6.40$, $K = 0.35$ y $\tau_2 = 0$, el modelo financiero 3.1 exhibe un comportamiento estable, mostrando una dinámica de periodo no conmensurable (véase Fig. 4.1.8a). A continuación se estudia cómo cambia la dinámica del modelo financiero al introducir y variar un segundo retardo, τ_2 , manteniendo fijos los parámetros $\tau_1 = 6.40$ y $K = 0.35$.

De igual manera, para este caso se realizó el diagrama de bifurcación en la sección de Poincaré $z = 0$, utilizando los parámetros previamente establecidos $\tau_1 = 6.40$ y $K = 0.35$. En dicho diagrama es posible observar los cambios en la dinámica del modelo al variar τ_2 , en el intervalo $[0.9, 1.3]$. Para esta caso particular, se puede observar en la Fig. 4.3.1 que para cambios muy pequeños para este segundo retardo, se obtienen diversos cambios abruptos en la dinámica y los cuales están visibles en la Figs. 4.3.2, 4.3.4 y 4.3.6.

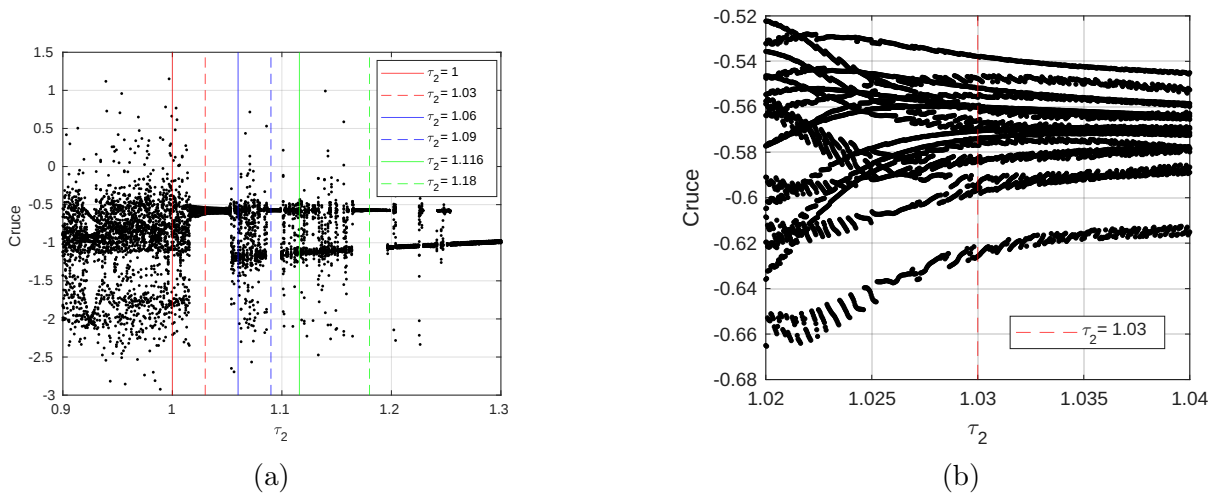
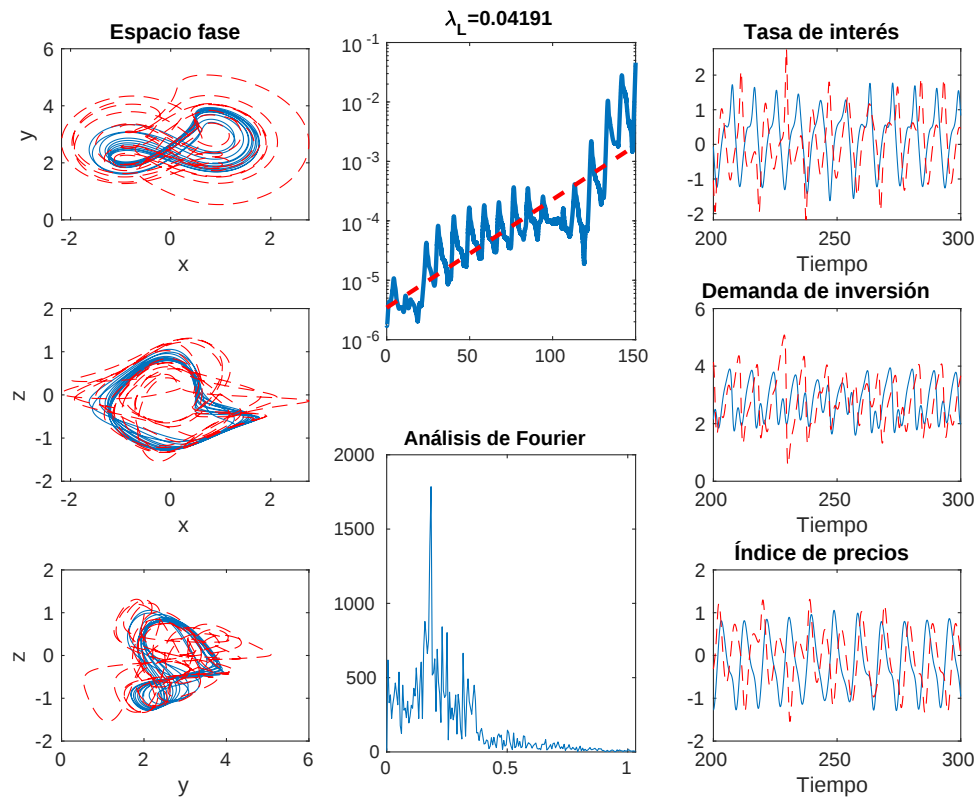
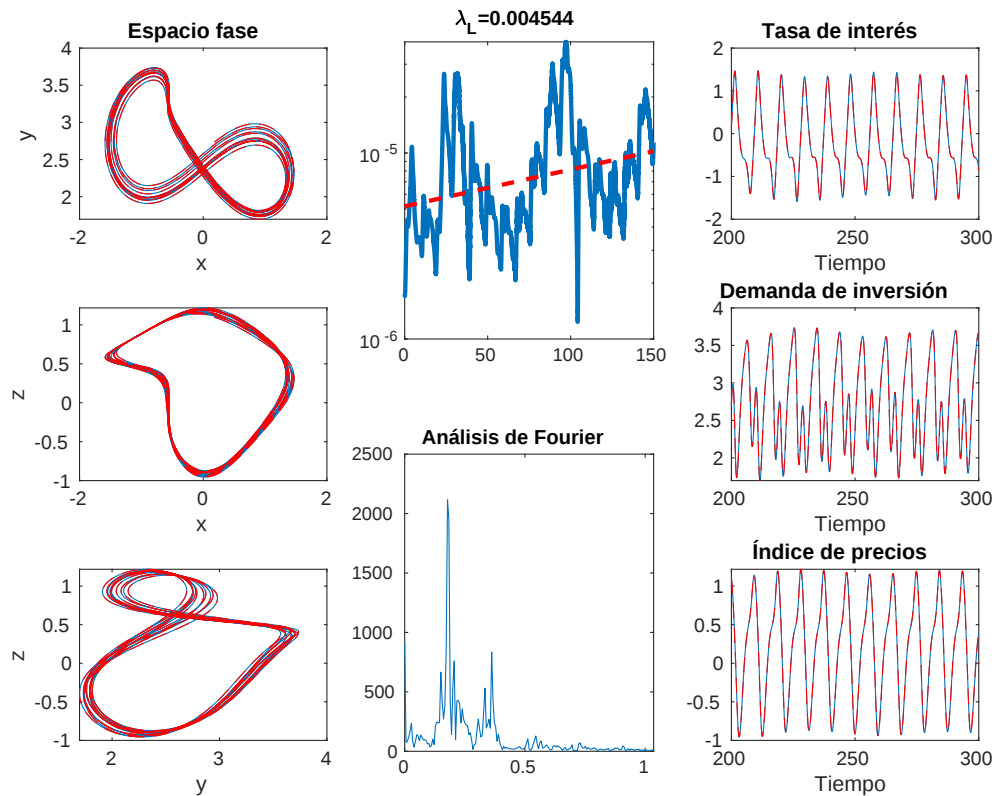


Figura 4.3.1: Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 6.40$ y $K = 0.35$ en la sección de Poincaré $z = 0$.

(a) $\tau_2 = 1.00$ (b) $\tau_2 = 1.03$ Figura 4.3.2: Resultados para $K = 0.35$, $\tau_1 = 6.40$ y distintos valores de τ_2 (A).

Para $\tau_2 = 1.00$ se puede observar en la Fig. 4.3.2a, que existe una dependencia sensible a las condiciones iniciales. Además, el gráfico del exponente de Lyapunov muestra cómo dos trayectorias cercanas se separan exponencialmente, con $\lambda_L = 0.041917$ conforme el tiempo va evolucionando. Asimismo, en la evolución temporal de las variables económicas se distinguen soluciones distintas y aperiódicas, resultado que se ve respaldado con el análisis de Fourier, donde en el espectro se aprecia una mayor riqueza en frecuencias dominantes del sistema. Para la selección de parámetros $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 1.00$ y $K = 0.35$, el modelo 3.1 presenta un comportamiento caótico. Además, la Fig. 4.3.3 muestra el atractor extraño que se obtiene al elegir esta selección de parámetros.

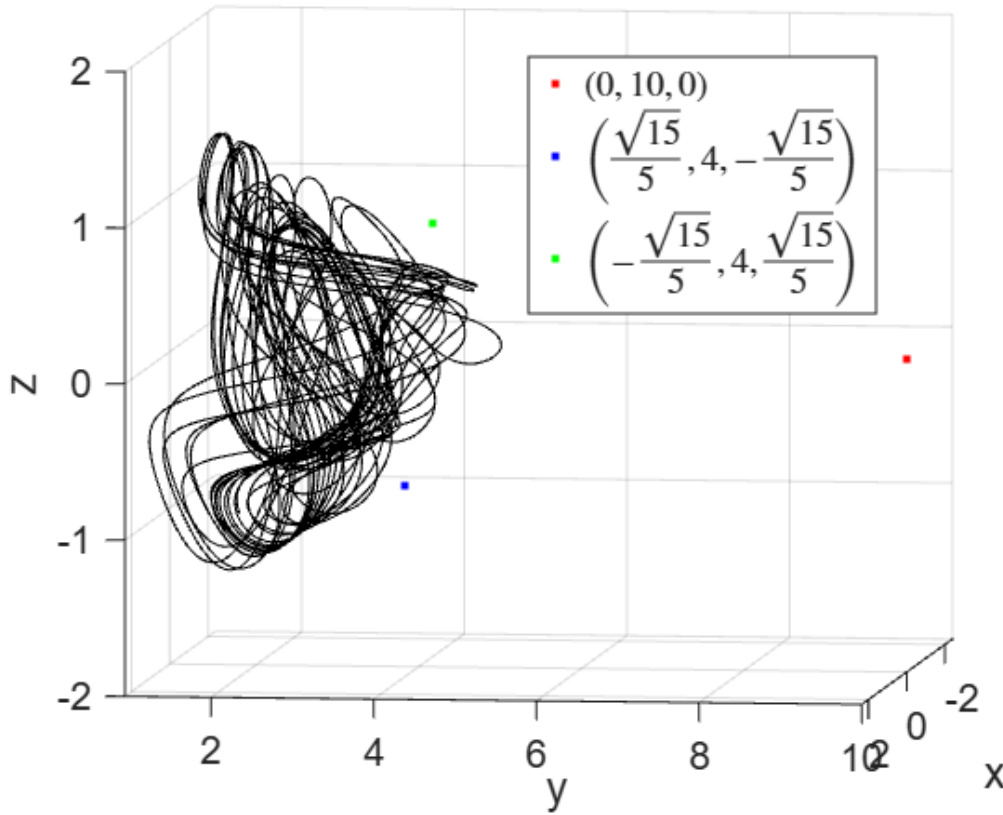
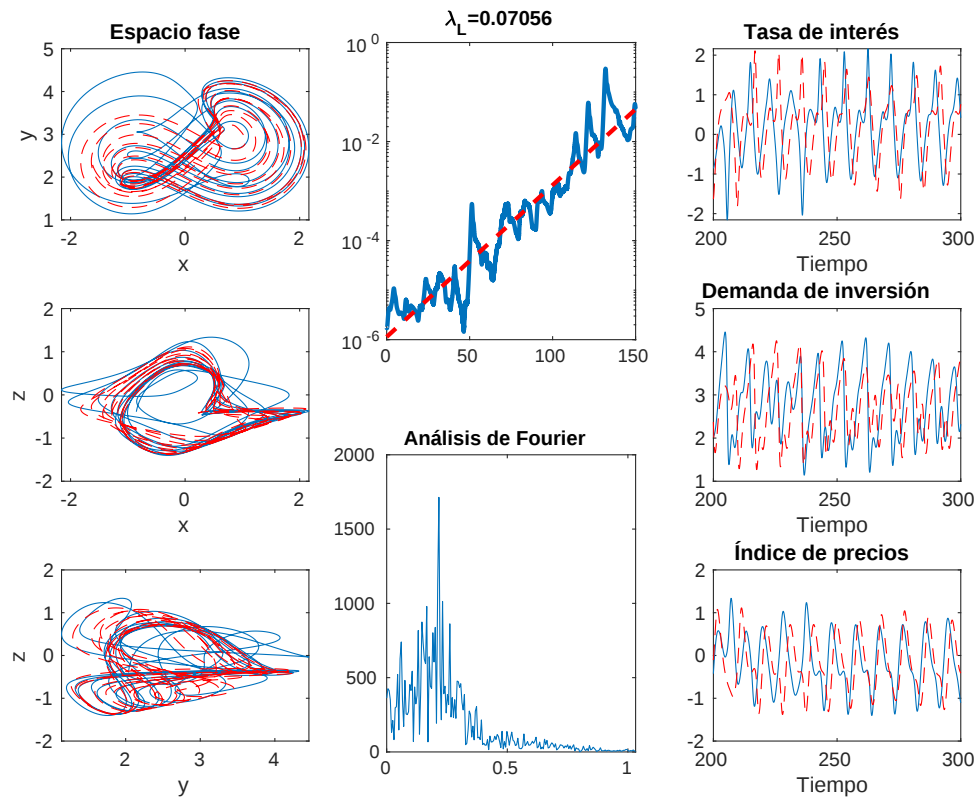
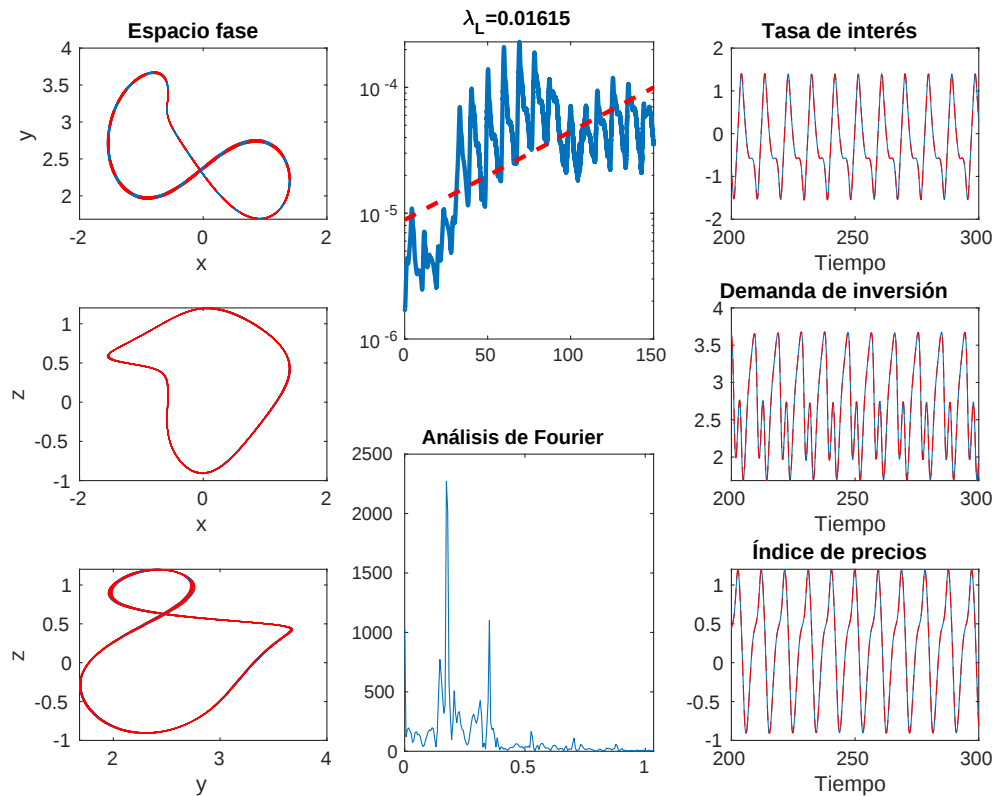


Figura 4.3.3: Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $K = 0.35$ y $\tau_2 = 1.00$.

Mientras tanto, el diagrama de Poincaré 4.3.1b, ilustra la evolución de periodos no conmensurables que experimenta la dinámica del sistema financiero al momento de variar el retardo τ_2 en el intervalo $[1.02, 1.04]$. En la Fig 4.3.2b, se evidencia esta dinámica de periodo no conmensurable. Cabe señalar, que no es posible determinar con precisión el valor exacto del periodo para esta trayectoria. Sin embargo, el análisis de Fourier realizado para $\tau_2 = 1.03$ revela un espectro con una notable presencia de múltiples frecuencias dominantes, esta multiplicidad de picos significativos en él, es indicio de dinámicas complejas.

(a) $\tau_2 = 1.06$ (b) $\tau_2 = 1.09$ Figura 4.3.4: Resultados para $K = 0.35$, $\tau_1 = 6.40$ y distintos valores de τ_2 (B).

Observe que para valores de τ_2 en el intervalo $(1.05, 1.08)$, el sistema nuevamente muestra comportamientos caóticos, pues como se puede observar en la Fig. 4.3.4a, se obtuvo dependencia sensible a las condiciones iniciales, un exponente de Lyapunov $\lambda_L > 0$, soluciones aperiódicas a largo plazo y un espectro con diversas señales dominantes, condiciones bajo las cuales se asegura la existencia de dinámicas caóticas. Además, la Fig. 4.3.5 muestra el atractor extraño que se obtiene al elegir esta selección de parámetros.

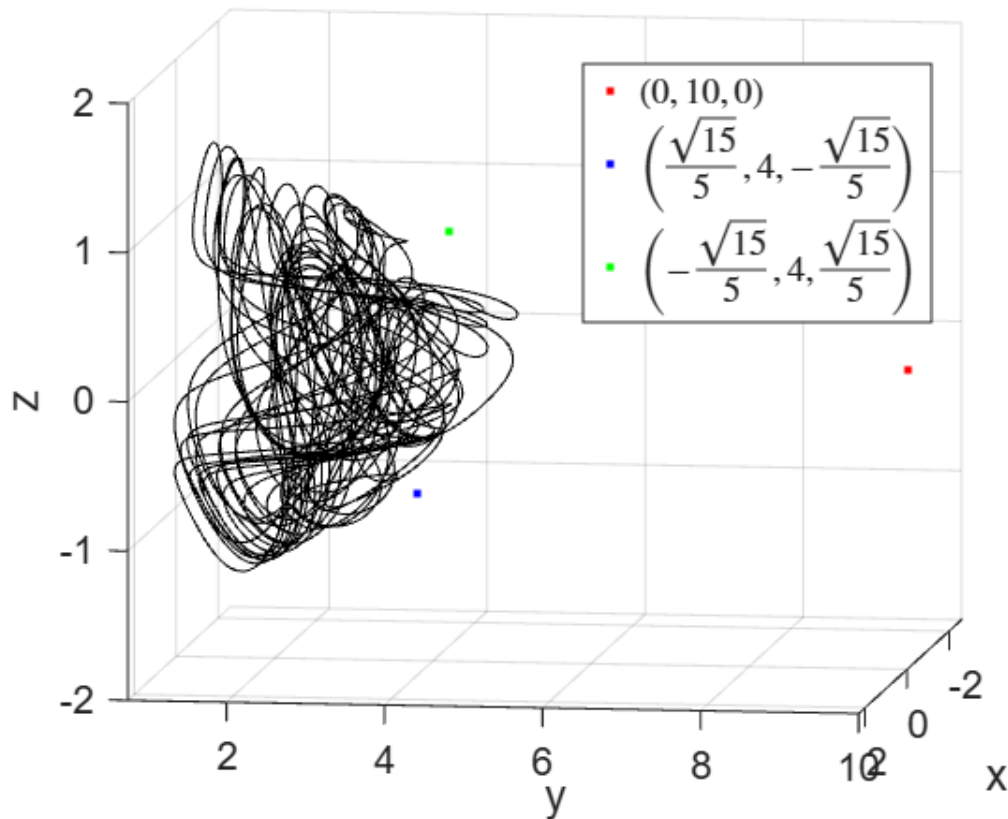
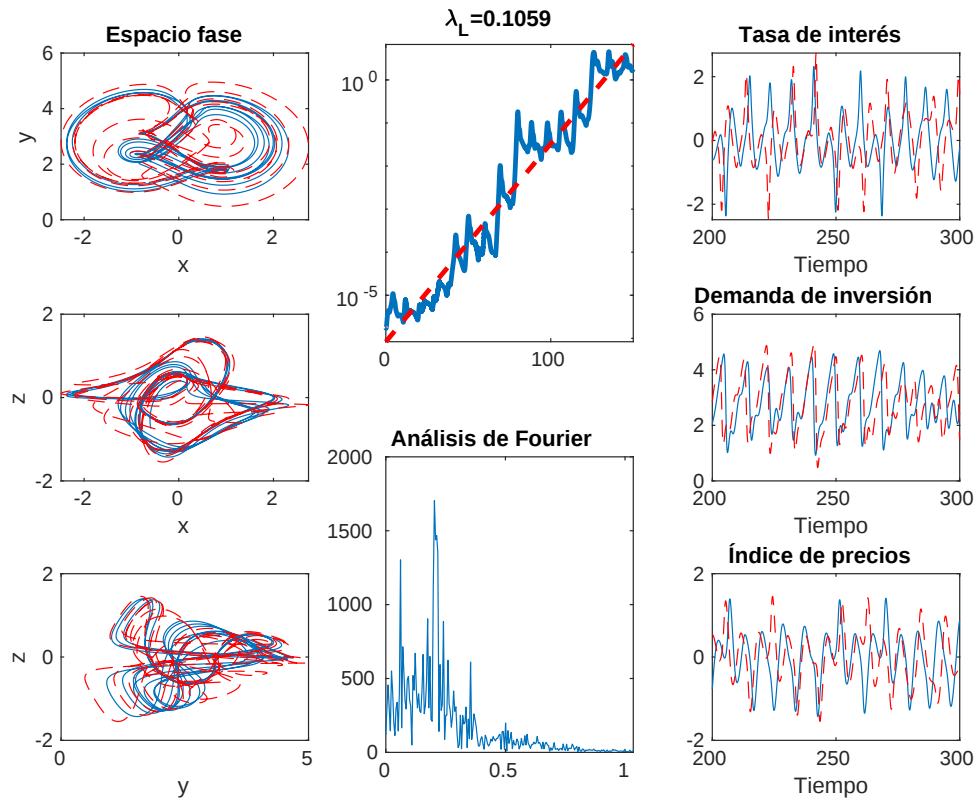
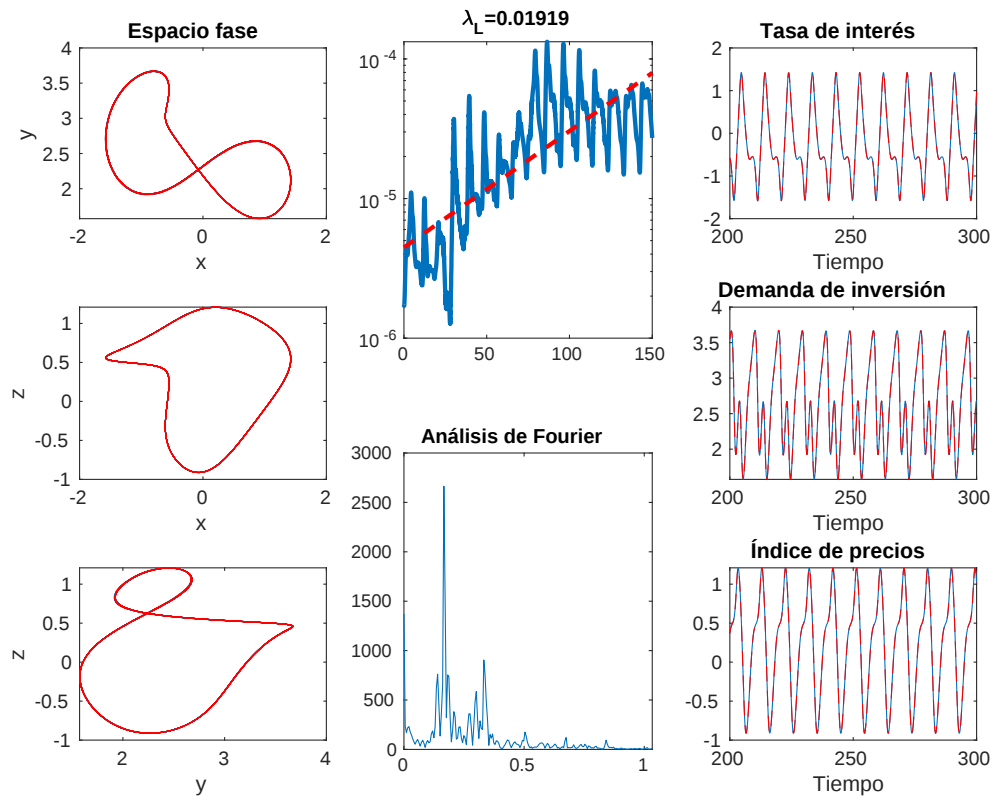


Figura 4.3.5: Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $K = 0.35$ y $\tau_2 = 1.06$.

En cambio, para τ_1 en el intervalo $1.08 \leq \tau_1 \leq 1.10$, la dinámica del sistema nuevamente entra en un estado estable. Sin embargo, en este caso, las trayectorias obtenidas corresponden a dinámicas de periodo-1. Observe que en el espacio fase de la Fig. 4.3.4b, se aprecia una trayectoria cerrada que completa todo el recorrido en un solo periodo. Además, las soluciones correspondientes a la solución original y la obtenida al momento de perturbar la condición inicial presentan comportamientos prácticamente idénticos.

(a) $\tau_2 = 1.116$ (b) $\tau_2 = 1.18$ Figura 4.3.6: Resultados para $K = 0.35$, $\tau_1 = 6.40$ y distintos valores de τ_2 (C).

Cabe resaltar que para los próximos intervalos de estudio, cuando τ_2 toma valares entre $[1.1, 1.15]$ y $[1.15, 1.2]$ pasa exactamente lo mismo, para el primer intervalo el sistema entra a un régimen caótico, mientras que para el segundo nuevamente el sistema se estabiliza con dinámicas de periodo-1. Este suceso esta visible en las Figs. 4.3.6a y 4.3.6b.

Además, la Fig. 4.3.7 muestra el atractor extraño que se obtiene al elegir la selección de parámetros, $\tau_1 = 6.40$, $K = -0.085$ y $\tau_2 = 1.116$.

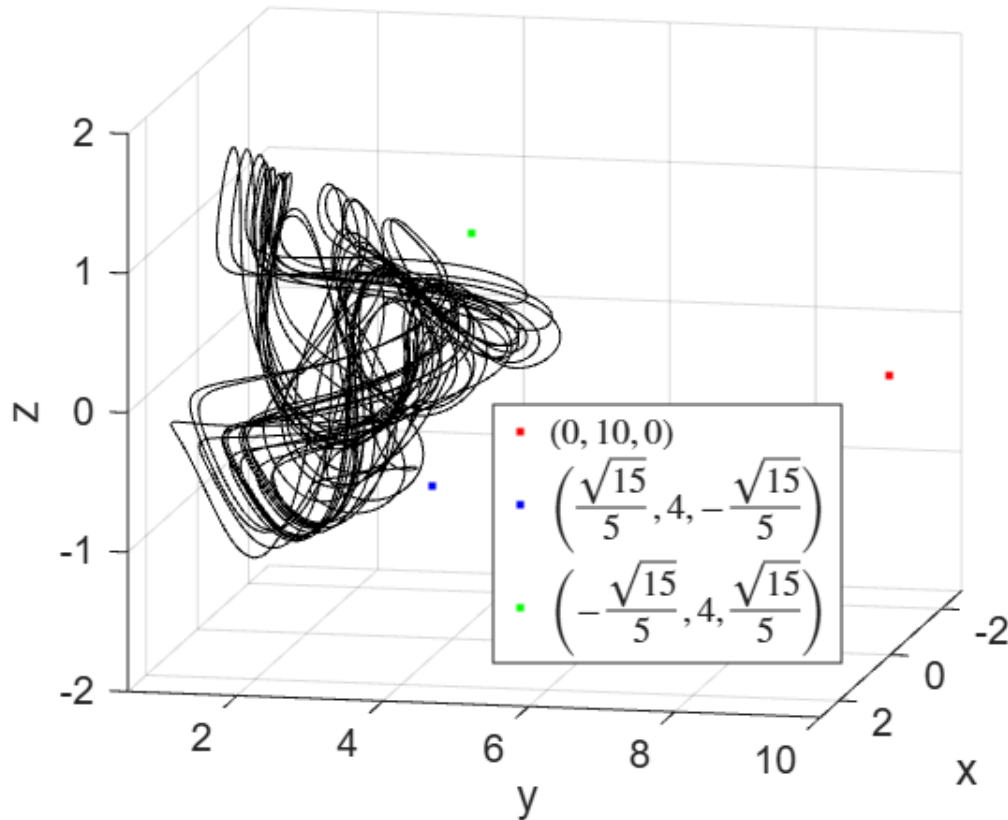


Figura 4.3.7: Atractor extraño en la dinámica cíclica del modelo financiero 3.1 con $\tau_1 = 6.40$, $K = 0.35$ y $\tau_2 = 1.116$.

Es importante destacar que la dinámica observada, en la cual el sistema transita de forma recurrente entre regímenes caóticos y estables, se conoce en la literatura como intermitencia de caos [5]. En esta sección se logra visualizar cómo pequeños cambios en el valor del retardo τ_2 provocan que el sistema alterne constantemente entre comportamientos ordenados y caóticos (véase tabla 4.5).

Modelo	Parámetros fijos	Parámetro variado	Dinámica obtenida	Análisis
$\dot{x} = x + (y - a)x + u(t)$ $\dot{y} = 1 - by - x^2$ $\dot{z} = -x(t - \tau_2) - cz$ $u(t) = K[x - x(t - \tau_1)]$	$\tau_1 = 6.40$ $K = 0.35$	$\tau_2 = 1.00$	Caos	Intermitencia del caos
		$\tau_2 = 1.03$	Periodo no conmensurable	
		$\tau_2 = 1.06$	Caos	
		$\tau_2 = 1.09$	Periodo-1	
		$\tau_2 = 1.116$	Caos	
		$\tau_2 = 1.18$	Periodo-1	

Tabla 4.5: Acción cíclica del modelo financiero 3.1 con dos retardos, variando τ_2 .

4.3.2. Variación de τ_2 , con τ_1 y $K < 0$ fijos

Como se pudo observar en la sección 4.2.2, bajo los parámetros $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0$ y $K = -0.098$, el modelo se encuentra en un régimen estable evidenciando una dinámica de periodo-2 para esta selección de parámetros (véase Fig. 4.2.8a). Lo que ahora se intenta explorar es la existencia de cambios cualitativos en la dinámica del modelo financiero al fijar los parámetros $\tau_1 = 1.85$, $K = -0.098$ y al variar el retardo τ_2 .

Para analizar la acción anti-cíclica que sufre el modelo financiero 3.1 al incorporarle un segundo retardo, τ_2 , se procedió a realizar y discutir el diagrama de bifurcación en la sección de Poincaré $z = 0$ para $\tau_2 \in [0.5, 0.7]$ y el cual esta visible en la Fig. 4.3.8, en donde se pueden apreciar dos dinámicas significativas; intermitencia para valores de $0.53 \leq \tau_2 \leq 0.59$ y una transición inversa para valores de $\tau_2 > 0.59$. Este diagrama evidencia que inicialmente la dinámica se alternará constantemente entre comportamientos estables y caóticos para después entrar a un régimen estable que sufrirá dinámicas de periodo-2 y periodo-1. Este fenómeno es visible en la Figs. 4.3.9, 4.3.10 y 4.3.12.

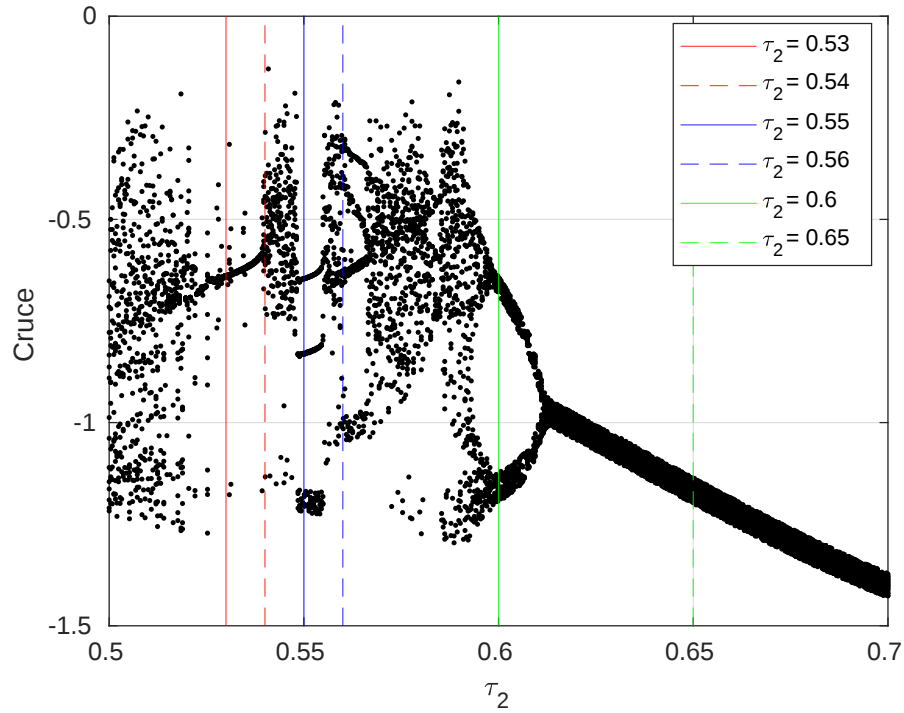
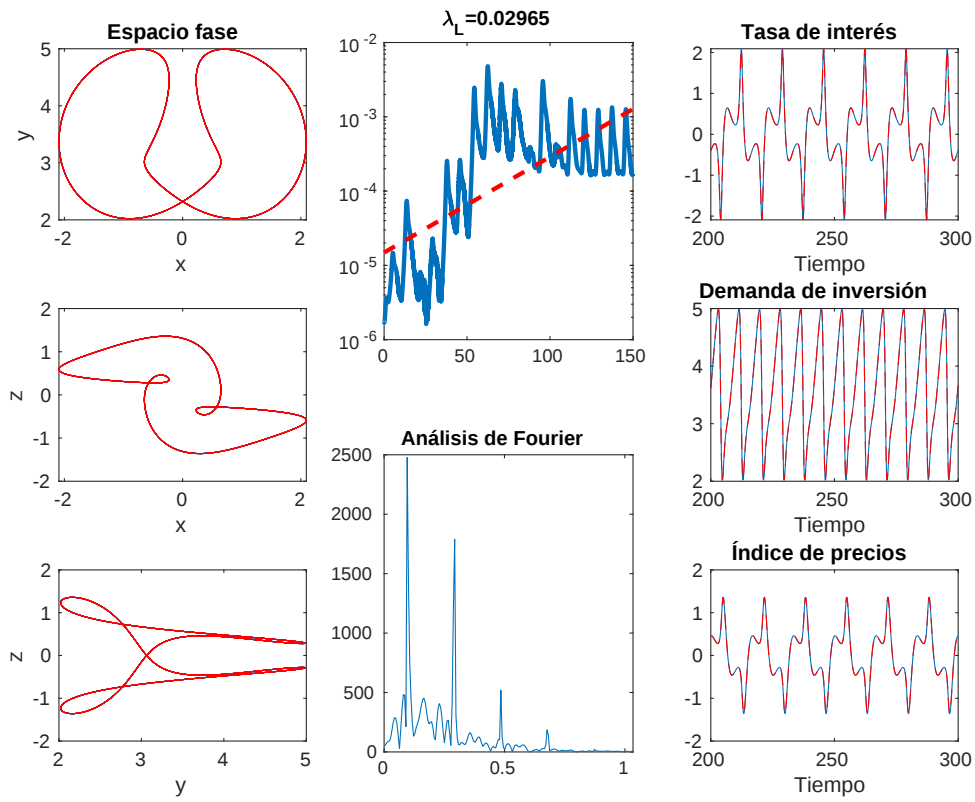
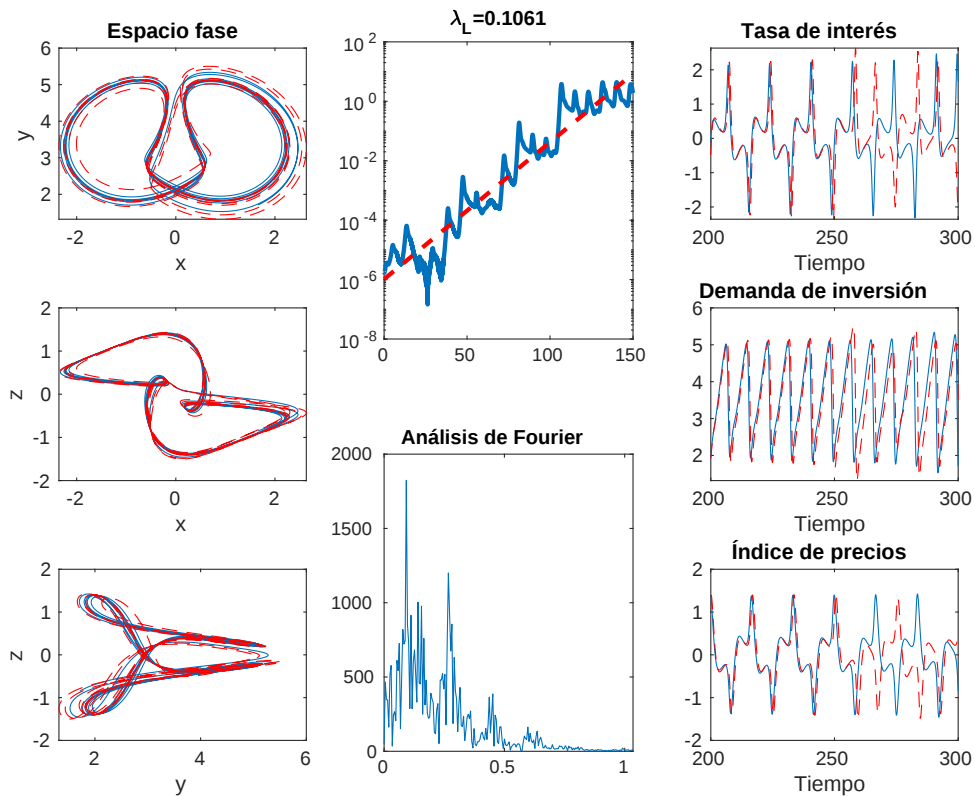
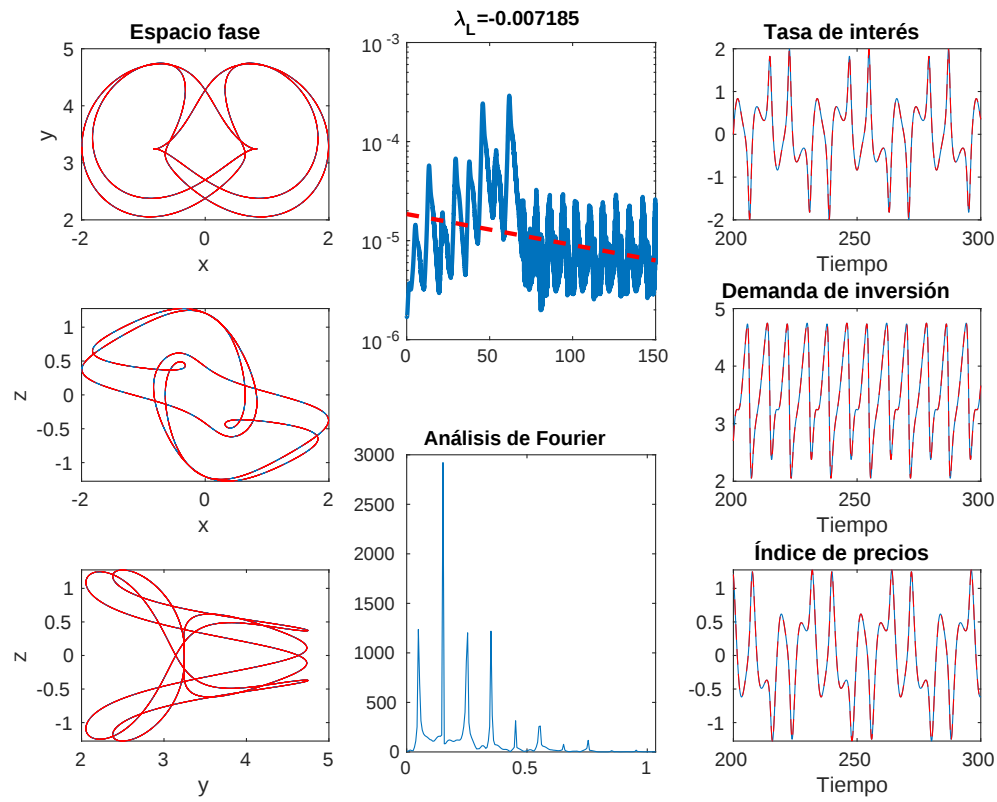
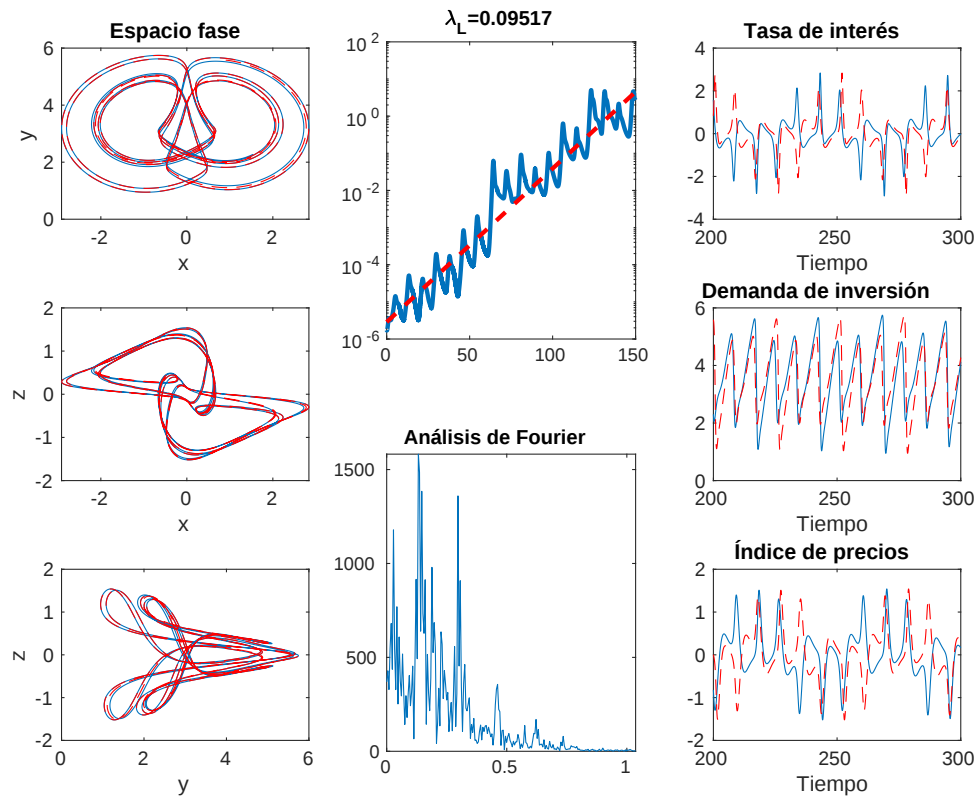


Figura 4.3.8: Diagrama de bifurcación para $\tau_1 = 1.85$ y $K = -0.098$ en la sección de Poincaré $z = 0$.

Observe que las Figs. 4.3.9 y 4.3.10, muestran cómo la dinámica alterna entre comportamientos ordenados y caóticos.

(a) $\tau_2 = 0.53$ (b) $\tau_2 = 0.54$ Figura 4.3.9: Resultados para $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y variación τ_2 (A).

(a) $\tau_2 = 0.55$ (b) $\tau_2 = 0.56$ Figura 4.3.10: Resultados para $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y variación τ_2 (B).

El espacio fase de la Fig. 4.3.9a muestra una trayectoria cerrada de periodo-1 y soluciones periódicas en la evolución temporal de las variables económicas. Mientras que el espacio fase de la Fig. 4.3.9b, muestra dependencia sensible a las condiciones iniciales, además se pueden observar soluciones aperiódicas a largo plazo, un exponente de Lyapunov $\lambda_L > 0$ y en espectro con diversas frecuencias dominantes, condiciones suficientes para detectar caos en sistemas dinámicos. Además, la Fig. 4.3.11a evidencia la existencia de un atractor extraño para la selección de parámetros $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0.54$ y $K = -0.098$.

Posteriormente, cuando $\tau_2 = 0.55$ (véase Fig. 4.3.10a), el sistema nuevamente se estabiliza. Si bien el diagrama de bifurcación no muestra con exactitud la dinámica que sufre el modelo bajo estas configuraciones, el espacio fase de esta figura muestra una trayectoria que requiere de dos periodos para llegar a su estado inicial. Además, en este caso particular, se obtuvo un exponente de Lyapunov $\lambda_L < 0$, lo cual nos indica la ausencia de dependencia sensible a la condición inicial. El resultado se ve reflejado tanto en el espacio fase como en las soluciones temporales de las variables económicas, ya que la dinámica correspondiente a la solución original y la obtenida al momento de perturbar la condición inicial presentan comportamientos prácticamente idénticos. Sin embargo, observe que para $\tau_2 = 0.56$, el sistema nuevamente entra a un régimen caótico (véase Fig. 4.3.10b), además, la Fig. 4.3.11b evidencia la existencia de un atractor extraño para la selección de parámetros $\tau_1 = 1.85$, $\tau_2 = 0.56$ y $K = -0.098$.

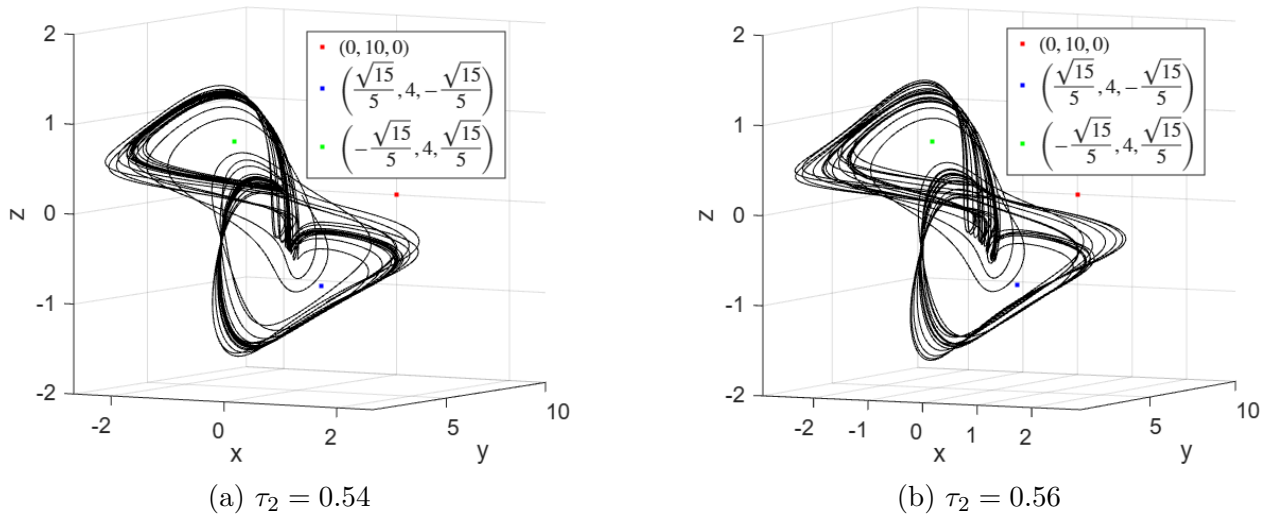
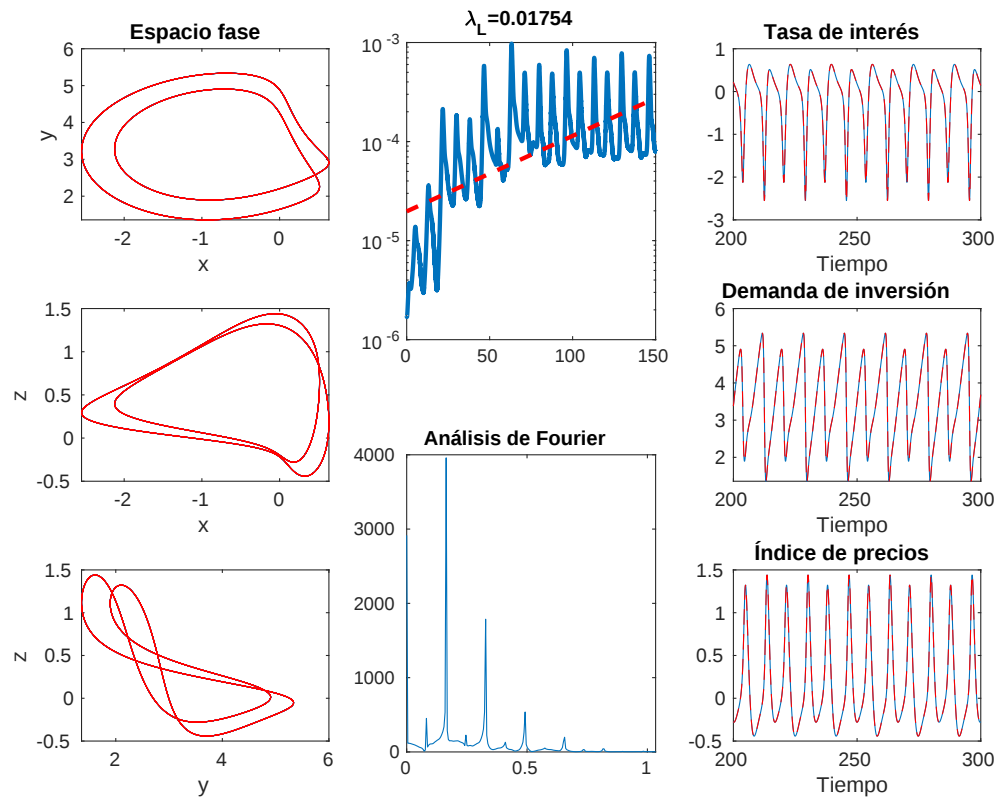
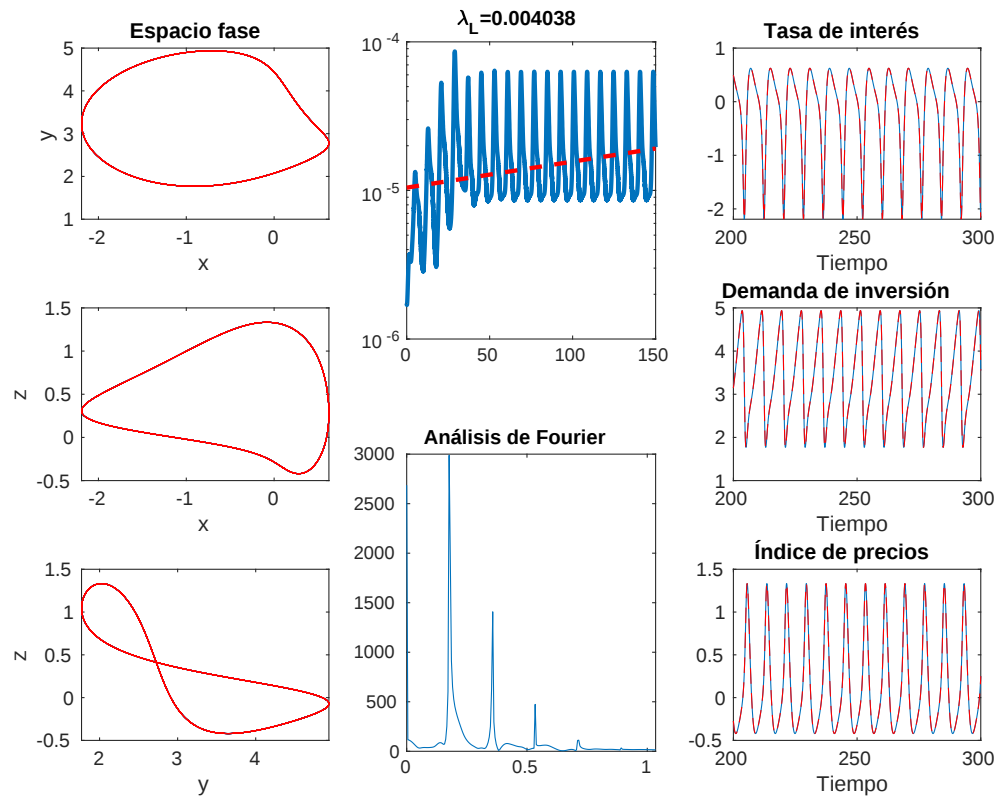


Figura 4.3.11: Atractores extraños en la dinámica anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y distintos valores de τ_2 .

(a) $\tau_2 = 0.60$ (b) $\tau_2 = 0.65$ Figura 4.3.12: Resultados para $K = -0.098$, $\tau_1 = 1.85$ y variación τ_2 (C).

En las Figs. 4.3.12a y 4.3.12b, se puede visualizar la transición inversa que sufre el modelo al pasar por regímenes estables de dinámicas de periodo-2 y periodo-1, cuando $\tau_2 = 0.60$ y $\tau_2 = 0.65$, correspondientemente.

Finalmente, el análisis del cambio cualitativo en el modelo financiero con dos retardos, puede visualizarse de forma detallada en tabla 4.6.

Modelo	Parámetros fijos	Parámetro variado	Dinámica obtenida	Análisis
$\dot{x} = x + (y - a)x + u(t)$ $\dot{y} = 1 - by - x^2$ $\dot{z} = -x(t - \tau_2) - cz$ $u(t) = K[x - x(t - \tau_1)]$	$\tau_1 = 1.85$ $K = -0.098$	$\tau_2 = 0.53$	Periodo-1	Intermitencia del caos
		$\tau_2 = 0.54$	Caos	
		$\tau_2 = 0.55$	Periodo-2	
		$\tau_2 = 0.56$	Caos	
		$\tau_2 = 0.60$	Periodo-2	Transición inversa
		$\tau_2 = 0.65$	Periodo-1	

Tabla 4.6: Acción anti-cíclica del modelo financiero 3.1 con dos retardos, variando τ_2 .

4.4. Discusión e interpretación

Los resultados obtenidos del modelo financiero con retardos muestran una diversidad de comportamientos dinámicos, desde ciclos periódicos, caos e intermitencia, los cuales tienen implicaciones importantes en la economía. Cuando se observa una dinámica de período-1, el sistema alcanza un ciclo estable, indicando que la variable financiera estudiada se repite de manera regular, lo que sugiere un entorno predecible, por ejemplo, para la toma de decisiones de inversión o política económica. Una dinámica de período-2 o periodo-4, representa ciclos más complejos pero todavía regulares, lo que puede reflejar fluctuaciones económicas recurrentes, como expansiones y contracciones en la actividad económica.

Por otro lado, el caos y los períodos inconmensurables evidencian sensibilidad extrema a pequeñas variaciones en la toma de decisiones. En términos económicos, esto se traduce en que retrasos incluso mínimos en la implementación de políticas financieras o decisiones de inversión pueden generar resultados impredecibles y no repetitivos, reflejando fenómenos como burbujas especulativas, crisis de liquidez o movimientos abruptos. Por otro lado, la intermitencia del caos, donde el sistema alterna entre estabilidad y comportamiento caótico, resalta que aunque en ciertos intervalos se pueda prever la evolución de las variables, siempre existe la posibilidad de escenarios inesperados que afectan de manera significativa la economía.

Estos resultados subrayan la relevancia de los retardos en la toma de decisiones financieras y en la política económica. Retardos grandes o pequeños en la información disponible y en la ejecución de decisiones pueden amplificar o disminuir las acciones cíclicas y anti-cíclicas ante la toma de decisiones, afectando directamente los ciclos económicos observados. En la práctica, esto se traduce en que decisiones sobre tasas de interés, gasto público o regulación de mercados, si no se implementan oportunamente, pueden provocar fluctuaciones abruptas, burbujas financieras o caídas repentinas de precios.

Desde un punto de vista matemático, analizar estas transiciones hacia el caos es crucial para comprender los límites de predictibilidad del sistema. Herramientas como los exponentes

de Lyapunov o los análisis de atractores extraños permiten cuantificar la sensibilidad a condiciones iniciales y los retardos, mostrando cómo pequeñas diferencias pueden tener efectos desproporcionados en la economía. Esta perspectiva es esencial para evaluar riesgos sistémicos y diseñar políticas financieras que minimicen la posibilidad de inestabilidad económica inducida por retrasos en la toma de decisiones.

En conclusión, la combinación de ciclos periódicos, caos e intermitencia en este modelo financiero resalta la importancia de la temporalidad en las decisiones económicas y la necesidad de herramientas matemáticas para anticipar posibles escenarios de alta volatilidad, contribuyendo a una interpretación más profunda y práctica de los resultados del modelo.

En la exploración realizada se observó que variar el retardo temporal en la retroalimentación $u(t) = K(x(t) - x(t - \tau_1))$ modifica de manera significativa la dinámica del sistema, lo que evidencia que este parámetro, aunque no altera el punto de equilibrio, tiene un papel relevante en la evolución del modelo financiero. Además, el análisis mediante las secciones de Poincaré y los diagramas de bifurcación permitió visualizar los cambios cualitativos en las soluciones del modelo al variar los parámetros τ_1 , τ_2 y K , proporcionando una comprensión más clara de la complejidad dinámica del sistema. En complemento, el cálculo de los exponentes de Lyapunov confirmó la presencia o ausencia de dependencia de las condiciones iniciales del modelo, al analizar las variaciones infinitesimales entre las trayectorias del sistema. No obstante, se identificaron casos en los que un exponente de Lyapunov positivo no constituye una condición suficiente para validar la existencia de dinámicas caóticas, lo que evidencia la necesidad de complementar este análisis con otras herramientas, como el cálculo del diagrama de Fourier.

Asimismo, las simulaciones realizadas permitieron estudiar aspectos fundamentales como diagramas de bifurcación, secciones de Poincaré, espacios fase, exponentes de Lyapunov, espectros de Fourier y la evolución temporal de las variables económicas. Este conjunto de análisis no solo permitió caracterizar el comportamiento del modelo bajo diferentes configuraciones, sino también identificar transiciones dinámicas críticas al modificar los parámetros K , τ_1 y τ_2 . En este sentido, se identificó que la relación entre las variaciones de τ_1 , τ_2 y el peso K resulta esencial para comprender la evolución de las variables financieras a lo largo del tiempo.

Por otra parte, en la dinámica cíclica del modelo con un retardo se lograron identificar intervalos donde el sistema presenta cambios abruptos en su comportamiento, así como transiciones hacia el caos en periodos conmensurables e incommensurables. De manera similar, para la dinámica anti-cíclica con un solo retardo, se apreciaron transiciones inversas hacia el caos y doblamientos de periodo, partiendo de un comportamiento de periodo-1 hasta alcanzar periodo-4, lo que evidencia un amplio rango de comportamientos dinámicos.

Además, cuando se incorporaron dos retardos temporales en el modelo, se detectó un fenómeno particularmente relevante en la teoría del caos: la intermitencia. Este fenómeno mostró que pequeñas modificaciones en el parámetro τ_2 pueden inducir que el sistema alterne

recurrentemente entre regímenes estables y caóticos, subrayando la complejidad y sensibilidad del modelo.

Durante el estudio también se identificaron atractores extraños en diferentes configuraciones de parámetros, los cuales reflejan comportamientos caóticos persistentes caracterizados por trayectorias no repetitivas y estructuras geométricas complejas en el espacio fase, confirmando así la naturaleza altamente no lineal del sistema. Cabe destacar que, aunque el análisis inicial de estabilidad del modelo con un solo retardo sugería que los cambios dinámicos ocurrían únicamente para valores de $K < -3$, el uso de diagramas de Poincaré permitió identificar que existen otros rangos de K que también inducen cambios cualitativos en el comportamiento del modelo. Por otro lado, respecto al modelo con dos retardos, no se realizó un estudio teórico detallado de estabilidad debido a la complejidad matemática que esto implicaría; sin embargo, gracias a los diagramas de bifurcación, fue posible identificar regiones donde el modelo se estabiliza y aquellas donde transita hacia regímenes caóticos. Finalmente, se concluye que es posible controlar la dinámica de un sistema financiero mediante la selección adecuada de intensidades de retroalimentación y tiempos de retardos.

A partir del análisis y los resultados obtenidos, se abre un abanico de oportunidades para futuras investigaciones que podrían contribuir a una comprensión más profunda de la dinámica del modelo estudiado.

En primer lugar, sería deseable realizar un análisis teórico sobre la estabilidad del modelo financiero con dos retardos. Aunque en este trabajo se emplearon herramientas numéricas y diagramas de bifurcación para identificar los intervalos de estabilidad y de dinámica caótica, contar con condiciones analíticas permitiría establecer criterios más generales y contrastar los resultados obtenidos, como se hizo con el modelo de un solo retardo.

Futuras investigaciones también podrían explorar la dinámica financiera incorporando nuevas variables económicas y retardos adicionales, lo que permitiría analizar escenarios más realistas y sus implicaciones para la toma de decisiones financieras.

Adicionalmente, sería pertinente profundizar en el estudio de las transiciones hacia el caos, conocidas en la literatura como rutas hacia el caos, mediante un análisis más formal desde la teoría de bifurcaciones, con el fin de caracterizar con mayor rigor matemático la dinámica del modelo.

Finalmente, resultaría interesante validar el modelo propuesto utilizando datos reales provenientes de series temporales financieras, con el objetivo de aproximarse más a la realidad y comprender mejor los comportamientos impredecibles que se presentan en la vida financiera.

En conjunto, los objetivos de este trabajo se cumplieron satisfactoriamente, pues se logró caracterizar la complejidad dinámica del modelo financiero con retardos y se identificaron tanto los regímenes de estabilidad como los comportamientos caóticos, incluyendo la presencia de atractores extraños. Las contribuciones principales del estudio incluyen la visualización de cómo los retardos y la retroalimentación afectan la dinámica del sistema, la identificación de fenómenos relevantes como la intermitencia y la caracterización de transiciones hacia el caos, así como la propuesta de líneas futuras que fortalecen la base para análisis más profundos y

aplicaciones potenciales en el ámbito financiero.

- [1] Eliezer Braun. *Caos, fractales y cosas raras*. Colec. La ciencia para todos; 150, 2013.
- [2] Wei-Ching Chen. Dynamics and control of a financial system with time-delayed feedbacks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(4):1198–1207, 2008.
- [3] Abraham C-L Chian, Felix A Borotto, Erico L Rempel, and Colin Rogers. Attractor merging crisis in chaotic business cycles. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(3):869–875, 2005.
- [4] Sabino Pérez Córdoba. Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo. In *Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana*, pages 57–71. Sociedad Matemática Mexicana, CDMX, 2018.
- [5] Sergio Elaskar and Ezequiel del Río. Review of chaotic intermittency. *Symmetry*, 15(6):1195, 2023.
- [6] Angel Gabriel Estrella-González, GE García-Almeida, and Eric José Avila-Vales. Estabilidad local de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones. *Abstraction and Application Magazine*, 8, 2014.
- [7] N Gregory Gregory. *Principios de economía*. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., 2017.
- [8] Dario Ibarra-Zavala. *Microeconomía para México, teoría y aplicaciones*. Laboratorio de Análisis Económico y Social, A.C., 2011.
- [9] MA Jun-hai and CHEN Yu-shu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system (i). *Applied Mathematics and Mechanics*, 22(11):1240–1251, 2001.
- [10] Ma Jun-hai and Chen Yu-shu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system (ii). *Applied Mathematics and Mechanics*, 22(12):1375–1382, 2001.
- [11] Igor Klioutchnikov, Mariia Sigova, and Nikita Beizerov. Chaos theory in finance. *Procedia computer science*, 119:368–375, 2017.

- [12] Yuri A Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer, 1998.
- [13] Muthusamy Lakshmanan and Dharmapuri Vijayan Senthilkumar. *Dynamics of nonlinear time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [14] Mary Luz Mouronte López. *Caracterización y análisis de sistemas dinámicos no lineales mediante el estudio del mapa de frecuencias y espacio de fases*. PhD thesis, Agronomos, 2004.
- [15] Luisa Márquez Rentería. *Dinámica no lineal y las rutas al caos*, 2014.
- [16] Gerasimos G Rigatos. *State-Space approaches for modelling and control in financial engineering*, volume 10. Springer, 2017.
- [17] Isacc Schifter. *La ciencia del caos*. Colec. La ciencia para todos; 142, 2011.
- [18] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [19] Marek Szydlowski, Adam Krawiec, and Janusz Toboła. Nonlinear oscillations in business cycle model with time lags. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(3):505–517, 2001.
- [20] Zhen Wang, Xia Huang, and Guodong Shi. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3):1531–1539, 2011.